ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ ΣΕ ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΜΟΡΦΗ

Θα αναφέρουμε την περιγραφή ορισμένων γεωμετρικών τόπων του μιγαδικού επιπέδου (τους οποίους συναντούμε συνήθως στην πράξη) με τη βοήθεια της εκθετικής μορφής μιγαδικών αριθμών.

i) Κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων

Έστω $r > 0$. Τότε ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών

$$\boxed{z = re^{i\theta},\ \theta \in \mathbb{R}}$$

είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα r (άμεσο αφού τότε $|z| = r$). Στην πραγματικότητα αρκεί $\theta \in [\alpha, b)$ ή $\theta \in (\alpha, b]$ με $b - \alpha = 2\pi$.

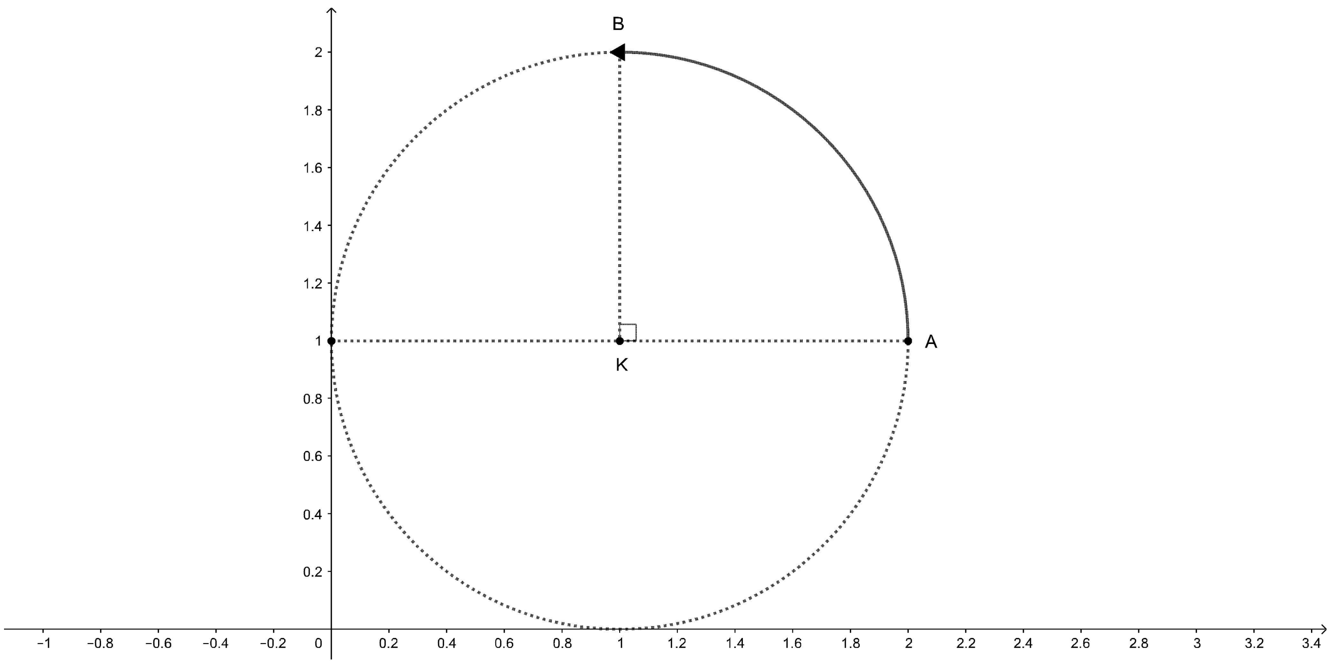
ii) Κύκλος με κέντρο την εικόνα του μιγαδικού z_0

Έστω $r > 0$ και $z_0 \in \mathbb{C}$. Τότε ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών

$$\boxed{z = z_0 + re^{i\theta},\ \theta \in \mathbb{R}}$$

είναι κύκλος με κέντρο την εικόνα του μιγαδικού z_0 και ακτίνα r (άμεσο αφού τότε $|z - z_0| = r$). Στην πραγματικότητα αρκεί $\theta \in [\alpha, b)$ ή $\theta \in (\alpha, b]$ με $b - \alpha = 2\pi$. Αυτός ο κύκλος είναι η μεταφορά του κύκλου $w = re^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$ κατά τη διανυσματική ακτίνα του z_0.

Παρατήρηση 1: Αν στους προηγούμενους γεωμετρικούς τόπους $\theta \in [\gamma, \delta]$ με $\delta - \gamma < 2\pi$, τότε παριστάνουν το τόξο του αντίστοιχου κύκλου που βρίσκεται μεταξύ των γωνιών γ, δ. Π.χ. οι εικόνες των μιγαδικών $z = (1+i) + e^{i\theta}$ με $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ είναι το τόξο του κύκλου (C) με κέντρο το σημείο $K(1,1)$ (δηλ. την εικόνα του $z_0 = 1 + i$) και ακτίνα 1 το οποίο διαγράφεται αν κινηθούμε πάνω στον (C) κατά τη θετική φορά από το σημείο $A(2,1)$ μέχρι το σημείο $B(1,2)$:



iii) Κυκλικός δακτύλιος με κέντρο την αρχή των αξόνων

Έστω $0 \le r_1 \le r_2$. Ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών

$$\boxed{z = re^{i\theta},\ \theta \in \mathbb{R},\ r_1 \le r \le r_2}$$

είναι ο κυκλικός δακτύλιος με κέντρο την αρχή των αξόνων που περιέχεται ανάμεσα στους κύκλους (O, r_1) και (O, r_2) - O είναι η αρχή των αξόνων. Στην πραγματικότητα αρκεί $\theta \in [\alpha, b)$ ή $\theta \in (\alpha, b]$ με $b - \alpha = 2\pi$. Αν $r_1 = r_2$, τότε έχουμε το γεωμετρικό τόπο i).

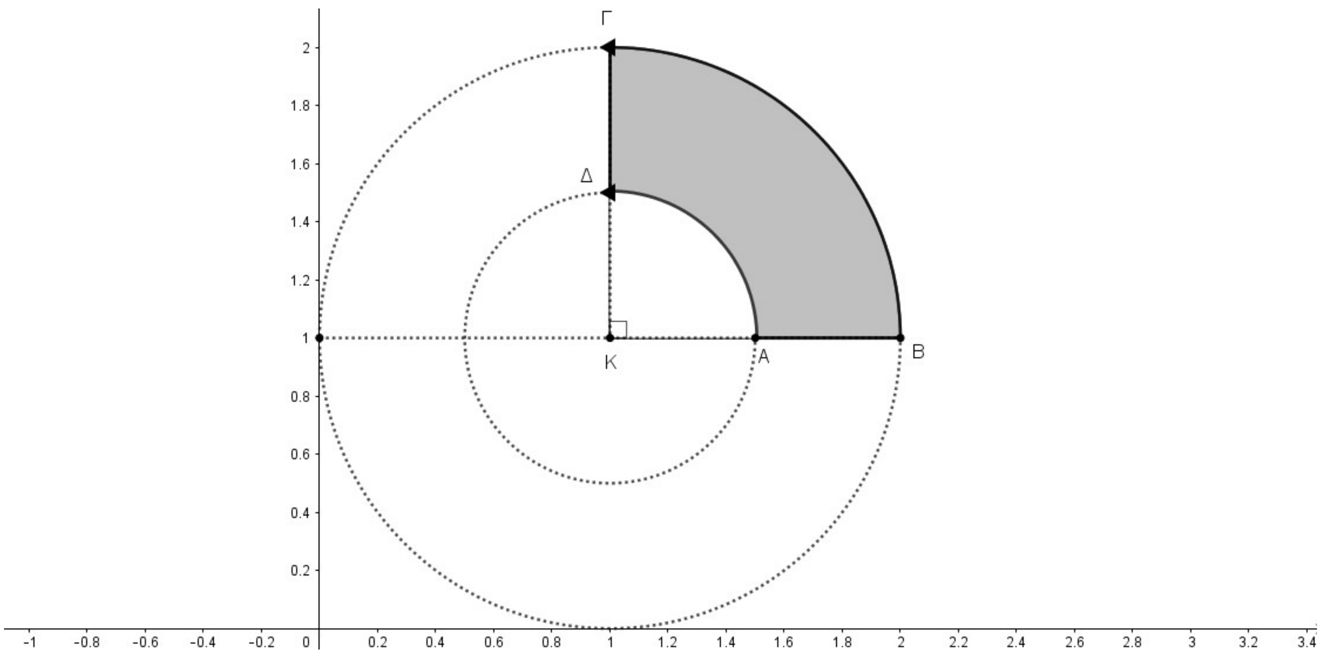
iv) Κυκλικός δακτύλιος με κέντρο την εικόνα του μιγαδικού z_0

Έστω $0 \le r_1 \le r_2$ και $z_0 \in \mathbb{C}$. Τότε ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών

$$\boxed{z = z_0 + re^{i\theta},\ \theta \in \mathbb{R},\ r_1 \le r \le r_2}$$

είναι ο κυκλικός δακτύλιος με κέντρο την εικόνα Μ του μιγαδικού z_0 ο οποίος περιέχεται ανάμεσα στους κύκλους (M, r_1) και (M, r_2). Στην πραγματικότητα αρκεί $\theta \in [\alpha, b)$ ή $\theta \in (\alpha, b]$ με $b - \alpha = 2\pi$. Αυτός ο κυκλικός δακτύλιος είναι η μεταφορά του κυκλικού δακτυλίου $w = re^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$ κατά τη διανυσματική ακτίνα του z_0. Αν $r_1 = r_2$, τότε έχουμε το γεωμετρικό τόπο ii).

Παρατήρηση 2: Αν στους προηγούμενους γεωμετρικούς τόπους $\theta \in [\gamma, \delta]$ με $\delta - \gamma < 2\pi$, τότε παριστάνουν τον "κυκλικό" τομέα του αντίστοιχου κυκλικού δακτυλίου που βρίσκεται μεταξύ των γωνιών γ, δ. Π.χ. οι εικόνες των μιγαδικών $z = (1+i) + re^{i\theta}$ με $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ και $\frac{1}{2} \le r \le 1$ είναι ο "κυκλικός" τομέας ΑΒΓΔ (σχηματίζεται από το ΑΒ κινούμενο κατά τη θετική φορά μέχρι να πέσει στο ΓΔ):



v) Ημιευθεία με αρχή την αρχή των αξόνων

Έστω $\theta \in \mathbb{R}$. Τότε ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών

$$\boxed{z = re^{i\theta},\ r \ge 0}$$

είναι ημιευθεία με αρχή την αρχή των αξόνων και γωνία $\varphi \in (-\pi, \pi]$ τέτοια ώστε $\theta - \varphi = 2\kappa\pi$ ($\kappa \in \mathbb{Z}$). Αυτό είναι άμεσο αφού όλοι οι μιγαδικοί της μορφής $z = re^{i\theta}$, $r \ge 0$ με θ σταθερό έχουν το ίδιο πρωτεύον όρισμα (το οποίο είναι φ).

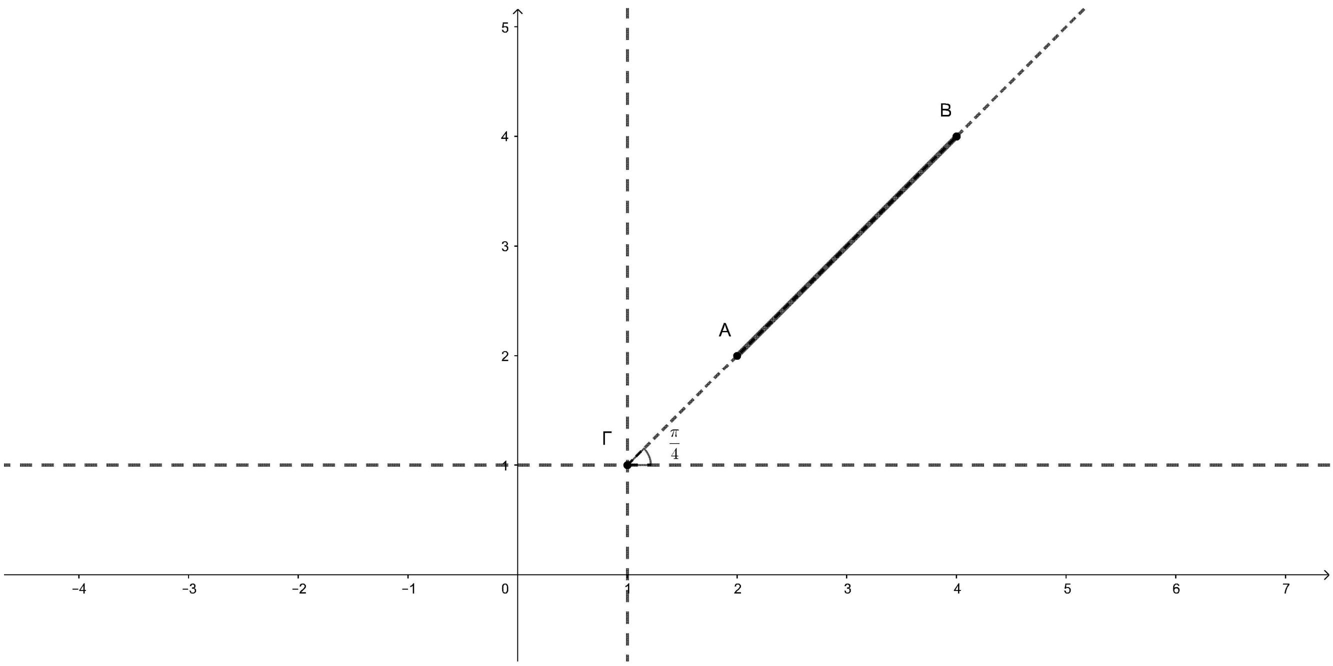
vi) Ημιευθεία με αρχή την εικόνα του μιγαδικού z_0

Έστω $\theta \in \mathbb{R}$ και $z_0 \in \mathbb{C}$. Τότε ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών

$$\boxed{z = z_o + re^{i\theta},\ r \ge 0}$$

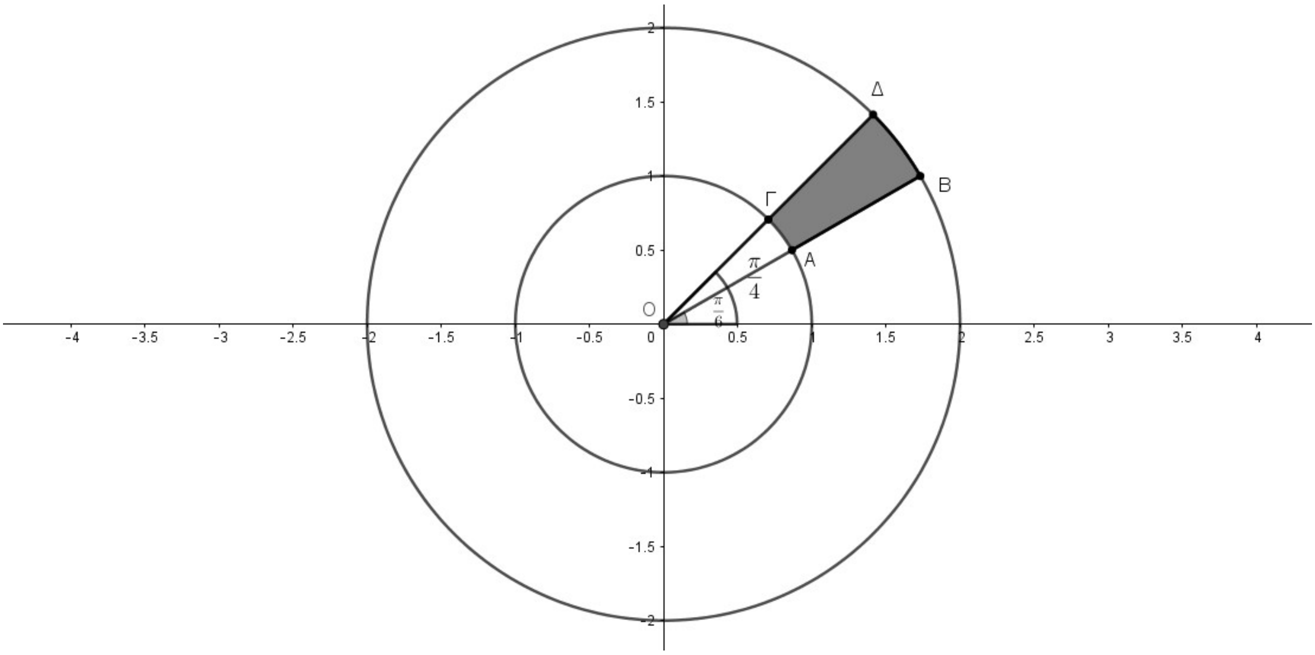
είναι ημιευθεία με αρχή την εικόνα του z_0 και γωνία $\varphi \in (-\pi, \pi]$ τέτοια ώστε $\varphi - \theta = 2\kappa\pi$ ($\kappa \in \mathbb{Z}$). Αυτή η ημιευθεία είναι η μεταφορά της ημιευθείας $w = re^{i\theta}$, $r \geq 0$ κατά τη διανυσματική ακτίνα του z_0.

<u>Παρατήρηση 3:</u> Αν στους προηγούμενους γεωμετρικούς τόπους έχουμε ότι $0 \leq r_1 \leq r \leq r_2$, τότε παριστάνουν το ευθύγραμμο τμήμα το οποίο έχει άκρα τις εικόνες των μιγαδικών $z_0 + r_1 e^{i\theta}$ και $z_0 + r_2 e^{i\theta}$ (είναι προφανώς τμήμα της ημιευθείας των γεωμετρικών τόπων i) – αν $z_0 = 0$ – ή ii)). Π.χ. οι εικόνες των μιγαδικών $z = (1+i) + re^{i\frac{\pi}{4}}$ με $\sqrt{2} \leq r \leq 3\sqrt{2}$ είναι το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα $A(2,2)$ και $B(4,4)$ (το $\Gamma(1,1)$ είναι η εικόνα του $z_0 = 1 + i$):



Παράδειγμα

Με χρήση της εκθετικής μορφής μιγαδικού αριθμού να περιγράψετε το <u>σύνορο</u> του γραμμοσκιασμένου χωρίου:



(δηλ. τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΓΔ και τα τόξα $\overset{\frown}{\mathrm{A\Gamma}}$, $\overset{\frown}{\mathrm{B\Delta}}$)

<u>Λύση:</u>

- Το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, σύμφωνα με την Παρατήρηση 3, είναι

$$z = re^{i\frac{\pi}{6}},\ 1 \le r \le 2 \ \text{(η φορά διαγραφής είναι από το Α στο Β)}$$

- Το ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ, σύμφωνα με την Παρατήρηση 3, είναι

$$z = re^{i\frac{\pi}{4}},\ 1 \le r \le 2 \ \text{(η φορά διαγραφής είναι από το Γ στο Δ)}$$

- Το τόξο $\overset{\frown}{\mathrm{A\Gamma}}$, σύμφωνα με την Παρατήρηση 1, είναι

$$z = e^{i\theta},\ \frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{\pi}{4} \ \text{(η φορά διαγραφής είναι από το Α στο Γ)}$$

- Το τόξο $\overset{\frown}{\mathrm{B\Delta}}$, σύμφωνα με την Παρατήρηση 1, είναι

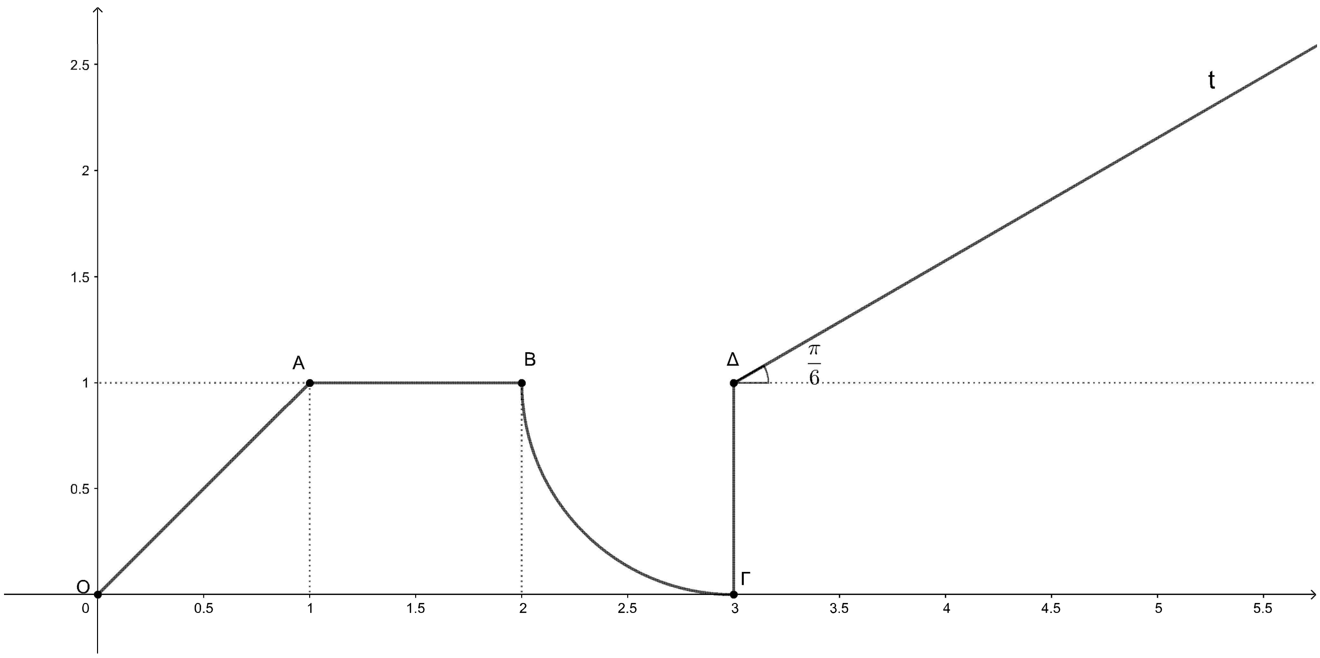
$$z = 2e^{i\theta},\ \frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{\pi}{4} \ \text{(η φορά διαγραφής είναι από το Β στο Δ)}$$

Άρα

$$z=\begin{cases} re^{i\frac{\pi}{6}}, & 1\le r\le 2 \\ e^{i\theta}, & \dfrac{\pi}{6}\le\theta\le\dfrac{\pi}{4} \\ 2e^{i\theta}, & \dfrac{\pi}{6}\le\theta\le\dfrac{\pi}{4} \\ re^{i\frac{\pi}{4}}, & 1\le r\le 2 \end{cases}$$

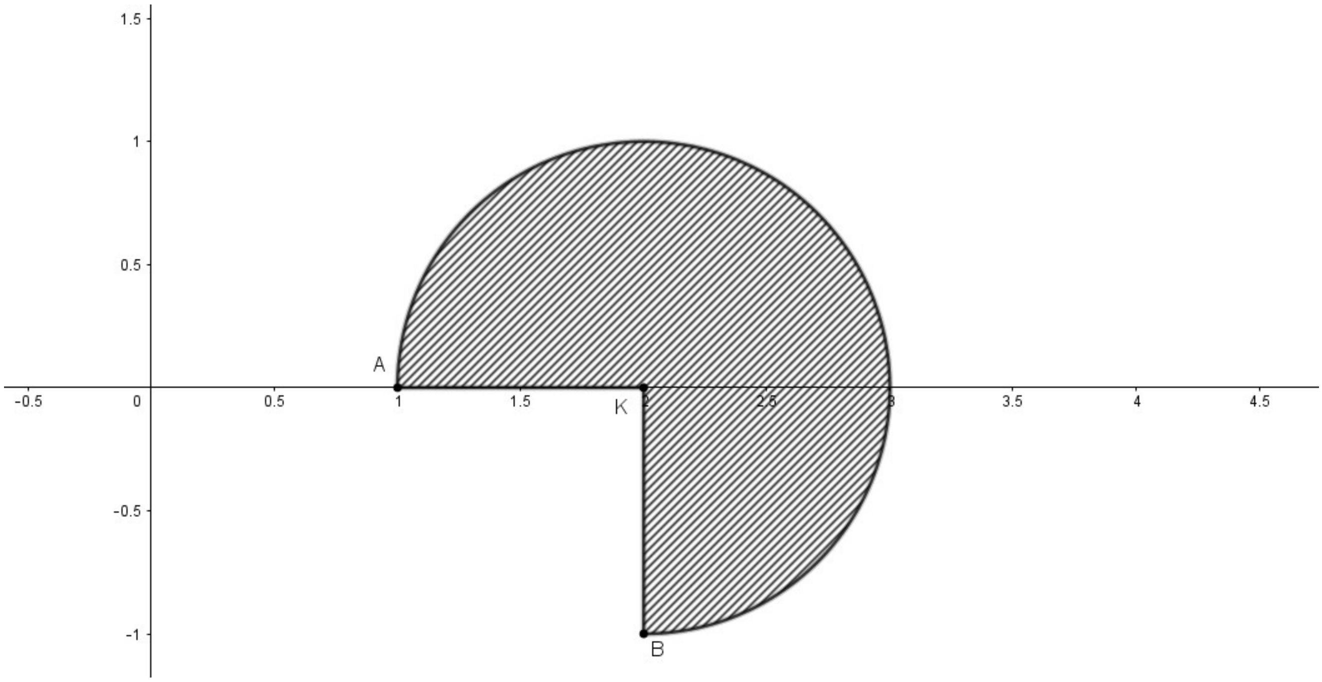
□

<u>Άσκηση 1:</u> Δίνεται το παρακάτω σχήμα



Με χρήση της εκθετικής μορφής μιγαδικού αριθμού, να περιγράψετε τη γραμμή ΟΑΒΓΔt (το $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ είναι τόξο 90^{o} του κύκλου με κέντρο $\Delta(3,1)$ και ακτίνα 1).

<u>Άσκηση 2:</u> Δίνεται το παρακάτω σχήμα.



Με χρήση της εκθετικής μορφής μιγαδικού αριθμού, να περιγράψετε το <u>σύνορο</u> του γραμμοσκιασμένου χωρίου διαγράφοντάς το με δύο τρόπους:

α) $\mathrm{K} \to \mathrm{B} \to \mathrm{A} \to \mathrm{K}$

β) $\mathrm{K} \to \mathrm{A} \to \mathrm{B} \to \mathrm{K}$

(το $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ είναι τόξο 270° του κύκλου με κέντρο $\mathrm{K}(2,0)$ και ακτίνα 1) □