Διαφορικές Εξισώσεις

Ενότητα 5: Μη γραμμικά συστήματα συνήθων διαφορικών εξισώσεων

Μιχαήλ Μαρκάκης
Πολυτεχνική Σχολή

Τμήμα ΗΜΤΥ

Η παρούσα σελίδα έχει αφεθεί εκουσίως κενή.

α. Σκοποί ενότητας

Σκοπός της παρούσας ενότητας είναι η εισαγωγή στη μέθοδο γραμμικοποίησης μη γραμμικών συστημάτων συνήθων διαφορικών εξισώσεων (ΣΔΕ) πρώτης τάξης, και στην εύρεση και τον προσδιορισμό του είδους και της ευστάθειας των σημείων ισορροπίας του.

β. Περιεχόμενα ενότητας

Στην ενότητα παρουσιάζεται η εύρεση των σημείων ισορροπίας ενός μη γραμμικού συστήματος συνήθων διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης, η έννοια της γραμμικής προσέγγισης του συστήματος, η συνθήκη υπό την οποία ισχύει η προσέγγιση, και ο χαρακτηρισμός των σημείων ισορροπίας.

5.1 Μη γραμμικό σύστημα – Γραμμική προσέγγιση

Δίνεται το μη γραμμικό σύστημα ΣΔΕ πρώτης τάξης:

$$\left.\begin{aligned}\dot{x} &= ax - y - x\left(x^2 + y^2\right) = p\left(x, y\right)\\ \dot{y} &= x + ay - y\left(x^2 + y^2\right) = q\left(x, y\right)\end{aligned}\right\} p = q = 0 \Rightarrow$$

μοναδικό σημείο ισορροπίας: $\left(0,0\right)$

α) Οι p, q αναλυτικές $\Rightarrow$ αναπτύσσονται κατά Taylor γύρω από το $\left(0,0\right) \Rightarrow$ ισχύει η συνθήκη μη γραμμικότητας:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left|u\left(x,y\right)\right| + \left|v\left(x,y\right)\right|}{\left|x\right| + \left|y\right|} = 0$$

όπου u,v είναι οι μη γραμμικοί όροι του αναπτύγματος Taylor:

$$p = p_{,\mathrm{x}}\,\mathrm{x} + \mathrm{p}_{,\mathrm{y}}\mathrm{y} + u\left(x, y\right), \quad q = q_{,\mathrm{x}}\,\mathrm{x} + q_{,\mathrm{y}}\,\mathrm{y} + v\left(x, y\right)$$

και άρα τοπικά οι μη γραμμικοί όροι μπορούν να παραλειφθούν, δηλαδή σε μία μικρή περιοχή του $\left(0,0\right)$ η συμπεριφορά του συστήματος προσεγγίζεται πολύ καλά από τη γραμμική προσέγγιση:

$$\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix} = J_0 \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}, \qquad J_0 = \begin{pmatrix}p_{,x} & p_{,y}\\ q_{,x} & q_{,y}\end{pmatrix}_{(0,0)}$$

$$= \begin{pmatrix}a - 3x^2 - y^2 & -1 - 2xy\\ 1 - 2xy & a - x^2 - 3y^2\end{pmatrix}_{(0,0)}$$

Έτσι, για την ευστάθεια και το χαρακτήρα του $(0,0)$ αρκεί να βρεθούν οι ιδιοτιμές του J_0:

$$J_0 = \begin{pmatrix}a & -1\\ 1 & a\end{pmatrix} \to J_0 - \lambda I = \begin{pmatrix}a-\lambda & -1\\ 1 & a-\lambda\end{pmatrix} \to$$

χαρακτηριστική εξίσωση $(\alpha - \lambda)^2 = -1 \Rightarrow \boxed{\lambda_{1,2} = \alpha \pm i}$

Άρα: $a > 0 \to$ <u>ασταθής εστία</u>, $a < 0 \to$ <u>ευσταθής εστία</u>

$\boxed{a = 0} \to \lambda_{1,2} = \pm i \Rightarrow$ <u>κέντρο (center)</u> ή <u>ασθενής εστία (weak focus).</u>

Χρήση <u>πολικών συντεταγμένων</u>: $x = \rho\cos\theta,\ \ \upsilon = \rho\sin\theta$:

$$\rho\dot{\rho} = x\dot{x} + y\dot{y} = -\left(x^2 + y^2\right)^2 = -\rho^4 \Rightarrow \boxed{\dot{\rho} = -\rho^3 < 0}$$

$\rho^2\dot{\theta} = x\dot{y} - y\dot{x}$ (χρησιμοποιείται για τη φορά της κίνησης)

Άρα, το $(0,0)$ <u>είναι ασθενής εστία μη γραμμικά ευσταθής</u> (weak focus nonlinearly stable).

5.2 Μη γραμμική εξίσωση - Μετατροπή σε πρωτοβάθμιο σύστημα - Γραμμική προσέγγιση

Δίνεται η μη γραμμική ΣΔΕ Duffing-Van der Pol:

$$x_{tt}'' - k\left(1 - x^2\right)x_t' + x + bx^3 = 0, \qquad \text{(DV-1)}$$

<u>Μετατροπή σε πρωτοβάθμιο σύστημα - Γραμμικοποίηση</u>

$$\left.\begin{aligned} x &= z_1 \\ x' &= z_2 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} z_1' &= z_2 \\ z_2' &= -z_1 + kz_2 - kz_1^2 z_2 - bz_1^3 \end{aligned}\right\} \rightarrow$$

$$\begin{aligned} z_1' &= z_2 \\ z_2' &= -z_1 + kz_2 - kz_1^2 z_2 - bz_1^3 \end{aligned} \qquad \text{(DV-2)}$$

<u>Εύρεση σημείων ισορροπίας</u>

$$\left.\begin{aligned} z_2 &= 0 \\ -z_1 + kz_2 - kz_1^2 z_2 - bz_1^3 &= 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} & z_2 = 0 \\ & z_1 = 0 \ \text{ή} \ z_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{-b}},\ b < 0 \end{aligned}\right\}$$

Συνεπώς τα σημεία ισορροπίας είναι:

$O\left(0,0\right)$ και $E_1\left(\frac{1}{\sqrt{-b}},\,0\right)$, $E_2\left(-\frac{1}{\sqrt{-b}},\,0\right)$ με $b < 0$

Ιακωβιανό μητρώο

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1-2kz_1z_2-3bz_1{}^2 & k\left(1-z_1{}^2\right) \end{pmatrix}$$

α) Στο $O(0,0)$: $J_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & k \end{pmatrix}$

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο: $\lambda^2 - k\lambda + 1 = 0,\ \Delta=\sqrt{k^2-4} \Rightarrow$

Ιδιοτιμές: $\lambda_{1,2} = \dfrac{k \pm \sqrt{k^2-4}}{2}$

Για $0<k<2 \rightarrow \Delta<0$: $\lambda_{1,2} = \dfrac{k \pm i\sqrt{4-k^2}}{2}$ (unstable focus)

Για $k=2 \rightarrow \Delta=0$: $\lambda_{1,2} = \dfrac{k}{2} = 1$ (unstable degenerate node)

Για $k>2$ ή $k<0 \rightarrow \Delta>0$: $\lambda_{1,2}=\dfrac{k \pm \sqrt{k^2-4}}{2}$ (unstable node)

β) Στα $E_1,\ E_2$: $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & k\left(1+\dfrac{1}{b}\right) \end{pmatrix}$

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο: $\lambda^2 - k\left(1+\dfrac{1}{b}\right)\lambda - 2 = 0,\quad b<0$

και $\Delta = k^2\left(1+\frac{1}{b}\right)^2 + 8$

Ιδιοτιμές: $\lambda_{1,2} = \dfrac{k\left(1+\frac{1}{b}\right) \pm \sqrt{\Delta}}{2}$ (saddle)

Για παράδειγμα, αν θέσουμε $b=-1$: $E_1\left(1,\,0\right),\ E_2\left(-1,\,0\right)$

και $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{2}$.

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Μιχαήλ Μαρκάκης, Επίκουρος Καθηγητής, 2015.. «Διαφορικές Εξισώσεις. Μη γραμμικά συστήματα συνήθων διαφορικών εξισώσεων». Έκδοση: 1.0. Πάτραι 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: https://eclass.upatras.gr/courses/EE902

Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».

[1] http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Διατήρηση Σημειωμάτων

- Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:
- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης