Γραμμικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές

Α' Ομογενής:

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\dots+a_1y'+a_0y=0,\quad y=y(x),\quad y^{(k)}=\frac{d^ky}{dx^k},\quad a_i\in\mathbb{R},\ i=1,\dots n \qquad (E)$$

$n=2$:

$$y''+ay'+by=0,\quad a,b\in\mathbb{R} \qquad (1)$$

Υποθέτοντας λύση $y=e^{\lambda x}$, από την (1) παίρνουμε

$$\lambda^2+a\lambda+b=0$$

που καλείται χαρακτηριστική εξίσωση (χ.ε.) της (1).
Καθώς είναι δευτεροβάθμια εξίσωση με διακρίνουσα $\Delta=a^2-4b$, διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

$\boxed{\Delta>0}$ → ρίζες: $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$, $\lambda_1\neq\lambda_2$ → λύσεις: $e^{\lambda_1 x}$, $e^{\lambda_2 x}$.

$W(e^{\lambda_1 x},e^{\lambda_2 x})=(\lambda_2-\lambda_1)e^{(\lambda_1+\lambda_2)x}\neq 0 \Longrightarrow$ γραμ. ανεξ. $\Rightarrow$
βάσει του Θεωρήματος Θεμελιωδών λύσεων (Θ.Θ.Λ.), οι $\{e^{\lambda_1 x},e^{\lambda_2 x}\}$ θεμελιώδεις λύσεις της (1)
και $y=c_1e^{\lambda_1 x}+c_2e^{\lambda_2 x}$ γενική λύση της (1)

π.χ. $y''-2y=0$: χ.ε. $\lambda^2-2=0 \rightarrow \lambda_{1,2}=\pm\sqrt{2} \rightarrow$

$$y=c_1e^{\sqrt{2}x}+c_2e^{-\sqrt{2}x}.$$

$\boxed{\Delta=0}$ → ρίζες: $\lambda_1=\lambda_2=\lambda\in\mathbb{R}$ (διπλή) → λύση: $e^{\lambda x}$

2η λύση (μέσω του τύπου $y_2=y_1\int y_1^{-2}e^{-\int p\,dx}dx$): $xe^{\lambda x}$

$W(e^{\lambda x},xe^{\lambda x})=e^{-ax}\neq 0 \Longrightarrow$ γραμ. ανεξ. $\xrightarrow{\text{Θ.Θ.Λ.}}$

οι $\{e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}\}$ <u>θεμελιώδεις</u> λύσεις της (1)

και $y = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}$ <u>γενική λύση</u> της (1)

<u>π.χ.</u> $\underline{y'' + 4y' + 4y = 0}$ <u>χ.ε.</u> $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0 \to \lambda = -2$ (<u>διπλή</u>)

$$\to y = (c_1 + c_2 x) e^{-2x}.$$

$\boxed{\Delta < 0}$ → ρίζες : $\lambda_{1,2} = r \pm i\omega$, συζυγείς μιγαδικές

→ <u>λύσεις</u> $e^{(r+i\omega)x}$, $e^{(r-i\omega)x}$.

Οι λύσεις $e^{(r\pm i\omega)x} = e^{rx} e^{\pm i\omega x} = e^{rx}(\cos x \pm i \sin x)$ είναι <u>μιγαδικές</u> (συζυγείς). <u>Αναζητώντας</u> <u>πραγματικές</u> (θεμελιώδεις) λύσεις θεωρούμε τις

$$y_1 = e^{rx}\cos\omega x, \quad y_2 = e^{rx}\sin\omega x.$$

Λαμβάνοντας υπ' όψη ότι $r = -\frac{a}{2}$, $\omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$, εύκολα προκύπτει ότι οι y_1 και y_2 <u>επαληθεύουν</u> την (1). Επιπλέον ισχύει ότι $W(y_1, y_2) = \omega e^{2rx} \neq 0$. Συνεπώς, βάσει του Θ.Θ.Λ., έχουμε ότι

οι $\{e^{rx}\cos\omega x, e^{rx}\sin\omega x\}$ <u>θεμελιώδεις</u> λύσεις της (1)

και $y = e^{rx}(c_1 \cos\omega x + c_2 \sin\omega x)$ <u>γενική λύση</u> της (1)

π.χ. $\underline{y'' + 2y = 0}$: <u>χ.ε.</u> $\lambda^2 + 2 = 0 \to \underline{\lambda_{1,2}} = \pm i\sqrt{2} \to$

$$y = c_1 \cos\sqrt{2}x + c_2 \sin\sqrt{2}x.$$

Γενικεύοντας, γιά την εξίσωση (Ε) (τάξης $n \geq 2$) η χαρακτηριστική εξίσωση είναι n-βαθμού:

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

με n ρίζες και αντίστοιχες n θεμελιώδεις λύσεις:

Ρίζες χ.ε.	Αντίστοιχες Θεμελιώδεις λύσεις
απλή πραγματική ρίζα λ	$e^{\lambda x}$
πραγματική ρίζα λ πολ/τητας μ	$e^{\lambda x}, x e^{\lambda x}, \dots, x^{\mu-1} e^{\lambda x}$
ένα ζεύγος μιγαδικών συζυγών $r \pm i\omega$	$e^{rx}\cos\omega x$, $e^{rx}\sin\omega x$
ένα ζεύγος μιγαδικών συζυγών $r \pm i\omega$ πολ/τητας μ	$e^{rx}\cos\omega x$, $e^{rx}\sin\omega x$, $x e^{rx}\cos\omega x$, $x e^{r}\sin\omega x$, $\dots\dots$, $\dots\dots$, $x^{\mu-1} e^{rx}\cos\omega x$, $x^{\mu-1} e^{rx}\sin\omega x$

Π.χ. $y''' + 2y' = 0$: χ.ε. $\lambda^3 + 2\lambda = 0 \longrightarrow \lambda_1 = 0,\ \lambda_{2,3} = \pm i\sqrt{2}$

$$\longrightarrow y = c_1 + c_2\cos\sqrt{2}x + c_3\sin\sqrt{2}x.$$

$y^{(4)} - 2y'' + y = 0$: χ.ε. $\lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 = 0 \to \left.\begin{array}{l}\lambda_1 = 1 \text{ (διπλή)} \\ \lambda_2 = -1 \text{ (διπλή)}\end{array}\right\} \to$

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 e^{-x} + c_4 x e^{-x}.$$

Μέθοδος προσδιοριστέων συντελεστών

B. Μη Ομογενής $(n=2)$: $\boxed{y'' + ay' + by = F(x), \quad a,b \in \mathbb{R}}$ (2)

Η γενική λύση της (2) είναι:

$$\boxed{y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_p(x)}$$

όπου y_1, y_2 είναι δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης [(1)] και

y_p είναι μία μερική λύση της (2)

Αναζητούμε την $y_p(x)$, ανάλογα με την μορφή της $F(x)$:

(χαρακτηριστική εξίσωση της αντίστοιχης ομογενούς (1): χ.ε.)

① $F(x) = B_n x^n + B_{n-1} x^{n-1} + \dots + B_1 x + B_0$ (πολυώνυμο n-βαθμού)		
Το 0 δεν είναι ρίζα της χ.ε.	Το 0 είναι ρίζα της χ.ε	Το 0 είναι διπλή ρίζα της χ.ε
$y_p = A_n x^n + \dots + A_1 x + A_0$	$y_p = x(A_n x^n + \dots + A_1 x + A_0)$	$y_p = x^2(A_n x^n + \dots + A_1 x + A_0)$

② $F(x) = e^{\mu x}(B_n x^n + B_{n-1} x^{n-1} + \dots + B_1 x + B_0)$		
Το μ δεν είναι ρίζα της χ.ε.	Το μ είναι απλή ρίζα της χ.ε.	Το μ είναι διπλή ρίζα της χ.ε
$y_p = e^{\mu x}(A_n x^n + \dots + A_1 x + A_0)$	$y_p = x e^{\mu x}(A_n x^n + \dots + A_1 x + A_0)$	$y_p = x^2 e^{\mu x}(A_n x^n + \dots + A_1 x + A_0)$

③ $\beta \neq 0$		Ο $\alpha+i\beta$ δεν είναι ρίζα της χ.ε.	Ο $\alpha+i\beta$ είναι ρίζα της χ.ε.
$F(x)$	$(B_n x^n + \ldots + B_0)e^{ax}\cos(\beta x)$ $(B_n x^n + \ldots + B_0)e^{ax}\sin(\beta x)$	$y_p = (A_n x^n + \ldots + A_0)e^{ax}\cos(\beta x) + (\bar{A}_n x^n + \ldots + \bar{A}_0)e^{ax}\sin(\beta x)$	$y_p = x(A_n x^n + \ldots + A_0)e^{ax}\cos(\beta x) + x(\bar{A}_n x^n + \ldots + \bar{A}_0)e^{ax}\sin(\beta x)$
	$(B_n x^n + \ldots + B_0)e^{ax}\cos(\beta x) + (\Gamma_\xi x^\xi + \ldots + \Gamma_0)e^{ax}\sin(\beta x)$	$y_p = (A_\sigma x^\sigma + \ldots + A_0)e^{ax}\cos(\beta x) + (\bar{A}_\sigma x^\sigma + \ldots + \bar{A}_0)e^{ax}\sin(\beta x)$ $\sigma = \max(n, \xi)$	$y_p = x(A_\sigma x^\sigma + \ldots + A_0)e^{ax}\cos(\beta x) + x(\bar{A}_\sigma x^\sigma + \ldots + \bar{A}_0)e^{ax}\sin(\beta x)$ $\sigma = \max(n, \xi)$

Αντικαθιστώντας σε κάθε περίπτωση την $y_p(x)$ στην εξίσωση (2) προσδιορίζουμε τους συντελεστές A_i

Παραδείγματα

– Περίπτωση ①

$$y'' + y' - 2y = x^2$$

Η χ.ε. της αντίστοιχης ομογενούς είναι $\kappa^2 + \kappa - 2 = 0$, με ρίζες $\kappa_1 = -2$, $\kappa_2 = 1$.

Το 0 δεν είναι ρίζα, άρα αναζητούμε μερική λύση $y_p = Ax^2 + Bx + \Gamma$.

Αντικαθιστώντας, παίρνουμε: $-2Ax^2 + 2(A-B)x + 2A + B - 2\Gamma = x^2$

Εξισώνοντας τους συντελεστές των ίδιων δυνάμεων του x, προκύπτει

$$A = -\frac{1}{2}, \quad B = -\frac{1}{2}, \quad \Gamma = -\frac{3}{4}$$

Συνεπώς, η γενική λύση είναι

$$y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$$

– Περίπτωση ②

a) $y'' + 4y = xe^x$

Η χ.ε. της αντίστοιχης ομογενούς είναι $\kappa^2 + 4 = 0$ με ρίζες $\kappa_1 = i2$, $\kappa_2 = -i2$.

Το 1 δεν είναι ρίζα, άρα αναζητούμε μερική λύση $y_p = (Ax + B)e^x$

Αντικαθιστώντας, παίρνουμε : $5Ax+2A+5B=x$

Εξισώνοντας τους συντελεστές των ίδιων δυνάμεων του x, προκύπτει

$$A=\frac{1}{5}\,,\quad B=-\frac{2}{25}$$

Συνεπώς, η γενική λύση είναι

$$y(x)=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x+\frac{1}{5}\left(x-\frac{2}{5}\right)e^x$$

β) $y''-y=xe^x$

Η χ.ε. της αντίστοιχης ομογενούς είναι $\kappa^2-1=0$, με ρίζες $\kappa_1=1,\ \kappa_2=-1$.

Το 1 είναι ρίζα, άρα αναζητούμε μερική λύση $y_p=x(Ax+B)e^x$.

Αντικαθιστώντας, παίρνουμε : $4Ax+2(A+B)=x$

Εξισώνοντας τους συντελεστές των ίδιων δυνάμεων του x, προκύπτει

$$A=\frac{1}{4}\,,\quad B=-\frac{1}{4}$$

Συνεπώς, η γενική λύση είναι

$$y(x)=c_1e^x+c_2e^{-x}+\frac{1}{4}x(x-1)e^x$$

— Περίπτωση 3

α) $y''-4y=2x\cos x$

Η χ.ε. της αντίστοιχης ομογενούς είναι $\kappa^2-4=0$, με ρίζες $\kappa_1=2,\ \kappa_2=-2$

Το i δεν είναι ρίζα, άρα αναζητούμε μερική λύση

$$y_p=(Ax+B)\cos x+(\Gamma x+\Delta)\sin x.$$

Αντικαθιστώντας, παίρνουμε :

$$(-5Ax-5B+2\Gamma)\cos x-(5\Gamma x+5\Delta+2A)\sin x=2x\cos x$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές των $\cos x$, $\sin x$, προκύπτει

$$\left\{ \begin{array}{l} -5Ax - 5B + 2\Gamma = 2x \\ 5\Gamma x + 5\Delta + 2A = 0 \end{array} \right\}$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές των ίδιων δυνάμεων του x, έχουμε

$$A = -\frac{2}{5}, \quad 2\Gamma - 5B = 0$$

$$\Gamma = 0, \quad 5\Delta + 2A = 0$$

ή

$$A = -\frac{2}{5}, \quad B = 0, \quad \Gamma = 0, \quad \Delta = \frac{4}{25}$$

Συνεπώς, η γενική λύση είναι

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} - \frac{2}{5} x \cos x + \frac{4}{25} \sin x$$

β) $y'' + 2y' + 2y = x^2 e^{-x} \sin x$

Η χ.ε. της αντίστοιχης ομογενούς είναι $k^2 + 2k + 2 = 0$, με ρίζες

$$k_1 = -1 + i, \quad k_2 = -1 - i$$

Το $-1+i$ είναι ρίζα, άρα αναζητούμε μερική λύση

$$y_p = x(Ax^2 + Bx + \Gamma) e^{-x} \cos x + x(\bar{A}x^2 + \bar{B}x + \bar{\Gamma}) e^{-x} \sin x$$

Αντικαθιστώντας, παίρνουμε:

$$\left[6\bar{A}x^2 + 2(3A + 2\bar{B})x + 2(B + \bar{\Gamma})\right] \cos x$$

$$+ \left[-6Ax^2 + 2(3\bar{A} - 2B)x + 2(\bar{B} - \Gamma)\right] \sin x = x^2 \sin x$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές των $\cos x$, $\sin x$, προκύπτει

$$6\bar{A}x^2 + 2(3A + 2\bar{B})x + 2(B + \bar{\Gamma}) = 0$$

$$-6Ax^2 + 2(3\bar{A} - 2B)x + 2(\bar{B} - \Gamma) = x^2$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές των ίδιων δυνάμεων του x, έχουμε

$$\left.\begin{array}{lll} \bar{A}=0, & 3A+2\bar{B}=0, & B+\bar{\Gamma}=0 \\ A=-\frac{1}{6}, & 3\bar{A}-2B=0, & \bar{B}-\Gamma=0 \end{array}\right\} \longrightarrow$$

$$A=-\frac{1}{6}, \quad B=0, \quad \Gamma=\frac{1}{4}, \quad \bar{A}=0, \quad \bar{B}=\frac{1}{4}, \quad \bar{\Gamma}=0$$

Συνεπώς η γενική λύση είναι

$$y(x)=c_1e^{-x}\cos x+c_2e^{-x}\sin x-\frac{1}{2}x\left(\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{6}\right)e^{-x}\cos x + \frac{1}{4}x^2e^{-x}\sin x$$

Είναι ακόμη προφανές ότι αν

y_{p1} είναι μία μερική λύση της εξίσωσης $y''+ay'+by=F_1(x)$

και y_{p2} " " " " " " $y''+ay'+by=F_2(x)$

τότε η $y_{p1}+y_{p2}$ είναι μία μερική λύση της εξίσωσης

$$y''+ay'+by=F_1(x)+F_2(x)$$

Παράδειγμα

$$y''-2y'-3y=2e^x-10\sin x$$

Η χ.ε της ομογενούς είναι $k^2-2k-3=0$, με ρίζες $k_1=-1$, $k_2=3$. Διασπάμε την εξίσωση στις ακόλουθες εξισώσεις:

$$y''-2y'-3y=2e^x, \quad y''-2y'-3y=-10\sin x$$

Για την πρώτη αναζητούμε μερική λύση $y_{p1}=Ae^x$, ενώ για τη δεύτερη $y_{p2}=B\cos x+\Gamma\sin x$ (Το 1 και το i δεν είναι ρίζες της χαρακτηριστικής, αντίστοιχα), με τους συντελεστές να προσδιορίζονται όπως παραπάνω. Το άθροισμα $y_{p1}+y_{p2}$ αποτελεί μερική λύση της αρχικής εξίσωσης.