7/ $\underline{(1-x)y'' + xy' - y = 2(x-1)^2 e^{-x}}$

$$y'' + \frac{x}{1-x}y' - \frac{1}{1-x}y = -2(x-1)e^{-x}$$

Ομογενής : $y_1 = x$, $y_2 = x\int \frac{1}{x^2} e^{\int \frac{x}{x-1}dx} dx$

$$e^{\int \frac{x}{x-1}dx} = e^x |x-1|$$

$$y_2 = \pm x \int \frac{e^x}{x^2}(x-1)dx = \pm x \left(\int \frac{e^x}{x}dx - \int \frac{e^x}{x^2}dx \right)$$

$$= \pm x \left(\frac{e^x}{x} + \cancel{\int \frac{e^x}{x^2}dx} - \cancel{\int \frac{e^x}{x^2}dx} \right) = \pm e^x \rightarrow y_2 = e^x$$

$y_\mu = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2$: (μερική λύση)

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ r(x) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x & e^x \\ 1 & e^x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2(x-1)e^{-x} \end{pmatrix}$$

$$W[y_1, y_2] = (x-1)e^x \neq 0$$

$$c_1(x) = \int \frac{W_1}{W}dx = \int \frac{2\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}e^x}dx = 2\int e^{-x}dx = -2e^{-x}$$

$$c_2(x) = \int \frac{W_2}{W}dx = -2\int \frac{x\cancel{(x-1)}e^{-x}}{\cancel{(x-1)}e^x}dx = -2\int x e^{-2x}dx = \frac{2x+1}{2}e^{-2x}$$

$$\boxed{y(x) = c_1 x + c_2 e^x \underbrace{-2xe^{-x} + \frac{2x+1}{2}e^{-2x}e^x}_{\frac{1-2x}{2}e^{-x}}}$$

/ **Μη ομογενείς ΛODE2 – Ασκήσεις**

$$x y'' - (x+1) y' + y = x e^{2x}$$

$$y_1 = x+1, \quad y_2 = e^{x}, \quad y_\mu = \frac{x-1}{2} e^{2x}$$

$$x^2 y'' - 2 x y' + 2 y = x$$

$$y_1 = x, \quad y_2 = x^2, \quad y_\mu = -x(\ln|x|+1)$$

$$x^2 y'' - 2 x y' - (x^2-2) y = 3x^4$$

$$y_1 = x e^{x}, \quad y_2 = x e^{-x}, \quad y_\mu = -3x^2$$

$$x^2 y'' - x y' - 3y = x^{3/2}$$

$$y_1 = \frac{1}{x}, \quad y_2 = x^3, \quad y_\mu = -\frac{4x^{3/2}}{15}$$

$$x^2 y'' - (2a-1) x y' + a^2 y = x^{a+1}$$

$$y_1 = x^a, \quad y_2 = x^a \ln|x|, \quad y_\mu = x^{a+1}$$

Ξεκινώντας από τη μία θεμελιώδη λύση της ομογενούς να βρείτε τη δεύτερη, και εν συνεχεία να βρείτε τη μερική λύση της μη ομογενούς με τη μέθοδο μεταβολής των παραμέτρων.