



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS

Διαφορικές Εξισώσεις

Ενότητα 2: Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις
2^{ης} τάξης

Μιχαήλ Μαρκάκης
Πολυτεχνική Σχολή

Τμήμα ΗΜΤΥ

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά μαθήματα **ΠΠ**

Η παρούσα σελίδα έχει αφεθεί εκουσίως κενή.

α. Σκοποί ενότητας	5
β. Περιεχόμενα ενότητας.....	5
2.1 Συναρτησιακοί συντελεστές.....	6
2.1.1 Ομογενείς.....	6
2.1.2 Μη ομογενείς-Μέθοδος μεταβολής των παραμέτρων	8
2.1.3 Γενίκευση της μεθόδου μεταβολής των παραμέτρων σε μη ομογενείς γραμμικές εξισώσεις n τάξης ($n>2$).....	10
2.2 Σταθεροί συντελεστές	11
2.2.1 Ομογενής.....	12
2.2.2 Μη Ομογενής.....	14
Σημειώματα	18

α. Σκοποί ενότητας

Σκοποί της παρούσας ενότητας είναι η εισαγωγή στις βασικές έννοιες και στις μεθόδους επίλυσης των συνήθων διαφορικών εξισώσεων (ΣΔΕ) δεύτερης τάξης.

β. Περιεχόμενα ενότητας

Στην ενότητα διατυπώνονται η μορφή και βασικές έννοιες-ορισμοί που σχετίζονται με τις ομογενείς και μη ομογενείς ΣΔΕ δεύτερης τάξης, παρουσιάζεται η μέθοδος μεταβολής των παραμέτρων για τις μη ομογενείς εξισώσεις και παραδείγματα για κάθε περίπτωση.

2.1 Συναρτησιακοί συντελεστές

Ακολουθεί ο ορισμός των ομογενών και μη ομογενών συναρτησιακών συντελεστών μαζί με τους αντίστοιχες ενδεικτικές μεθόδους επιλύσεως και συναφή παραδείγματα.

2.1.1 Ομογενείς

$$\boxed{y'' + p(x)y + q(x)y = 0, \quad y = y(x)} \quad (1)$$

Έστω $y_1(x)$ μία λύση της (1).

Υποθέτοντας $y_2 = y_1 s(x)$ ως δεύτερη λύση και αντικαθιστώντας στην (1), με δύο διαδοχικές ολοκληρώσεις λαμβάνουμε:

$$s(x) = \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x)dx} dx,$$

και άρα

$$y_2(x) = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x)dx} dx$$

Καθώς η ορίζουσα Wronski προκύπτει

$$W[y_1, y_2] = \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} = e^{-\int p dx} \neq 0,$$

συνεπώς οι $y_1(x)$, $y_2(x)$ αποτελούν θεμελιώδεις λύσεις της (1) κι άρα:

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

είναι η γενική λύση της (1).

Παράδειγμα

$$(1-x)y'' + xy' - y = 0,$$

$$p(x) = \frac{x}{1-x}, \quad q(x) = \frac{1}{1-x}$$

$$y_1(x), y_2(x) = x \int \frac{1}{x^2} e^{\int \frac{x}{x-1} dx} dx$$

ή

$$\begin{aligned} y_2(x) &= \pm x \int \frac{x-1}{x^2} e^x dx = \pm x \left[\int \frac{e^x}{x} dx - \int \frac{e^x}{x^2} dx \right] \\ &= \pm x \left[\frac{e^x}{x} + \int \frac{e^x}{x^2} dx - \int \frac{e^x}{x^2} dx \right] = \pm e^x \end{aligned}$$

Άρα γενική λύση:

$$y(x) = c_1 x + c_2 e^x$$

2.1.2 Μη ομογενείς-Μέθοδος μεταβολής των παραμέτρων

$$\boxed{y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x), \quad y = y(x)} \quad (2)$$

- Επιλύουμε την ομογενή:

$$y_0 = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

με y_1, y_2 τις αντίστοιχες θεμελιώδεις λύσεις:

- Υποθέτουμε μερική λύση της (2) της μορφής

$$y_\mu = f_1(x)y_1 + f_2(x)y_2$$

- Αντικαθιστούμε στη (2) και κατασκευάζουμε τελικά το σύστημα:

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1' \\ f_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ r(x) \end{pmatrix} \quad (3)$$

Καθώς η ορίζουσα W του πίνακα (Wronski) είναι διάφορη του μηδενός, το σύστημα (3) έχει μοναδική λύση

(μέθοδος Cramer):

$$f_1(x) = \int \frac{W_1}{W} dx = -\int \frac{y_2 r}{W} dx$$

$$f_2(x) = \int \frac{W_2}{W} dx = \int \frac{y_1 r}{W} dx$$

Συνεπώς, η γενική λύση της (2) είναι:

$$\begin{aligned} y(x) &= y_0 + y_\mu = c_1 y_1 + c_2 y_2 + f_1 y_1 + f_2 y_2 \\ &= c_1 y_1 + c_2 y_2 - y_1 \int \frac{y_2 r}{W} dx + y_2 \int \frac{y_1 r}{W} dx, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (4)$$

Παράδειγμα

$$(1-x)y'' + xy' - y = x^2 - 1, \quad (5)$$

$$p(x) = \frac{x}{x-1}, \quad q(x) = \frac{1}{x-1}, \quad r(x) = -x-1$$

Από το προηγούμενο παράδειγμα έχουμε τις θεμελιώδεις λύσεις της ομογενούς εξίσωσης:

$$y_1(x) = x, \quad y_2(x) = e^x \quad \text{με} \quad W[y_1, y_2] = (x-1)e^x$$

Άρα, η μερική λύση της (5) είναι:

$$y_\mu = f_1(x)y_1 + f_2(x)y_2$$

Μέσω της γνωστής διαδικασίας κατασκευάζουμε το σύστημα (3), τη μοναδική λύση του οποίου λαμβάνουμε με τη μέθοδο Cramer:

$$f_1(x) = \int \frac{W_1}{W} dx = \int \frac{x+1}{x-1} dx = x + 2 \ln|x-1|$$

$$f_2(x) = \int \frac{W_2}{W} dx = -\int \frac{x(x+1)}{e^x(x-1)} dx = -\int xe^{-x} dx - 2 \int \frac{xe^{-x}}{x-1} dx$$

$$= (x+1)e^{-x} + 2e^{-x} - 2 \int \frac{e^{-x}}{x-1} dx$$

$$\int \frac{e^{ax}}{x} dx = E_i(ax) \text{ (exponential integral, βλέπε G.R. [1])}$$

$$\text{Άρα: } \int \frac{e^{-x}}{x-1} dx = \frac{1}{e} \int \frac{e^{1-x}}{1-x} d(1-x) = \frac{1}{e} E_i(1-x)$$

και συνεπώς

$$f_2(x) = (x+3)e^{-x} - \frac{2}{e} E_i(1-x)$$

Επομένως, η γενική λύση της (4) είναι:

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1 y_1 + c_2 y_2 + f_1 y_1 + f_2 y_2 \\ &= c_1 x + c_2 e^x + x^2 + 2x \ln|x-1| + x + 3 + 2e^{x-1} E_i(1-x) \end{aligned}$$

2.1.3 Γενίκευση της μεθόδου μεταβολής των παραμέτρων σε μη ομογενείς γραμμικές εξισώσεις η τάξης ($n > 2$)

$$\boxed{y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{n-1} + \dots + p_1(x)y' + p_0(x)y = r(x), \quad y = y(x)} \quad (6)$$

Έστω $y_i(x)$, $i = 1, \dots, n$ θεμελιώδεις λύσεις της ομογενούς εξίσωσης. Υποθέτουμε μερική λύση της (5) της μορφής:

$$y_\mu(x) = f_1(x)y_1 + \dots + f_n(x)y_n$$

αντικαθιστώντας στην (6) σε n-1 διαδοχικά βήματα κατασκευάζουμε το σύστημα:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ y_1^{n-1} & y_2^{n-1} & \dots & y_n^{n-1} \end{pmatrix}}_{W[y_1, \dots, y_n] \neq 0} \begin{pmatrix} f_1' \\ f_2' \\ \vdots \\ f_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ r(x) \end{pmatrix} \quad (7)$$

με μοναδική λύση (μέθοδος Cramer)

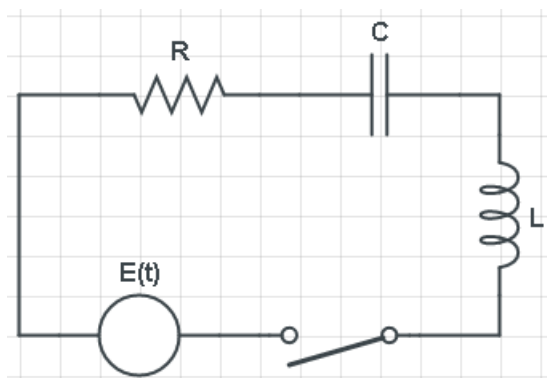
$$f_i(x) = \int \frac{W_i}{W} dx, \quad i = 1, \dots, n$$

Έτσι, η γενική λύση της (5) γράφεται

$$y(x) = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n + f_1 y_1 + \dots + f_n y_n$$

2.2 Σταθεροί συντελεστές

Κύκλωμα RLC



Εικόνα 1- Κύκλωμα RLC

2ος Νόμος του Kirchhoff:

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} q = E(t) \xrightarrow{\frac{dq}{dt}=i}$$

$$\boxed{\frac{d^2 q}{dt^2} + a \frac{dq}{dt} + bq = \frac{E}{L}}, \quad a = \frac{R}{L}, \quad b = \frac{1}{LC} \quad (8)$$

2.2.1 Ομογενής ($E = 0$)

Θεωρούμε λύση της μορφής $q(t) = ce^{\lambda t} \rightarrow$

χαρακτηριστική εξίσωση:

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0, \quad \Delta = a^2 - 4b = \frac{1}{L^2} \left(R^2 - \frac{4L}{C} \right)$$

$$\text{I. } \Delta > 0 \Rightarrow R^2 > \frac{4L}{C} : \lambda_{1,2} = \frac{-R \mp \sqrt{R^2 - \frac{4L}{C}}}{2L} < 0 \Rightarrow$$

$$q(t) = c_1 e^{\frac{-R - \sqrt{R^2 - \frac{4L}{C}}}{2L} t} + c_2 e^{\frac{-R + \sqrt{R^2 - \frac{4L}{C}}}{2L} t}$$

Έχουμε: $\lim_{t \rightarrow +\infty} q(t) = 0$ (απόσβεση)

$$\text{II. } \Delta = 0 \Rightarrow R^2 = \frac{4L}{C} : \lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{R}{2L} < 0 \Rightarrow$$

$$q(t) = (c_1 + c_2 t) e^{-\frac{R}{2L} t}$$

Επίσης, έχουμε $\lim_{t \rightarrow +\infty} q(t) = 0$ (απόσβεση)

$$\text{III. } \Delta < 0 \Rightarrow R^2 < \frac{4L}{C} : \lambda_{1,2} = \frac{-R \pm i \sqrt{\frac{4L}{C} - R^2}}{2L} \Rightarrow$$

$$q(t) = e^{-\frac{R}{2L}t} \left[c_1 \cos \left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} t \right) + c_2 \sin \left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} t \right) \right]$$

ή

$$q(t) = e^{-\frac{R}{2L}t} (c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t), \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

αποσβεννύμενες ταλαντώσεις (το πλάτος τους τείνει στο 0 για $t \rightarrow +\infty$) με ιδιοσυχνότητα ω και σταθερά απόσβεσης $\frac{R}{2L}$.

IIIα. $\Delta < 0$ με $R = 0$, δηλαδή ο συντελεστής της πρώτης παραγώγου στην εξίσωση (8) είναι μηδέν, άρα οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι φανταστικές, $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$:

$$q(t) = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \sin(\omega_0 t), \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

αρμονικές ταλαντώσεις (σταθερό πλάτος) με ιδιοσυχνότητα ω_0

Οι ταλαντώσεις των περιπτώσεων ΙΙΙ και ΙΙΙα καλούνται ελεύθερες.

2.2.2 Μη ομογενής ($E \neq 0$)

Έστω $E = E_0 \cos(\Omega t)$ και $\Delta < 0$ $\left(R^2 < \frac{4L}{C} \right)$

Αναζητούμε μερική λύση q_μ της (8) με τη μέθοδο μεταβολής των παραμέτρων (Βλέπε 2.1β). Έτσι, καθώς οι θεμελιώδεις λύσεις της ομογενούς είναι

$$y_1 = e^{\mu t} \cos \omega t, \quad y_2 = e^{\mu t} \sin \omega t, \quad \mu = -\frac{R}{2L}, \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

με $W = \omega e^{2\mu t}$, υποθέτουμε μερική λύση $q_\mu(t) = f_1(t)y_1 + f_2(t)y_2$, γράφουμε το σύστημα (3) και υπολογίζουμε τα ολοκληρώματα:

$$f_1(t) = \int \frac{W_1}{W} dt = -\int \frac{y_2 r}{W} dt = -\frac{E_0}{\omega L} \int e^{-\mu t} \sin \omega t \cos \Omega t dt$$

$$f_2(t) = \int \frac{W_2}{W} dt = \int \frac{y_1 r}{W} dt = \frac{E_0}{\omega L} \int e^{-\mu t} \cos \omega t \cos \Omega t dt$$

Χρήσει των G.R. 2.664.1 [1] παίρνουμε

$$f_1(t) = \frac{E_0}{2\omega L} e^{-\mu t} \left(\frac{\mu \sin \omega_1 t + \omega_1 \cos \omega_1 t}{\mu^2 + \omega_1^2} + \frac{\mu \sin \omega_2 t + \omega_2 \cos \omega_2 t}{\mu^2 + \omega_2^2} \right)$$

$$f_2(t) = \frac{E_0}{2\omega L} e^{-\mu t} \left(\frac{-\mu \cos \omega_1 t + \omega_1 \sin \omega_1 t}{\mu^2 + \omega_1^2} + \frac{-\mu \cos \omega_2 t + \omega_2 \sin \omega_2 t}{\mu^2 + \omega_2^2} \right)$$

$$\omega_1 = \omega + \Omega, \quad \omega_2 = \omega - \Omega$$

Έτσι, για τη γενική λύση (4) μετά από πράξεις προκύπτει:

$$q(t) = c_1 e^{\mu t} \cos \omega t + c_2 e^{\mu t} \sin \omega t + \frac{E_0}{L} \frac{(\mu^2 + \omega^2 - \Omega^2) \cos(\Omega t) - 2\mu\Omega \sin(\Omega t)}{\left[\mu^2 + (\omega + \Omega)^2 \right] \left[\mu^2 + (\omega - \Omega)^2 \right]},$$

Οι ταλαντώσεις εδώ καλούνται εξαναγκασμένες.

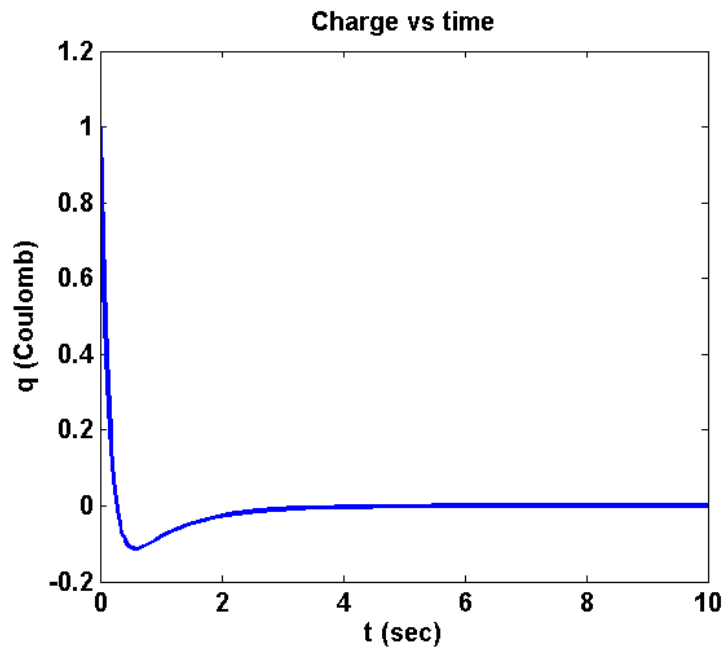
Αν αναζητήσουμε μερική λύση με τη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών, υποθέτουμε λύση της μορφής ($i\Omega$ δεν είναι ρίζα της χαρακτηριστικής)

$$q(t) = A \cos \Omega t + B \sin \Omega t,$$

αντικαθιστώντας στην (8) και εξισώνοντας τους αντίστοιχους συντελεστές των $\cos \Omega t$ και $\sin \Omega t$, βρίσκουμε

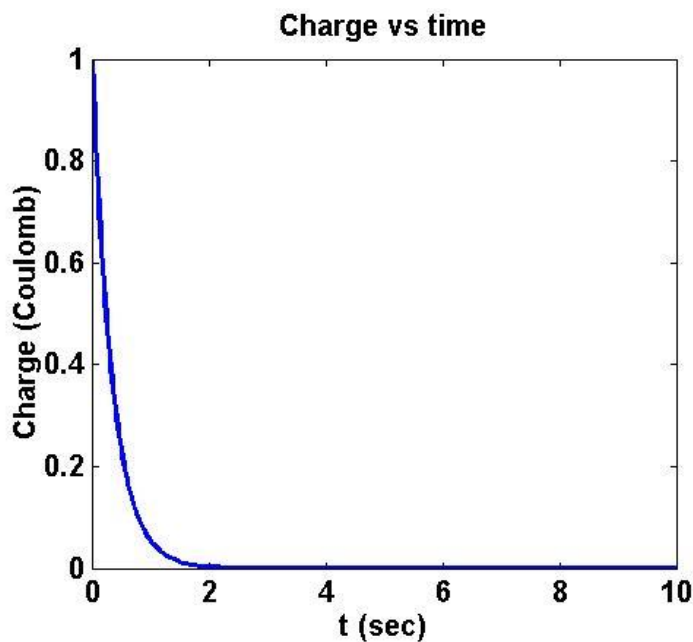
$$A = \frac{E_0}{L} \frac{b - \Omega^2}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \alpha^2 \Omega^2}, \quad B = \frac{E_0}{L} \frac{\alpha \Omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \alpha^2 \Omega^2}.$$

Γραφικές παραστάσεις στην περίπτωση της ομογενούς ΣΔΕ



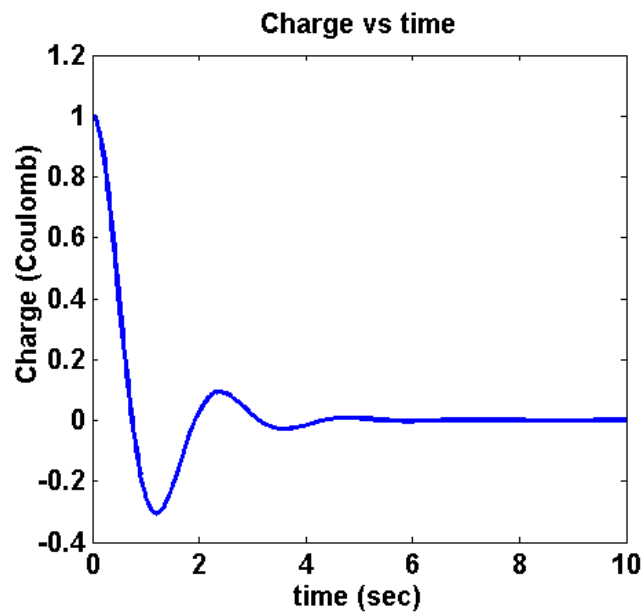
Σχήμα 1-Γραφική παράσταση φορτίου συναρτήσει του χρόνου

$$\text{για } \Delta > 0, R = 8 \Omega, L = 1H, C = \frac{1}{8}F$$



Σχήμα 2- Γραφική παράσταση φορτίου συναρτήσει του χρόνου

$$\text{για } \Delta = 0, R = 6\Omega, L = 1H, C = \frac{1}{9}F$$



Σχήμα 3- Γραφική παράσταση φορτίου συναρτήσει του χρόνου

$$\text{για } \Delta < 0, R = 4\Omega, L = 1H, C = \frac{1}{8}F$$

Βιβλιογραφία

- [1] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Tables of integrals, series and products*, Academic Press, New York and London 1965

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση **1**.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, **Μιχαήλ Μαρκάκης, Επίκουρος Καθηγητής, 2015.. «Διαφορικές Εξισώσεις. Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις 2^{ης} τάξης»**. Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <https://eclass.upatras.gr/courses/EE902>

Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Διατήρηση Σημειωμάτων

- Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:
- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

