



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ  
ΠΑΤΡΩΝ  
UNIVERSITY OF PATRAS

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά  
μαθήματα ΠΠ

# Ψηφιακή Λογική Σχεδίαση

Επιμέλεια:

Γεώργιος Θεοδωρίδης, Επίκουρος Καθηγητής

Ανδρέας Εμερετλής, Υποψήφιος Διδάκτορας

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Τεχνολογίας Υπολογιστών

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη Δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό αναπτύχθηκε στο Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Τεχνολογίας Υπολογιστών του Πανεπιστημίου Πατρών.



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ  
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



# Ανίχνευση και Διόρθωση Λαθών

- Εισαγωγή
- Απόσταση Hamming
- Κώδικες ανίχνευσης λαθών
- Κώδικες διόρθωσης λαθών
- Κώδικας Hamming

- Κυρίως κατά τη μετάδοση πληροφορίας ή ακόμα και κατά την αποθήκευση δεδομένων υπάρχει πιθανότητα αλλοίωση της πληροφορίας
- **Λάθος**: αλλαγή τιμής ενός ή περισσοτέρων ψηφίων λόγω
  - Θορύβου, α σωματιδίων ....
- Απαιτείται ανάπτυξη μεθόδων (κώδικες διόρθωσης/ανίχνευσης λαθών) αντιμετώπισης του προβλήματος
- Κυκλώματα ανίχνευσης & κυκλώματα διόρθωσης λάθους

- Εισαγωγή
- Απόσταση Hamming
- Κώδικες ανίχνευσης λαθών
- Κώδικες διόρθωσης λαθών
- Κώδικας Hamming



- Για την ανίχνευση και διόρθωση λαθών χρησιμοποιούνται **κώδικες** και **κατάλληλες λέξεις** στους κώδικες
- Οι περισσότεροι κώδικες βασίζονται στην έννοια της **απόστασης Hamming**
- **Ως απόσταση Hamming** μεταξύ δύο λέξεων  $n$  ψηφίων ορίζεται το πλήθος των ψηφίων που πρέπει να αλλάξουν τιμή στη μία λέξη ώστε να ταυτιστούν οι λέξεις
  - Οι λέξεις **0110** και **0101** έχουν απόσταση **2**
  - Οι λέξεις **0110** και **1011** έχουν απόσταση **3**

- Εισαγωγή
- Απόσταση Hamming
- Κώδικες ανίχνευσης λαθών
- Κώδικες διόρθωσης λαθών
- Κώδικας Hamming

- Ένας κώδικας ανίχνευσης λαθών πρέπει είναι φτιαγμένος ώστε όταν συμβεί λάθος να ανιχνεύει τη λάθος μετάδοση δεδομένων
  - Ο δέκτης γνωρίζει τις έγκυρες και άκυρες λέξεις του κώδικα
  - Η λήψη άκυρης λέξης συνεπάγεται την ύπαρξη λάθους => ανίχνευση λάθους μετάδοσης
  
- Ένας κώδικας που έχει την παραπάνω ιδιότητα για την περίπτωση που συμβούν μέχρι  $N$  λάθη καλείται **κώδικας ανίχνευσης  $N$  λαθών**
  
- Το σημαντικό στην ανάπτυξη του κώδικα είναι η επιλογή των έγκυρων λέξεων για να είναι δυνατή η ανίχνευση των λαθών
  - Κατάλληλο λεξικό με έγκυρες λέξεις (codebook)

- Οι λέξεις του κώδικα προκύπτουν με την εισαγωγή επιπλέον ψηφίων σε κατάλληλες θέσεις τις λέξης δεδομένων
- Ως απόσταση σε ένα κώδικα ορίζεται η ελάχιστη Hamming απόσταση μεταξύ των λέξεων του κώδικα
- Οι χρησιμοποιούμενες λέξεις (έγκυρες λέξεις) πρέπει να έχουν μια συγκεκριμένη απόσταση για να ανιχνεύεται ένας τύπος λάθους
  - Για παράδειγμα  $HD = 2$

➤ Έστω λέξη κώδικα με 3 ψηφία. Όλες οι λέξεις είναι οι ακόλουθες

- 1.            000
- 2. 001        010        100
- 3. 011        101        110
- 4. 111        111        111

➤ Έστω ότι οι έγκυρες λέξεις του κώδικα είναι οι υπογραμμισμένες (λέξεις των γραμμών 1 και 3)

➤ Αν συμβεί **λάθος σε ένα ψηφίο μόνο (απλό λάθος)**, στο δέκτη θα φθάσει μία λέξη από τις άκυρες λέξεις (γραμμές 2, 4)

- Αν η έγκυρη λέξη είναι η 000 (γραμμή 0), τότε η άκυρη θα είναι μία από τις λέξεις της γραμμής 2
- Αν η έγκυρη είναι μία από αυτές τις γραμμής 3, τότε η άκυρη θα είναι η 111 (γραμμή 4) ή κάποια από τη γραμμή 2 (π.χ. 011 → 001) όχι όμως (001 → 100, 2 λάθη)

- 1.	<u>000</u>		
- 2.	001	010	100
- 3.	<u>011</u>	<u>101</u>	<u>110</u>
- 4.	111	111	111

➤ **Συνεπώς, ένας κώδικας για να ανιχνεύει απλό λάθος πρέπει να έχει απόσταση μεγαλύτερη από 1**

- Οι λέξεις του κώδικά πρέπει να έχουν απόσταση Hamming (HD) μεγαλύτερη του 1
- Στο παράδειγμα  $HD=2$

➤ **Γενική αρχή: για να ανιχνεύει ένας κώδικας  $N$  λάθη πρέπει η απόσταση του κώδικα να είναι μεγαλύτερη του  $N$  ( $HD_{\min} > N$ )**

- Εισαγωγή
- Απόσταση Hamming
- Κώδικες ανίχνευσης λαθών
- Κώδικες διόρθωσης λαθών
- Κώδικας Hamming

➤ Έστω οι έγκυρες λέξεις αυτές των γραμμών 1, 4

- 1.                    000
- 2. 001              010              100
- 3. 011              101              110
- 4.                    111



➤ Έστω οι έγκυρες λέξεις αυτές των γραμμών 1, 4

- 1.                    **000**
- 2. **001**            **010**            **100**
- 3. **011**            **101**            **110**
- 4.                    **111**

➤ Απλό λάθος στη λέξη 000 => λήψη μία από τις λέξεις της 2<sup>ης</sup> γραμμής

➤ Έστω οι έγκυρες λέξεις αυτές των γραμμών 1, 4

- 1.	<u>000</u>	
- 2.	001	010
- 3.	011	101
- 4.	<u>111</u>	110

➤ Απλό λάθος στη λέξη 000 => λήψη μία από τις λέξεις της 2<sup>ης</sup> γραμμής

➤ Απλό λάθος στη λέξη 111 => λήψη μία από τις λέξεις της 3<sup>ης</sup> γραμμής

➤ Έστω οι έγκυρες λέξεις αυτές των γραμμών 1, 4

- 1.	<u>000</u>		
- 2.	<u>001</u>	<u>010</u>	<u>100</u>
- 3.	<u>011</u>	<u>101</u>	<u>110</u>
- 4.	<u>111</u>		

➤ Απλό λάθος στη λέξη 000 => λήψη μία από τις λέξεις της 2<sup>ης</sup> γραμμής

➤ Απλό λάθος στη λέξη 111 => λήψη μία από τις λέξεις της 3<sup>ης</sup> γραμμής

➤ Έστω ότι λαμβάνεται λέξη της 2<sup>ης</sup> γραμμής

- Επειδή, ο κώδικας διορθώνει απλό λάθος δεν μπορεί να είχε σταλεί η λέξη 111 και να λήφθηκε λέξη της 2<sup>ης</sup> γραμμής
- Άρα η λέξη που στάλθηκε ήταν η 000
- Η διόρθωση γίνεται αντιστρέφοντας το λάθος ψηφίο

➤ Έστω οι έγκυρες λέξεις αυτές των γραμμών 1, 4

- 1.	<u>000</u>	
- 2.	<u>001</u>	<u>010</u> <u>100</u>
- 3.	<u>011</u>	<u>101</u> <u>110</u>
- 4.	<u>111</u>	

➤ Απλό λάθος στη λέξη 000 => λήψη μία από τις λέξεις της 2<sup>ης</sup> γραμμής

➤ Απλό λάθος στη λέξη 111 => λήψη μία από τις λέξεις της 3<sup>ης</sup> γραμμής

➤ Έστω ότι λαμβάνεται λέξη της 2<sup>ης</sup> γραμμής

- Επειδή, ο κώδικας διορθώνει απλό λάθος δεν μπορεί να είχε σταλεί η λέξη 111 και να λήφθηκε λέξη της 2<sup>ης</sup> γραμμής
- Άρα η λέξη που στάλθηκε ήταν η 000
- Η διόρθωση γίνεται αντιστρέφοντας το λάθος ψηφίο

➤ Ένας κώδικας για να ανιχνεύει και να διορθώνει  $N$  λάθη πρέπει να έχει απόσταση μεγαλύτερη του  $2N$  ( $HD > 2N$ )

- Ο πιο εύκολος και διαδομένος τρόπος για την ανίχνευση λάθους είναι η χρήση του ψηφίου ισοτιμίας (parity bit)
- Σε κάθε λέξη δεδομένων τοποθετείται (στην αρχή ή στο τέλος) ένα επιπλέον ψηφίο ισοτιμίας ώστε το συνολικό πλήθος των “1” να είναι
  - Άρτιο/ περιττό για άρτια περιττή / ισοτιμία
  - Παράδ. Λέξη: 0001 1001 νέα λέξη **1** 0001 1001 για άρτια ισοτιμία
- Με την ανάγνωση της λέξης ελέγχεται η ισοτιμία της νέας λέξης. Αν
  - είναι ίδια με την καθορισμένη δεν υπάρχει λάθος και αφαιρείται το ψηφίο ισοτιμίας
  - δεν είναι ίδια με την καθορισμένη τότε ανιχνεύεται λάθος

## Διόρθωση Λάθους

- Για τη διόρθωση λάθους εισάγονται σε συγκεκριμένες θέσεις επιπλέον ψηφία στην αρχική λέξη δεδομένων
  - Δημιουργία νέας λέξης με επιπλέον ψηφία
- Κατά την ανάγνωση ο δέκτης ελέγχει την ισοτιμία της νέας λέξης
- Στην περίπτωση λάθους παράγεται ένα μοναδικό πρότυπο (pattern) ψηφίων που καλείται σύνδρομο (syndrome)
- Η τιμή του συνδρόμου καθορίζει τη θέση του ψηφίου με το λάθος
- Λόγω ότι το σύστημα αναπαράστασης είναι δυαδικό η διόρθωση είναι εύκολη
  - Συμπλήρωση του λανθασμένου ψηφίου
  - Αν αν η τιμή του συνδρόμου είναι 7, τότε αντιστρέφεται το 7<sup>ο</sup> ψηφίο

- Εισαγωγή
- Απόσταση Hamming
- Κώδικες ανίχνευσης λαθών
- Κώδικες διόρθωσης λαθών
- Κώδικας Hamming

# Κώδικας Hamming – Εισαγωγή Ψηφίων Ισοτιμίας

---

- Ο κώδικας Hamming είναι από τους πιο κοινούς κώδικες διόρθωσης λαθών
- Σε κάθε λέξη δεδομένων με  $n$  bits, εισάγονται επιπλέον  $k$  ψηφία ισοτιμίας  $\Rightarrow$  σχηματίζεται μια νέα λέξη με  $n+k$  bits
  - Η αρίθμηση της θέσης των ψηφίων της νέας λέξης είναι 1, 2, 3, ...
- Οι θέσεις των ψηφίων ισοτιμίας (P1, P2, ...) καταλαμβάνουν τις θέσεις που αντιστοιχούν σε δυνάμεις του 2



# Κώδικας Hamming – Εισαγωγή Ψηφίων Ισοτιμίας

- Ο κώδικας Hamming είναι από τους πιο κοινούς κώδικες διόρθωσης λαθών
- Σε κάθε λέξη δεδομένων με  $n$  bits, εισάγονται επιπλέον  $k$  ψηφία ισοτιμίας  $\Rightarrow$  σχηματίζεται μια νέα λέξη με  $n+k$  bits
  - Η αρίθμηση της θέσης των ψηφίων της νέας λέξης είναι 1, 2, 3, ...
- Οι θέσεις των ψηφίων ισοτιμίας (P1, P2, ...) καταλαμβάνουν τις θέσεις που αντιστοιχούν σε δυνάμεις του 2
- **Παράδειγμα:** λέξη δεδομένων 1100 0100  $\Rightarrow$  Νέα κωδικοποιημένη λέξη (με ψηφία ισοτιμίας P1, P2, P3, P4)

# Κώδικας Hamming – Εισαγωγή Ψηφίων Ισοτιμίας

- Ο κώδικας Hamming είναι από τους πιο κοινούς κώδικες διόρθωσης λαθών
- Σε κάθε λέξη δεδομένων με  $n$  bits, εισάγονται επιπλέον  $k$  ψηφία ισοτιμίας  $\Rightarrow$  σχηματίζεται μια νέα λέξη με  $n+k$  bits
  - Η αρίθμηση της θέσης των ψηφίων της νέας λέξης είναι 1, 2, 3, ...
- Οι θέσεις των ψηφίων ισοτιμίας (P1, P2, ...) καταλαμβάνουν τις θέσεις που αντιστοιχούν σε δυνάμεις του 2
- **Παράδειγμα:** λέξη δεδομένων 1100 0100  $\Rightarrow$  Νέα κωδικοποιημένη λέξη (με ψηφία ισοτιμίας P1, P2, P3, P4)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P1	P2	1	P3	1	0	0	P4	0	1	0	0

- Σε κάθε  $n$ -bit λέξη εισάγονται επιπλέον  $k$  bits ισοτιμίας
- Πόσα  $k$  ψηφία ισοτιμίας απαιτούνται για λέξη  $n$  ψηφίων ?
- Ισχύει η ακόλουθη σχέση  $2^k - 1 - k \geq n$

Αριθμός bits Ελέγχου ( $k$ )	Εύρος Δεδομένων ( $n$ )
3	2-4
4	5-11
5	12-26
6	27-57
7	58-120

- Το κάθε ψηφίο ισοτιμίας κωδικοποιεί μία ομάδα ψηφίων της λέξης δεδομένων
- Ομαδοποίηση των ψηφίων δεδομένων ανά ψηφίο ισοτιμίας

- Το κάθε ψηφίο ισοτιμίας κωδικοποιεί μία ομάδα ψηφίων της λέξης δεδομένων
- Ομαδοποίηση των ψηφίων δεδομένων ανά ψηφίο ισοτιμίας
  - **1<sup>ο</sup> ψηφίο ισοτιμίας (P1)**
  - Το ψηφίο P1 τοποθετείται στη 1<sup>η</sup> θέση της κωδικοποιημένης λέξης
  - Η 1<sup>η</sup> θέση έχει δυαδική αναπαράσταση 0001 – δηλ, έναν “1” στο 1<sup>ο</sup> από δεξιά ψηφίο
  - Το ψηφίο P1 κωδικοποιεί την ομάδα ψηφίων των οποίων οι θέσεις έχουν δυαδική αναπαράσταση με “1” στο 1<sup>ο</sup> από δεξιά ψηφίο (ψηφία θέσεων 3, 5, 7, 9, 11, ...)

- Το κάθε ψηφίο ισοτιμίας κωδικοποιεί μία ομάδα ψηφίων της λέξης δεδομένων
- Ομαδοποίηση των ψηφίων δεδομένων ανά ψηφίο ισοτιμίας
  - **1<sup>ο</sup> ψηφίο ισοτιμίας (P1)**
  - Το ψηφίο P1 τοποθετείται στη 1<sup>η</sup> θέση της κωδικοποιημένης λέξης
  - Η 1<sup>η</sup> θέση έχει δυαδική αναπαράσταση 0001 – δηλ, έναν “1” στο 1<sup>ο</sup> από δεξιά ψηφίο
  - Το ψηφίο P1 κωδικοποιεί την ομάδα ψηφίων των οποίων οι θέσεις έχουν δυαδική αναπαράσταση με “1” στο 1<sup>ο</sup> από δεξιά ψηφίο (ψηφία θέσεων 3, 5, 7, 9, 11, ...)
  
  - **2<sup>ο</sup> ψηφίο ισοτιμίας (P2)**
  - Το ψηφίο P2 τοποθετείται στη 2<sup>η</sup> θέση της κωδικοποιημένης λέξης
  - Η 2<sup>η</sup> θέση έχει δυαδική αναπαράσταση 0010 – δηλ, έναν “1” στο 2<sup>ο</sup> από δεξιά ψηφίο
  - Το ψηφίο P1 κωδικοποιεί την ομάδα ψηφίων των οποίων οι θέσεις έχουν δυαδική αναπαράσταση με “1” στο 2<sup>ο</sup> από δεξιά ψηφίο (ψηφία θέσεων 3, 6, 7, ...)

- Το κάθε ψηφίο ισοτιμίας κωδικοποιεί μία ομάδα ψηφίων της λέξης δεδομένων
- Ομαδοποίηση των ψηφίων δεδομένων ανά ψηφίο ισοτιμίας
  - **3<sup>ο</sup> ψηφίο ισοτιμίας (P3)**
  - Το ψηφίο P3 τοποθετείται στη 4<sup>η</sup> θέση της κωδικοποιημένης λέξης
  - Η 4<sup>η</sup> θέση έχει δυαδική αναπαράσταση 0100 – δηλ, έναν “1” στο 3<sup>ο</sup> από δεξιά ψηφίο
  - Το ψηφίο P1 κωδικοποιεί την ομάδα ψηφίων των οποίων οι θέσεις έχουν δυαδική αναπαράσταση με “1” στο 3<sup>ο</sup> από δεξιά ψηφίο (ψηφία θέσεων 5, 6, 7, 12, ...)
  - **4<sup>ο</sup> ψηφίο ισοτιμίας (P4)**
  - Το ψηφίο P4 τοποθετείται στη 8<sup>η</sup> θέση της κωδικοποιημένης λέξης
  - Η 8<sup>η</sup> θέση έχει δυαδική αναπαράσταση 1000 – δηλ, έναν “1” στο 4<sup>ο</sup> από δεξιά ψηφίο
  - Το ψηφίο P4 κωδικοποιεί την ομάδα ψηφίων των οποίων οι θέσεις έχουν δυαδική αναπαράσταση με “1” στο 4<sup>ο</sup> από δεξιά ψηφίο (ψηφία θέσεων 9, 10, 11, 12, ...)
  - **ΚΟΚ.**

- Τα ψηφία ισοτιμίας παράγονται
  - μετρώντας τους “1” στις αντίστοιχες ομάδες ψηφίων ( $b_i, b_1, b_m \dots$ ) και
  - θέτοντας το ψηφίο  $P_i$  στην τιμή ώστε για την ομάδα ψηφίων ( $b_i, b_1, b_m, \dots, P_i$ ) να προκύπτει η καθορισμένη ισοτιμία
- Λέξη δεδομένων 1100 0100 & άρτια ισοτιμία – Μορφή νέας λέξης



- Τα ψηφία ισοτιμίας παράγονται
  - μετρώντας τους “1” στις αντίστοιχες ομάδες ψηφίων ( $b_i, b_1, b_m \dots$ ) και
  - θέτοντας το ψηφίο  $P_i$  στην τιμή ώστε για την ομάδα ψηφίων ( $b_i, b_1, b_m, \dots, P_i$ ) να προκύπτει η καθορισμένη ισοτιμία
- Λέξη δεδομένων 1100 0100 & άρτια ισοτιμία – Μορφή νέας λέξης

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P1	P2	1	P3	1	0	0	P4	0	1	0	0

➤ Τα ψηφία ισοτιμίας παράγονται

- μετρώντας τους “1” στις αντίστοιχες ομάδες ψηφίων ( $b_i, b_1, b_m \dots$ ) και
- θέτοντας το ψηφίο  $P_i$  στην τιμή ώστε για την ομάδα ψηφίων ( $b_i, b_1, b_m, \dots, P_i$ ) να προκύπτει η καθορισμένη ισοτιμία

➤ Λέξη δεδομένων 1100 0100 & άρτια ισοτιμία – Μορφή νέας λέξης

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P1	P2	1	P3	1	0	0	P4	0	1	0	0

- P1 : κωδικ. bits θέσεων (3, 5, 7, 9, 11) = (1, 1, 0, 0, 0)  $\Rightarrow$  P1 = 0 (άρτια ισοτιμία)
- P2 : κωδικ. bits θέσεων (3, 6, 7, 10, 11) = (1, 0, 0, 1, 0)  $\Rightarrow$  P2 = 0 (άρτια ισοτιμία)
- P3 : κωδικ. bits θέσεων (5, 6, 7, 12) = (1, 0, 0, 0)  $\Rightarrow$  P3 = 1 (άρτια ισοτιμία)
- P4 : κωδικ. bits θέσεων (9, 10, 11, 12) = (0, 1, 0, 0)  $\Rightarrow$  P4 = 1 (άρτια ισοτιμία)

➤ Η κωδικοποιημένη λέξη είναι

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	0	1	1	1	0	0	1	0	1	0	0

- Όταν τα ψηφία διαβάζονται προκύπτει μία **σύνδρομη λέξη**  $C=C_8C_4C_2C_1$
- Αντιστοιχεί στις θέσεις των ψηφίων ισοτιμίας
- Το κάθε ψηφίο της σύνδρομης λέξης αφορά την αντίστοιχη ομάδα ψηφίων και παίρνει τιμή ώστε να ικανοποιείται η ισοτιμία
- Αν  $C=000\dots0$  τότε δεν υπάρχει λάθος
- Αλλιώς η δεκαδική τιμή της λέξης δηλώνει τη θέση του ψηφίου με το λάθος

➤ Η κωδικοποιημένη λέξη είναι (με μαύρο χρώμα οι θέσεις των P1, P2, ...)

<b>1</b>	<b>2</b>	3	<b>4</b>	5	6	7	<b>8</b>	9	10	11	12
0	0	1	1	1	0	0	1	0	1	0	0

# Κώδικας Hamming – Διόρθωση Λάθους

➤ Η κωδικοποιημένη λέξη είναι (με μαύρο χρώμα οι θέσεις των P1, P2, ...)

<b>1</b>	<b>2</b>	3	<b>4</b>	5	6	7	<b>8</b>	9	10	11	12
0	0	1	1	1	0	0	1	0	1	0	0

➤ Έστω λάθος στο ψηφίο 3 και η ισοτιμία άρτια

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0	0

➤ Η κωδικοποιημένη λέξη είναι (με μαύρο χρώμα οι θέσεις των P1, P2, ...)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	0	1	1	1	0	0	1	0	1	0	0

➤ Έστω λάθος στο ψηφίο 3 και η ισοτιμία άρτια

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0	0

➤ Σύνδρομη λέξη

- C1 : ομάδα bits (1, 3, 5, 7, 9, 11) = (0, 0, 1, 0, 0, 0) => C1 = 1 (λόγω άρτιας ισοτιμίας)
- C2 : ομάδα bits (2, 3, 6, 7, 10, 11) = (0, 0, 0, 0, 1, 0) => C2 = 1 (λόγω άρτιας ισοτιμίας)
- C4 : ομάδα bits (4, 5, 6, 7, 12) = (1, 1, 0, 0, 0) => C3 = 0 (λόγω άρτιας ισοτιμίας)
- C8 : ομάδα bits (8, 9, 10, 11, 12) = (1, 0, 1, 0, 0) => C4 = 0 (λόγω άρτιας ισοτιμίας)

➤ Επομένως το λάθος είναι στη θέση 3

-  $(C_8, C_4, C_2, C_1) = (0, 0, 1, 1) = 3_{10}$

- Ο προηγούμενος κώδικας Hamming μπορεί να ανιχνεύσει και να διορθώσει μόνο απλά λάθη
  - Περιπτώσεις όπου το λάθος συμβαίνει σε ένα και μόνο ένα ψηφίο
- Για την ανίχνευση ή/και διόρθωση πολλαπλών λαθών πρέπει να χρησιμοποιηθούν πιο πολύπλοκοι κώδικες και περισσότερα ψηφία ισοτιμίας

- Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών,  
Νίκος Φακωτάκης, Γεώργιος Θεοδωρίδης,  
«Ψηφιακή Λογική Σχεδίαση».  
Έκδοση: 1.0 Πάτρα 2015
- Διαθέσιμο στη διαδικτυακή διεύθυνση  
<https://eclass.upatras.gr/courses/EE890/>



- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου των διδασκόντων καθηγητών.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «**Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση**» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ  
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ