Οργάνωση Υπολογιστών

Επιμέλεια:

Γεώργιος Θεοδωρίδης, Επίκουρος Καθηγητής

Ανδρέας Εμερετλής, Υποψήφιος Διδάκτορας

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Τεχνολογίας Υπολογιστών

Άδειες Χρήσης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη Δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Ανάπτυξη

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό αναπτύχθηκε στο Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Τεχνολογίας Υπολογιστών του Πανεπιστημίου Πατρών.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΓΙΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΕΣ

ΑΣΚΗΣΗ 1

Ο παρακάτω πίνακας δείχνει τις τιμές των καταχωρητών \$s0 και \$s1 για δύο περιπτώσεις. Οι τιμές των καταχωρητών είναι σε δεκαεξαδική αναπαράσταση.

	\$s0	\$s1
Περίπτωση 1	7000 0000	0FFF FFFF
Περίπτωση 2	4000 0000	4000 0000

Για κάθε ένα από τα ακόλουθα ερωτήματα (Α, Β, Γ) εκτελέστε για κάθε περίπτωση (περιπτώσεις 1 και 2) τις αριθμητικές πράξεις, όπως αυτές περιγράφονται από τις αντίστοιχες MIPS εντολές, και εξετάστε αν το αποτέλεσμα είναι σωστό ή αν υπάρχει υπερχείλιση.

Α. add \$t0, \$s0, \$s1

Β. sub \$t0, \$s0, \$s1

Γ. add \$t0, \$s0, \$s1

add \$t0, \$t0, \$s0

ΛΥΣΗ

Στον επεξεργαστή MIPS οι αριθμοί είναι προσημασμένοι σε αναπαράσταση συμπληρώματος ως προς 2 (2's complement). Στο συγκεκριμένο αριθμητικό σύστημα (συμπλήρωμα ως προς 2) ισχύει ότι το περισσότερο σημαντικό ψηφίο (MSB – Most Significant Bit) είναι ίσο με MSB=0 για τους θετικούς αριθμούς και MSB=1 για τους αρνητικούς αριθμούς. Επίσης, σε αυτό το αριθμητικό σύστημα η πρόσθεση εκτελείται με το συμβατικό τρόπο αγνοώντας πάντα το κρατούμενο που τυχόν θα προκύψει.

Αναφορικά με την υπερχείλιση για την περίπτωση της πρόσθεσης ισχύουν τα ακόλουθα:

α) αν οι δύο αριθμοί είναι ετερόσημοι τότε δεν υπάρχει ποτέ υπερχείλιση και το αποτέλεσμα είναι πάντα σωστό, και

β) αν οι αριθμοί είναι ομόσημοι και το αποτέλεσμα έχει διαφορετικό πρόσημο, τότε υπάρχει υπερχείλιση και το αποτέλεσμα είναι λάθος.

Όσον αφορά την αφαίρεση ισχύουν τα παραπάνω αφού αυτή εκτελείται προσθέτοντας στον αφαιρετέο το συμπλήρωμα ως προς 2 του αφαιρέτη. Δηλαδή, $X - Y = X + (\overline{Y} + 1)$, όπου η παρένθεση αντιστοιχεί στο συμπλήρωμα ως προς 2 του Y, ενώ ο συμβολισμός $\overline{Y}$ αντιστοιχεί στο λογικό συμπλήρωμα του Y.

Επομένως, με βάση τα παραπάνω έχουμε:

Α. add $t0, $s0, $s1

Περίπτωση 1			Περίπτωση 2	
7000 0000	(θετικός)		4000 0000	(θετικός)
+ 0FFF FFFF	(θετικός)		+ 4000 0000	(θετικός)
7FFF FFFF	(θετικός)		8000 0000	(αρνητικός)

Στην 1η περίπτωση οι αριθμοί που προστίθενται είναι θετικοί και το αποτέλεσμα είναι θετικός αριθμός, άρα το αποτέλεσμα είναι σωστό και δεν υπάρχει υπερχείλιση. Στη 2η περίπτωση, προσθέτουμε δύο θετικούς αριθμούς και το αποτέλεσμα είναι ένας αρνητικός αριθμός. Συνεπώς, υπάρχει υπερχείλιση και το αποτέλεσμα (δηλαδή, η λέξη) που αποθηκεύεται στον καταχωρητή $t0 είναι λάθος. Συγκεκριμένα, το πλήθος των ψηφίων του καταχωρητή $t0 δεν επαρκεί για να αποθηκευτεί το μέτρο (απόλυτη τιμή) και το πρόσημο του αποτελέσματος της πράξης.

Αν είχαμε όμως ένα επιπλέον δυαδικό ψηφίο δηλαδή, 33 αντί 32 δυαδικά ψηφία για τον καταχωρητή $t0, τότε θα είχαμε

Περίπτωση 2	
0**4000 0000**	(θετικός)
+ 0**4000 0000**	(θετικός)
0**8000 0000**	(θετικός)

όπου με έντονη γραμματοσειρά είναι τα δεκαεξαδικά ψηφία (8x4=32 δυαδικά ψηφία) και με κανονική γραμματοσειρά το 33ο δυαδικό ψηφίο. Έτσι, βλέπουμε ότι αν το μήκος λέξης των καταχωρητών ήταν 33 ψηφία, τότε η πράξη θα εκτελούταν σωστά.

Όμως, η αύξηση του μήκους λέξης δεν αποτελεί λύση για τη γενική περίπτωση. Αυτό συμβαίνει διότι πάντα θα υπάρχει πιθανότητα υπερχείλισης και πάντα θα απαιτείται αύξηση του μήκους λέξης των καταχωρητών. Συγκεκριμένα, στη γενική περίπτωση το αποτέλεσμα των πράξεων κυμαίνεται από $-\infty$ ως $+\infty$, το οποίο επιβάλει διαρκώς μεγαλύτερο μήκος λέξης. Στη ουσία το μήκος λέξης πρέπει να είναι άπειρο για να καλύπτει οποιοδήποτε αποτέλεσμα.

Β. sub $t0, $s0, $s1

Για να εκτελεστεί η αφαίρεση, πρέπει να υπολογιστεί το συμπλήρωμα ως προς 2 του αριθμού που υπάρχει στον καταχωρητή $s1. Αυτό μπορεί να υπολογιστεί αν πάρουμε τη δυαδική αναπαράσταση του αριθμού, έστω Y, και εργαστούμε με το γνωστό τρόπο. Δηλαδή, $\sigma(Y)_2 = (\overline{Y} + 1)$, όπου $\sigma(Y)_2$ το συμπλήρωμα ως προς 2 του αριθμού Y.

Όμως η διαδικασία αυτή είναι επίπονη και επιρρεπής σε λάθη όταν ο αριθμός έχει πολλά δυαδικά ψηφία. Για το λόγο αυτό είναι προτιμότερο να εργαστούμε απευθείας στο δεκαεξαδικό αριθμητικό σύστημα. Άρα, πρέπει να υπολογίσουμε το συμπλήρωμα ως προς 16 του Y.

Ο υπολογισμός του συμπληρώματος, $\sigma(Y)_r$, ενός αριθμού $Y = y_{n-1}, \ldots, y_0$ (n ψηφίων) ως προς τη βάση r ενός αριθμητικού συστήματος, δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$\sigma(Y)_r = \left[\ \left((r-1) - y_{n-1}\right),\ \left((r-1) - y_{n-2}\right), \ldots, \left((r-1) - y_0\right)\ \right] + 1$$

δηλαδή, σε κάθε ψηφίο y_i εκτελούμε την πράξη $(r\text{-}1)\text{–}y_i$ και στην νέα λέξη που προκύπτει προσθέτουμε το 1.

Έτσι, για την 1η περίπτωση έχουμε \$s1=Y=0FFFFFFF επομένως, $\sigma(Y)_{16} = \left[(F-0),\ (F-F),\ (F-F), \ldots,\ (F-F)\right] + 1 = F0000000 + 1 = F0000001$.

Ομοίως, για την 2η περίπτωση έχουμε \$s1=Y=40000000 επομένως, $\sigma(Y)_{16} = \left[(F-4),\ (F-0),\ (F-0), \ldots,\ (F-0)\right] + 1 = BFFFFFFF + 1 = C0000000$.

Τώρα, που έχουμε υπολογίσει τα συμπληρώματα ως προς 16 του Y για τις δύο περιπτώσεις, αντί για αφαίρεση εκτελούμε πρόσθεση χρησιμοποιώντας τα συμπληρώματα, όπως δείχνεται στη συνέχεια.

	Περίπτωση 1			Περίπτωση 2	
	7000 0000	(θετικός)		4000 0000	(θετικός)
+	F000 0001	(αρνητικός)	+	C000 0000	(αρνητικός)
1)	6000 0001	(αρνητικός)	1)	0000 0000	(θετικός)

Και στις δύο περιπτώσεις υπάρχει κρατούμενο που αγνοείται. Για παράδειγμα στην 1η περίπτωση για το περισσότερο σημαντικό ψηφίο έχουμε (7+F) = $(7+15)_{10} = 22_{10} = 16_{16}$.

Όσον αφορά την υπερχείλιση και στις δύο περιπτώσεις προσθέτουμε ετερόσημους αριθμούς. Επομένως, το αποτέλεσμα είναι πάντα σωστό και δεν υπάρχει υπερχείλιση.

Γ. add \$t0, \$s0, \$s1

add \$t0, \$t0, \$s0

Εδώ έχουμε δύο διαδοχικές προσθέσεις όπου το αποτέλεσμα της 1ης ($t0) χρησιμοποιείται στη 2η. Έτσι, εκτελώντας διαδοχικά τις προσθέσεις έχουμε:

add $t0, $s0, $s1

	Περίπτωση 1			Περίπτωση 2	
	7000 0000	(θετικός)		4000 0000	(θετικός)
+	0FFF FFFF	(θετικός)	+	4000 0000	(θετικός)
	7FFF FFFF	(θετικός)		8000 0000	(αρνητικός)

Σύμφωνα με τα παραπάνω στη 2η περίπτωση έχουμε υπερχείλιση και λάθος αποτέλεσμα. Αυτό σημαίνει ότι τα ψηφία του $t0 δεν αρκούν για να αναπαραστήσουν σωστά το αποτέλεσμα. Επειδή και η επόμενη πράξη είναι επίσης πρόσθεση, η υπερχείλιση θα εξακολουθήσει να υπάρχει.

Επομένως, για τη 2η περίπτωση το τελικό αποτέλεσμα που αποθηκεύεται στον $t0 μετά την εκτέλεση των δύο εντολών θα είναι λάθος, άρα θα υπάρχει υπερχείλιση.

add $t0, $t0, $s0

	Περίπτωση 1			Περίπτωση 2
	7FFF FFFF	(θετικός)		8000 0000
+	7000 0000	(θετικός)	+	4000 0000
	EFFF FFFF	(αρνητικός)		C000 0000

Παρατηρούμε ότι στην 1η περίπτωση προσθέτουμε δύο θετικούς αριθμούς και το αποτέλεσμα είναι αρνητικός. Επομένως, έχουμε υπερχείλιση.

Άρα, και για τις δύο περιπτώσεις (περιπτώσεις 1 και 2) έχουμε υπερχείλιση.

ΑΣΚΗΣΗ 2

Οι παρακάτω αριθμοί και πράξεις αφορούν το πρότυπο (IEEE 754) κινητής υποδιαστολής απλής ακρίβειας.

Α. Βρείτε το δεκαδικό αριθμό που αντιστοιχεί στη δυαδική λέξη 1100 0011 1001 0110 0000 0000 0000 0000.

Β. Βρείτε την αναπαράσταση του δεκαδικού αριθμού 6,75.

Γ. Βρείτε το μεγαλύτερο και μικρότερο δεκαδικό αριθμό που μπορούν να αναπαρασταθούν σε αυτό το πρότυπο.

Δ. Για τους δεκαδικούς αριθμούς Α = +1,32 και Β = -0,5, δώστε την αναπαράστασής τους στο παραπάνω πρότυπο. Ποια είναι η δεκαδική τιμή της αναπαράστασής τους;

Ε. Εκτελέστε την πράξη Α+Β παρουσιάζοντας όλα τα βήματα της διαδικασίας της άθροισης.

ΛΥΣΗ

Α. Στο πρότυπο κινητής υποδιαστολής απλής ακρίβειας η αναπαράσταση του αριθμού είναι:

Πρόσημο	Πολωμένος εκθέτης (Π.Ε)	Κλάσμα
1 bit	8 bits	23 bits

Λαμβάνοντας υπόψη την κανονικοποίηση που επιβάλει το πρότυπο δηλαδή, ότι υπονοείται το ψηφίο «1» αριστερά της υποδιαστολής, ο αντίστοιχος δεκαδικός αριθμός είναι: **(πρόσημο)×(1 + κλάσμα)×2^{E}**.

Επίσης, είναι γνωστό ότι <u>Εκθέτης (Ε) = Πολωμένος εκθέτης (ΠΕ) – πόλωση</u> δηλαδή, <u>Ε=ΠΕ -127</u>.

Επομένως, για τον αριθμό 1(100 0011 1)001 0110 0000 0000 0000 0000 έχουμε:

- <u>Πρόσημο</u>: 1 δηλαδή, αρνητικός
- Πολωμένος εκθέτης: 1000 0111 = 128 +7 =135. Άρα, <u>Εκθέτης</u> = 135 – 127 = 8.
- <u>Κλάσμα</u>: 001 0110 0000 0000 0000 0000 = 0,171875.

Άρα, ο δεκαδικός αριθμός είναι: – (1,171875) x 2^8.

Β. Ο δεκαδικός αριθμός είναι 5,75. Επομένως, έχουμε:

- Πρόσημο: 0 (ο αριθμός είναι θετικός)

Η αναπαράσταση του 6,75 στο δυαδικό σύστημα είναι: $(6{,}75)_{10} = (110.11)_2 = (110.11)_2 \times 2^0$. Όμως, λόγω της κανονικοποίησης που επιβάλει το πρότυπο, η υποδιαστολή πρέπει να μεταφερθεί 2 θέσεις αριστερά. Αυτό σημαίνει ότι διαιρούμε τον αριθμό δύο φορές με το 2 (μία φορά με το 4). Για να μην αλλάξει όμως η τιμή του αριθμού, πρέπει να πολλαπλασιάσουμε τον αριθμό με το 4 δηλαδή, να αυξήσουμε τον εκθέτη κατά 2. Επομένως, έχουμε: $5{,}75 = 101.11 \times 2^0 = 1.1011 \times 2^2$.

Εφόσον, ο εκθέτης (Ε) είναι 2, τότε ο πολωμένος εκθέτης (ΠΕ) είναι ΠΕ = Ε +πόλωση δηλαδή, ΠΕ = 2 +127=129. Η δυαδική αναπαράσταση του 129 είναι 10000001. Άρα,

Πρόσημο (1 bit)	Π.Ε (8 bits)	Κλάσμα (23 bits)
0	10000001	101100 00

Γ. Όσον αφορά το μεγαλύτερο θετικό αριθμό έχουμε:

Πρόσημο: 0 (ο αριθμός είναι θετικός).

Κλάσμα = 11…1 (23 ψηφία όλα «1»).

ΠΕ: 11111111 (ο μέγιστος αριθμός με 8 δυαδικά ψηφία).

Όμως, ο ΠΕ 11111111 = 255 είναι δεσμευμένος από το πρότυπο και χρησιμοποιείται ως ΠΕ για την αναπαράσταση του NaN (Not-a-Number). Άρα, ο μέγιστος αποδεκτός ΠΕ είναι ο αμέσως μικρότερος δηλαδή, ΠΕ = 11111110 = 254.

Εφόσον, ΠΕ =254 → Ε = ΠΕ – πόλωση = 254 – 127 =127. Άρα, Ε = 127.

Συνεπώς, με βάση τα παραπάνω έχουμε:

Μέγιστος θετικός = $+\ 1.11....1 \times 2^{127} \cong +2 \times 2^{127} = +2^{128}$.

Ομοίως, εργαζόμαστε για το μικρότερο αρνητικό αριθμό, όπου το μόνο που αλλάζει είναι η τιμή του προσήμου. Επομένως,

Μικρότερος αρνητικός = $-1.11....1 \times 2^{127} \cong -2 \times 2^{127} = -2^{128}$.

Δ. Ο αριθμός Α = +1,32 έχει την ακόλουθη δυαδική αναπαράσταση με 23 δυαδικά ψηφία στο κλασματικό μέρος.

$A = +\ 1{,}010\ 1000\ 1111\ 0101\ 1100\ 0010 \times 2^0$.

Πρέπει να σημειωθεί ότι αν γίνουν αναλυτικά οι πράξεις της μετατροπής του αριθμού από το δεκαδικό στο δυαδικό σύστημα, προκύπτει ότι δεν επαρκούν 23 δυαδικά ψηφία στο κλασματικό μέρος για την ακριβή αναπαράσταση του αριθμού.

Η παραπάνω αναπαράσταση είναι ήδη κανονικοποιημένη. Επομένως, έχουμε:

Πρόσημο: 0.

Εκθέτης: 0. Άρα, ΠΕ = 0 + 127 = 127.

Κλάσμα: 010 1000 1111 0101 1100 0010

Άρα, η αναπαράσταση του Α στο πρότυπο IEEE 754 απλής ακρίβειας είναι:

Πρόσημο (1 bit)	Π.Ε (8 bits)	Κλάσμα (23 bits)
0	0111 1111	010 1000 1111 0101 1100 0010

Μετατρέποντας, την παραπάνω αναπαράσταση σε δεκαδική μορφή βρίσκουμε ότι Α=1,3199999332427979. Παρατηρούμε η τιμή του Α δεν είναι ακριβώς ίση με 1,32, το οποίο οφείλεται στο γεγονός ότι δεν επαρκούν 23 δυαδικά ψηφία στο κλασματικό μέρος για την ακριβή αναπαράσταση του αριθμού.

Ομοίως έχουμε: Β = – 0,5 = – $0,1\times2^{0}$, ο οποίος μετά την κανονικοποίηση γίνεται:

Β = – 0,5 = – $0,1\times2^{0}$ = – $1,0\times2^{-1}$.

Για την αναπαράσταση του Β στο πρότυπο έχουμε:

Πρόσημο: 1.

Εκθέτης: -1. Άρα, ΠΕ = -1 + 127 = 126 = 0111 1110.

Κλάσμα: 000 0000 0000 0000 0000 0000.

Άρα, η αναπαράσταση του Β στο πρότυπο IEEE 754 με απλή ακρίβεια είναι:

Πρόσημο (1 bit)	Π.Ε (8 bits)	Κλάσμα (23 bits)
1	0111 1110	000 0000 0000 0000 0000 0000

Στην περίπτωση αυτή καθώς τα 23 δυαδικά ψηφία στο κλασματικό μέρος επαρκούν για την ακριβή αναπαράσταση του αριθμού. Η τιμή που προκύπτει μετά την μετατροπή από την IEEE 754 αναπαράσταση σε δεκαδική αναπαράσταση δίνει αποτέλεσμα Β = – 0,5.

Ε. Για να προσθέσουμε του αριθμούς, πρέπει: α) αυτοί να έχουν τον ίδιο εκθέτη, β) να προσθέσουμε τα κλάσματα και γ) να κανονικοποιήσουμε το αποτέλεσμα αν χρειάζεται. Όσον αφορά το 1ο βήμα, αυτό έχει γίνει στο προηγούμενο ερώτημα. Δηλαδή,

Α = + 1,010 1000 1111 0101 1100 0010 x 2^0 και

Β = – 0,100 0000 0000 0000 0000 0000 x 2^0.

Όμως καθώς ο Β είναι αρνητικός, αντί για πρόσθεση στην ουσία εκτελούμε αφαίρεση. Έτσι, έχουμε:

$$\begin{array}{rr} & 1{,}010\ 1000\ 1111\ 0101\ 1100\ 0010 \times 2^0 \\ - & 0{,}100\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000 \times 2^0 \\ \hline & 0{,}110\ 1000\ 1111\ 0101\ 1100\ 0010 \times 2^0 \end{array}$$

Το αποτέλεσμα δεν είναι σε κανονική μορφή, οπότε η υποδιαστολή μεταφέρεται μία θέση δεξιά και ο εκθέτης μειώνεται κατά 1. Άρα,

Α +Β = 1,10 1000 1111 0101 1100 0010 0 x 2^{-1}.

ΑΣΚΗΣΗ 3

Α. Δίνεται ο αριθμός Ν1 = $(C180\ 0000)_{16}$. Σε ποιον δεκαδικό αριθμό αντιστοιχεί σύμφωνα με το πρότυπο κινητής υποδιαστολής (ΙΕΕΕ 754) απλής ακρίβειας;

Β. Δώστε την αναπαράσταση του Ν2 = 64_{10} στο παραπάνω πρότυπο.

Γ. Εκτελέστε την πράξη Ν3 = Ν1×Ν2 χρησιμοποιώντας τις αναπαραστάσεις κινητής υποδιαστολής και συγκρίνετε το αποτέλεσμα της πράξης με το δεκαδικό ισοδύναμο.

ΛΥΣΗ

Α. Όπως είναι γνωστό, στο πρότυπο κινητής υποδιαστολής απλής ακρίβειας ΙΕΕΕ 754 η αναπαράσταση του αριθμού είναι:

Πρόσημο	Πολωμένος εκθέτης (Π.Ε)	Κλάσμα
1 bit	8 bits	23 bits

Λαμβάνοντας υπόψη την κανονικοποίηση που επιβάλει το πρότυπο δηλαδή, ότι υπονοείται το ψηφίο 1 αριστερά της υποδιαστολής, ο αντίστοιχος δεκαδικός αριθμός είναι: **(πρόσημο)×(1 + κλάσμα)×2^E**. Επίσης, είναι γνωστό ότι <u>Εκθέτης (Ε) = Πολωμένος εκθέτης (ΠΕ) – πόλωση</u> δηλαδή, <u>Ε=ΠΕ -127</u>. Έτσι, έχουμε:

Ν1 = (1**100 0001 1**000 0000 0000 0000 0000 $0000)_2$. Άρα,

<u>Πρόσημο</u>: 1 δηλαδή, ο αριθμός είναι αρνητικός.

<u>Πολωμένος εκθέτης</u> : 1000 0011. Άρα, ΠΕ = 128 + 3 =131_{10}. Άρα, Ε = 131–127 = 4_{10}.

<u>Κλάσμα</u>: 00…….0.

Άρα, ο αντίστοιχος δεκαδικός αριθμός είναι: Ν1 = $(-1)\times(1.0)\times2^4= -16_{10}$.

Β. Το 64 είναι $64_{10} = (2^6)_{10}$, δηλαδή, Ν2 = $(1)\times(1.0)\times2^6$. Άρα, ο <u>Π.Ε. = 127+6 = 133_{10}</u>. Άρα, έχουμε:

Πρόσημο (1 bit)	Π.Ε (8 bits)	Κλάσμα (23 bits)
0	1000 0101	00 …. 00

Γ. Για την εκτέλεσης της πράξης Ν3 = Ν1×Ν2, όπως είναι γνωστό από τη θεωρία: α) πολλαπλασιάζουμε τα πρόσημα και θέτουμε το ψηφίο προσήμου αντίστοιχα, β) πολλαπλασιάζουμε το κλασματικά μέρη, γ) προσθέτουμε τους πολωμένους εκθέτες και αφαιρούμε μία φορά την πόλωση, και δ) εκτελούμε κανονικοποίηση, αν χρειάζεται.

Ο πολ/μός των δύο προσήμων δίνει αποτέλεσμα: $προσ_{N1}$×$προσ_{N2}$ = (–1)×1 = $–1_{10}$. Άρα, σύμφωνα με το πρότυπο έχουμε $\underline{προσ_{N3} = 1_2}$ (αρνητικός αριθμός).

Ο πολλαπλασιασμός των δύο κλασματικών μερών δίνει αποτέλεσμα 00…00 (23 bits) και δε χρειάζεται κανονικοποίηση.

Η πρόσθεση των πολωμένων εκθετών δίνει αποτέλεσμα 131 +133 = 264_{10} και μετά την αφαίρεση της πόλωσης (264-127=137) έχουμε ότι εκθέτης είναι ίσος με $\underline{E = 137_{10}}$.

Άρα, με βάση τα παραπάνω η αναπαράσταση του N3 είναι:

Πρόσημο (1 bit)	Π.Ε (8 bits)	Κλάσμα (23 bits)
1	1000 1001	00 …. 00

Για τον έλεγχο του αποτελέσματος, έχουμε:

Πρόσημο: 1 δηλαδή, ο αριθμός είναι αρνητικός.

Πολωμένος εκθέτης : 1000 1001. Άρα, ΠΕ = 137_{10}. Άρα, Ε = 131 – 127 = 10_{10}.

Κλάσμα: 00…….0.

Δηλαδή, N3 = $(–1)×(1.0)×2^{10}= –(2^{10})_{10}$, το οποίο είναι και σωστό αποτέλεσμα καθώς N1×N2 = $(–16_{10})×(64_{10}) = –1024_{10} = –(2^{10})_{10}$.

ΑΣΚΗΣΗ 4

Θεωρείστε τους παρακάτω αριθμούς σε αναπαράσταση κινητής υποδιαστολής απλής ακρίβειας: K = $(4B30\ 0000)_{16}$, L = $(3D20\ 0000)_{16}$, και M = $(CB30\ 0000)_{16}$. Εκτελέστε τις πράξεις N1 = L + (K + M) και N2 = (L + K) + M σύμφωνα με το πρότυπο κινητής υποδιαστολής. Τι παρατηρείτε;

ΛΥΣΗ

Όπως είναι γνωστό ο αλγόριθμος της πρόσθεσης επιβάλει να:

α) αναπαραστήσουμε τους αριθμούς στο πρότυπο

β) να κάνουμε τους πολωμένους εκθέτες ίσους ολισθαίνοντας κατάλληλα τον έναν από τους δύο αριθμούς

γ) να προσθέσουμε τα κλασματικά μέρη

δ) να εφαρμόσουμε κανονικοποίηση στο αποτέλεσμα, αν χρειάζεται.

Η μετατροπή του K σε δυαδική αναπαράσταση είναι η ακόλουθη:

K = 0**100 1011 0**110 0000 0000 0000 0000. Επομένως,

Πρόσημο: 0 δηλαδή, ο αριθμός είναι θετικός.

Πολωμένος εκθέτης : 1001 0110. Άρα, ΠΕ = 150_{10}.

Κλάσμα: 01100…….00 (23 ψηφία).

Ομοίως, για τους αριθμούς L και M έχουμε:

L = 0**011 1101 0**010 0000 0000 0000 0000 0000. Επομένως,

Πρόσημο: 0 δηλαδή, ο αριθμός είναι θετικός.

Πολωμένος εκθέτης : 0111 1010. Άρα, ΠΕ = 122_{10}.

Κλάσμα: 0100…….00 (23 ψηφία).

M = 1**100 1011 0**011 0000 0000 0000 0000 0000. Επομένως,

Πρόσημο: 1 δηλαδή, ο αριθμός είναι αρνητικός.

Πολωμένος εκθέτης : 1001 0110. Άρα, ΠΕ = 150_{10}.

Κλάσμα: 0110…….00 (23 ψηφία).

Εξετάζοντας τις παραπάνω αναπαραστάσεις συμπεραίνουμε ότι K = –M. Επομένως, N1 = L +(K + M) είναι ίσο με **N1 = L**.

Για το υπολογισμό της έκφρασης N2 = (L + K) + M πρέπει να εκτελέσουμε πρώτα την πράξη της παρένθεσης. Παρατηρούμε ότι οι πολωμένοι εκθέτες αυτών είναι: $ΠΕ_L$ = 122 και $ΠΕ_K$ = 150.

Όμως, σύμφωνα με τον αλγόριθμο της πρόσθεσης, οι πολωμένοι εκθέτες πρέπει να γίνουν ίσοι. Για να κάνουμε τον $ΠΕ_L$ ίσο 150 πρέπει να τον αυξήσουμε κατά 28 (122+28= 150). Όμως, για να διατηρήσουμε τη τιμή του L πρέπει επίσης να ολισθήσουμε τα ψηφία του 1 και κλασματικού μέρους του κατά 28 θέσεις δεξιά. Δηλαδή, έχουμε:

L = (1)×(1.0100…00) x 2^{122} = (1)×(0.0000…00)×2^{150}. Άρα, L = 0.

Επομένως, N2 = (L + K) + M = (0 + K) + M = K+ M. Όμως, K = –M άρα, **N2 =0**.

Άρα, ενώ αλγεβρικά οι εκφράσεις των N1 και N2 είναι ισοδύναμες λόγω της προσεταιριστικής ιδιότητας, παρατηρούμε ότι τα αποτελέσματα είναι διαφορετικά. Αυτό οφείλεται σε εγγενή αδυναμία του προτύπου κινητής υποδιαστολής. Συγκεκριμένα, το μήκος λέξης είναι περιορισμένο (32 ψηφία) αφού τα πεδία Πολωμένος Εκθέτης και Κλάσμα έχουν περιορισμένο εύρος 8 και 23 ψηφία, αντίστοιχα και έχουμε και ένα ψηφίο για το πρόσημο. Επομένως, αν ο αριθμός απαιτεί περισσότερα ψηφία για ένα πεδίο για παράδειγμα το κλάσμα, η αναπαράσταση δεν είναι ακριβής.

Στη συγκεκριμένη περίπτωση προσθέσαμε δύο μεγάλους αριθμούς (L, K) το αποτέλεσμα των οποίων απαιτεί περισσότερα από 23 ψηφία για κλασματικό μέρος, τα οποία δεν είναι διαθέσιμα. Δηλαδή, το αποτέλεσμα της πρόσθεσης L + K είναι ένας πολύ μεγάλος αριθμός που δε μπορεί να αναπαρασταθεί με πλήρη ακρίβεια σε αναπαράσταση κινητής υποδιαστολής με 32 ψηφία. Θα μπορούσαμε να λύσουμε το πρόβλημα αν χρησιμοποιούσαμε αναπαράσταση κινητής υποδιαστολής διπλής ακρίβειας. Όμως και στην περίπτωση αυτή μπορούν να παρουσιαστούν παρόμοια φαινόμενα.

Σημείωμα Αναφοράς

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.

- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.

- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ