

Η Αναπαράσταση του Λευκού Θορύβου Ο λευκός θόρυβος είναι μία στοχαστική διαδικασία η οποία, εξ ορισμού, έχει μία επίπεδη (σταθερή) φασματική πυκνότητα ισχύος σε ολόκληρη την περιοχή συχνοτήτων. Αυτή η μορφή θορύβου δεν μπορεί να εκφραστεί με την βοήθεια ορθογωνίων συνιστωσών, λόγω του ευρυζωνικού χαρακτήρα της.

Στα προβλήματα που σχετίζονται με την αποδιαμόρφωση των σημάτων στενής ζώνης σε παρουσία θορύβου, είναι από μαθηματικής πλευράς βολικό να μοντελοποιήσουμε την διαδικασία του προσθετικού θορύβου ως λευκή και να αναπαραστήσουμε τον θόρυβο με την βοήθεια ορθογωνίων συνιστωσών. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί με την υπόθεση ότι, στο λαμβάνον άκρο, τα σήματα και ο θόρυβος περνούν μέσα από ένα ιδανικό ζωνοδιαβατό φίλτρο, το οποίο έχει μία ζώνη διέλευσης που περιλαμβάνει το φάσμα των σημάτων, αλλά είναι κατά πολύ ευρύτερο. Ένα φίλτρο της μορφής αυτής εισάγει μεν ελάχιστη παραμόρφωση στο σήμα εξουδετερώνει όμως τις συχνοτικές συνιστώσες του θορύβου έξω από το φάσμα.

Ο θόρυβος που προκύπτει από την διέλευση της διαδικασίας λευκού θορύβου μέσω ενός φασματικά επίπεδου (ιδανικού) ζωνοδιαβατού φίλτρου ονομάζεται *ζωνοδιαβατός λευκός θόρυβος* (*bandpass white noise*) και έχει την φασματική πυκνότητα ισχύος που παρουσιάζεται στο Σχ. 3-1-3. Ο ζωνοδιαβατός λευκός θόρυβος μπορεί να αναπαρασταθεί υπό οποιαδήποτε από τις μορφές που δίνονται από τις (3-1-37), (3-1-38) και (3-1-39). Ο ισοδύναμος κατωδιαβατός θόρυβος $z(t)$ έχει μία φασματική πυκνότητα ισχύος

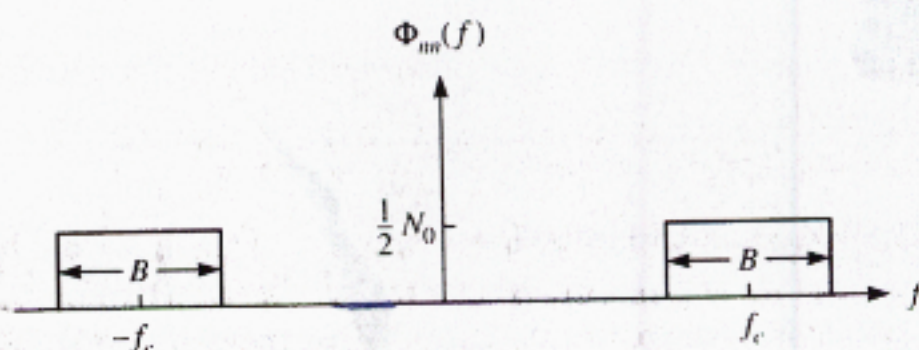
$$\Phi_{zz}(f) = \begin{cases} N_0 & (|f| \leq \frac{1}{2} B) \\ 0 & (|f| > \frac{1}{2} B) \end{cases} \quad (3-1-56)$$

και η συνάρτηση αυτοσυσχέτισής του είναι

$$\Phi_{zz}(\tau) = N_0 \frac{\sin \pi B \tau}{\pi \tau} \quad (3-1-57)$$

Το όριο της $\phi_{zz}(\tau)$ καθώς το B τείνει προς το άπειρο είναι

$$\phi_{zz}(\tau) = N_0 \delta(\tau) \quad (3-1-58)$$



ΣΧΗΜΑ 3-1-3 Ζωνοδιαβατός θόρυβος με επίπεδο φάσμα.

Η φασματική πυκνότητα ισχύος για τον λευκό θόρυβο και τον ζωνοδιαβατό λευκό θόρυβο είναι συμμετρική γύρω από το $f = 0$, άρα, $\phi_{yx}(\tau) = 0$ για κάθε τ . Συνεπώς,

$$\phi_{zz}(\tau) = \phi_{xx}(\tau) = \phi_{yy}(\tau) \quad (3-1-59)$$

Με άλλα λόγια, οι ορθογώνιες συνιστώσες $x(t)$ και $y(t)$ είναι ασυσχέτιστες για όλες τις χρονικές ολισθήσεις τ και οι συναρτήσεις αυτοσυσχέτισης των $z(t)$, $x(t)$ και $y(t)$ είναι όλες ίσες.

3-2 ΟΙ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΣΤΟΝ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟ ΧΩΡΟ ΤΩΝ ΣΗΜΑΤΩΝ - ΑΣΤΕΡΙΣΜΟΙ

Στην ενότητα αυτή, θα δείξουμε ότι τα σήματα διαθέτουν χαρακτηριστικά που είναι παρόμοια με αυτά των διανυσμάτων και θα αναπτύξουμε μία διανυσματική αναπαράσταση για τις κυματομορφές των σημάτων. Αρχίζουμε με μερικούς βασικούς ορισμούς και μερικές αρχές που αφορούν τα διανύσματα.

4-2-1 Οι Αρχές των Διανυσματικών Χώρων

Ένα διάνυσμα \mathbf{v} σε ένα χώρο n διαστάσεων χαρακτηρίζεται από τις n συνιστώσες του $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Μπορεί επίσης να αναπαρασταθεί ως ένας γραμμικός συνδυασμός μοναδιαίων διανυσμάτων (*unit vectors*) ή διανυσμάτων βάσης (*basis vectors*), \mathbf{e}_i , όπου $1 \leq i \leq n$, δηλαδή

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n u_i \mathbf{e}_i \quad (3-2-1)$$

όπου, εξ ορισμού, ένα μοναδιαίο διάνυσμα έχει μοναδιαίο μήκος και v_i είναι η προβολή του διανύσματος \mathbf{v} στην μονάδα διανυσμάτων \mathbf{e}_i .

Το εσωτερικό γινόμενο (*inner product*) δύο n -διάστατων διανυσμάτων $\mathbf{v}_1 = \{v_{11} \ v_{12} \ \dots \ v_{1n}\}$ και $\mathbf{v}_2 = \{v_{21} \ v_{22} \ \dots \ v_{2n}\}$ ορίζεται ως εξής

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = \sum_{i=1}^n v_{1i} v_{2i} \quad (3-2-2)$$

Δύο διανύσματα \mathbf{v}_1 και \mathbf{v}_2 είναι ορθογώνια εάν $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$. Γενικότερα, ένα σύνολο από m διανύσματα \mathbf{v}_k , $1 \leq k \leq m$, είναι ορθογώνια εάν

$$\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = 0 \quad (3-2-3)$$

για κάθε $1 \leq i, j \leq m$ και $i \neq j$.

Το μέτρο ενός διανύσματος \mathbf{v} δηλώνεται ως $\|\mathbf{v}\|$ και υπολογίζεται ως εξής:

$$\|\mathbf{v}\| = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})^{1/2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2} \quad (3-2-4)$$

το οποίο είναι απλά το μήκος του. Ένα σύνολο από m διανύσματα λέγονται ορθοκανονικά εάν τα διανύσματα είναι ορθογώνια και κάθε ένα από αυτά έχει μέτρο ίσο με την μονάδα. Ένα σύνολο από m διανύσματα λέγονται γραμμικώς ανεξάρτητα (*linearly independent*) εάν κανένα από αυτά δεν μπορεί να αναπαρασταθεί ως ένας γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων διανυσμάτων.

Δύο n -διάστατα διανύσματα \mathbf{v}_1 και \mathbf{v}_2 ικανοποιούν την τριγωνική ανισότητα (*triangle inequality*)

$$\|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2\| \leq \|\mathbf{v}_1\| + \|\mathbf{v}_2\| \quad (3-2-5)$$

και η ισότητα ισχύει όταν τα \mathbf{v}_1 και \mathbf{v}_2 είναι στην ίδια διεύθυνση, δηλαδή, $\mathbf{v}_1 = a \mathbf{v}_2$ όπου ο a είναι θετικός πραγματικός αριθμός. Από την τριγωνική ανισότητα προκύπτει και η ανισότητα *Cauchy-Schwartz*

$$\|\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2\| \leq \|\mathbf{v}_1\| + \|\mathbf{v}_2\| \quad (3-2-6)$$

όπου η ισότητα ισχύει εάν $\mathbf{v}_1 = a \mathbf{v}_2$. Το κανονικοποιημένο τετράγωνο του αθροίσματος δύο διανυσμάτων μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

$$\|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2\|^2 = \|\mathbf{v}_1\|^2 + \|\mathbf{v}_2\|^2 + 2\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 \quad (3-2-7)$$

Εάν τα \mathbf{v}_1 και \mathbf{v}_2 είναι ορθογώνια τότε $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$ και, επομένως, ισχύει

$$\|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2\|^2 = \|\mathbf{v}_1\|^2 + \|\mathbf{v}_2\|^2 \quad (3-2-8)$$

Αυτή είναι η πυθαγόρεια σχέση για δύο ορθογώνια n -διάστατα διανύσματα. Από την γραμμική άλγεβρα γνωρίζουμε ότι ένας γραμμικός μετασχηματισμός σε ένα χώρο n διαστάσεων είναι ένας μετασχηματισμός πίνακα της μορφής

$$\mathbf{v}' = \mathbf{A} \mathbf{v} \quad (3-2-9)$$

όπου ο πίνακας \mathbf{A} μετασχηματίζει το διάνυσμα \mathbf{v} σε κάποιο διάνυσμα \mathbf{v}' . Στην ειδική περίπτωση όπου $\mathbf{v}' = \lambda \mathbf{v}$, ήτοι

$$\mathbf{A} \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v} \quad (3-2-10)$$

όπου λ είναι κάποιος πραγματικός αριθμός (θετικός ή αρνητικός), το διάνυσμα \mathbf{v} ονομάζεται *ιδιοδιάνυσμα (eigenvector)* του μετασχηματισμού και λ είναι η αντίστοιχη *ιδιοτιμή (eigenvalue)*. Τέλος, ας εξετάσουμε την διαδικασία Gram-Schmidt για την κατασκευή ενός συνόλου ορθοκανονικών διανυσμάτων από ένα σύνολο διανυσμάτων n διαστάσεων, \mathbf{v}_i όπου $1 \leq i \leq m$. Αρχικά επιλέγουμε αυθαίρετα ένα διάνυσμα από το σύνολο, ας πούμε το \mathbf{v}_1 . Κανονικοποιώντας το μήκος του, παίρνουμε το πρώτο διάνυσμα,

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} \quad (3-2-11)$$

Στην συνέχεια, μπορούμε να επιλέξουμε το διάνυσμα \mathbf{v}_2 και, πρώτα, να αφαιρέσουμε την προβολή του διανύσματος \mathbf{v}_2 πάνω στο \mathbf{u}_1 . Έτσι, παίρνουμε

$$\mathbf{u}_2' = \mathbf{v}_2 - (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1) \mathbf{u}_1 \quad (3-2-12)$$

Στην συνέχεια κανονικοποιούμε το διάνυσμα \mathbf{u}_2' στο μοναδιαίο μήκος ως εξής:

$$\mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{u}_2'}{\|\mathbf{u}_2'\|} \quad (3-2-13)$$

Η διαδικασία συνεχίζεται με την επιλογή του \mathbf{v}_3 και την αφαίρεση των προβολών του \mathbf{v}_3 πάνω στο \mathbf{u}_1 και \mathbf{u}_2 . Έτσι έχουμε

$$\mathbf{u}'_3 = \mathbf{v}_3 - (\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 - (\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2 \quad (3-2-14)$$

Τότε, το ορθοκανονικό διάνυσμα \mathbf{u}_3 είναι

$$\mathbf{u}_3 = \frac{\mathbf{u}'_3}{\|\mathbf{u}'_3\|} \quad (3-2-15)$$

Συνεχίζοντας την διαδικασία φτιάχνουμε, ένα σύνολο n_1 ορθοκανονικών διανυσμάτων, όπου γενικά $n_1 \leq n$. Αν $m < n$, τότε $n_1 \leq m$ και, αν $m \geq n$, τότε $n_1 \leq n$.

4-2-2 Οι Αρχές Του Διανυσματικού Χώρου Των Σημάτων

Όπως στην περίπτωση των διανυσμάτων μπορούμε να αναπτύξουμε μια παράλληλη διαδικασία για ένα σύνολο σημάτων ορισμένων σε ένα διάστημα $[a, b]$. Το εσωτερικό γινόμενο δυο σημάτων μιγαδικών, στην γενική περίπτωση, τιμών, $x_1(t)$ και $x_2(t)$ δηλώνεται ως $\langle x_1(t), x_2(t) \rangle$ και ορίζεται ως

$$\langle x_1(t), x_2(t) \rangle = \int_a^b x_1(t)x_2^*(t)dt \quad (3-2-16)$$

Τα σήματα είναι ορθογώνια εάν το εσωτερικό τους γινόμενο είναι μηδενικό. Το μέτρο (*norm*) ενός σήματος ορίζεται ως

$$\|x(t)\| = \left(\int_a^b |x(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3-2-17)$$

Ένα σύνολο m σημάτων είναι *ορθοκανονικά* (*orthonormal*) εάν είναι ορθογώνια και τα μέτρα τους είναι μοναδιαία.

Ένα σύνολο m σημάτων είναι *γραμμικώς ανεξάρτητα* (*linearly independent*) εάν κανένα σήμα δεν μπορεί να εκφρασθεί ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων σημάτων.

Η τριγωνική ανισότητα για δυο σήματα είναι απλά

$$\|x_1(t) + x_2(t)\| \leq \|x_1(t)\| + \|x_2(t)\| \quad (3-2-18)$$

και η Cauchy-Schwartz ανισότητα είναι

$$\left| \int_a^b x_1(t)x_2^*(t)dt \right| \leq \left| \int_a^b |x_1(t)|^2 dt \right|^{\frac{1}{2}} \left| \int_a^b |x_2(t)|^2 dt \right|^{\frac{1}{2}} \quad (3-2-19)$$

όπου η ισότητα ισχύει όταν $x_2(t) = ax_1(t)$ όπου a είναι ένας μιγαδικός αριθμός.

4-2-3 Η Ορθογώνια Ανάπτυξη Των Σημάτων

Στην τρέχουσα ενότητα, θα αναπτύξουμε μια διανυσματική αναπαράσταση των κυματομορφών σήματος και, έτσι, θα περιγράψουμε μια ισοδυναμία μεταξύ των κυματομορφών σήματος και τις διανυσματικής τους αναπαράστασης.

Υποθέστε ότι το $s(t)$ είναι ένα πραγματικών τιμών ντετερμινιστικό σήμα και πεπερασμένης ενέργειας

$$E_s = \int_{-\infty}^{+\infty} [s(t)]^2 dt \quad (3-2-20)$$

Επιπλέον υποθέστε ότι υπάρχει ένα σύνολο συναρτήσεων $\{f_n(t), n = 1, 2, \dots, N\}$ οι οποίες είναι ορθοκανονικές υπό την έννοια

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n(t) f_m(t) dt = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ 1 & (m = n) \end{cases} \quad (3-2-21)$$

Μπορούμε να προσεγγίσουμε το σήμα $s(t)$ με έναν σταθμισμένο γραμμικό συνδυασμό αυτών των συναρτήσεων

$$\bar{s}(t) = \sum_{k=1}^K s_k f_k(t) \quad (3-2-22)$$

όπου $\{s_k, 1 \leq k \leq K\}$ είναι οι συντελεστές που χρησιμοποιήθηκαν στην προσέγγιση του $s(t)$. Το λάθος προσέγγισης είναι

$$e(t) = s(t) - \bar{s}(t) \quad (3-2-23)$$

Ας επιλέξουμε τώρα τους συντελεστές $\{s_k\}$ με τρόπον ώστε να ελαχιστοποιήσουμε την ενέργεια E_e του λάθους προσέγγισης. Έτσι,

$$\begin{aligned} E_e &= \int_{-\infty}^{\infty} [s(t) - \hat{s}(t)]^2 dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[s(t) - \sum_{k=1}^K s_k f_k(t) \right]^2 dt \end{aligned} \quad (3-2-24)$$

Οι βέλτιστοι συντελεστές στην ανάπτυξη σειράς του $s(t)$ μπορούν να βρεθούν με παραγωγή της (3-2-24) ως προς καθέναν από τους συντελεστές $\{s_k\}$ και θέτοντας τις πρώτες παραγώγους ίσες με το μηδέν. Εναλλακτικά, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα ευρέως γνωστό αποτέλεσμα από την θεωρία εκτίμησης (estimation theory) που βασίζεται στο κριτήριο του μέσου τετραγωνικού λάθους, το οποίο, με απλά λόγια, καθορίζει ότι το E_e ελαχιστοποιείται ως προς το $\{s_k\}$ όταν το λάθος είναι ορθογώνιο προς κάθε μία από τις συναρτήσεις της ανάπτυξη σειράς.

Έτσι,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[s(t) - \sum_{k=1}^K s_k f_k(t) \right] f_n(t) dt = 0 \quad \text{όπου } n = 1, 2, \dots, K \quad (3-2-25)$$

Εφ' όσον οι συναρτήσεις $\{f_n(t)\}$ είναι ορθοκανονικές, η (3-2-25) ανάγεται στην

$$s_n = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) f_n(t) dt \quad \text{όπου } n = 1, 2, \dots, K \quad (3-2-26)$$

Άρα, οι συντελεστές υπολογίζονται με την προβολή του σήματος $s(t)$ σε κάθε μια από τις συναρτήσεις $\{f_n(t)\}$. Επομένως, το $\bar{s}(t)$ είναι η προβολή του $s(t)$ στον K διαστάσεων χώρο των σημάτων που ορίζεται από τις συναρτήσεις $\{f_n(t)\}$. Το ελάχιστο μέσο τετραγωνικό λάθος προσέγγισης είναι

$$\begin{aligned} E_{\min} &= \int_{-\infty}^{\infty} e(t) s(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [s(t)]^2 dt - \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^K s_k f_k(t) s(t) dt \\ &= E_S - \sum_{k=1}^K s_k^2 \end{aligned} \quad (3-2-27)$$

το οποίο είναι εξ' ορισμού μεγαλύτερο ή ίσο με το μηδέν. Όταν το ελάχιστο μέσο τετραγωνικό λάθος προσέγγισης είναι μηδενικό,

$$E_S = \sum_{k=1}^K s_k^2 = \int_{-\infty}^{\infty} [s(t)]^2 dt \quad (3-2-28)$$

Υπό την συνθήκη $E_{\min} = 0$, μπορούμε να εκφράσουμε το $s(t)$ ως εξής

$$s(t) = \sum_{k=1}^K s_k f_k(t) \quad (3-2-29)$$

όπου πρέπει να γίνει κατανοητό ότι η ισότητα του $s(t)$ με την επέκτασή του σε σειρά έχει την έννοια ότι το λάθος προσέγγισης έχει μηδενική ενέργεια.

Όταν κάθε πεπερασμένης ενέργειας σήμα μπορεί να αναπαρασταθεί με μια ανάπτυξη σειράς της μορφής της (3-2-29) με $E_{\min} = 0$, το σύνολο των ορθοκανονικών συναρτήσεων $\{f_n(t)\}$ λέγεται ότι είναι *πλήρες* (*complete*).

Παράδειγμα 3-2-1: Οι Τριγωνομετρικές Σειρές Fourier.

Ένα πεπερασμένης ενέργειας σήμα $s(t)$ το οποίο είναι μηδενικό παντού εκτός του διαστήματος $0 \leq t \leq T$ και παρουσιάζει έναν πεπερασμένο αριθμό ασυνεχειών στο διάστημα αυτό μπορεί να αναπαρασταθεί από μια σειρά Fourier της μορφής

$$s(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{2\pi kt}{T} + b_k \sin \frac{2\pi kt}{T} \right) \quad (3-2-30)$$

όπου οι συντελεστές $\{a_k, b_k\}$ οι οποίοι ελαχιστοποιούν το μέσο τετραγωνικό λάθος δίνονται από τις εξισώσεις

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T s(t) \cos \frac{2\pi kt}{T} dt \\ b_k &= \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T s(t) \sin \frac{2\pi kt}{T} dt \end{aligned} \quad (3-2-31)$$

Το σύνολο των τριγωνομετρικών συναρτήσεων $\{\sqrt{2/T} \cos 2\pi kt/T, \sqrt{2/T} \sin 2\pi kt/T\}$ είναι πλήρες και, επομένως, τα αποτελέσματα της ανάπτυξης σε σειρά οδηγούν σε μηδενικό μέσο τετραγωνικό σφάλμα. Αυτές οι ιδιότητες επαληθεύονται εύκολα από την παραπάνω ανάλυση.

Η Διαδικασία Gram-Schmidt Υποθέστε ότι έχουμε ένα σύνολο κυματομορφών σήματος πεπερασμένης ενέργειας $\{s_i(t), i = 1, 2, \dots, M\}$ και ότι επιθυμούμε να κατασκευάσουμε ένα σύνολο ορθοκανονικών κυματομορφών. Η Gram-Schmidt διαδικασία ορθογωνιοποίησης μας επιτρέπει να κατασκευάσουμε ένα τέτοιο σύνολο. Αρχίζουμε με την πρώτη κυματομορφή $s_1(t)$ για την οποία υποθέτουμε ότι έχει ενέργεια E_1 . Η πρώτη κυματομορφή κατασκευάζεται με τον εξής απλό τρόπο

$$f_1(t) = \frac{s_1(t)}{\sqrt{E_1}} \quad (3-2-32)$$

Επομένως, η $f_1(t)$ είναι απλώς η $s_1(t)$ κανονικοποιημένη σε μοναδιαία ενέργεια. Η δεύτερη κυματομορφή κατασκευάζεται από το $s_2(t)$ υπολογίζοντας πρώτα την προβολή της $f_1(t)$ πάνω στο $s_2(t)$, η οποία είναι

$$c_{12} = \int_{-\infty}^{\infty} s_2(t) f_1(t) dt \quad (3-2-33)$$

Τότε, το $c_{12} f_1(t)$ αφαιρείται από το $s_2(t)$ ώστε να προκύψει το

$$f_2'(t) = s_2(t) - c_{12} f_1(t) \quad (3-2-34)$$

Αυτή η κυματομορφή είναι ορθογώνια ως προς την $f_1(t)$ αλλά δεν έχει μοναδιαία ενέργεια. Εάν το E_2 παριστά την ενέργεια της $f_2'(t)$, η κανονικοποιημένη κυματομορφή η οποία είναι ορθογώνια ως προς την $f_1(t)$ είναι

$$f_2(t) = \frac{f_2'(t)}{\sqrt{E_2}} \quad (3-2-35)$$

Γενικώς, η ορθογωνιοποίηση της k -οστής συνάρτησης οδηγεί στην σχέση

$$f_k(t) = \frac{f'_k(t)}{\sqrt{E_k}} \quad (3-2-36)$$

όπου

$$f'_k(t) = s_k(t) - \sum_{i=1}^{k-1} c_{ik} f_i(t) \quad (3-2-37)$$

και

$$c_{ik} = \int_{-\infty}^{\infty} s_k(t) f_i(t) dt, \quad i = 1, 2, \dots, k-1 \quad (3-2-38)$$

Επομένως, η διαδικασία ορθογωνιοποίησης συνεχίζεται μέχρι να εξαντληθούν όλες οι M κυματομορφές σήματος $\{s_i(t)\}$ και να κατασκευασθούν οι $N \leq M$ ορθοκανονικές κυματομορφές. Η διαστατικότητα N του χώρου σημάτων θα είναι ίση με το M εάν όλες οι κυματομορφές σήματος είναι γραμμικώς ανεξάρτητες, δηλαδή καμία από τις κυματομορφές των σημάτων δεν αποτελεί γραμμικό συνδυασμό των άλλων κυματομορφών σήματος.

Παράδειγμα 3-2-2

Ας εφαρμόσουμε την διαδικασία Gram-Schmidt σε ένα σύνολο τεσσάρων κυματομορφών που φαίνονται στο Σχήμα 3-2-1(α). Η κυματομορφή $s_1(t)$ έχει ενέργεια $E_1 = 2$, οπότε $f_1(t) = \sqrt{\frac{1}{2}} s_1(t)$. Κατόπιν παρατηρούμε ότι $c_{12} = 0$. Επομένως τα $s_2(t)$ και $f_1(t)$ είναι ορθογώνια. Συνεπώς, $f_2(t) = s_2(t) / \sqrt{E_2} = \sqrt{\frac{1}{2}} s_2(t)$. Για να κατασκευάσουμε το $f_3(t)$, υπολογίζουμε τα c_{13} και c_{23} , τα οποία είναι $c_{13} = \sqrt{2}$ και $c_{23} = 0$. Έτσι λοιπόν

$$f'_3(t) = s_3(t) - \sqrt{2} f_1(t) = \begin{cases} -1 & (2 \leq t \leq 3) \\ 0 & (\text{αλλίως}) \end{cases}$$

Αφού η $f'_3(t)$ έχει μοναδιαία ενέργεια, έπεται ότι $f_3(t) = f'_3(t)$. Κατά τον υπολογισμό του $f_4(t)$ βρίσκουμε ότι $c_{14} = -\sqrt{2}$, $c_{24} = 0$ και $c_{34} = 1$. Επομένως,

$$f'_4(t) = s_4(t) + \sqrt{2} f_1(t) - f_3(t) = 0.$$

Συνεπώς, το $s_4(t)$ είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των $f_1(t)$ και $f_3(t)$ και έτσι $f_4(t) = 0$. Οι τρεις ορθοκανονικές συναρτήσεις φαίνονται στο Σχ. 3-2-1(β).

Μετά τον καθορισμό του συνόλου των ορθοκανονικών κυματομορφών $\{f_n(t)\}$, μπορούμε να εκφράσουμε τα M σήματα $\{s_n(t)\}$ ως γραμμικούς συνδυασμούς των $\{f_n(t)\}$. Έτσι μπορούμε να γράψουμε ότι

$$s_k(t) = \sum_{n=1}^N s_{kn} f_n(t), \quad k = 1, 2, \dots, M \quad (3-2-39)$$

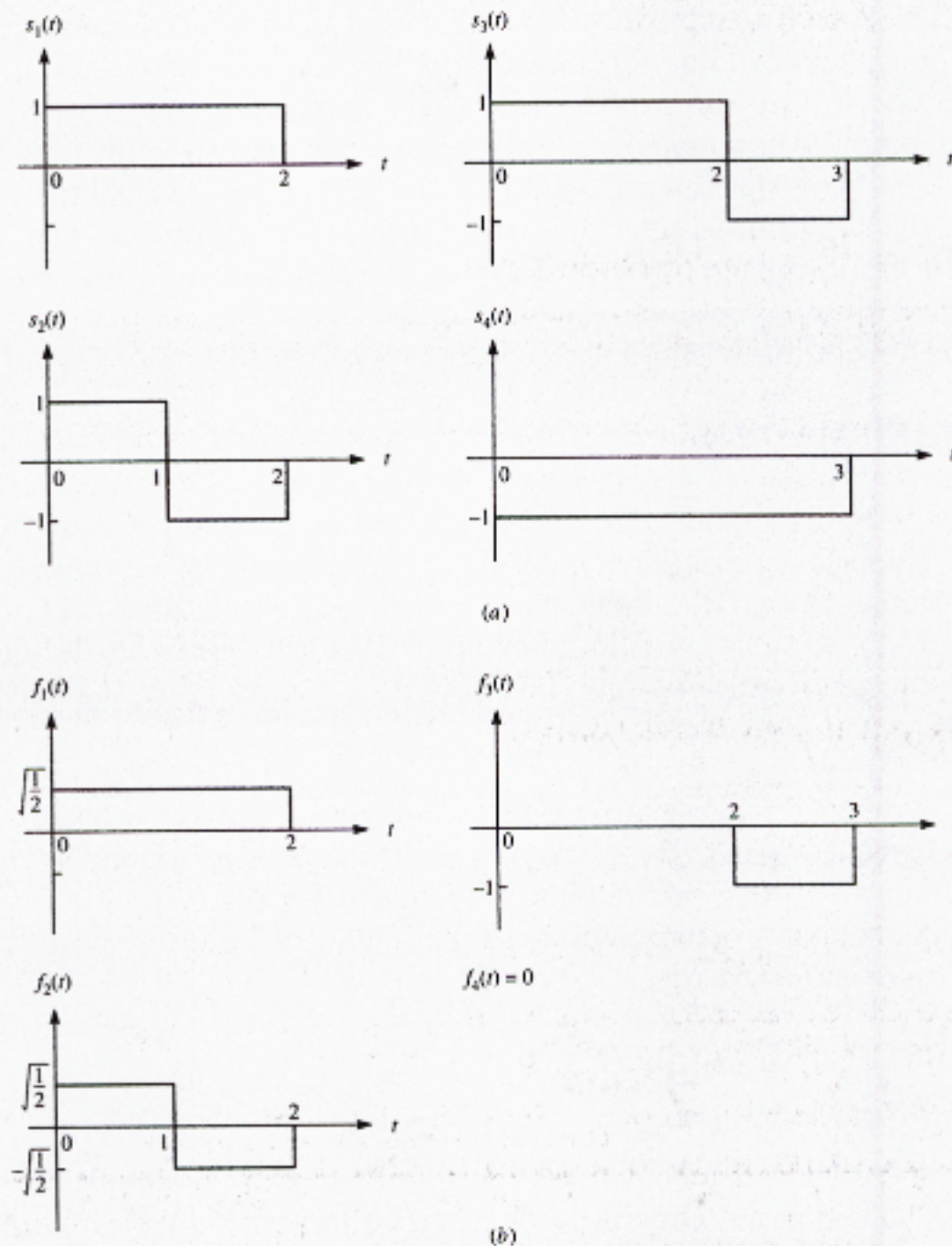
και

$$E_k = \int_{-\infty}^{\infty} [s_k(t)]^2 dt = \sum_{n=1}^N s_{kn}^2 = \|\mathbf{s}_k\|^2 \quad (3-2-40)$$

Βάσει της εξίσωσης (3-2-39), κάθε σήμα μπορεί να αναπαρασταθεί από το διάνυσμα

$$\mathbf{s}_k = [s_{k1} \ s_{k2} \ \dots \ s_{kN}] \quad (3-2-41)$$

ή, ισοδύναμα, σαν ένα σημείο στον N -διάστατο χώρο των σημάτων, με συντεταγμένες $\{s_{ki}, i = 1, 2, \dots, N\}$. Η ενέργεια του k -οστού σήματος είναι απλά το τετράγωνο του μήκους του διανύσματος, ή, ισοδύναμα, το τετράγωνο της Ευκλείδειας απόστασης από την αρχή έως το σημείο στον N -διάστατο χώρο. Έτσι, κάθε σήμα μπορεί να αναπαρασταθεί γεωμετρικά ως ένα σημείο στον χώρο των σημάτων που ορίζεται από τις ορθοκανονικές συναρτήσεις $\{f_n(t)\}$.



ΣΧΗΜΑ 3-2-1 Η Gram-Schmidt ορθογωνοποίηση των σημάτων $\{s_i(t), i = 1, 2, 3, 4\}$ και τα αντίστοιχα ορθογώνια σήματα

Παράδειγμα 3-2-3

Ας καθορίσουμε την διανυσματική αναπαράσταση των τεσσάρων σημάτων που φαίνονται στο Σχ. 3-2-1(α) χρησιμοποιώντας το ορθοκανονικό σύνολο των συναρτήσεων στο Σχ. 3-2-1(β). Αφού η διαστατικότητα του χώρου των σημάτων είναι $N = 3$, κάθε σήμα περιγράφεται από τρεις συνιστώσες. Το σήμα $s_1(t)$ χαρακτηρίζεται από το διάνυσμα $\mathbf{s}_1 = (\sqrt{2}, 0, 0)$. Παρομοίως τα σήματα $s_2(t)$, $s_3(t)$ και $s_4(t)$ χαρακτηρίζονται από τα διανύσματα $\mathbf{s}_2 = (0, \sqrt{2}, 0)$, $\mathbf{s}_3 = (\sqrt{2}, 0, 1)$ και $\mathbf{s}_4 = (-\sqrt{2}, 0, 1)$, αντιστοίχως. Αυτά τα διανύσματα δείχνονται στο Σχ. 3-2-2. Τα μήκη τους είναι $|\mathbf{s}_1| = \sqrt{2}$, $|\mathbf{s}_2| = \sqrt{2}$, $|\mathbf{s}_3| = \sqrt{3}$ και $|\mathbf{s}_4| = \sqrt{3}$, και οι αντίστοιχες ενέργειες των σημάτων είναι $E_k = |\mathbf{s}_k|^2$, $k = 1, 2, 3, 4$.

Έχουμε αποδείξει ότι ένα σύνολο από M πεπερασμένης ενέργειας κυματομορφές $\{s_n(t)\}$ μπορεί να αναπαρασταθεί από έναν σταθμισμένο γραμμικό συνδυασμό των ορθοκανονικών συναρτήσεων $\{f_n(t)\}$ διαστατικότητας $N \leq M$. Οι συναρτήσεις $\{f_n(t)\}$ αποκτούνται με την βοήθεια της Gram-Schmidt διαδικασίας ορθοκανονικοποίησης πάνω στα $\{s_n(t)\}$. Θα πρέπει να σημειωθεί, ωστόσο, ότι οι συναρτήσεις $\{f_n(t)\}$ που προκύπτουν από Gram-Schmidt διαδικασία δεν είναι μοναδικές. Αν μεταβάλλουμε την σειρά με την οποία γίνεται η ορθογωνιοποίηση των σημάτων $\{s_n(t)\}$, οι ορθοκανονικές κυματομορφές θα είναι διαφορετικές και η αντίστοιχη διανυσματική αναπαράσταση των σημάτων $\{s_n(t)\}$ θα εξαρτάται από την επιλογή των ορθοκανονικών συναρτήσεων $\{f_n(t)\}$. Πάντως, τα διανύσματα $\{\mathbf{s}_n\}$ θα διατηρήσουν την γεωμετρική τους διάταξη και τα μήκη τους θα είναι ανεξάρτητα από την εκλογή των ορθοκανονικών συναρτήσεων $\{f_n(t)\}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3-2-4

Στο Σχ. 3-2-3(α) παρουσιάζεται ένα εναλλακτικό σύνολο ορθοκανονικών συναρτήσεων για τα τέσσερα σήματα του Σχ. 3-2-1. Χρησιμοποιώντας τις συναρτήσεις αυτές για να αναπτύξουμε το $\{s_n(t)\}$, παίρνουμε τα αντίστοιχα διανύσματα $\mathbf{s}_1 = (1, 1, 0)$, $\mathbf{s}_2 = (1, -1, 0)$, $\mathbf{s}_3 = (1, 1, -1)$ και $\mathbf{s}_4 = (-1, -1, -1)$, τα οποία απεικονίζονται στο Σχ. 3-2-3(β). Σημειώστε ότι τα μήκη των διανυσμάτων ταυτίζονται με αυτά που υπολογίσθηκαν από τις ορθοκανονικές συναρτήσεις $\{f_n(t)\}$.

Οι ορθογώνιες αναπτύξεις που περιγράφηκαν παραπάνω κατασκευάστηκαν με κυματομορφές σήματος πραγματικών τιμών. Η γενίκευση σε σήματα κυματομορφών με μιγαδικές τιμές αφήνεται ως άσκηση στον αναγνώστη (δες Προβλήματα 3-6 και 3-7).

Τέλος, ας θεωρήσουμε την περίπτωση κατά την οποία οι κυματομορφές των σημάτων είναι ζωνοδιαβατές και αναπαρίστανται ως

$$s_m(t) = \operatorname{Re} \left[s_{lm}(t) e^{j2\pi f_c t} \right], \quad m = 1, 2, \dots, M \quad (3-2-42)$$

όπου $\{s_{lm}(t)\}$ υποδηλώνει τα ισοδύναμα κατωδιαβατά σήματα. Θυμηθείτε ότι η ενέργεια των σημάτων μπορεί να εκφραστεί είτε συναρτήσει του $\{s_{lm}(t)\}$ είτε συναρτήσει του $\{s_m(t)\}$, ως

$$E_m = \int_{-\infty}^{\infty} s_m^2(t) dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |s_{lm}(t)|^2 dt \quad (3-2-43)$$

Η ομοιότητα μεταξύ οποιουδήποτε ζεύγους κυματομορφών σήματος, ας πούμε του $\{s_m(t)\}$ και του $\{s_k(t)\}$, μετράται με την κανονικοποιημένη ετερο-συσχέτιση

$$\frac{1}{\sqrt{E_m E_k}} \int_{-\infty}^{\infty} s_m(t) s_k(t) dt = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2\sqrt{E_m E_k}} \int_{-\infty}^{\infty} s_{lm}(t) s_{lk}^*(t) dt \right\} \quad (3-2-44)$$

Ορίζουμε τον μιγαδικών τιμών συντελεστή ετερο-συσχέτισης ρ_{km} ως

$$\rho_{km} = \frac{1}{2\sqrt{E_m E_k}} \int_{-\infty}^{\infty} s_{lm}^*(t) s_{lk}(t) dt \quad (3-2-45)$$

Τότε,

$$\operatorname{Re}(\rho_{km}) = \frac{1}{\sqrt{E_m E_k}} \int_{-\infty}^{\infty} s_m(t) s_k(t) dt \quad (3-2-46)$$

ή, ισοδύναμα,

$$\operatorname{Re}(\rho_{km}) = \frac{\mathbf{s}_m \cdot \mathbf{s}_k}{\|\mathbf{s}_m\| \|\mathbf{s}_k\|} \frac{\mathbf{s}_m \cdot \mathbf{s}_k}{\sqrt{E_m E_k}} \quad (3-2-47)$$

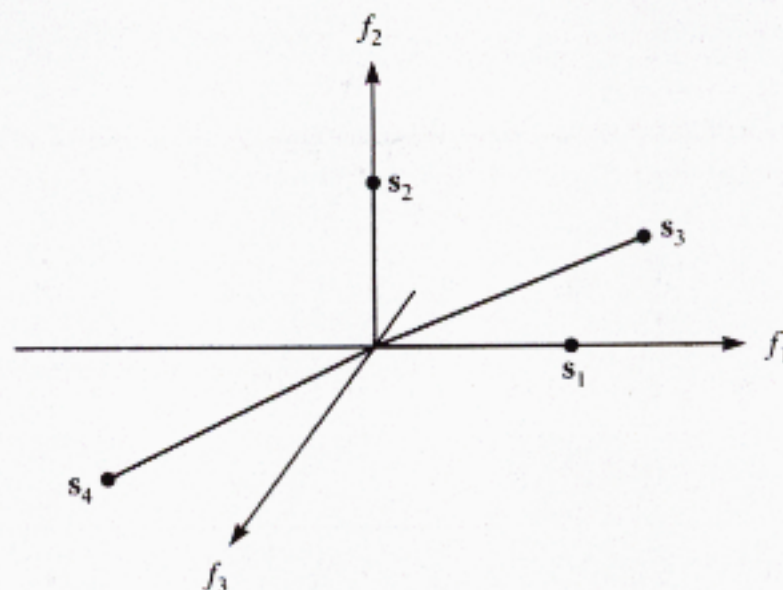
Οι συντελεστές ετεροσυσχέτισης μεταξύ των ζευγών των κυματομορφών των σημάτων ή των διανυσμάτων των σημάτων αποτελούν ένα σύνολο παραμέτρων που χαρακτηρίζουν την ομοιότητα ενός συνόλου σημάτων. Μία ακόμη σχετική παράμετρος είναι η Ευκλείδεια απόσταση $d_{km}^{(e)}$ μεταξύ ενός ζεύγους σημάτων που ορίζεται ως

$$\begin{aligned} d_{km}^{(e)} &= \|\mathbf{s}_m - \mathbf{s}_k\| \\ &= \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} [s_m(t) - s_k(t)]^2 dt \right\}^{1/2} \\ &= \left\{ E_m + E_k - 2\sqrt{E_m E_k} \operatorname{Re}(\rho_{km}) \right\}^{1/2} \end{aligned} \quad (3-2-48)$$

Όταν $E_m = E_k = E$ για όλα τα m και k , η έκφραση αυτή απλοποιείται στην

$$d_{km}^{(e)} = \left\{ 2E [1 - \operatorname{Re}(\rho_{km})] \right\}^{1/2} \quad (3-2-49)$$

Επομένως, η Ευκλείδεια απόσταση είναι ένα εναλλακτικό μέτρο της ομοιότητας (ή της ανομοιότητας) του συνόλου των κυματομορφών σήματος ή των αντίστοιχων διανυσμάτων των σημάτων.



ΣΧΗΜΑ 3-2-2 Τα τέσσερα διανύσματα των σημάτων παριστάμενα ως σημεία στον τρισδιάστατο χώρο των συναρτήσεων.

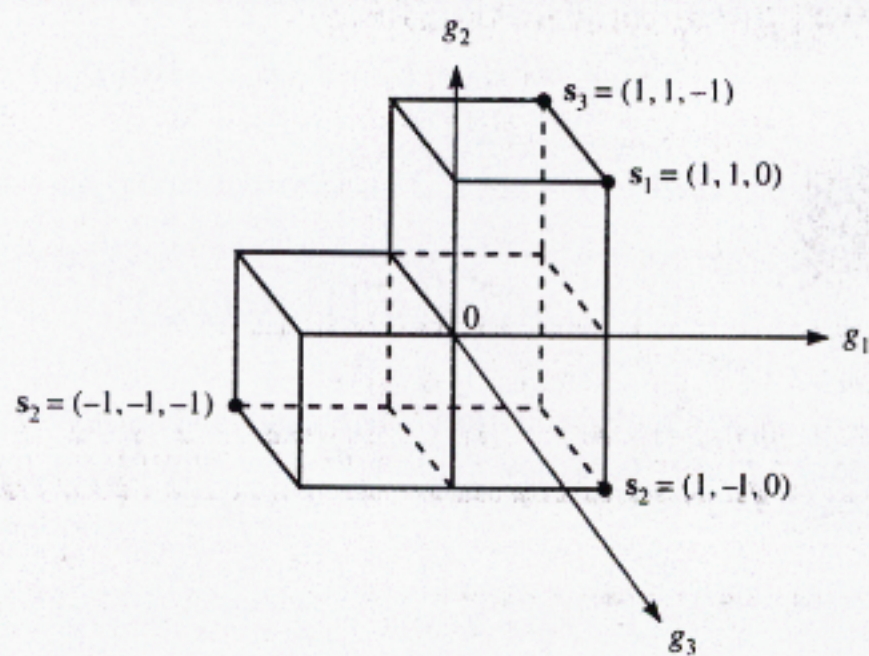
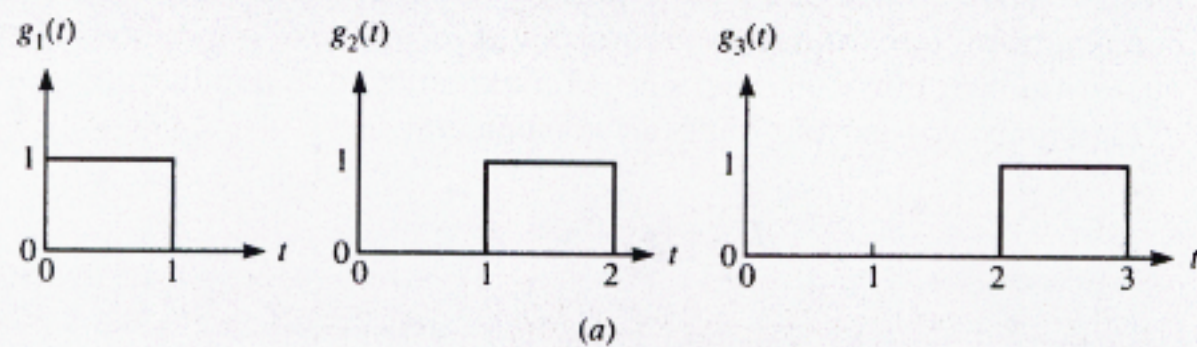
Στην ακόλουθη ενότητα, θα περιγράψουμε τα ψηφιακά διαμορφωμένα σήματα και χρησιμοποιήσουμε την αναπαράσταση των σημάτων αυτού του τύπου στον διανυσματικό χώρο των σημάτων. Θα παρατηρήσουμε ότι τα ψηφιακά διαμορφωμένα σήματα τα οποία ταξινομούνται ως γραμμικά αναπτύσσονται εύκολα με την βοήθεια δύο συναρτήσεων μίας ορθοκανονικής βάσης του τύπου

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \sqrt{\frac{2}{T}} \cos 2\pi f_c t \\ f_2(t) &= -\sqrt{\frac{2}{T}} \sin 2\pi f_c t \end{aligned} \quad (3-2-50)$$

Κατά συνέπεια, εάν το $s_m(t)$ εκφρασθεί ως $s_m(t) = x_i(t) + j y_i(t)$, το $s_m(t)$ της (3-2-42) θα μπορεί να εκφρασθεί ως

$$s_m(t) = x_i(t)f_1(t) + y_i(t)f_2(t) \quad (3-2-51)$$

όπου $x_i(t)$ και $y_i(t)$ αναπαριστούν τις διαμορφώσεις του σήματος.



ΣΧΗΜΑ 3-2-3 Ένα εναλλακτικό σύνολο ορθοκανονικών συναρτήσεων για τα τέσσερα σήματα του Σχ. 3-2-1(α) και τα αντίστοιχα σημεία των σημάτων.

3-3 Η ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΤΩΝ ΨΗΦΙΑΚΩΣ ΔΙΑΜΟΡΦΩΜΕΝΩΝ ΣΗΜΑΤΩΝ.

Κατά την μετάδοση της ψηφιακής πληροφορίας μέσω ενός επικοινωνιακού καναλιού, ο διαμορφωτής αποτελεί την συσκευή διεπαφής (interface) που αντιστοιχίζει την ψηφιακή πληροφορία σε αναλογικές κυματομορφές, κατάλληλες για τα χαρακτηριστικά του καναλιού. Για να κάνει αυτήν την αντιστοίχιση, σε γενικές γραμμές, παίρνει κάθε φορά ένα τμήμα των $k = \log_2 M$ δυαδικών ψηφίων από την πληροφοριακή ακολουθία $\{a_n\}$ και επιλέγει μία από $M = 2^k$ ντετερμινιστικές, πεπερασμένης ενέργειας, κυματομορφές $\{s_m(t), m = 1, 2, \dots, M\}$ με την οποία θα μεταδοθεί το τμήμα αυτό μέσω του καναλιού.

Όταν η αντιστοίχιση από την ψηφιακή ακολουθία $\{a_n\}$ στις κυματομορφές εκτελείται υπό τον περιορισμό ότι η κυματομορφή που μεταδίδεται σε οποιοδήποτε διάστημα εξαρτάται από μία ή περισσότερες κυματομορφές που έχουν μεταδοθεί σε προηγούμενα διαστήματα, ο διαμορφωτής λέγεται ότι διαθέτει μνήμη (memory). Από την άλλη πλευρά, όταν η αντιστοίχιση από την ακολουθία $\{a_n\}$ στις κυματομορφές $\{s_m(t)\}$ εκτελείται χωρίς να υφίσταται περιορισμούς από τις προηγούμενες κυματομορφές, ο διαμορφωτής αποκαλείται άνευ μνήμης.

Επιπλέον της ταξινόμησης του διαμορφωτή ως άνευ μνήμης ή με μνήμη, μπορούμε επίσης να τον ταξινομήσουμε ως γραμμικό ή ως μη-γραμμικό. Μία μέθοδος είναι γραμμική όταν κατά την αντιστοίχιση της ψηφιακής ακολουθίας στις διαδοχικές κυματομορφές ισχύει η αρχή της υπέρθεσης. Στην μη-γραμμική διαμόρφωση, η αρχή της υπέρθεσης δεν είναι εφαρμόσιμη στα σήματα που μεταδίδονται σε διαδοχικά χρονικά διαστήματα. Θα ξεκινήσουμε με την περιγραφή των μεθόδων διαμόρφωσης που δεν έχουν μνήμη.

3-3-1 Μέθοδοι Διαμόρφωσης χωρίς Μνήμη

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, ο διαμορφωτής σε ένα σύστημα ψηφιακής επικοινωνίας αντιστοιχίζει μια ακολουθία από δυαδικά ψηφία σε ένα σύνολο αντίστοιχων κυματομορφών σήματος. Αυτές οι κυματομορφές διαφοροποιούνται όσον αφορά το πλάτος, την φάση, την συχνότητα, ή κάποιον συνδυασμό δύο ή περισσότερων παραμέτρων σήματος. Θα μελετήσουμε κάθε έναν από αυτούς τους τύπους σημάτων ξεχωριστά, ξεκινώντας με την ψηφιακή διαμόρφωση παλμών κατά πλάτος (PAM). Σε κάθε περίπτωση, υποθέτουμε ότι η ακολουθία δυαδικών ψηφίων εισάγεται στον διαμορφωτή με ρυθμό R bits/s.

Τα Σήματα Με Διαμόρφωση Πλάτους των Παλμών (PAM) Στην ψηφιακή PAM, οι κυματομορφές σήματος μπορούν να αναπαρασταθούν ως

$$\begin{aligned} s_m(t) &= \text{Re} [A_m g(t) e^{j2\pi f_c t}] = \\ &= A_m g(t) \cos 2\pi f_c t, \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad 0 \leq t \leq T \end{aligned} \quad (3-3-1)$$

όπου $\{A_m\}$ υποδηλώνει το σύνολο των M πιθανών πλατών που αντιστοιχούν σε $M = 2^k$ πιθανά τμήματα των k -bits ή, όπως αυτά ονομάζονται, *σύμβολα* (symbols). Τα πλάτη σήματος, A_m , παίρνουν τις διακριτές τιμές (επίπεδα)

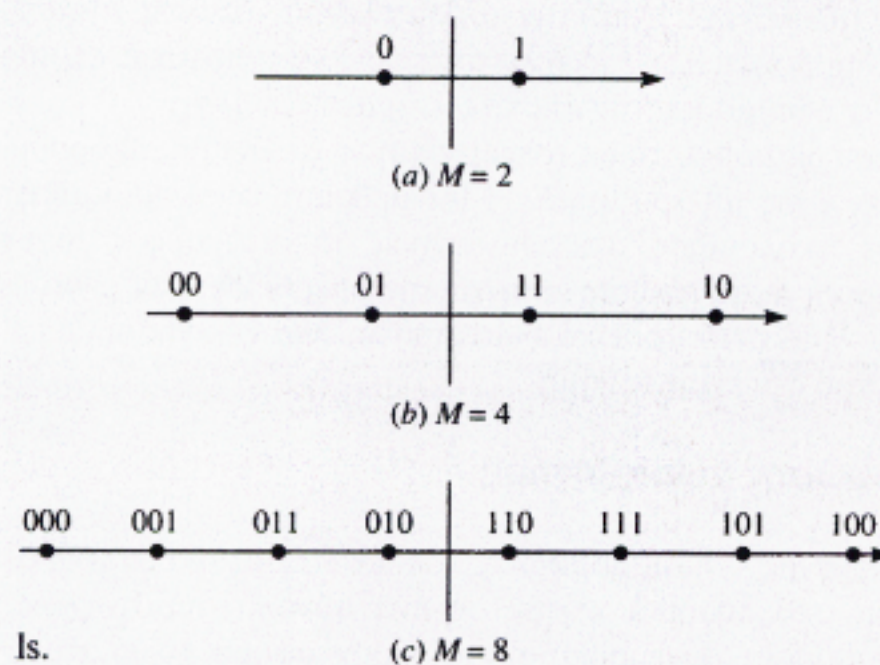
$$A_m = (2m-1-M) d, \quad m = 1, 2, \dots, M \quad (3-3-2)$$

όπου $2d$ είναι η απόσταση ανάμεσα στα συνεχόμενα πλάτη των σημάτων. Η κυματομορφή $g(t)$ είναι ένας πραγματικών τιμών παλμός σήματος, του οποίου η μορφή επηρεάζει το φάσμα του μεταδιδόμενου σήματος, όπως θα δούμε αργότερα. Ο ρυθμός συμβόλων για το σήμα PAM είναι R/k . Αυτός είναι ο ρυθμός με τον οποίο συμβαίνουν οι αλλαγές στο πλάτος του φορέα,

προκειμένου να αναπαρασταθεί η μετάδοση των νέων πληροφοριών. Το χρονικό διάστημα $T_b = 1/R$ αποκαλείται *διάστημα ενός bit (bit interval)* και το χρονικό διάστημα $T = k / R = k T_b$ αποκαλείται *διάστημα ενός συμβόλου (symbol interval)*.

Τα M PAM σήματα έχουν ενέργειες

$$\begin{aligned} E_m &= \int_0^T s_m^2(t) dt \\ &= \frac{1}{2} A_m^2 \int_0^T g_m^2(t) dt \\ &= \frac{1}{2} A_m^2 E_g \end{aligned} \quad (3-3-3)$$



όπου το E_g δηλώνει την ενέργεια του παλμού $g(t)$. Προφανώς, τα σήματα αυτά είναι μονοδιάστατα ($N = 1$) και, συνεπώς, αναπαρίστανται από τον γενικό τύπο

$$s_m(t) = s_m f(t) \quad (3-3-4)$$

όπου ως $f(t)$ ορίζεται η μοναδιαία ενεργείας κυματομορφή σήματος που δίνεται από την

$$f(t) = \sqrt{2/E_g} g(t) \cos 2\pi f_c t \quad (3-3-5)$$

και

$$s_m = A_m \sqrt{\frac{1}{2} E_g}, \quad m = 1, 2, \dots, M \quad (3-3-6)$$

ΣΧΗΜΑ 3-3-1: Ο αστερισμός των ψηφιακών PAM σημάτων.

Τα αντίστοιχα διαγράμματα στον διανυσματικό χώρο (αστερισμοί) των σημάτων για $M = 2$, $M = 4$ και $M = 8$ απεικονίζονται στο Σχ. 3-3-1. Η ψηφιακή PAM αποκαλείται επίσης και *διαμόρφωση ολίσθησης πλάτους (amplitude-shift keying - ASK)*.

Η αντιστοίχιση ή καταχώρηση των k πληροφοριακών bits στα $M = 2^k$ πιθανά πλάτη σήματος μπορεί να γίνει με διάφορους τρόπους. Η προτιμώμενη καταχώρηση είναι αυτή κατά την οποία τα γειτονικά πλάτη σήματος διαφέρουν κατά ένα δυαδικό ψηφίο, όπως απεικονίζονται στο Σχ. 3-3-1. Αυτή η αντιστοίχιση αποκαλείται *κωδικοποίηση Gray (Gray encoding)*. Είναι σπουδαία για την αποδιαμόρφωση του σήματος, επειδή τα πιθανότερα σφάλματα που προκαλούνται από τον θόρυβο οφείλονται στην κατά λάθος επιλογή ενός πλάτους από τα πλησιέστερα στο πλάτος του μεταδιδόμενου σήματος. Σε μία τέτοια περίπτωση, θα προκύψει σφάλμα ενός μόνο bit στην ακολουθία των k -bits.

Σημειώνουμε ότι η Ευκλείδεια απόσταση μεταξύ των σημμάτων που απαρτίζουν οποιοδήποτε ζεύγος σημείων σήματος είναι

$$\begin{aligned} d_{mn}^{(e)} &= \sqrt{(s_m - s_n)^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} E_g} |A_m - A_n| \\ &= d \sqrt{2E_g} |m - n| \end{aligned} \quad (3-3-7)$$

Συνεπώς, η απόσταση μεταξύ ενός ζεύγους γειτονικών σημείων σήματος, ήτοι, η ελάχιστη ευκλείδεια απόσταση, είναι

$$d_{\min}^{(e)} = d \sqrt{2E_g} \quad (3-3-8)$$

Το σήμα PAM με διαμορφωμένο φορέα που περιγράφεται από τον τύπο (3-3-1) είναι ένα σήμα διπλής πλευρικής ζώνης συχνοτήτων (DSB) και, κατά την μετάδοσή του, απαιτεί το διπλάσιο εύρος ζώνης από το αντίστοιχο κατωδιαβατό ισοδύναμο σήμα. Εναλλακτικά, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα σήμα PAM μονής πλευρικής ζώνης (SSB), που περιγράφεται από τον τύπο (άνω ή κάτω πλευρικής ζώνης)

$$s_m(t) = \text{Re}\{A_m [g(t) \pm j\hat{g}(t)] e^{j2\pi f_c t}\}, \quad m = 1, 2, \dots, M \quad (3-3-9)$$

όπου $\hat{g}(t)$ είναι ο μετασχηματισμός Hilbert του $g(t)$. Έτσι, το εύρος ζώνης του SSB σήματος είναι το μισό από αυτό του DSB σήματος.

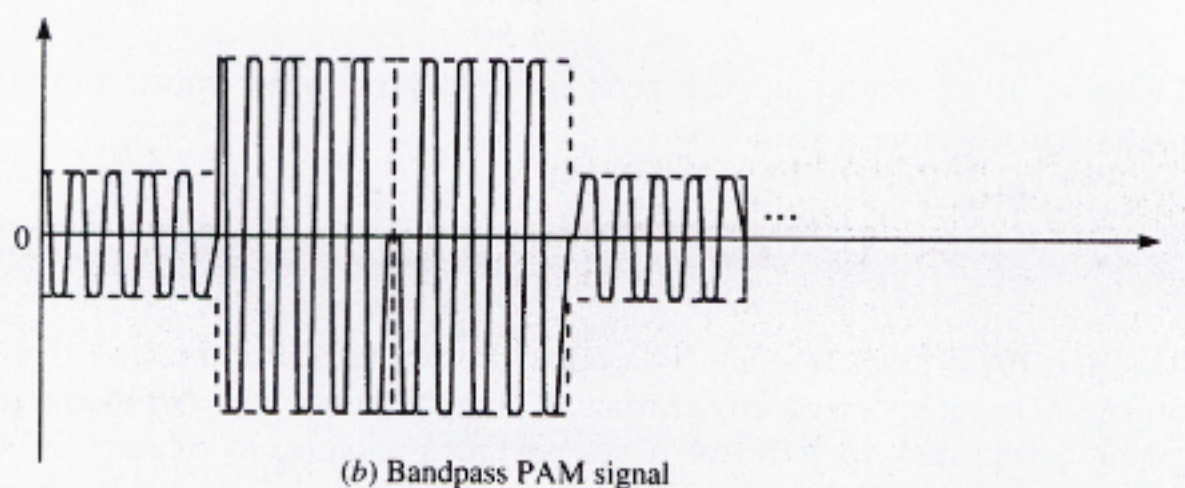
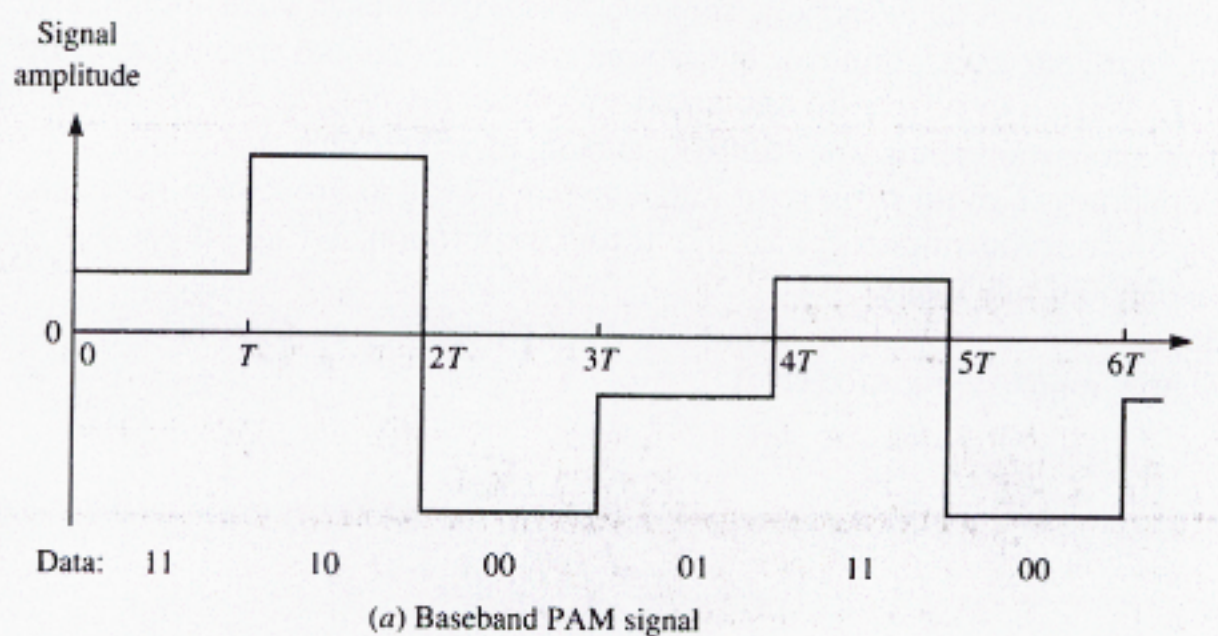
Το ψηφιακό PAM σήμα είναι επίσης κατάλληλο για μετάδοση μέσω ενός καναλιού που δεν απαιτεί διαμόρφωση του φορέα. Στην περίπτωση αυτή, η κυματομορφή σήματος μπορεί απλώς να αναπαρασταθεί ως

$$s_m(t) = A_m g(t), \quad m = 1, 2, \dots, M \quad (3-3-10)$$

Αυτό τώρα λέγεται σήμα *βασικής ζώνης (baseband signal)*. Παραδείγματος χάριν, ένα τετραπλού πλάτους σήμα PAM βασικής ζώνης απεικονίζεται στο Σχ. 3-3-2 (α). Η μορφή του σήματος με διαμορφωμένο φορέα φαίνεται στο Σχ. 3-3-2(β).

Στην ειδική περίπτωση $M = 2$ σημάτων, οι δυαδικές PAM κυματομορφές παρουσιάζουν την ειδική ιδιότητα

$$s_1(t) = -s_2(t)$$



ΣΧΗΜΑ 3-3-2 PAM σήμα βασικής ζώνης και PAM ζωνοδιαβατό σήμα.

Άρα, τα δύο αυτά σήματα έχουν την ίδια ενέργεια και έναν συντελεστή ετεροσυσχέτισης -1 . Τα σήματα του τύπου αυτού αποκαλούνται *αντίποδα* (*antipodal*).

Η Διαμόρφωση Φάσης Στην ψηφιακή διαμόρφωση φάσης, οι M κυματομορφές σήματος απεικονίζονται ως

$$\begin{aligned}
 s_m(t) &= \text{Re} [g(t) e^{j2\pi(m-1)M} e^{j2\pi f_c t}], \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad 0 \leq t \leq T \\
 &= g(t) \cos [2\pi f_c t + \frac{2\pi}{M} (m-1)] \\
 &= g(t) \cos \frac{2\pi}{M} (m-1) \cos 2\pi f_c t - g(t) \sin \frac{2\pi}{M} (m-1) \sin 2\pi f_c t
 \end{aligned}$$

(3-3-11)

όπου $g(t)$ είναι η μορφή του παλμού του σήματος και $\theta_m = 2\pi(m-1)/M$, $m = 1, 2, \dots, M$, είναι οι M πιθανές φάσεις του φορέα που μεταφέρουν τις μεταδιδόμενες πληροφορίες. Η ψηφιακή διαμόρφωση φάσης συνήθως ονομάζεται *διαμόρφωση ολίσθησης φάσης* (*phase-shift keying - PSK*).

Σημειώνουμε ότι αυτές οι κυματομορφές των σημάτων έχουν ίσες ενέργειες, δηλαδή,

$$E = \int_0^T s_m^2(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^T g^2(t) dt = \frac{1}{2} E_g \quad (3-3-12)$$

Επιπλέον, οι κυματομορφές των σημάτων μπορούν να απεικονιστούν ως γραμμικοί συνδυασμοί δύο ορθοκανονικών κυματομορφών σήματος, $f_1(t)$ και $f_2(t)$, ήτοι,

$$s_m(t) = s_{m1}f_1(t) + s_{m2}f_2(t) \quad (3-3-13)$$

όπου

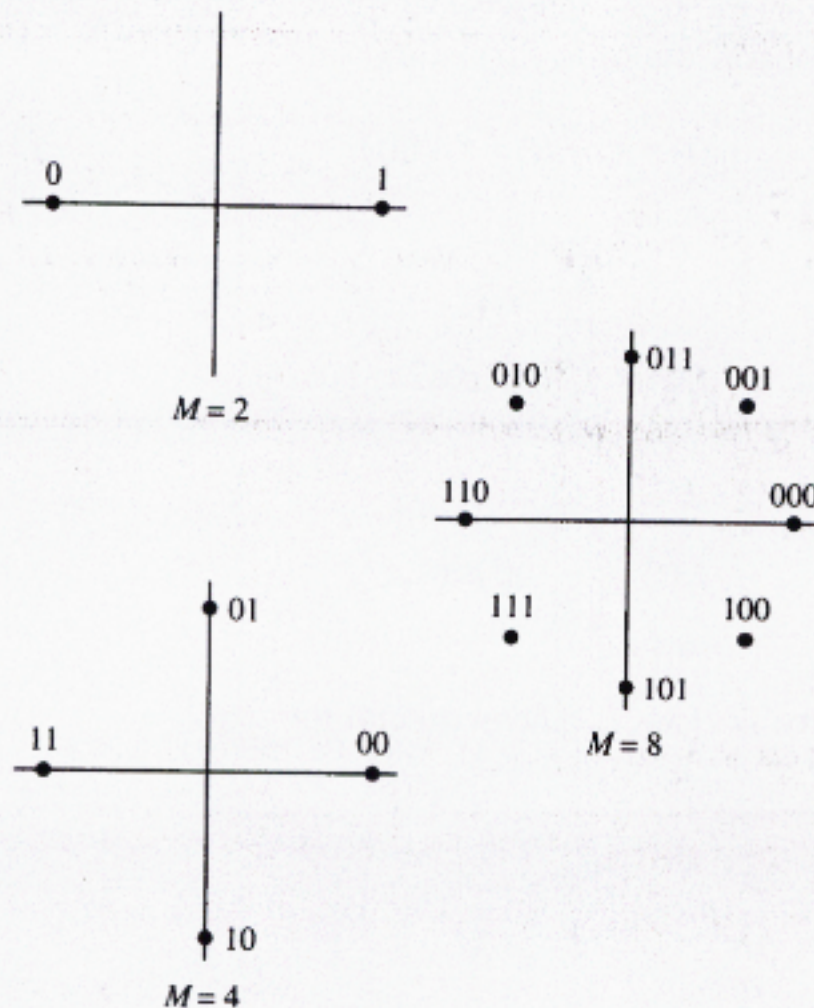
$$f_1(t) = \sqrt{\frac{2}{E_g}} g(t) \cos 2\pi f_c t \quad (3-3-14)$$

$$f_2(t) = \sqrt{\frac{2}{E_g}} g(t) \sin 2\pi f_c t \quad (3-3-15)$$

και τα δισδιάστατα διανύσματα $s_m = [s_{m1} s_{m2}]$ δίνονται από τον τύπο

$$s_m = \left[\sqrt{\frac{E_g}{2}} \cos \frac{2\pi}{M}(m-1), \sqrt{\frac{E_g}{2}} \sin \frac{2\pi}{M}(m-1) \right], \quad m=1, 2, \dots, M \quad (3-3-16)$$

Στο Σχ. 3-3-3, απεικονίζονται διαγράμματα διανυσματικού χώρου για $M = 2, 4,$ και 8 . Παρατηρούμε ότι $M = 2$ αντιστοιχεί σε μονοδιάστατα σήματα, τα οποία είναι πανομοιότυπα με τα δυαδικά PAM σήματα.



ΣΧΗΜΑ 3-3-3 Αστερισμοί των PSK σημάτων.

Όπως και στην περίπτωση της PAM διαμόρφωσης, η αντιστοίχιση ή η καταχώριση τμημάτων πληροφορίας των k -bits σε $M = 2^k$ πιθανές φάσεις μπορεί να γίνει με πολλούς τρόπους. Η προτιμώμενη αντιστοίχιση είναι η κωδικοποίηση Gray, ώστε τα πιθανότερα σφάλματα που προκαλεί ο θόρυβος να έχουν ως αποτέλεσμα σφάλμα ενός μονού bit στο σύμβολο των k -bits. Η Ευκλείδεια απόσταση μεταξύ των σημείων των σημάτων είναι:

$$d_{mn}^{(e)} = [\mathbf{s}_m - \mathbf{s}_n] = \left\{ E_g \left[1 - \cos \frac{2\pi}{M} (m - n) \right] \right\}^{1/2} \quad (3-3-17)$$

Η ελάχιστη Ευκλείδεια απόσταση αντιστοιχεί στην περίπτωση κατά την οποία $|m - n| = 1$, δηλαδή, στις γειτονικές φάσεις των σημάτων. Στην περίπτωση αυτή,

$$d_{\min}^{(e)} = \sqrt{E_g \left(1 - \cos \frac{2\pi}{M} \right)} \quad (3-3-18)$$

Η Ορθογώνια Διαμόρφωση Πλάτους Η εξοικονόμηση του εύρους ζώνης που επιτυγχάνει η PAM/SSB διαμόρφωση μπορεί επίσης να επιτευχθεί με την ταυτόχρονη εισαγωγή δύο ξεχωριστών συμβόλων των k -bits από την πληροφοριακή ακολουθία $\{a_n\}$ σε δύο ορθογώνιους φορείς $\cos 2\pi f_c t$ και $\sin 2\pi f_c t$. Η προκύπτουσα τεχνική διαμόρφωσης αποκαλείται *ορθογώνια*

διαμόρφωση πλάτους (*quadrature* PAM ή QAM) και οι αντίστοιχες κυματομορφές των σημάτων μπορούν να εκφραστούν ως

$$s_m(t) = \text{Re} [(A_{mc} + j A_{ms}) g(t) e^{j2\pi f_c t}], \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad 0 \leq t \leq T$$

$$= A_{mc} g(t) \cos 2\pi f_c t - A_{ms} g(t) \sin 2\pi f_c t \quad (3-3-19)$$

όπου A_{mc} και A_{ms} είναι τα πλάτη των ορθογώνιων φορέων, δηλαδή των σημάτων που μεταφέρουν την πληροφορία, και $g(t)$ είναι ο παλμός σήματος.

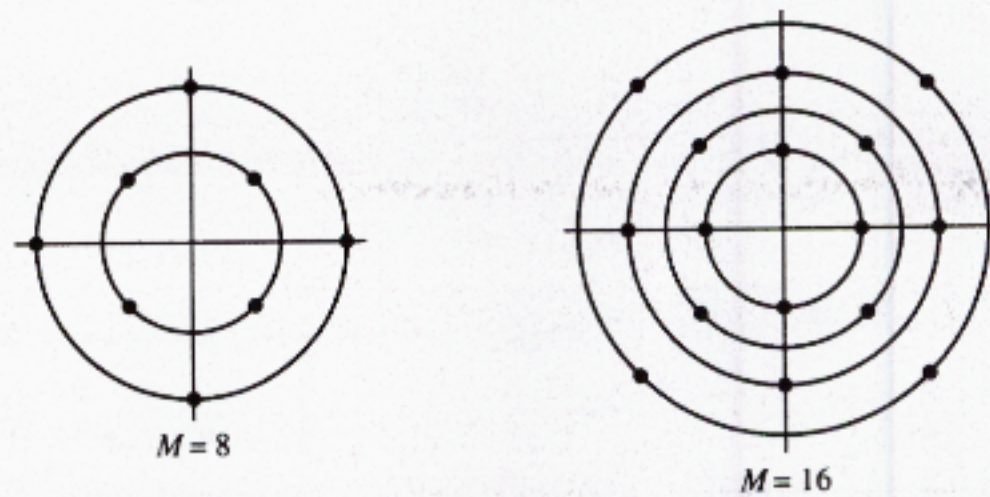
Εναλλακτικά, οι κυματομορφές των QAM σημάτων μπορούν να εκφραστούν ως:

$$s_m(t) = \text{Re} [V_m e^{j\theta_m} g(t) e^{j2\pi f_c t}]$$

$$= V_m g(t) \cos(2\pi f_c t + \theta_m) \quad (3-3-20)$$

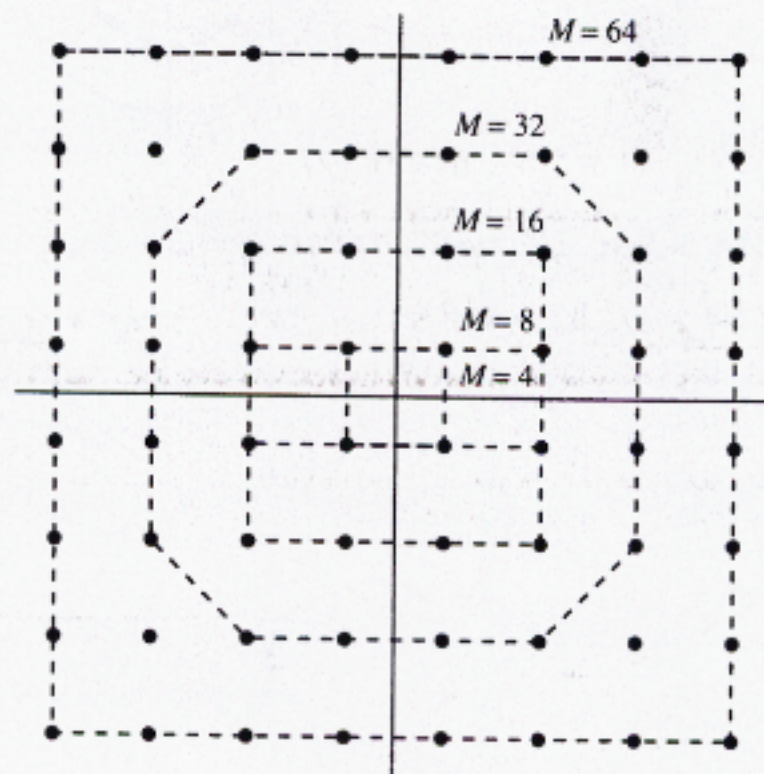
όπου $V_m = \sqrt{A_{mc}^2 + A_{ms}^2}$ και $\theta_m = \tan^{-1}(A_{ms} / A_{mc})$. Από αυτή την έκφραση είναι προφανές ότι οι κυματομορφές των QAM σημάτων μπορούν να θεωρηθούν ως προσαρμοσμένη διαμόρφωση πλάτους και φάσης.

Στην πραγματικότητα, μπορούμε να επιλέξουμε οποιοδήποτε συνδυασμό μίας PAM των M_1 επιπέδων και μίας PSK των M_2 φάσεων ώστε να κατασκευάσουμε έναν αστερισμό προσαρμοσμένης PAM-PSK των $M = M_1 M_2$ σημείων. Αν $M_1 = 2^n$ και $M_2 = 2^m$, ο αστερισμός της προσαρμοσμένης PAM-PSK οδηγεί στην ταυτόχρονη μετάδοση $m + n = \log M_1 M_2$ δυαδικών ψηφίων που συμβαίνει με έναν ρυθμό συμβόλων $R / (m + n)$. Παραδείγματα διαγραμμάτων του διανυσματικού χώρου των σημάτων (αστερισμών) για προσαρμοσμένη PAM-PSK απεικονίζονται στο Σχ. 3-3-4, για $M = 8$ και $M = 16$.



ΣΧΗΜΑ 3-3-4: Παραδείγματα αστερισμών σημάτων προσαρμοσμένης PAM-PSK.

ΣΧΗΜΑ 3-3-5: Αστερισμοί ορθογώνιας QAM.



Όπως συμβαίνει και στην περίπτωση των PSK σημάτων, οι κυματομορφές των QAM σημάτων μπορούν να απεικονιστούν ως γραμμικοί συνδυασμοί δύο ορθοκανονικών κυματομορφών σήματος $f_1(t)$ και $f_2(t)$, ήτοι

$$s_m(t) = s_{m1}f_1(t) + s_{m2}f_2(t) \quad (3-3-21)$$

όπου

$$f_1(t) = \sqrt{\frac{2}{E_g}} g(t) \cos 2\pi f_c t$$

$$f_2(t) = -\sqrt{\frac{2}{E_g}} g(t) \sin 2\pi f_c t \quad (3-3-22)$$

και

$$\mathbf{s}_m = [s_{m1} \quad s_{m2}] = [A_{mc} \sqrt{\frac{1}{2} E_g} \quad A_{ms} \sqrt{\frac{1}{2} E_g}] \quad (3-3-23)$$

E_g είναι η ενέργεια του παλμού του σήματος $g(t)$.

Η Ευκλείδεια απόσταση μεταξύ των διανυσμάτων οποιουδήποτε ζεύγους σημάτων είναι

$$d_{mn}^{(e)} = [\mathbf{s}_m - \mathbf{s}_n] = \sqrt{\frac{1}{2} E_g [(A_{mc} - A_{nc})^2 + (A_{ms} - A_{ns})^2]} \quad (3-3-24)$$

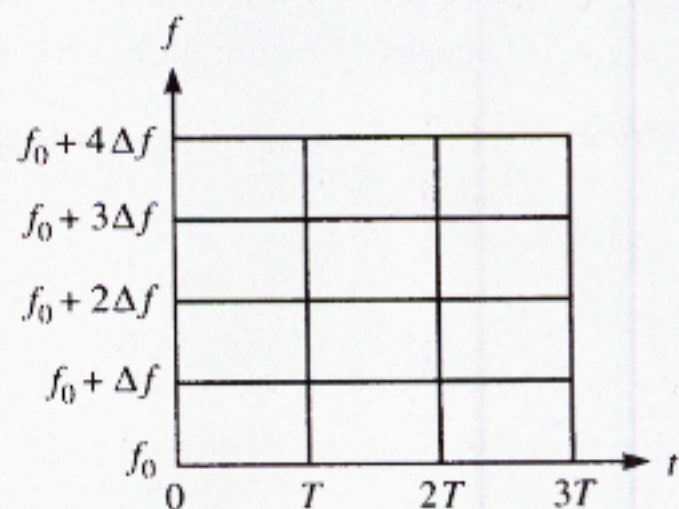
Στην ειδική περίπτωση κατά την οποία τα πλάτη των σημάτων λαμβάνονται από το σύνολο των διακριτών τιμών $\{(2m-1-M)d, m = 1, 2, \dots, M\}$, ο αστερισμός είναι ορθογώνιος, όπως φαίνεται στο Σχ. 3-3-5. Στην περίπτωση αυτήν, η Ευκλείδεια απόσταση ανάμεσα σε παρακείμενα σημεία, ή, αλλιώς, η ελάχιστη απόσταση, είναι

$$d_{\min}^{(e)} = d \sqrt{2E_g} \quad (3-3-25)$$

η οποία είναι η ίδια με αυτήν της PAM.

Τα Πολυδιάστατα Σήματα Είναι προφανές από την παραπάνω συζήτηση ότι η ψηφιακή διαμόρφωση του πλάτους και της φάσης του φορέα μας επιτρέπει να κατασκευάσουμε κυματομορφές σήματος που αντιστοιχούν σε διδιάστατα διανύσματα και αστερισμούς. Αν επιθυμούμε να κατασκευάσουμε κυματομορφές σήματος που να αντιστοιχούν σε περισσότερων διαστάσεων διανύσματα, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε είτε το πεδίο χρόνου είτε το πεδίο συχνότητας είτε και τα δύο, προκειμένου να αυξήσουμε το αριθμό των διαστάσεων.

ΣΧΗΜΑ 3-3-6: Υποδιαίρεση των αξόνων χρόνου και συχνότητας σε διακριτά διαστήματα.



Υποθέστε ότι έχουμε N -διάστατα διανύσματα σήματος. Για οποιαδήποτε τιμή του N , μπορούμε να υποδιαιρέσουμε ένα χρονικό διάστημα διάρκειας $T_1 = NT$ σε N υποδιαστήματα διάρκειας $T = T_1/N$. Σε κάθε υποδιάστημα διάρκειας T , μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε δυαδική PAM (ένα μονοδιάστατο σήμα) για να μεταδώσουμε ένα στοιχείο του N -διάστατου διανύσματος σήματος. Συνεπώς, τα N χρονικά διαστήματα χρησιμοποιούνται για να μεταδώσουν τα N -διάστατα διανύσματα σήματος. Αν το N είναι άρτιος αριθμός, ένα χρονικό διάστημα διάρκειας T μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να μεταδώσει ταυτόχρονα δύο στοιχεία του N -διάστατου διανύσματος με την ανεξάρτητη διαμόρφωση του πλάτους κάθε ορθογώνιου φορέα από το αντίστοιχο στοιχείο. Κατ' αυτόν τον τρόπο, το N -διάστατο διάνυσμα σήματος μεταδίδεται σε $\frac{1}{2} NT$ δευτερόλεπτα ($\frac{1}{2} N$ χρονικά διαστήματα).

Εναλλακτικά, μια συχνοτική ζώνη πλάτους $N\Delta f$ μπορεί να υποδιαιρεθεί σε N συχνοτικά διαστήματα, πλάτους Δf το καθένα. Ένα N -διάστατο διάνυσμα σήματος μπορεί να μεταδοθεί σε ένα κανάλι με την ταυτόχρονη διαμόρφωση των πλατών N φορέων, ενός για κάθε ένα από τα N συχνοτικά διαστήματα. Πρέπει να δοθεί προσοχή ώστε να δοθεί επαρκής συχνοτικός διαχωρισμός Δf μεταξύ διαδοχικών φορέων ώστε να μην υπάρξει παρεμβολή διαφωνίας μεταξύ των σημάτων των N φορέων. Αν χρησιμοποιούνται ορθογώνιοι φορείς σε κάθε συχνοτικό διάστημα, το N -διάστατο διάνυσμα (άρτιο N) μπορεί να μεταδοθεί σε $\frac{1}{2} N$ συχνοτικά διαστήματα, μειώνοντας έτσι τη χρήση του εύρους ζώνης του καναλιού κατά τον παράγοντα 2.

Πιο γενικά, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε από κοινού τόσο το πεδίο του χρόνου όσο και το πεδίο της συχνότητας για να μεταδώσουμε ένα N -διάστατο διάνυσμα σήματος. Για παράδειγμα, το Σχ. 3-3-6 απεικονίζει μια υποδιαίρεση των αξόνων χρόνου και συχνότητας σε 12 διαστήματα. Έτσι, σε κάθε διάστημα, μπορεί να μεταδοθεί μέσω PAM ένα $N = 12$ -διάστατο διάνυσμα σήματος, ή μπορεί να μεταδοθεί ένα $N = 24$ -διάστατο διάνυσμα σήματος με την χρήση δύο ορθογωνίων φορέων (QAM).

Ορθογώνια Πολυδιάστατα Σήματα Ως μία ειδική περίπτωση της κατασκευής πολυδιάστατων σημάτων, ας θεωρήσουμε την κατασκευή M ίσης ενέργειας ορθογώνιων κυματομορφών σήματος που διαφέρουν ως προς την συχνότητα, και που παριστάνονται ως:

$$s_m(t) = \text{Re} [s_{lm}(t) e^{j2\pi f_c t}], \quad m = 1, 2, \dots, M \quad 0 \leq t \leq T$$

$$= \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos[2\pi f_c t + 2\pi m \Delta f t] \quad (3-3-26)$$

όπου οι κυματομορφές των ισοδύναμων κατωδιαβατών σημάτων ορίζονται ως:

$$s_{lm}(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} e^{j2\pi m \Delta f t}, \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad 0 \leq t \leq T \quad (3-3-27)$$

Η διαμόρφωση συχνότητας αυτού του τύπου ονομάζεται *διαμόρφωση ολίσθησης συχνότητας* (*frequency-shift keying* - FSK).

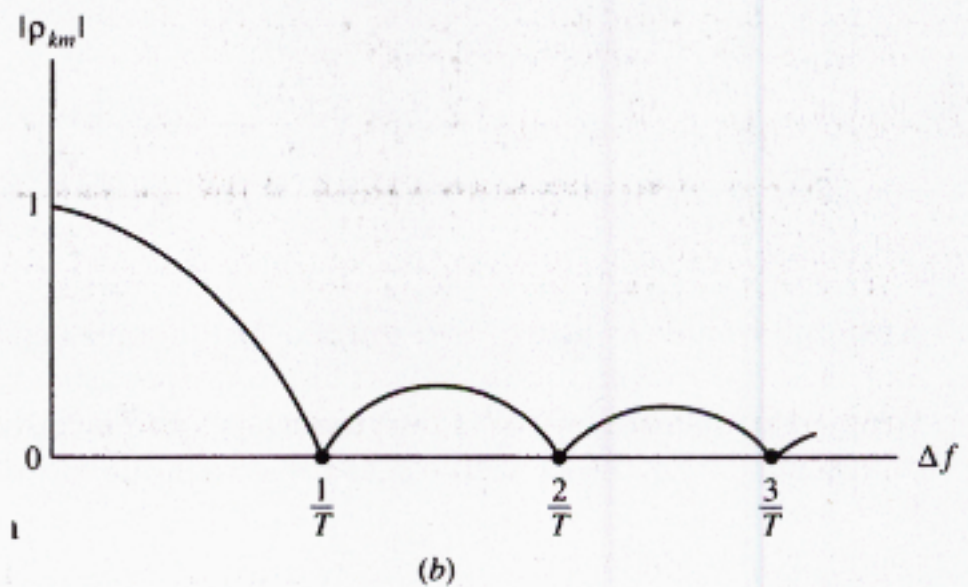
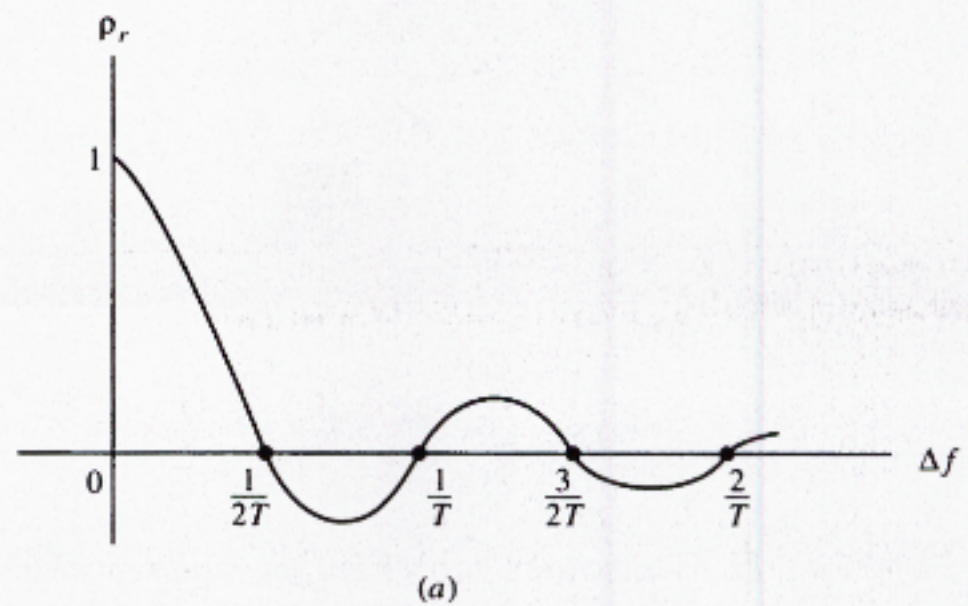
Αυτές οι κυματομορφές χαρακτηρίζονται ως έχουσες ίση ενέργεια και συντελεστές ετεροσυσχέτισης.

$$\rho_{km} = \frac{2E/T}{2E} \int_0^T e^{j2\pi(m-k)\Delta f t} dt = \frac{\sin \pi T(m-k)\Delta f}{\pi T(m-k)\Delta f} e^{j\pi T(m-k)\Delta f} \quad (3-3-28)$$

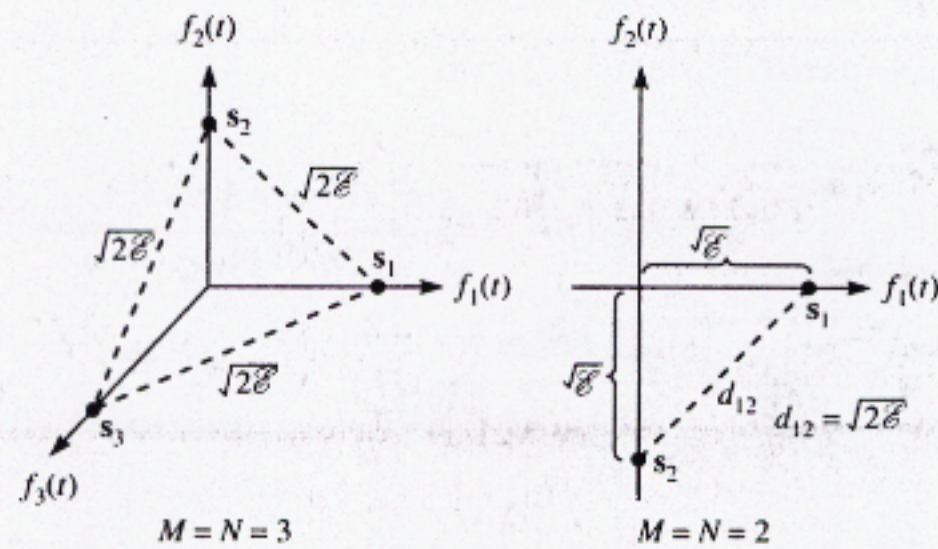
Το πραγματικό μέρος του ρ_{km} είναι

$$\begin{aligned} \rho_r \equiv \operatorname{Re}(\rho_{km}) &= \frac{\sin[\pi T(m-k)\Delta f]}{\pi T(m-k)\Delta f} \cos[\pi T(m-k)\Delta f] \\ &= \frac{\sin[2\pi T(m-k)\Delta f]}{2\pi T(m-k)\Delta f} \end{aligned} \quad (3-3-29)$$

Πρώτον, παρατηρούμε ότι $\operatorname{Re}(\rho_{km}) = 0$ όταν $\Delta f = 1/2T$ και $m \neq k$. Εφ' όσον $|m-k| = 1$ αντιστοιχεί σε συνεχόμενα διαστήματα συχνότητας, $\Delta f = 1/2T$ παριστά τον ελάχιστο συχνοτικό διαχωρισμό μεταξύ των διαδοχικών σημάτων ώστε να εξασφαλίζεται η ορθογωνιότητα των M σημάτων. Στο Σχ. 3-3-7 φαίνονται γραφήματα του $\operatorname{Re}(\rho_{km})$ ως προς το Δf και του $|\rho_{km}|$ συναρτήσει του Δf . Σημειώστε ότι $|\rho_{km}| = 0$ για πολλαπλάσια του $1/T$, ενώ $\operatorname{Re}(\rho_{km}) = 0$ για πολλαπλάσια του $1/2T$.



ΣΧΗΜΑ 3-3-7: Οι συντελεστές ετεροσυσχέτισης ως συναρτήσεις του συχνотικού διαχωρισμού στα FSK σήματα.



ΣΧΗΜΑ 3-3-8: Ορθογώνια σήματα για $M = N = 3$ και $M = N = 2$.

Στην περίπτωση κατά την οποία $\Delta f = 1/2T$, τα M FSK σήματα είναι ισοδύναμα με τα N -διάστατα διανύσματα

$$\begin{aligned}
 \mathbf{s}_1 &= [\sqrt{E} \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0] \\
 \mathbf{s}_2 &= [0 \ \sqrt{E} \ 0 \ \dots \ 0 \ 0] \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 \mathbf{s}_N &= [0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ \sqrt{E}]
 \end{aligned}
 \tag{3-3-30}$$

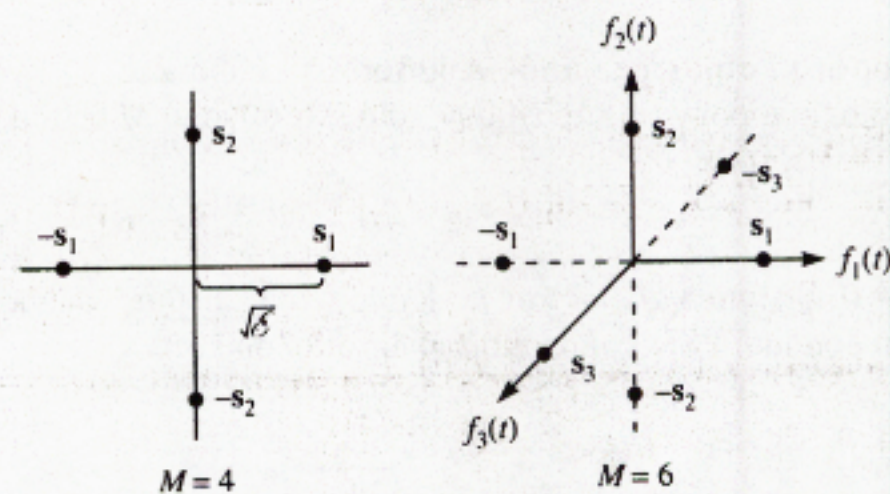
όπου $N = M$. Η απόσταση μεταξύ ζευγών σημάτων είναι

$$d_{km}^{(e)} = \sqrt{2E} \quad \text{για όλα τα } m, k
 \tag{3-3-31}$$

που είναι επίσης η ελάχιστη απόσταση. Το Σχ. 3-3-8 απεικονίζει τον αστερισμό για $M = N = 2$ και $M = N = 3$.

Αμφιορθογώνια σήματα Ένα σύνολο M αμφιορθογωνίων σημάτων μπορεί να κατασκευαστεί από $1/2 M$ ορθογώνια σήματα εάν απλώς συμπεριληφθούν τα αρνητικά των ορθογωνίων σημάτων. Έτσι, απαιτούνται $N = 1/2 M$ διαστάσεις για την κατασκευή ενός συνόλου M αμφιορθογωνίων σημάτων. Το Σχ. 3-3-9 απεικονίζει τον αστερισμό για τα αμφιορθογώνια σήματα για $M = 4$ και 6.

Ας σημειωθεί ότι η συσχέτιση μεταξύ οποιουδήποτε ζεύγους κυματομορφών είναι είτε $\rho_r = -1$ είτε $\rho_r = 0$. Οι αντίστοιχες αποστάσεις είναι $d = 2\sqrt{E}$ ή $\sqrt{2E}$, με το τελευταίο να είναι η ελάχιστη απόσταση.



ΣΧΗΜΑ 3-3-9: Αστερισμοί για $M = 4$ και $M = 6$ αμφορθογώνια σήματα.

Σήματα simplex Υποθέστε ότι έχουμε ένα σύνολο M ορθογώνιων κυματομορφών $\{s_m(t)\}$ ή, ισοδύναμα, την αναπαράσταση των διανυσμάτων τους $\{\mathbf{s}_m\}$. Ο μέσος όρος τους είναι

$$\bar{\mathbf{s}} = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \mathbf{s}_m \quad (3-3-32)$$

Ας κατασκευάσουμε τώρα ένα άλλο σύνολο M σημάτων, αφαιρώντας τον μέσο όρο από κάθε ένα από τα M ορθογώνια σήματα. Έτσι,

$$\mathbf{s}'_m = \mathbf{s}_m - \bar{\mathbf{s}}, \quad m = 1, 2, \dots, M \quad (3-3-33)$$

Το αποτέλεσμα της αφαίρεσης είναι η μετατόπιση της αρχής των m ορθογώνιων σημάτων στο σημείο $\bar{\mathbf{s}}$.

Οι προκύπτουσες κυματομορφές σήματος ονομάζονται *σήματα simplex* και έχουν τις ακόλουθες ιδιότητες. Πρώτον, η ενέργεια ανά κυματομορφή είναι

$$\begin{aligned} [\mathbf{s}'_m]^2 &= [\mathbf{s}_m - \bar{\mathbf{s}}]^2 \\ &= E - (2/M)E + (1/M)E = E \left(1 - \frac{1}{M}\right) \end{aligned} \quad (3-3-34)$$

Δεύτερον, η ετεροσυσχέτιση οποιουδήποτε ζεύγους σημάτων είναι

$$\text{Re}(\rho_{mn}) = \frac{\mathbf{s}'_m \bullet \mathbf{s}'_n}{|\mathbf{s}'_m| |\mathbf{s}'_n|} = \frac{-1/M}{1 - 1/M} = -\frac{1}{M-1} \quad (3-3-35)$$

για όλα τα m και n . Συνεπώς, το σύνολο των κυματομορφών simplex είναι εξ ίσου συσχετισμένο και απαιτεί λιγότερη ενέργεια, κατά τον παράγοντα $1 - 1/M$, απ' ό τι το σύνολο των ορθογώνιων κυματομορφών. Εφ' όσον απλώς μετατοπίστηκε η αρχή, η απόσταση μεταξύ οποιουδήποτε

ζεύγους σημείων σήματος διατηρείται στο $d = \sqrt{2E}$ που είναι το ίδιο με την απόσταση ανάμεσα σε οποιοδήποτε ζεύγος ορθογωνίων σημάτων.

Το Σχ. 3-3-10 απεικονίζει τα simplex σήματα για $M = 2, 3$ και 4 . Να σημειωθεί ότι η διαστατικότητα των σημάτων είναι $N = M - 1$.

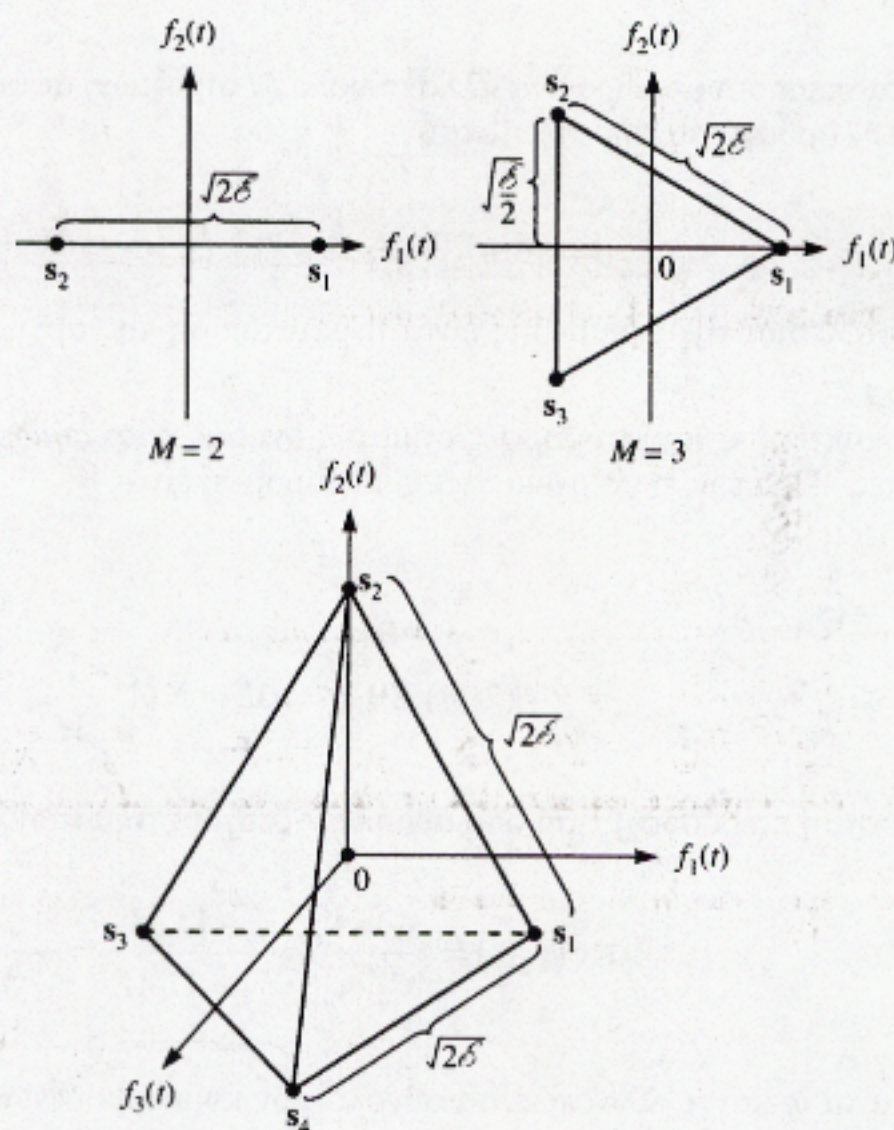
Κυματομορφές σήματος από Δυαδικούς Κώδικες Ένα σύνολο M κυματομορφών σηματοδοσίας μπορούν να παραχθούν από ένα σύνολο M δυαδικών κωδικών λέξεων της μορφής

$$\mathbf{C}_m = [c_{m1} \ c_{m2} \ \dots \ c_{mN}], \quad m = 1, 2, \dots, M \quad (3-3-36)$$

όπου $c_{mj} = 0$ ή 1 για κάθε m και j . Κάθε στοιχείο μιας κωδικής λέξης αντιστοιχίζεται σε μια στοιχειώδη δυαδική PSK κυματομορφή ως ακολούθως:

$$\begin{aligned} c_{mj} = 1 &\Rightarrow s_{mj}(t) = \sqrt{\frac{2E_c}{T_c}} \cos 2\pi f_c t \quad (0 \leq t \leq T_c) \\ c_{mj} = 0 &\Rightarrow s_{mj}(t) = -\sqrt{\frac{2E_c}{T_c}} \cos 2\pi f_c t \quad (0 \leq t \leq T_c) \end{aligned} \quad (3-3-37)$$

όπου $T_c = T/N$ και $E_c = E/N$. Συνεπώς, οι M κωδικές λέξεις $\{\mathbf{C}_m\}$ αντιστοιχίζονται σε ένα σύνολο M κυματομορφών $\{s_m(t)\}$.



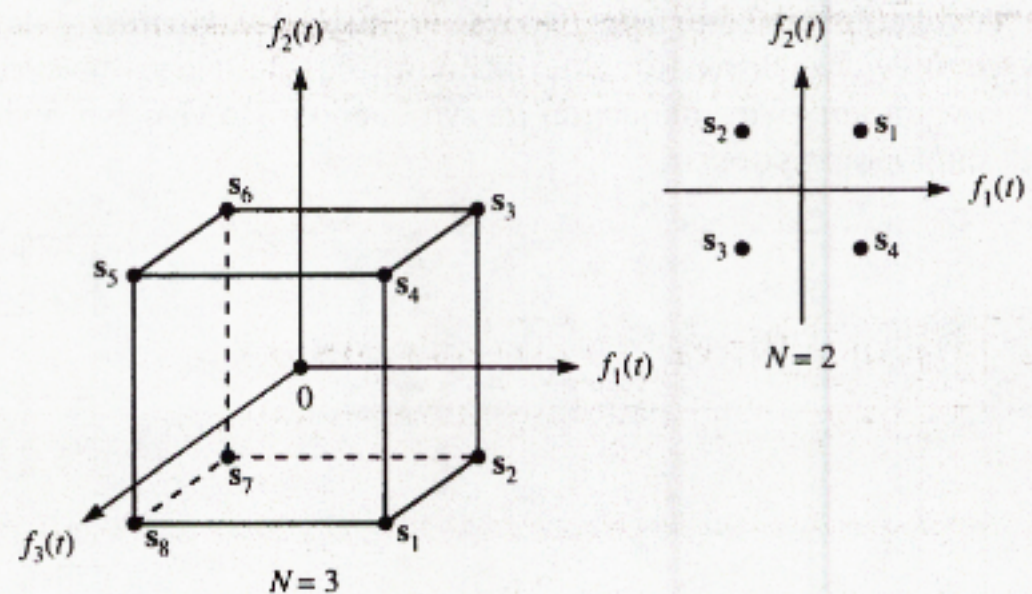
ΣΧΗΜΑ 3-3-10: Αστερισμοί M -αδικών simplex σημάτων.

Οι κυματομορφές μπορούν να παρασταθούν σε διανυσματική μορφή ως

$$\mathbf{s}_m = [s_{m1} \ s_{m2} \ \dots \ s_{mN}], \quad m = 1, 2, \dots, M \quad (3-3-38)$$

όπου $s_{mj} = \pm \sqrt{E/N}$ για όλα τα m και j . Το N ονομάζεται μήκος του τμήματος (block) του κώδικα, και αποτελεί επίσης την διάσταση των M κυματομορφών.

Παρατηρούμε ότι μπορούν να κατασκευασθούν 2^N πιθανές κυματομορφές από τις 2^N πιθανές δυαδικές κωδικές λέξεις. Μπορούμε να επιλέξουμε ένα υποσύνολο $M < 2^N$ κυματομορφών σήματος για την μετάδοση της πληροφορίας. Επίσης παρατηρούμε ότι τα 2^N πιθανά σημεία σήματος αντιστοιχούν στις κορυφές ενός N -διάστατου υπερ-κύβου με το κέντρο του στην αρχή των συντεταγμένων. Το Σχ. 3-3-11 παρουσιάζει τα σημεία σήματος σε $N=2$ και 3 διαστάσεις.



ΣΧΗΜΑ 3-3-11: Αστερισμοί σημάτων που παράγονται από δυαδικούς κώδικες.

Καθεμία από τις M κυματομορφές έχει ενέργεια E . Η ετεροσυσχέτιση μεταξύ οποιουδήποτε ζεύγους κυματομορφών εξαρτάται από το πώς επιλέγουμε τις M κυματομορφές από τις 2^N πιθανές κυματομορφές. Αυτό το θέμα συζητείται στο Κεφάλαιο 7. Προφανώς, όλα τα παρακείμενα σημεία σήματος έχουν ένα συντελεστή ετεροσυσχέτισης

$$\rho_r = \frac{\xi(1-2/N)}{\xi} = \frac{N-2}{N} \quad (3-3-39)$$

και μια αντίστοιχη απόσταση

$$d^{(e)} = \sqrt{2\xi(1-\rho_r)} = \sqrt{4\xi/N} \quad (3-3-40)$$

Εδώ ολοκληρώνεται η συζήτησή μας για τη διαμόρφωση σημάτων άνευ μνήμης.

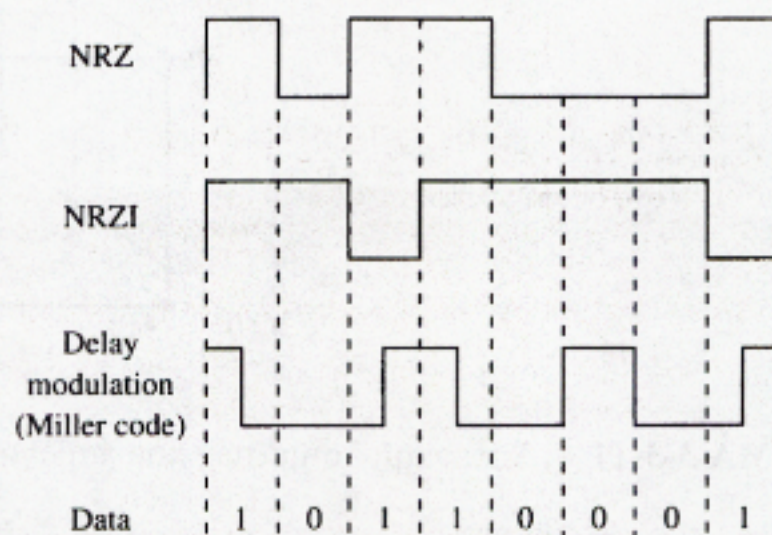
3-3-2 Η Γραμμική Διαμόρφωση Με Μνήμη

Τα σήματα διαμόρφωσης που παρουσιάστηκαν στην προηγούμενη ενότητα ταξινομήθηκαν ως άνευ μνήμης, επειδή δεν υπήρχε καμία εξάρτηση μεταξύ συμβόλων που μεταδίδονται σε μη επικαλυπτόμενα διαστήματα συμβόλου. Σ' αυτήν την ενότητα, παρουσιάζουμε κάποια σήματα διαμόρφωσης στα οποία υπάρχει εξάρτηση μεταξύ των μεταδιδόμενων σημάτων σε διαδοχικά διαστήματα συμβόλου. Αυτή η εξάρτηση σήματος συνήθως εισάγεται με σκοπό την

μορφοποίηση του φάσματος του μεταδιδόμενου σήματος έτσι ώστε να ταιριάζει στα φασματικά χαρακτηριστικά του καναλιού. Η εξάρτηση μεταξύ των μεταδιδόμενων σημάτων σε διαφορετικά διαστήματα σήματος επιτυγχάνεται γενικά με την κωδικοποίηση της ακολουθίας δεδομένων στην είσοδο του διαμορφωτή με την βοήθεια ενός κώδικα διαμόρφωσης (*modulation code*), όπως περιγράφεται στο Κεφάλαιο 9.

Στην ενότητα αυτή, θα παρουσιάσουμε παραδείγματα σημάτων διαμόρφωσης με μνήμη και θα χαρακτηρίσουμε τη μνήμη τους με την βοήθεια των αλυσίδων Markov. Θα περιορίσουμε την αναφορά μας σε σήματα βασικής ζώνης. Η γενίκευση σε ζωνοδιαβατά σήματα είναι σχετικά απλή.

Το Σχ. 3-3-12 παρουσιάζει τρία διαφορετικά σήματα βασικής ζώνης (ζωνοδιαβατά), και την αντίστοιχη ακολουθία δεδομένων. Το πρώτο σήμα, αποκαλούμενο NRZ (χωρίς-επιστροφή-στο-μηδέν - non-return-to-zero) είναι το απλούστερο. Το δυαδικό ψηφίο πληροφορίας 1 αναπαρίσταται από έναν ορθογώνιο παλμό πολικότητας A και το δυαδικό ψηφίο 0 αναπαρίσταται από έναν ορθογώνιο παλμό πολικότητας $-A$. Κατά συνέπεια, η διαμόρφωση NRZ είναι χωρίς μνήμη και είναι ισοδύναμη με ένα δυαδικό PAM ή ένα δυαδικό σήμα PSK σε ένα σύστημα με διαμόρφωση φορέα.



ΣΧΗΜΑ 3-3-12 Σήματα βασικής ζώνης

Το σήμα NRZI (χωρίς-επιστροφή-στο-μηδέν-με-αντιστροφή - non return-to-zero inverted) είναι διαφορετικό από το σήμα NRZ, υπό την έννοια ότι οι μεταβάσεις από το ένα επίπεδο πλάτους στο άλλο συμβαίνουν μόνο όταν μεταδίδεται ένα 1. Το επίπεδο πλάτους παραμένει αμετάβλητο όταν μεταδίδεται ένα μηδέν. Αυτός ο τύπος κωδικοποίησης σήματος ονομάζεται *διαφορική κωδικοποίηση (differential encoding)*. Η λειτουργία κωδικοποίησης περιγράφεται μαθηματικώς από την σχέση

$$b_k = a_k \oplus b_{k-1} \quad (3-3-41)$$

όπου $\{a_k\}$ είναι η δυαδική πληροφοριακή ακολουθία που εισάγεται στον κωδικοποιητή, $\{b_k\}$ είναι η ακολουθία εξόδου του κωδικοποιητή και \oplus υποδηλώνει πρόσθεση σε (συμπλήρωμα) modulo-2. Όταν $b_k = 1$, η μεταδιδόμενη κυματομορφή είναι ένας ορθογώνιος παλμός πλάτους A και όταν $b_k = 0$ η μεταδιδόμενη κυματομορφή είναι ένας ορθογώνιος παλμός πλάτους $-A$. Επομένως, η έξοδος του κωδικοποιητή αντιστοιχίζεται σε μια από τις δυο κυματομορφές ακριβώς με τον ίδιο τρόπο όπως στην περίπτωση του σήματος NRZ.

Η λειτουργία της διαφορικής κωδικοποίησης εισάγει μνήμη στο σήμα. Ο συνδυασμός των λειτουργιών του κωδικοποιητή και του διαμορφωτή μπορεί να απεικονιστεί με ένα διάγραμμα καταστάσεων (για Markov, κωβιανή αλυσίδα) που δείχνεται στο Σχ. 3-3-13. Το διάγραμμα καταστάσεων μπορεί να περιγραφεί με δύο μήτρες μετάβασης που αντιστοιχούν στα δυο πιθανά

bits εισόδου $\{0,1\}$. Παρατηρούμε ότι όταν $a_k = 0$, ο κωδικοποιητής μένει στην ίδια κατάσταση. Έτσι, η μήτρα μετάβασης καταστάσεων για ένα μηδέν είναι απλώς

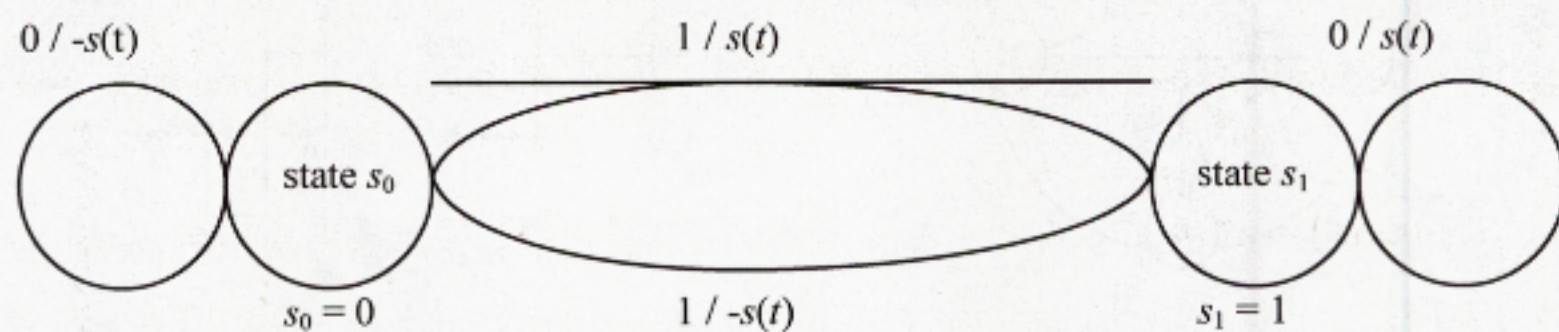
$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-3-42)$$

όπου $t_{ij} = 1$ αν το a_k έχει ως αποτέλεσμα μια αλλαγή από την κατάσταση i στην κατάσταση j , $i = 1,2$ και $j = 1,2$. Διαφορετικά, $t_{ij} = 0$. Ομοίως, η μήτρα μετάβασης καταστάσεων για $a_k = 1$ είναι

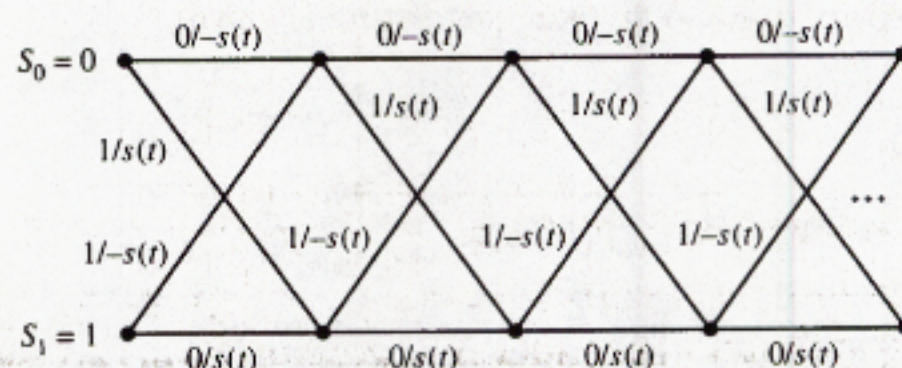
$$\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3-3-43)$$

Έτσι, αυτές οι δύο μήτρες μετάβασης καταστάσεων χαρακτηρίζουν το σήμα NRZI.

Ένας άλλος τρόπος απεικόνισης της μνήμης που εισάγεται από την λειτουργία προκωδικοποίησης στηρίζεται στο διάγραμμα Trellis. Το διάγραμμα Trellis του σήματος NRZI απεικονίζεται στο Σχ. 3-3-14. Το διάγραμμα Trellis παρέχει ακριβώς την ίδια πληροφορία, όσον αφορά την εξάρτηση του σήματος με το διάγραμμα καταστάσεων, αλλά απεικονίζει επί πλέον και την χρονική εξέλιξη των μεταβάσεων των καταστάσεων.



ΣΧΗΜΑ 3-3-13: Το διάγραμμα καταστάσεων του σήματος NRZI.

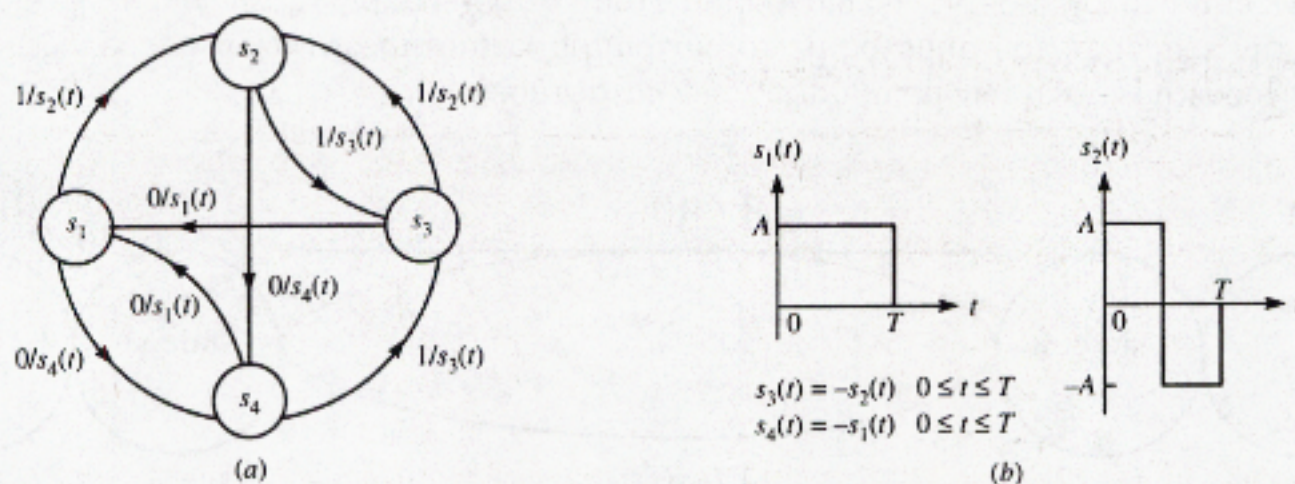


ΣΧΗΜΑ 3-3-14: Το Trellis διάγραμμα καταστάσεων του σήματος NRZI.

Το σήμα που παράγεται από την διαμόρφωση καθυστέρησης έχει επίσης μνήμη. Όπως θα δειχθεί στο Κεφάλαιο 9, με την διαμόρφωση καθυστέρησης ουσιαστικά κωδικοποιούμε την ακολουθία δεδομένων με έναν κώδικα με περιορισμό μήκους (run-length-limited) ονομαζόμενο κώδικας Miller και χρησιμοποιούμε σήματα NRZI για την μετάδοση των κωδικοποιημένων δεδομένων. Αυτού του τύπου η ψηφιακή διαμόρφωση έχει χρησιμοποιηθεί εκτενώς στις ψηφιακές

μαγνητικές ηχογραφήσεις και σε συστήματα με διαμόρφωση φορέα που χρησιμοποιούν δυαδική PSK. Το σήμα μπορεί να περιγραφεί από ένα διάγραμμα καταστάσεων που έχει τέσσερις καταστάσεις, όπως απεικονίζεται στο Σχ. 3-3-15(α). Για την μετάδοση της δυαδικής πληροφορίας χρησιμοποιούνται δύο βασικές κυματομορφές, οι $s_1(t)$ και $s_2(t)$, καθώς και οι αρνητικές τους $-s_1(t)$ και $-s_2(t)$. Αυτές οι κυματομορφές απεικονίζονται στο Σχ. 3-3-15(β). Η αντιστοίχιση από τα bits στις αντίστοιχες κυματομορφές εμφανίζεται στο διάγραμμα καταστάσεων. Οι πίνακες μετάβασης των καταστάσεων που χαρακτηρίζουν την μνήμη αυτής της μεθόδου κωδικοποίησης και διαμόρφωσης προκύπτουν εύκολα από το διάγραμμα καταστάσεων του Σχ. 3-3-15. Όταν $a_k = 0$, έχουμε

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3-3-44)$$



ΣΧΗΜΑ 3-3-15. Το διάγραμμα καταστάσεων (α) και οι βασικές κυματομορφές (β) για ένα σήμα με διαμόρφωση καθυστέρησης (Miller).

και όταν $a_k = 1$, ο πίνακας καταστάσεων είναι:

$$\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3-3-45)$$

Έτσι, αυτοί οι δύο 4×4 πίνακες μετάβασης καταστάσεων χαρακτηρίζουν το διάγραμμα καταστάσεων του κατά Miller κωδικοποιημένου σήματος.

Οι τεχνικές διαμόρφωσης με μνήμη, όπως η NRZI κωδικοποίηση και η κωδικοποίηση Miller, χαρακτηρίζονται γενικά από μια Μαρκωβιανή αλυσίδα K -καταστάσεων με *στάσιμες πιθανότητες κατάστασης (stationary state probabilities)* $\{p_i, i = 1, 2, \dots, K\}$, και *πιθανότητες μετάβασης (transition probabilities)* $\{p_{ij}, i, j = 1, 2, \dots, K\}$. Σε κάθε μετάβαση αντιστοιχίζεται μια κυματομορφή σήματος $s_j(t), j = 1, 2, \dots, K$. Έτσι, η πιθανότητα μετάβασης p_{ij} υποδηλώνει την πιθανότητα με την οποία η κυματομορφή σήματος $s_j(t)$ μεταδίδεται σε ένα δεδομένο διάστημα σηματοδοσίας μετά την μετάδοση της κυματομορφής $s_i(t)$ στο προηγούμενο διάστημα σηματοδοσίας. Οι πιθανότητες μετάβασης μπορούν να παραταθούν σε πίνακα ως

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1k} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{k1} & P_{k2} & \dots & P_{kk} \end{bmatrix} \quad (3-3-46)$$

Όπου το \mathbf{P} ονομάζεται *μήτρα πιθανοτήτων μεταβάσεων* (transition probability matrix).

Ο πίνακας πιθανοτήτων μεταβάσεων προκύπτει εύκολα από τις μήτρες μετάβασης $\{\mathbf{T}_i\}$ και τις αντίστοιχες πιθανότητες εμφάνισης των bits εισόδου (ή, ισοδύναμα, τις στάσιμες πιθανότητες μετάβασης καταστάσεων $\{p_j\}$). Η γενική σχέση μπορεί να εκφρασθεί ως

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^2 q_i \mathbf{T}_i \quad (3-3-47)$$

όπου $q_1 = P(a_k = 0)$ και $q_2 = P(a_k = 1)$.

Για ένα σήμα NRZI που έχει ίσες πιθανότητες καταστάσεων $p_1 = p_2 = 1/2$ και οι μήτρες μεταβάσεων του δίνονται από τις (3-3-42) και (3-3-43), η μήτρα πιθανοτήτων μεταβάσεων είναι

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (3-3-48)$$

Παρομοίως, η μήτρα πιθανοτήτων μεταβάσεων για το κατά Miller κωδικοποιημένο σήμα με ισοπίθανα σύμβολα ($q_1 = q_2 = 1/2$ ή, ισοδύναμα, $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 1/4$) είναι:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \quad (3-3-49)$$

Η μήτρα πιθανοτήτων μεταβάσεων βοηθά στον προσδιορισμό των φασματικών χαρακτηριστικών των τεχνικών ψηφιακής διαμόρφωσης με μνήμη, όπως θα δούμε στην Ενότητα 3-4.

3-3-3 Οι Μέθοδοι Μη Γραμμικής Διαμόρφωσης με Μνήμη

Σε αυτή την ενότητα, θα εξετάσουμε μια κατηγορία μεθόδων ψηφιακής διαμόρφωσης, στις οποίες η φάση του σήματος επιβάλλεται να είναι συνεχής. Αυτός ο περιορισμός έχει ως αποτέλεσμα έναν διαμορφωτή φάσης ή συχνότητας που έχει μνήμη. Η μέθοδος διαμόρφωσης είναι επίσης μη-γραμμική.

Η Συνεχούς Φάσης FSK (CPFSK) Ένα συμβατικό FSK σήμα παράγεται με την ολίσθηση (της συχνότητας) του φορέα κατά μια τιμή $f_n = \frac{1}{2} \Delta f I_n$, $I_n = \pm 1, \pm 3, \dots, \pm (M-1)$, ώστε να αποτυπωθεί η προς μετάδοση ψηφιακή πληροφορία. Το σήμα FSK αυτού του τύπου περιγράφηκε στην Ενότητα 3-3-1 και είναι άνευ μνήμης. Η μεταγωγή από την μία συχνότητα στην άλλη μπορεί να επιτευχθεί με την ύπαρξη $M = 2^k$ ξεχωριστών ταλαντωτών συντονισμένων στις επιθυμητές συχνότητες και την επιλογή της μίας από τις M συχνότητες σύμφωνα με το συγκεκριμένο σύμβολο των k bits που πρόκειται να μεταδοθεί σε ένα διάστημα σηματοδοσίας διάρκειας $T = k/R$ δευτερολέπτων. Ωστόσο, μία τόσο απότομη μετάβαση από την έξοδο του ενός ταλαντωτή σε μία άλλη σε διαδοχικά διαστήματα σηματοδοσίας προκαλεί σχετικά μεγάλους πλευρικούς φασματικούς λοβούς έξω από την κύρια φασματική ζώνη του σήματος και, συνεπώς, αυτή η μέθοδος απαιτεί μεγάλη ζώνη συχνοτήτων για την μετάδοση του σήματος.

Για να αποφύγουμε την χρήση σημάτων που έχουν μεγάλους πλευρικούς λοβούς, η συχνότητα του πληροφοριακού σήματος διαμορφώνει έναν μονό φορέα του οποίου η συχνότητα μεταβάλλεται διαρκώς. Το κατά συχνότητα διαμορφωμένο σήμα που προκύπτει είναι συνεχούς φάσης και, συνεπώς, ονομάζεται *Διαμόρφωση Συχνότητας Συνεχούς Φάσης* (*continuous phase FSK - CPFSK*). Αυτός ο τύπος FSK σήματος έχει μνήμη, επειδή στην φάση του φορέα επιβάλλεται για να είναι συνεχής.

Προκειμένου να απεικονίσουμε ένα σήμα CPFSK, ξεκινάμε από ένα σήμα PAM

$$d(t) = \sum_n I_n g(t - nT) \quad (3-3-50)$$

όπου $\{I_n\}$ υποδηλώνει την ακολουθία των πλατών που δημιουργείται εάν από την πληροφοριακή ακολουθία $\{a_n\}$ αντιστοιχίσουμε τμήματα δυαδικών ψηφίων μήκους k -bits με τα επίπεδα πλάτους $\pm 1, \pm 3, \dots, \pm (M-1)$, και $g(t)$ είναι ένας ορθογώνιος παλμός πλάτους $1/2T$ και διάρκειας T δευτερολέπτων. Το σήμα $d(t)$ χρησιμοποιείται ώστε να διαμορφωθεί κατά συχνότητα ο φορέας. Συνεπώς, η ισοδύναμη κατωδιαβατή κυματομορφή $v(t)$ εκφράζεται ως:

$$v(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \exp\{j[4\pi T f_d \int_{-\infty}^t d(\tau) dt + \phi_0]\} \quad (3-3-51)$$

όπου f_d είναι η *αιχμή της συχνοτικής απόκλισης* (*peak frequency deviation*) και ϕ_0 η αρχική φάση του φορέα.

Το σήμα διαμορφωμένου φορέα που αντιστοιχεί στο (3-3-51) μπορεί να εκφραστεί ως

$$s(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos[2\pi f_c t + \phi(t; \mathbf{I}) + \phi_0] \quad (3-3-52)$$

όπου το $\phi(t; \mathbf{I})$ αντιπροσωπεύει την χρονικώς μεταβαλλόμενη φάση του φορέα που ορίζεται ως

$$\begin{aligned} \phi(t; \mathbf{I}) &= 4\pi T f_d \int_{-\infty}^t d(\tau) dt \\ &= 4\pi T f_d \int_{-\infty}^t \left[\sum_n I_n g(\tau - nT) \right] dt \end{aligned} \quad (3-3-53)$$

Σημειώστε ότι, αν και το $d(t)$ περιέχει ασυνέχειες, το ολοκλήρωμα του $d(t)$ είναι συνεχές. Άρα έχουμε ένα σήμα συνεχούς φάσης. Η φάση του φορέα στο διάστημα $nT \leq t \leq (n+1)T$ καθορίζεται με την ολοκλήρωση της (3-3-53). Έτσι,

$$\begin{aligned} \phi(t; \mathbf{I}) &= 2\pi f_d T \sum_{k=-\infty}^{n-1} I_k + 2\pi f_d (t - nT) I_n \\ &= \theta_n + 2\pi h I_n q(t - nT) \end{aligned} \quad (3-3-54)$$

όπου τα h, θ_n , και $q(t)$ ορίζονται ως:

$$h = 2f_d T \quad (3-3-55)$$

$$\theta_n = \pi h \sum_{k=-\infty}^{n-1} I_k \quad (3-3-56)$$

$$q(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ t/2T & (0 \leq t \leq T) \\ \frac{1}{2} & (t > T) \end{cases} \quad (3-3-57)$$

Παρατηρούμε ότι το θ_n αντιπροσωπεύει την συσσώρευση (μνήμη) όλων των συμβόλων έως και την χρονική στιγμή $(n-1)T$. Η παράμετρος h αποκαλείται *δείκτης διαμόρφωσης* (*modulation index*).