Διαφορικές Εξισώσεις

Ενότητα 2: Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις $2^{ης}$ τάξης

Μιχαήλ Μαρκάκης
Πολυτεχνική Σχολή

Τμήμα ΗΜΤΥ

Η παρούσα σελίδα έχει αφεθεί εκουσίως κενή.

α. Σκοποί ενότητας

Σκοποί της παρούσας ενότητας είναι η εισαγωγή στις βασικές έννοιες και στις μεθόδους επίλυσης των συνήθων διαφορικών εξισώσεων (ΣΔΕ) δεύτερης τάξης.

β. Περιεχόμενα ενότητας

Στην ενότητα διατυπώνονται η μορφή και βασικές έννοιες-ορισμοί που σχετίζονται με τις ομογενείς και μη ομογενείς ΣΔΕ δεύτερης τάξης, παρουσιάζεται η μέθοδος μεταβολής των παραμέτρων για τις μη ομογενείς εξισώσεις και παραδείγματα για κάθε περίπτωση.

2.1 Συναρτησιακοί συντελεστές

Ακολουθεί ο ορισμός των ομογενών και μη ομογενών συναρτησιακών συντελεστών μαζί με τους αντίστοιχες ενδεικτικές μεθόδους επιλύσεως και συναφή παραδείγματα.

2.1.1 Ομογενείς

$$\boxed{y'' + p(x)y + q(x)y = 0, \;\; y = y(x)} \qquad (1)$$

Έστω $y_1(x)$ μία λύση της (1).

Υποθέτοντας $y_2 = y_1 s(x)$ ως δεύτερη λύση κι αντικαθιστώντας στην (1), με δύο διαδοχικές ολοκληρώσεις λαμβάνουμε:

$$s(x) = \int \frac{1}{y_1^{\,2}} e^{-\int p(x)dx} dx \text{ ,}$$

και άρα

$$y_2(x) = y_1 \int \frac{1}{y_1^{\,2}} e^{-\int p(x)dx} dx$$

Καθώς η ορίζουσα Wronski προκύπτει

$$W[y_1, y_2] = \det\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} = e^{-\int p dx} \neq 0 \text{ ,}$$

συνεπώς οι $y_1(x),\ y_2(x)$ αποτελούν <u>θεμελιώδεις λύσεις</u> της (1) κι άρα:

$$\boxed{y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}}$$

είναι η <u>γενική λύση</u> της (1).

Παράδειγμα

$$(1-x)y'' + xy' - y = 0,$$

$$p(x) = \frac{x}{1-x}, \quad q(x) = \frac{1}{1-x}$$

$$y_1(x), \quad y_2(x) = x\int \frac{1}{x^2} e^{\int \frac{x}{x-1}dx} dx$$

ή

$$y_2(x) = \pm x\int \frac{x-1}{x^2} e^x dx = \pm x\left[\int \frac{e^x}{x} dx - \int \frac{e^x}{x^2} dx\right]$$

$$= \pm x\left[\frac{e^x}{x} + \int \frac{e^x}{x^2} dx - \int \frac{e^x}{x^2} dx\right] = \pm e^x$$

Άρα <u>γενική λύση</u>:

$$y(x) = c_1 x + c_2 e^x$$

2.1.2 Μη ομογενείς-Μέθοδος μεταβολής των παραμέτρων

$$\boxed{y'' + p(x)\,y' + q(x)\,\mathrm{y} = \mathrm{r}(x),\;\; y = y(x)} \tag{2}$$

- Επιλύουμε την ομογενή:

$$y_0 = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

με $y_1,\ y_2$ τις αντίστοιχες θεμελιώδεις λύσεις:

- Υποθέτουμε μερική λύση της (2) της μορφής

$$y_\mu = f_1(x) y_1 + f_2(x) y_2$$

- Αντικαθιστούμε στη (2) και κατασκευάζουμε τελικά το σύστημα:

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1' \\ f_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ r(x) \end{pmatrix} \tag{3}$$

Καθώς η ορίζουσα W του πίνακα (Wronski) είναι διάφορη του μηδενός, το σύστημα (3) έχει μοναδική λύση

(μέθοδος Cramer):

$$f_1(x) = \int \frac{W_1}{W} dx = -\int \frac{y_2 r}{W} dx$$

$$f_2(x) = \int \frac{W_2}{W} dx = \int \frac{y_1 r}{W} dx$$

Συνεπώς, η γενική λύση της (2) είναι:

$$\boxed{\begin{aligned} y(x) &= y_0 + y_\mu = c_1 y_1 + c_2 y_2 + f_1 y_1 + f_2 y_2 \\ &= c_1 y_1 + c_2 y_2 - y_1 \int \frac{y_2 r}{W} dx + y_2 \int \frac{y_1 r}{W} dx,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}} \tag{4}$$

<u>Παράδειγμα</u>

$$(1-x) y'' + x y' - y = x^2 - 1, \tag{5}$$

$$p(x) = \frac{x}{x-1},\ \ q(x) = \frac{1}{x-1},\ \ r(x) = -x-1$$

Από το προηγούμενο παράδειγμα έχουμε τις θεμελιώδεις λύσεις της ομογενούς εξίσωσης:

$$y_1(x) = x,\ \ y_2(x) = e^x \text{ με } W[y_1, y_2] = (x-1)e^x$$

Άρα, η μερική λύση της (5) είναι:

$$y_\mu = f_1(x) y_1 + f_2(x) y_2$$

Μέσω της γνωστής διαδικασίας κατασκευάζουμε το σύστημα (3), τη μοναδική λύση του οποίου λαμβάνουμε με τη μέθοδο Cramer:

$$f_1(x) = \int \frac{W_1}{W} dx = \int \frac{x+1}{x-1} dx = x + 2\ln|x-1|$$

$$f_2(x) = \int \frac{W_2}{W} dx = -\int \frac{x(x+1)}{e^x (x-1)} dx = -\int x e^{-x} dx - 2\int \frac{x e^{-x}}{x-1} dx$$

$$= (x+1)e^{-x} + 2e^{-x} - 2\int \frac{e^{-x}}{x-1}dx$$

$\int \frac{e^{ax}}{x}dx = E_i(ax)$ (exponential integral, βλέπε G.R. [1])

Άρα: $\int \frac{e^{-x}}{x-1}dx = \frac{1}{e}\int \frac{e^{1-x}}{1-x}d(1-x) = \frac{1}{e}E_i(1-x)$

και συνεπώς

$$f_2(x) = (x+3)e^{-x} - \frac{2}{e}E_i(1-x)$$

Επομένως, η γενική λύση της (4) είναι:

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1 y_1 + c_2 y_2 + f_1 y_1 + f_2 y_2 \\ &= c_1 x + c_2 e^x + x^2 + 2x\ln|x-1| + x + 3 + 2e^{x-1}E_i(1-x) \end{aligned}$$

2.1.3 Γενίκευση της μεθόδου μεταβολής των παραμέτρων σε μη ομογενείς γραμμικές εξισώσεις n τάξης (n>2)

$$\boxed{y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{n-1} + .. + p_1(x)y' + p_0(x)y = r(x), \ \ y = y(x)} \quad (6)$$

Έστω $y_i(x),\ i = 1,..,n$ θεμελιώδεις λύσεις της ομογενούς εξίσωσης. Υποθέτουμε μερική λύση της (5) της μορφής:

$$y_\mu(x) = f_1(x)y_1 + .. + f_n(x)y_n$$

αντικαθιστώντας στην (6) σε n-1 διαδοχικά βήματα κατασκευάζουμε το σύστημα:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1{}' & y_2{}' & \cdots & y_n{}' \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ y_1{}^{n-1} & y_2{}^{n-1} & \cdots & y_n{}^{n-1} \end{pmatrix}}_{W[y_1,..,y_n]\neq 0} \begin{pmatrix} f_1{}' \\ f_2{}' \\ \vdots \\ f_n{}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ r(x) \end{pmatrix} \qquad (7)$$

με μοναδική λύση (μέθοδος Cramer)

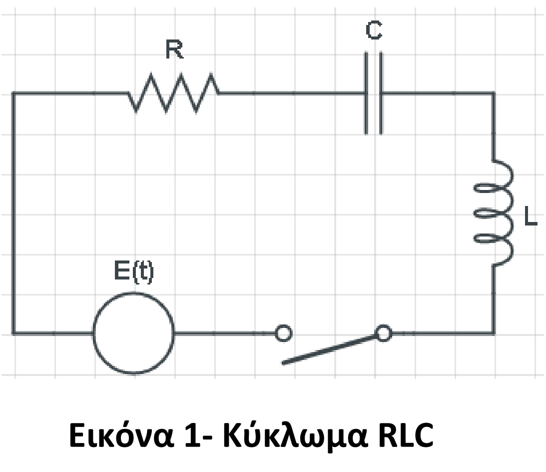
$$f_i(x) = \int \frac{W_i}{W} dx, \quad i = 1,..,n$$

Έτσι, η γενική λύση της (5) γράφεται

$$\boxed{y(x) = c_1 y_1 + .. + c_n y_n + f_1 y_1 + .. + f_n y_n}$$

2.2 Σταθεροί συντελεστές

Κύκλωμα RLC



Εικόνα 1- Κύκλωμα RLC

2ος Νόμος του Kirchhoff:

$$L\frac{di}{dt}+Ri+\frac{1}{C}q=E(t)\xrightarrow{\frac{dq}{dt}=i}$$

$$\boxed{\frac{d^2q}{dt^2}+a\frac{dq}{dt}+bq=\frac{E}{L}},\qquad a=\frac{R}{L},\ \ b=\frac{1}{LC}\tag{8}$$

2.2.1 Ομογενής $(E=0)$

Θεωρούμε λύση της μορφής $q(t)=ce^{\lambda t}\rightarrow$

χαρακτηριστική εξίσωση:

$$\lambda^2+\alpha\lambda+b=0,\ \Delta=\alpha^2-4b=\frac{1}{L^2}\left(R^2-\frac{4L}{C}\right)$$

I. $\Delta>0\Rightarrow R^2>\dfrac{4L}{C}:\quad \lambda_{1,2}=\dfrac{-R\mp\sqrt{R^2-\dfrac{4L}{C}}}{2L}<0\Rightarrow$

$$q(t)=c_1e^{\frac{-R-\sqrt{R^2-\frac{4L}{C}}}{2L}t}+c_2e^{\frac{-R+\sqrt{R^2-\frac{4L}{C}}}{2L}t}$$

Έχουμε: $\lim\limits_{t\to+\infty}q(t)=0$ (απόσβεση)

II. $\Delta=0\Rightarrow R^2=\dfrac{4L}{C}:\quad \lambda_1=\lambda_2=-\dfrac{R}{2L}<0\Rightarrow$

$$q(t)=(c_1+c_2t)e^{-\frac{R}{2L}t}$$

Επίσης, έχουμε $\lim\limits_{t\to+\infty} q(t)=0$ (απόσβεση)

ΙΙΙ. $\Delta<0 \Rightarrow R^2<\dfrac{4L}{C}$: $\lambda_{1,2}=\dfrac{-R\pm i\sqrt{\dfrac{4L}{C}-R^2}}{2L} \Rightarrow$

$$q(t)=e^{-\frac{R}{2L}t}\left[c_1\cos\left(\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}\,t\right)+c_2\sin\left(\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}\,t\right)\right]$$

ή

$$q(t)=e^{-\frac{R}{2L}t}\left(c_1\cos\omega t+c_2\sin\omega t\right),\quad \omega=\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}$$

<u>αποσβεννύμενες ταλαντώσεις</u> (το πλάτος τους τείνει στο 0 για $t\to+\infty$) με <u>ιδιοσυχνότητα</u> ω και <u>σταθερά απόσβεσης</u> $\dfrac{R}{2L}$.

ΙΙΙα. $\Delta<0$ με $R=0$, δηλαδή ο συντελεστής της πρώτης παραγώγου στην εξίσωση (8) είναι μηδέν, άρα οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι φανταστικές, $\lambda_{1,2}=\pm i\omega$:

$$q(t)=c_1\cos(\omega_0 t)+c_2\sin(\omega_0 t),\quad \omega_0=\sqrt{\frac{1}{LC}}$$

<u>αρμονικές ταλαντώσεις</u> (σταθερό πλάτος) με <u>ιδιοσυχνότητα</u> $\underline{\omega_0}$

Οι ταλαντώσεις των περιπτώσεων ΙΙΙ και ΙΙΙα καλούνται ελεύθερες.

2.2.2 Μη ομογενής $(E \neq 0)$

Έστω $E = E_0 \cos(\Omega t)$ και $\Delta < 0 \quad \left(R^2 < \frac{4L}{C} \right)$

Αναζητούμε μερική λύση q_μ της (8) με τη μέθοδο μεταβολής των παραμέτρων (Βλέπε 2.1β). Έτσι, καθώς οι θεμελιώδεις λύσεις της ομογενούς είναι

$$y_1 = e^{\mu t} \cos \omega t, \;\; y_2 = e^{\mu t} \sin \omega t, \; \mu = -\frac{R}{2L}, \; \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

με $W = \omega e^{2\mu t}$, υποθέτουμε μερική λύση $q_\mu(t) = f_1(t) y_1 + f_2(t) y_2$, γράφουμε το σύστημα (3) και υπολογίζουμε τα ολοκληρώματα:

$$f_1(t) = \int \frac{W_1}{W} dt = -\int \frac{y_2 r}{W} dt = -\frac{E_0}{\omega L} \int e^{-\mu t} \sin \omega t \cos \Omega t dt$$

$$f_2(t) = \int \frac{W_2}{W} dt = \int \frac{y_1 r}{W} dt = \frac{E_0}{\omega L} \int e^{-\mu t} \cos \omega t \cos \Omega t dt$$

Χρήσει των G.R. 2.664.1 [1] παίρνουμε

$$f_1(t) = \frac{E_0}{2\omega L} e^{-\mu t} \left(\frac{\mu \sin \omega_1 t + \omega_1 \cos \omega_1 t}{\mu^2 + \omega_1^{\,2}} + \frac{\mu \sin \omega_2 t + \omega_2 \cos \omega_2 t}{\mu^2 + \omega_2^{\,2}} \right)$$

$$f_2\left(t\right)=\frac{E_0}{2\omega L}e^{-\mu t}\left(\frac{-\mu\cos\omega_1 t+\omega_1\sin\omega_1 t}{\mu^2+\omega_1{}^2}+\frac{-\mu\cos\omega_2 t+\omega_2\sin\omega_2 t}{\mu^2+\omega_2{}^2}\right)$$

$$\omega_1=\omega+\Omega,\quad \omega_2=\omega-\Omega$$

Έτσι, για τη γενική λύση (4) μετά από πράξεις προκύπτει:

$$q\left(t\right)=c_1 e^{\mu t}\cos\omega t+c_2 e^{\mu t}\sin\omega t$$

$$+\frac{E_0}{L}\frac{\left(\mu^2+\omega^2-\Omega^2\right)\cos\left(\Omega t\right)-2\mu\Omega\sin\left(\Omega t\right)}{\left[\mu^2+\left(\omega+\Omega\right)^2\right]\left[\mu^2+\left(\omega-\Omega\right)^2\right]},$$

Οι ταλαντώσεις εδώ καλούνται <u>εξαναγκασμένες</u>.

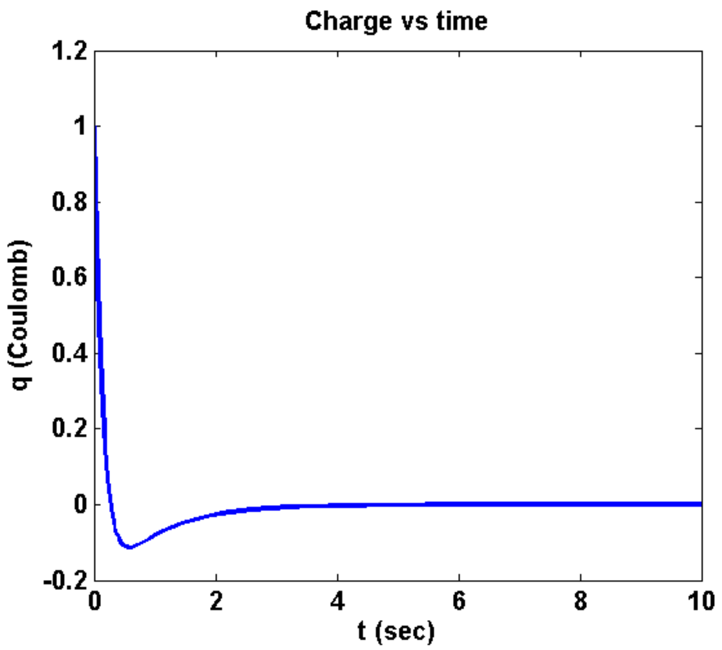
Αν αναζητήσουμε μερική λύση με τη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών, υποθέτουμε λύση της μορφής ($i\Omega$ δεν είναι ρίζα της χαρακτηριστικής)

$$q\left(t\right)=A\cos\Omega t+B\sin\Omega t,$$

αντικαθιστώντας στην (8) και εξισώνοντας τους αντίστοιχους συντελεστές των $\cos\Omega t$ και $\sin\Omega t$, βρίσκουμε

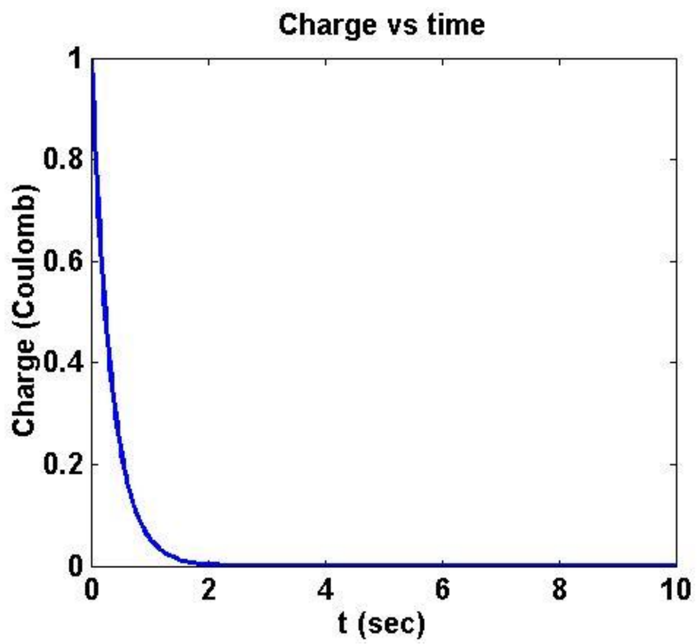
$$A=\frac{\mathrm{E}_0}{L}\frac{b-\Omega^2}{\left(\omega_0{}^2-\Omega^2\right)^2+\alpha^2\Omega^2},\quad B=\frac{\mathrm{E}_0}{L}\frac{\alpha\Omega}{\left(\omega_0{}^2-\Omega^2\right)^2+\alpha^2\Omega^2}.$$

Γραφικές παραστάσεις στην περίπτωση της ομογενούς ΣΔΕ



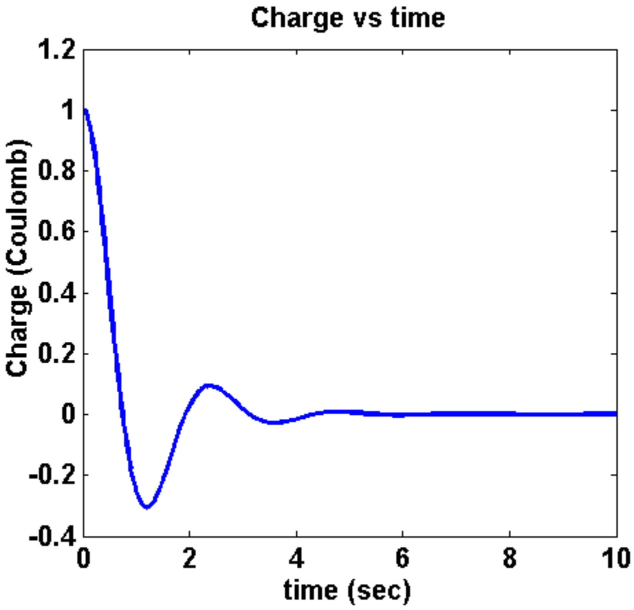
Σχήμα 1-Γραφική παράσταση φορτίου συναρτήσει του χρόνου

για $\Delta > 0,\ R = 8\ \Omega,\ L = 1H,\ C = \frac{1}{8}F$



Σχήμα 2- Γραφική παράσταση φορτίου συναρτήσει του χρόνου

για $\Delta = 0,\ R = 6\Omega,\ L = 1H,\ C = \frac{1}{9}F$



Σχήμα 3- Γραφική παράσταση φορτίου συναρτήσει του χρόνου

για $\Delta < 0,\ R = 4\Omega,\ L = 1H,\ C = \frac{1}{8}F$

Βιβλιογραφία

[1] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Tables of integrals, series and products*, Academic Press, New York and London 1965

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.