Γραμμική εξίσωση 2ης τάξης

$$\boxed{y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = r(x) \,, \quad y = y(x) \,, \quad y' = \frac{dy}{dx}} \qquad (1)$$

όπου p, q, r συνεχείς στο (a, b)

Από Θ.Υ.Μ (ύπαρξη, μοναδικότητα) (για εξισώσεις n-τάξης, $n \geq 2$) $\Longrightarrow$
το Π.Α.Τ : $\{ \text{Εξ.}(1) ,\ y(x_0) = y_0 ,\ y'(x_0) = y_1 ,\ x_0 \in (a,b) \}$
έχει μοναδική λύση στο (a, b) (ικανή συνθήκη)

Έτσι, για μία ομογενή εξίσωση ($r(x) = 0$), αν $y_0 = y_1 = 0$ και $0 \in (a, b) \Longrightarrow$ η $y(x) = 0$ (τετριμμένη) είναι η μοναδική λύση στο (a,b).

π.χ. $y'' + 3xy' - 5y = 0 \,, \quad y(2) = 0 \,, \quad y'(2) = 0$

$(a, b) \longrightarrow (-\infty, \infty)$

Γιά την εξίσωση: $y'' + \dfrac{2x}{x-3}\, y' - y = \sin x$,

η $p(x)$ είναι συνεχής στα $(-\infty, 3)$, $(3, +\infty)$,
συνεπώς το (Θ.Υ.Μ) δεν μπορεί να εφαρμοστεί για Π.Α.Τ στο $x_0 = 3$ (μπορεί να υπάρχει ή όχι μοναδική λύση, ή καθόλου λύση)

Αν $x_0 > 3 \Longrightarrow$ υπάρχει μοναδική λύση ΠΑΤ στο $(3, +\infty)$

Αν $x_0 < 3 \Longrightarrow$ " " " " " $(-\infty, 3)$

– Γραμμική ανεξαρτησία συναρτήσεων

$$y_1(x)\ ,\ y_2(x)$$

Γρ. ανεξ. συναρτ.

$2x\ ,\ 5x^2$

$2e^x\ ,\ 5e^{2x}$

$\dfrac{y_2}{y_1} \neq$ σταθερά

Γρ. εξαρτ. συναρτ.

$2x\ ,\ 5x$

$2e^x\ ,\ 5e^x$

$\dfrac{y_2}{y_1} =$ σταθερό

$$y_1(x), \dots, y_n(x)\ ,\ n>2$$

Γρ. ανεξ. συναρτ.

$e^x,\ \cos 2x,\ x^2,\ 2x$

Καμμία συνάρτηση δεν είναι γραμμικός συνδυασμός των άλλων

Γρ. εξαρτ. συναρτ.

$e^x,\ \cos 2x,\ x^2,\ 2x,\ 4x^2-3x$

$\exists$ τουλάχιστον μία συνάρτηση που είναι γραμμικός συνδυασμός των άλλων.

Ισοδύναμα!

Αν $c_1 y_1 + \dots + c_n y_n = 0$

- $\to c_1 = \dots = c_n = 0 \to$ γρ. ανεξ.
- $\to \exists$ τουλάχιστον ένα $c_i,\ i=1,\dots,n\ :\ c_i \neq 0 \to$ γρ. εξαρτ.

– Ικανή συνθήκη γραμμικής ανεξαρτησίας συναρτήσεων

Αν $c_1 y_1 + c_2 y_2 = 0 \Rightarrow c_1 y_1' + c_2 y_2' = 0$

$$y_i = y_i(x), \quad y_i' = \frac{dy_i}{dx}, \quad i = 1, 2$$

Έτσι έχουμε ένα <u>ομογενές</u> σύστημα εξισώσεων με αγνώστους τα c_1, c_2:

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Η ορίζουσα του συστήματος, καλείται <u>ορίζουσα Wronski</u> των y_1, y_2:

$$\boxed{W(y_1, y_2)} = \det\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2$$

Έτσι για $x \in (a, b)$:

αν $W(y_1, y_2) \neq 0$ (<u>εκτός ίσως</u> από ένα πεπερασμένο πλήθος τιμών του x) $\Rightarrow c_1 = c_2 = 0 \Rightarrow$ <u>γρ. ανεξ.</u>

ενώ αν $W(y_1, y_2) = 0$ (<u>ταυτοτικά</u>, δηλαδή $\forall x \in (a, b)$) $\Rightarrow c_1 \neq 0$ ή $c_2 \neq 0$ (άπειρες λύσεις) $\Rightarrow$ <u>γρ. εξαρτ.</u>

Άρα: **Ικανή συνθήκη γραμμ. ανεξαρτησίας 2 συναρτήσεων του x, $x \in (a, b)$**

Αν $W(y_1, y_2) = \det\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}$ $\begin{cases} \neq 0 \longrightarrow y_1, y_2 \text{ γρ. ανεξ.} \\ = 0 \longrightarrow y_1, y_2 \text{ γρ. εξαρ.} \end{cases}$

<u>π.χ.</u>

$y_1(x)$	$y_2(x)$	$W(y_1, y_2)$	
$x+1$	x^2	$x(x+2) \neq 0$	γρ. ανεξ.
$\sin x$	$\cos x$	$-1 \neq 0$	γρ. ανεξ.
$2x$	$5x$	0	γρ. εξαρ.

<u>Γενίκευση:</u> Ικανή συνθήκη γραμ. ανεξαρτησίας n συναρτήσεων του x, n>2, $x \in (a,b)$

$$\text{Αν } W(y_1,\dots,y_n) = \det\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{cases} \neq 0 \rightarrow y_1,\dots,y_n \text{ γρ. ανεξ.} \\ = 0 \rightarrow y_1,\dots,y_n \text{ γρ. εξαρτ.} \end{cases}$$

ταυτοτικά

$$y_i^{(k)} = \frac{d^k y_i}{dx^k}$$

π.χ

$y_1(x)$	$y_2(x)$	$y_3(x)$	$W(y_1,y_2,y_3)$	
x^2	x	e^x	$(2-x^2)e^x \neq 0$	γρ. ανεξ.
$2x$	x	e^x	0	γρ. εξαρ.

Παρατηρείστε ότι όταν $W \neq 0$, υπάρχουν (πιθανόν) συγκεκριμένες τιμές του x (που μπορεί να ανήκουν στο διάστημα (a, b), ή όχι) που την μηδενίζουν, αλλά αυτό δεν καθιστά γρ. εξαρτ. τις συναρτήσεις!

– <u>Αρχή της επαλληλίας λύσεων διαφορικής εξίσωσης</u>

Η αρχή αυτή είναι συνυφασμένη με τις <u>γραμμικές ομογενείς</u> εξισώσεις:

$$y^{(n)} + f_{n-1}(x)\,y^{(n-1)} + \dots + f_0(x)\,y = 0 \qquad (2)$$

Αν $y_1(x), \dots, y_n(x)$ λύσεις της (2) $\Longrightarrow$

$c_1 y_1 + \dots + c_n y_n$, $c_i \in \mathbb{R}$ είναι και αυτή λύση, δηλαδή κάθε γραμμικός συνδυασμός τους, είναι και αυτός λύση.

π.χ $\underline{y'' - y = 0} \rightarrow y_1(x) = e^{x}, \quad y_2(x) = e^{-x}$ λύσεις.

Τότε $\kappa e^{x}, \ \kappa e^{-x}, \ \kappa e^{x} + \lambda e^{-x} \ ; \ \kappa, \lambda \in \mathbb{R}$

είναι επίσης λύσεις.

Ενώ: $\underline{y'' + x^2 y' - y^2 = 0}$ (μη γραμμική εξίσωση)

$y_1(x) = x$ είναι μία λύση

αλλά $\kappa x, \ \kappa \in \mathbb{R}$ δεν είναι λύση

δηλαδή, η αρχή της επαλληλίας <u>δεν ισχύει</u>

στις <u>μη γραμμικές</u> και <u>μη ομογενείς</u> εξισώσεις

– <u>Θεμελιώδεις λύσεις γραμμικής διαφορικής εξίσωσης $2^{ης}$ τάξης (LODE2) ⟶ Γενική λύση</u>

Θεωρούμε την <u>ομογενή</u> εξίσωση

$$\boxed{y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = 0 \ , \quad y = y(x)} \qquad (3)$$

με p, q <u>συνεχείς</u> για $x \in (a, b)$

Έστω $y_1(x), y_2(x)$ δύο λύσεις της (3), δηλαδή

$$\left.\begin{array}{l} y_1'' + p y_1' + q y_1 = 0 \xrightarrow{\text{πολ/ζουμε με } y_2} \\ y_2'' + p y_2' + q y_2 = 0 \xrightarrow{\text{πολ/ζουμε με } y_1} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \text{αφαιρούμε την} \\ 1^{η} \text{ από τη } 2^{η} \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$W' + p(x)\, W = 0 \ , \quad W = W(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_1' y_2$$

με λύση: $\boxed{W(y_1, y_2) = K e^{-\int p(x)dx} \ , K \in \mathbb{R}}$ <u>τύπος του Abel</u>

(4)

Η <u>έννοια</u> του <u>τύπου του Abel</u> είναι ότι, καθώς η εκθετική συνάρτηση είναι μή μηδενική $\forall x$, τότε

αν $K \neq 0 \Rightarrow W \neq 0 \quad \forall x \in (a,b) \Rightarrow y_1, y_2$ γρ. ανεξ.

αν $K = 0 \Rightarrow W = 0$ (ταυτοτικά) $\Rightarrow y_1, y_2$ γρ. εξαρ.

<u>δηλαδή</u>:

αν η Wronskian μηδενίζεται για μία τιμή $x = x_0 \in (a,b)$, θα μηδενίζεται σε όλο το (a,b) <u>ή</u>

αν η Wronskian είναι μή μηδενική για μία τιμή $x = x_0 \in (a,b)$, θα είναι μη μηδενική σε όλο το (a,b)

<u>Υπάρχουν λύσεις για την εξίσωση (3), και τι είδους</u>;

Έστω ένα $x_0 \in (a,b)$ (τυχαίο). Κατασκευάζουμε 2 Π.Α.Τ.:

<u>ΠΑΤ₁</u>: ΕΞ. (3), $y(x_0) = 1, \quad y'(x_0) = 0$

<u>ΠΑΤ₂</u>: ΕΞ (3), $y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 1$

Λόγω της <u>συνέχειας</u> των $p(x)$ και $q(x)$, από το <u>Θ.Υ.Μ.</u> έχουμε για το ΠΑΤ₁ μία μοναδική λύση $y_1(x)$

και για το ΠΑΤ₂ " " " $y_2(x)$

και υπολογίζουμε

$$W[y_1(x_0), y_2(x_0)] = y_1(x_0)y_2'(x_0) - y_1'(x_0)y_2(x_0) = 1 \neq 0.$$

Συνεπώς, βάσει των πορισμάτων του <u>τύπου του Abel</u>,

$$W(y_1, y_2) \neq 0 \quad \forall x \in (a,b) \rightarrow y_1, y_2 \text{ γραμ. ανεξ.}$$

Επιπρόσθετα, με χρήση του <u>Θ.Υ.Μ.</u>, μπορεί να αποδειχθεί ότι <u>κάθε λύση</u> της ΕΞ. (3) γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός $c_1 y_1 + c_2 y_2$, με c_i <u>μοναδικά</u> ορισμένα.

Έτσι, έχει αποδειχθεί το παρακάτω:

Θεώρημα Θεμελιωδών Λύσεων ομογενών γραμμικών διαφορικών εξισώσεων $2^{ης}$ τάξης

Η Εξ. (3) με p, q συνεχείς συναρτήσεις του x στο (a, b) έχει δύο γραμμ. ανεξ. λύσεις y_1, y_2, και κάθε λύση της (3) γράφεται

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

με c_1, c_2 μοναδικά, που καλείται και γενική λύση της (3), οι δε y_1, y_2 καλούνται θεμελιώδεις λύσεις της (3).

Το παραπάνω γενικεύεται για $n > 2$:

Θεώρημα Θεμελιωδών Λύσεων ομογενών γραμμικών διαφορικών εξισώσεων n-τάξης, $n \geq 2$

Η Εξ. (2) με p_i, $i = 0, \ldots, n-1$ συνεχείς συναρτήσεις του x στο (a, b) έχει n γραμμ. ανεξ. λύσεις $y_1, \ldots, y_n$, και κάθε λύση της (2) γράφεται

$$y = c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n , \quad c_i \in \mathbb{R}, \ i = 1, \ldots, n$$

με $c_i, i = 1, \ldots, n$ μοναδικά, που καλείται και γενική λύση της (2), οι δε $y_i, i = 1, \ldots, n$ καλούνται θεμελιώδεις λύσεις της (2).