Εφαρμοσμένη Βελτιστοποίηση

Ενότητα 6: Αριθμητικές μέθοδοι βελτιστοποίησης για προβλήματα πολλών μεταβλητών (1ο μέρος)

Δημήτρης Παπαδασκαλόπουλος (Επικ. Καθηγητής)
Πολυτεχνική Σχολή
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Τεχνολογίας Υπολογιστών

Περίληψη προηγούμενων διαλέξεων

- **Ενότητα 1: Εισαγωγή στο μάθημα**
- **Ενότητα 2: Απαιτούμενες μαθηματικές γνώσεις**
- **Ενότητα 3: Αναλυτικές μέθοδοι βελτιστοποίησης για προβλήματα μιας μεταβλητής**
- **Ενότητα 4: Αναλυτικές μέθοδοι βελτιστοποίησης για προβλήματα πολλών μεταβλητών (4 μέρη)**
- **Ενότητα 5: Αριθμητικές μέθοδοι βελτιστοποίησης για προβλήματα μιας μεταβλητής**
  - ➢ Μέθοδοι απευθείας έρευνας > απαλοιφής διαστημάτων (ίσων διαστημάτων ή πλήρους απαρίθμησης, ακολουθιακά ίσων διαστημάτων, διχοτόμου, χρυσής τομής, Fibonacci)

Σύνδεση προηγούμενων με τη σημερινή διάλεξη (1)

- Οι μέθοδοι επίλυσης προβλημάτων βελτιστοποίησης ταξινομούνται σε δύο βασικές κατηγορίες:

- **Αναλυτικές μέθοδοι (analytical methods)**: η βέλτιστη λύση βρίσκεται με ακρίβεια και μπορεί να εκφραστεί σε "κλειστή μορφή (closed form)", διατυπώνοντας τις *αναγκαίες και ικανές συνθήκες* για την εύρεσή της > συνήθως για προβλήματα μικρότερης πολυπλοκότητας

Με αυτές ασχοληθήκαμε στις Ενότητες 3 (1 μεταβλητής) και 4 (πολλών μεταβλητών)

- **Αριθμητικές μέθοδοι (numerical methods)**: η βέλτιστη λύση βρίσκεται με κάποια προσέγγιση, συνήθως μέσω κάποιου *επαναληπτικού αλγορίθμου* > συνήθως για προβλήματα μεγαλύτερης πολυπλοκότητας (και όχι μόνο…*)

Με αυτές ασχοληθήκαμε στην Ενότητα 5 (1 μεταβλητής) και θα ασχοληθούμε σήμερα και στην επόμενη διάλεξη (πολλών μεταβλητών)

Σύνδεση προηγούμενων με τη σημερινή διάλεξη (2)

• Οι αριθμητικές μέθοδοι επίλυσης προβλημάτων βελτιστοποίησης ταξινομούνται σε δύο βασικές κατηγορίες:

➢ **Μέθοδοι απευθείας έρευνας**: επαναληπτική αναζήτηση βέλτιστης λύσης με βάση ΜΟΝΟ την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης για διαφορετικές τιμές των μεταβλητών

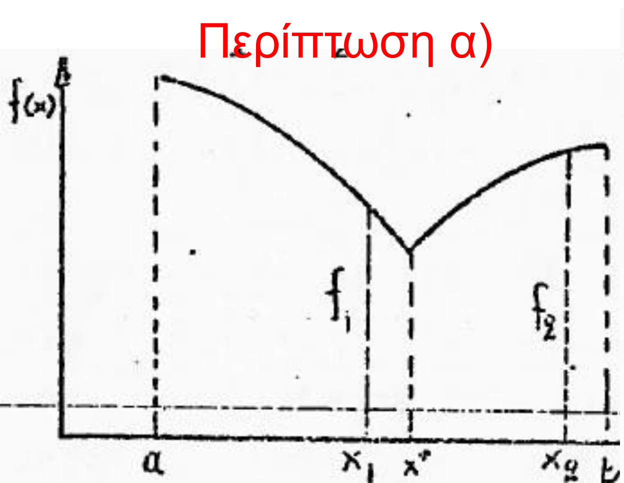
Εφαρμόσιμες κυρίως σε προβλήματα 1 μεταβλητής (Ενότητα 5)…αλλά και σε ένα βαθμό σε προβλήματα πολλών μεταβλητών (σήμερα)

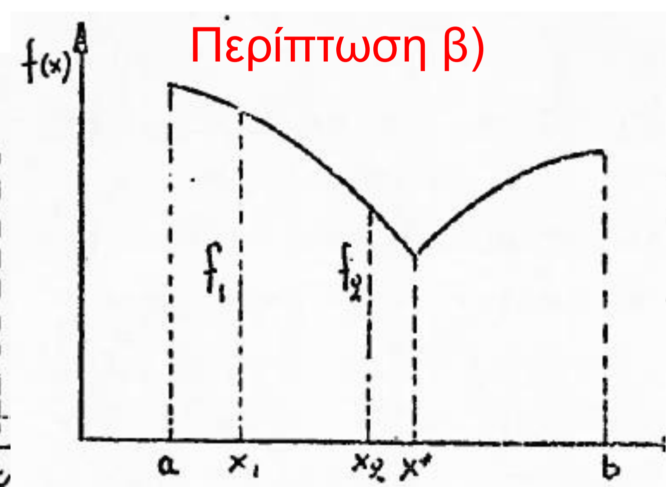
➢ **Μέθοδοι βάθμωσης (ή μέθοδοι χρήσης παραγώγων)**: επαναληπτική αναζήτηση βέλτιστης λύσης με βάση ΚΑΙ την τιμή παραγώγων της αντικειμενικής συνάρτησης για διαφορετικές τιμές των μεταβλητών

Εφαρμόσιμες σε προβλήματα 1 μεταβλητής και πολλών μεταβλητών…αλλά ανάγκη υπολογισμού παραγώγων (επόμενη διάλεξη)

Σύνδεση προηγούμενων με τη σημερινή διάλεξη (2)

- **Ενότητα 5**: Στα προβλήματα 1 μεταβλητής, οι μέθοδοι απευθείας έρευνας είναι ουσιαστικά μέθοδοι απαλοιφής διαστημάτων, δηλαδή η γενική διαδικασία είναι:
  - Εξετάζεται ένα διάστημα στο οποίο υποτίθεται πως η συνάρτηση είναι μονοτροπική
  - Περιορίζεται επαναληπτικά αυτό το διάστημα…
  - …μέχρι να προσεγγιστεί το τοπικό ακρότατο με μια επιθυμητή ακρίβεια





Σύνδεση προηγούμενων με τη σημερινή διάλεξη (3)

- Η παραπάνω γενική διαδικασία απαλοιφής διαστημάτων εξειδικεύεται ανάλογα με τη μέθοδο βάσει της οποίας επιλέγουμε τα εσωτερικά σημεία…
- …εξετάσαμε λεπτομερώς 3 διαφορετικές μεθόδους:
  - **Μέθοδος ίσων διαστημάτων ή πλήρους απαρίθμησης** (εξετάζω όλο το διάστημα με ίσα βήματα)
  - **Μέθοδος ακολουθιακά ίσων διαστημάτων** (εξετάζω 2 ενδιάμεσα σημεία και απαλοίφω επαναληπτικά το 1/3 του διαστήματος αναζήτησης)
  - **Μέθοδος διχοτόμου** (παρόμοια, αλλά απαλοίφω επαναληπτικά το 1/2 του διαστήματος αναζήτησης)
  - …και συζητήσαμε σύντομα τις *μεθόδους χρυσής τομής και Fibonacci* (αλληλο-καλυπτόμενα υπο-διαστήματα ώστε να χρειάζεται μόνο 1 νέο ενδιάμεσο σημείο σε κάθε επανάληψη)

Επέκταση μεθόδων απαλοιφής σε προβλήματα πολλών μεταβλητών ?

• Μπορώ να επεκτείνω αυτές τις μεθόδους απαλοιφής διαστημάτων για προβλήματα 1 μεταβλητής σε προβλήματα πολλών μεταβλητών ?

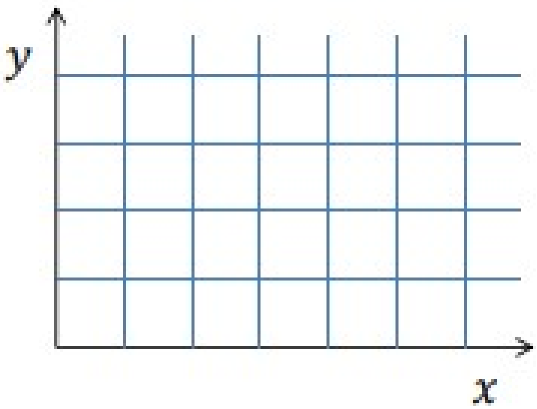
- **ΝΑΙ, για τη μέθοδο ίσων διαστημάτων ή πλήρους απαρίθμησης** (αν και με τεράστιες υπολογιστικές απαιτήσεις)
- **ΌΧΙ απευθείας, για τις μεθόδους ακολουθιακά ίσων διαστημάτων, διχοτόμου χρυσής τομής και Fibonacci (**εμμέσως ναι, αν και πάλι με σημαντικές δυσκολίες)

Επέκταση μεθόδων απαλοιφής σε προβλήματα πολλών μεταβλητών ?

• Η μέθοδος πλήρους απαρίθμησης μπορεί να γενικευτεί στις *n* διαστάσεις, ορίζοντας ίσα υπο-διαστήματα σε καθεμία από τις διαστάσεις…

•…δηλαδή διαιρώντας το χώρο των *n* διαστάσεων στον οποίο ορίζεται η συνάρτηση σε “ίσους υπο-χώρους”

• *Παράδειγμα*: για μια συνάρτηση 2 μεταβλητών $f(x, y)$, ορίζω $N + 1$ ίσα υπο-διαστήματα (με N ενδιάμεσα σημεία) στον κάθε άξονα



Χρειάζεται να κάνω $(N + 2)^2$ υπολογισμούς της τιμής της συνάρτησης…

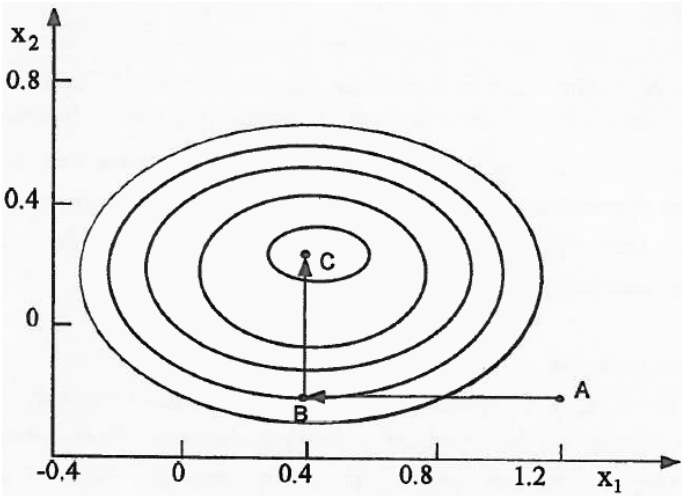
…για n διαστάσεις, χρειάζεται να κάνω $(N + 2)^n$ υπολογισμούς…τεράστιες υπολογιστικές απαιτήσεις

Επέκταση μεθόδων απαλοιφής σε προβλήματα πολλών μεταβλητών ?

- Οι μέθοδοι ακολουθιακά ίσων διαστημάτων, διχοτόμου, χρυσής τομής και Fibonacci είναι “πιο έξυπνες” στη 1 διάσταση, αλλά δεν μπορούν να επεκταθούν απευθείας στις *n* διαστάσεις…μπορούν όμως να επεκταθούν με έμμεσο τρόπο, με τη λεγόμενη “**μονομεταβλητή έρευνα**”…
- …διατηρώ τις *n-1* από τις *n* μεταβλητές σταθερές σε συγκεκριμένες (αυθαίρετες) τιμές, και εξετάζω πώς μεταβολές της εναπομένουσας 1 μεταβλητής επηρεάζουν την τιμή της συνάρτησης…
- …αφού καθορίσω την καλύτερη τιμή αυτής της 1 μεταβλητής, διατηρώ αυτήν την τιμή σταθερή, και συνεχίζω με τον ίδιο τρόπο στην επόμενη μεταβλητή…
- …σταματάω όταν δεν μπορώ να παρατηρήσω βελτίωση στην τιμή της συνάρτησης

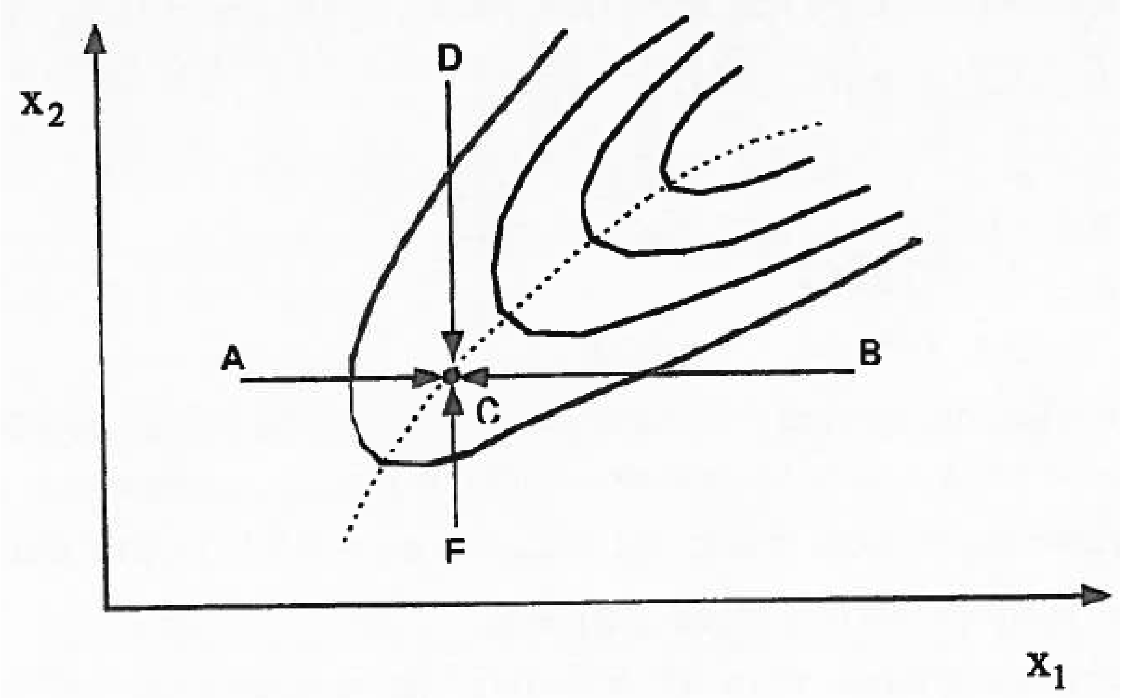
Επέκταση μεθόδων απαλοιφής σε προβλήματα πολλών μεταβλητών ?

- *Παράδειγμα (από το βιβλίο)*: το παρακάτω σχήμα αναπαριστά (μέσω τομών) μια συνάρτηση 2 μεταβλητών
- Καθορίζω (αυθαίρετα) ένα αρχικό σημείο έρευνας A…
- …διατηρώ την τιμή της x_2 σταθερή, και βρίσκω (με κάποια ακρίβεια) την καλύτερη τιμή της x_1 για τη συγκεκριμένη τιμή της x_2 (έστω σημείο B)…
- …διατηρώ την τιμή της x_1 σταθερή και βρίσκω την καλύτερη τιμή της x_2 για τη συγκεκριμένη τιμή της x_1 (έστω σημείο C)



Επέκταση μεθόδων απαλοιφής σε προβλήματα πολλών μεταβλητών ?

- **Μειονεκτήματα μονομεταβλητής έρευνας**:
- Αργή σύγκλιση στο τοπικό ακρότατο
- Ταλαντώσεις γύρω από το τοπικό ακρότατο
- Μπορεί να «κολλήσει» σε απότομη ακμή της συνάρτησης (παράδειγμα σχήματος)

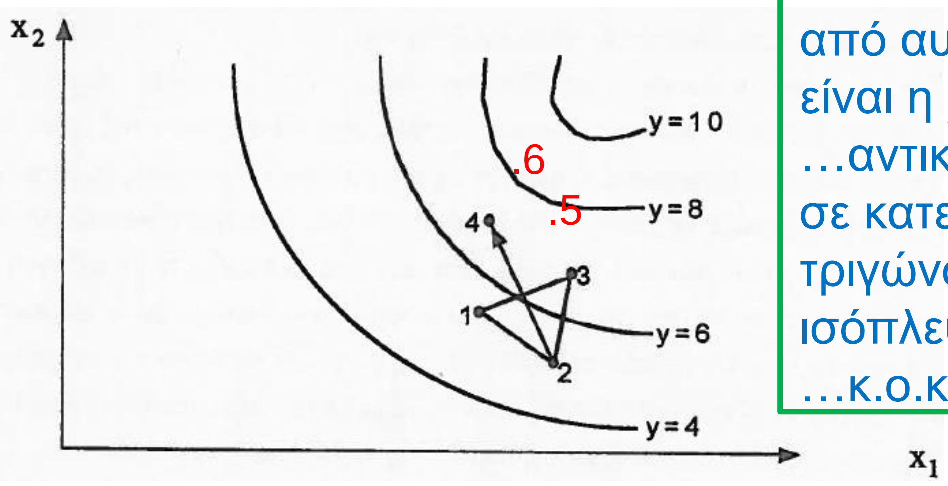


Γεωμετρική απευθείας έρευνα

- ΙΔΕΑ ΜΕΘΟΔΟΥ: Ας εξετάσω πιο σύνθετες κατευθύνσεις έρευνας (όχι μόνο παράλληλες στους άξονες)…
- Θεωρώ ένα *κανονικό γεωμετρικό σχήμα* (όλες οι διαστάσεις του είναι ίσες) με ένα (αυθαίρετο) μήκος διαστάσεων…
- …υπολογίζω την τιμή της συνάρτησης στα σημεία κορυφών του γεωμετρικού σχήματος, και το σημείο κορυφής που δίνει τη χειρότερη τιμή της συνάρτησης απορρίπτεται…
- …επιλέγω νέα κατεύθυνση έρευνας η οποία διέρχεται διαμέσου του κέντρου βάρους των υπόλοιπων σημείων…
- …επιλέγω νέο σημείο πάνω σε αυτήν την κατεύθυνση, τέτοιο ώστε να διατηρηθεί η κανονικότητα του γεωμετρικού σχήματος…
- …σταματάω όταν η τιμή της συνάρτησης δεν βελτιώνεται για κάποιες επαναλήψεις

Γραφική εξήγηση γεωμετρικής έρευνας (1)

- Ας ξεκινήσουμε από την (απλούστερη) περίπτωση συνάρτησης 2 μεταβλητών $f(x_1, x_2)$, θεωρώντας πως αναζητούμε τοπικό μέγιστο…
- …σε αυτήν την περίπτωση αντιστοιχεί το (απλούστερο) κανονικό γεωμετρικό σχήμα: ένα ισόπλευρο τρίγωνο (για αυτό η γεωμετρική έρευνα στις 2 διαστάσεις ονομάζεται και *μέθοδος των τριγώνων*)



Ξεκινώ από το ισόπλευρο τρίγωνο που ορίζεται από τα σημεία κορυφών 1, 2, 3…
…υπολογίζω την τιμή της συνάρτησης σε καθένα από αυτά τα σημεία, έστω ότι η τιμή στο σημείο 2 είναι η χειρότερη (μικρότερη)…
…αντικαθιστώ το απορριπτέο σημείο 2 με σημείο σε κατεύθυνση κάθετη της απέναντι πλευράς του τριγώνου, και τέτοιο ώστε να προκύψει ξανά ισόπλευρο τρίγωνο (σημείο 4)…
…κ.ο.κ.

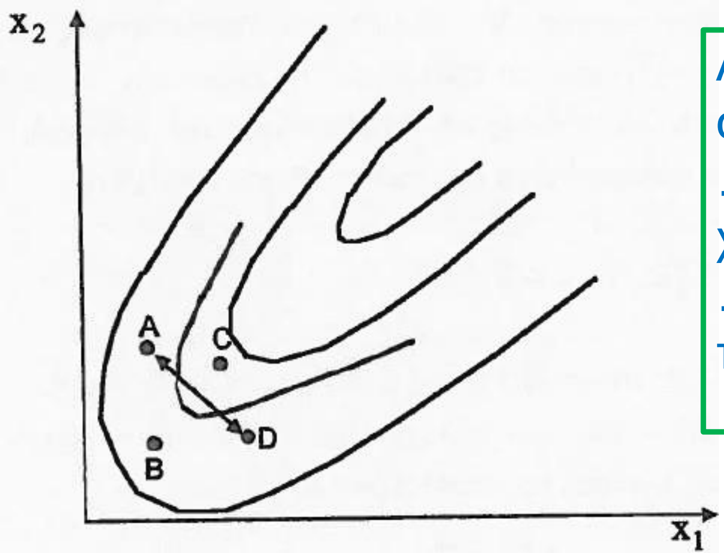
ΚΑΝΟΝΑΣ 1

…φαίνεται να μας οδηγεί στο μέγιστο…

Γραφική εξήγηση γεωμετρικής έρευνας (2)

- Μπορεί όμως να προκύψει το ακόλουθο πρόβλημα…
- …έστω πως για το αρχικό ισόπλευρο τρίγωνο A-B-C η τιμή στο σημείο A είναι η χειρότερη…
- …και το σημείο A αντικαθίσταται με το σημείο D…
- …στο νέο ισόπλευρο τρίγωνο B-C-D η τιμή στο σημείο D είναι η χειρότερη…
- …και το σημείο D αντικαθίσταται με το σημείο A

ΦΑΥΛΟΣ ΚΥΚΛΟΣ !

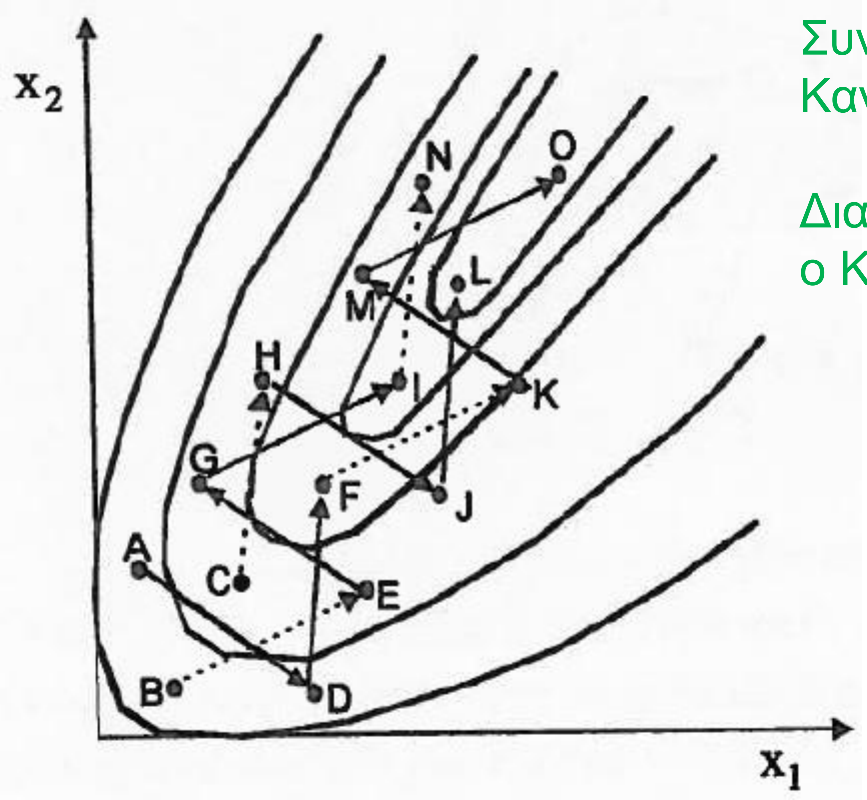


Απαγορεύω την επιστροφή στο σημείο που απορρίφθηκε στην προηγούμενη επανάληψη…
…απορρίπτοντας το σημείο με τη δεύτερη χειρότερη τιμή της συνάρτησης…
…δηλαδή στο παράδειγμα αυτό, από το ισόπλευρο τρίγωνο B-C-D απορρίπτω το σημείο B

ΚΑΝΟΝΑΣ 2

Γραφική εξήγηση γεωμετρικής έρευνας (3)

- Ο “Κανόνας 2” με βοηθάει να “ξεκολλήσω” από πιθανές τέτοιες καταστάσεις φαύλου κύκλου και να οδηγηθώ στο μέγιστο !

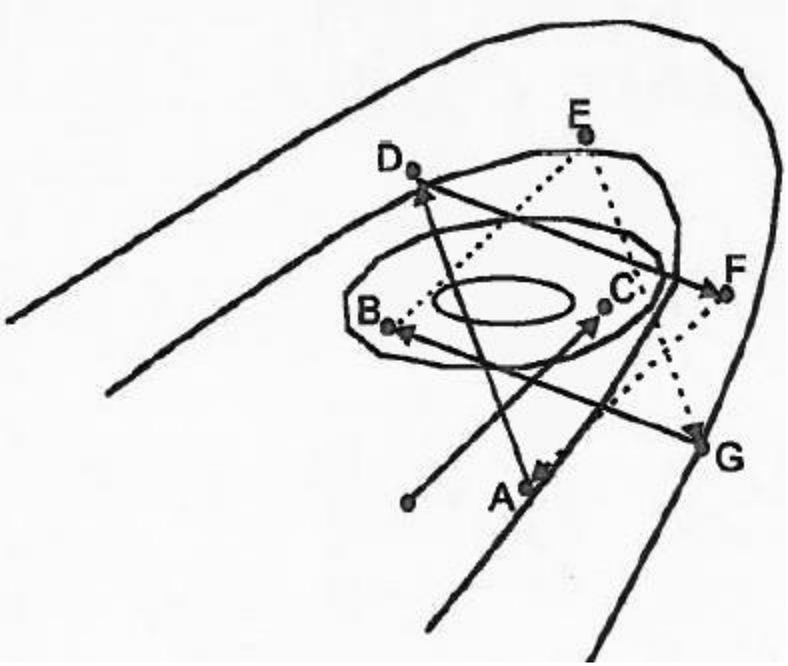


Συνεχή τόξα: επαναλήψεις όπου εφαρμόζεται ο Κανόνας 1

Διακεκομμένα τόξα: επαναλήψεις όπου εφαρμόζεται ο Κανόνας 2

Γραφική εξήγηση γεωμετρικής έρευνας (4)

- Όταν φθάσουμε κοντά στο επιθυμητό μέγιστο…
- …προκύπτει ένας δεύτερος τύπος "φαύλου κύκλου"



Τρίγωνο A-B-C: Αντικαθιστώ A με D (Κανόνας 1)
Τρίγωνο B-C-D: Αντικαθιστώ B με E (Κανόνας 2)
Τρίγωνο C-D-E: Αντικαθιστώ D με F (Κανόνας 1)
Τρίγωνο C-E-F: Αντικαθιστώ E με G (Κανόνας 2)
Τρίγωνο C-F-G: Αντικαθιστώ F με A (Κανόνας 2)
Τρίγωνο C-G-A: Αντικαθιστώ G με B (Κανόνας 1)
Τρίγωνο A-B-C…

Επέστρεψα στο ίδιο τρίγωνο με αυτό που είχα πριν 6 επαναλήψεις…

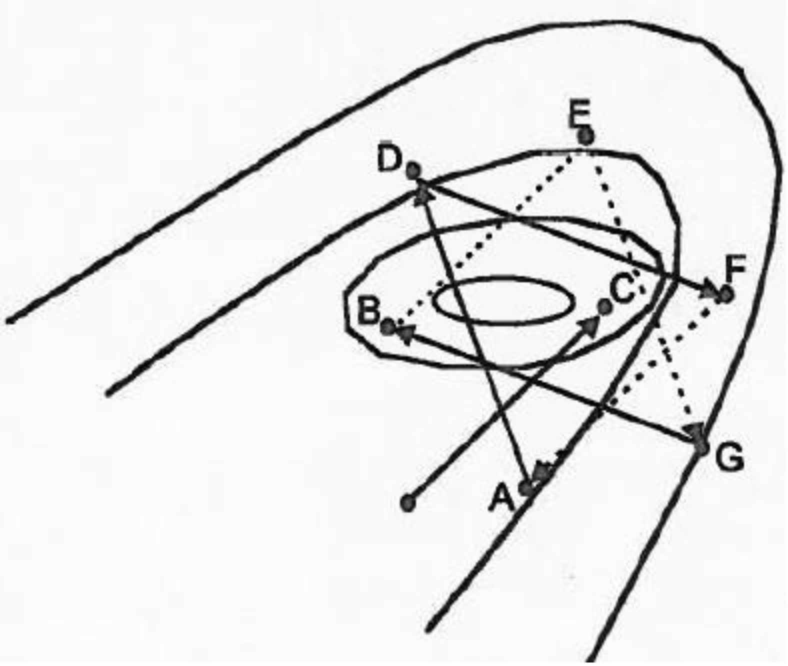
…και παρατηρώ πως κατά τη διάρκεια αυτών των επαναλήψεων μια κορυφή παραμένει σταθερή (η C)

…με άλλα λόγια το σημείο C αποτελεί την καλύτερη προσέγγιση του τοπικού ακρότατου, με απόλυτη ακρίβεια ίση με το (αυθαίρετο) μήκος πλευράς του ισόπλευρου τριγώνου που επέλεξα στην αρχή

Γραφική εξήγηση γεωμετρικής έρευνας (5)

- Αφού αναγνωρίσω συστηματικά αυτόν το δεύτερο τύπο "φαύλου κύκλου"…
- …αυτό που μπορώ να κάνω για να φθάσω σε καλύτερη προσέγγιση του μεγίστου είναι να μειώσω το μήκος της κάθε πλευράς του τριγώνου

Αν η κορυφή με την καλύτερη τιμή της συνάρτησης δεν έχει αλλάξει για M συνεχόμενες επαναλήψεις…
…και αν θέλω καλύτερη ακρίβεια, τότε μειώνω το μήκος της πλευράς του τριγώνου…
…και ξαναρχίζω τη διαδικασία με ένα ισόπλευρο τρίγωνο που περιέχει την κορυφή αυτή
ΚΑΝΟΝΑΣ 3

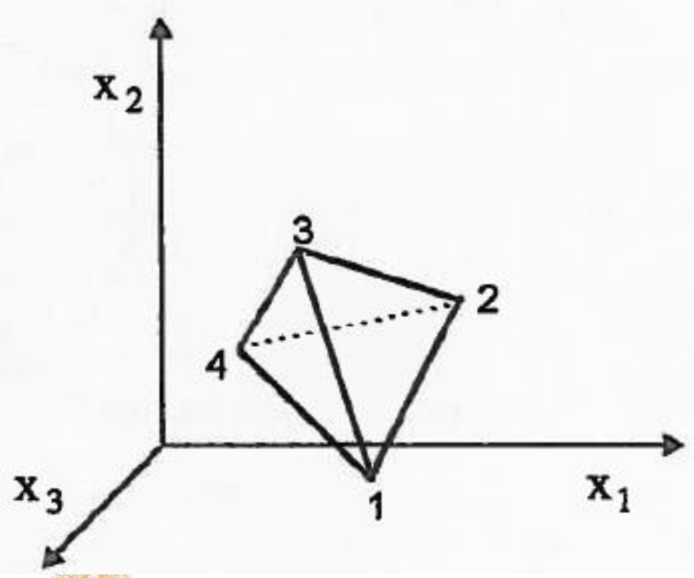


Έρευνες έχουν καταδείξει πως η τιμή του M που πρέπει να χρησιμοποιήσω στο παραπάνω κριτήριο αναγνώρισης εξαρτάται από τον αριθμό των μεταβλητών n και συγκεκριμένα με βάση τη σχέση $M \geq 1.65n + 0.05n^2$
π.χ. για 2 μεταβλητών: $M \geq 3.5 \rightarrow M = 4$

Γραφική εξήγηση γεωμετρικής έρευνας (6)

• Πέρα από την (απλούστερη) περίπτωση συνάρτησης 2 μεταβλητών…

•…στην περίπτωση συνάρτησης 3 μεταβλητών το ζητούμενο κανονικό γεωμετρικό σχήμα είναι ένα κανονικό τετράεδρο με 4 σημεία κορυφών…



•…στη γενική περίπτωση συνάρτησης *n* μεταβλητών είναι ένα κανονικό γεωμετρικό σχήμα n διαστάσεων με *n+1* σημεία κορυφών…

•…που μπορούμε μόνο να το φανταστούμε…

Μαθηματική διατύπωση γεωμετρικής έρευνας (1)

- Πώς μπορώ να διατυπώσω μαθηματικά τη γεωμετρική μέθοδο που εξήγησα γραφικά?
- …αρχικά για συνάρτηση 2 μεταβλητών

Έστω α το αρχικό μήκος που επιλέγω (αυθαίρετα) για την πλευρά του ισόπλευρου τριγώνου…

…και $\boldsymbol{x_1} = \{x_{1,1}, x_{2,1}\}$ και $\boldsymbol{x_2} = \{x_{1,2}, x_{2,2}\}$ οι συντεταγμένες των σημείων 1 και 2, αντίστοιχα…

…ισχύει $(\boldsymbol{x_1} - \boldsymbol{x_2})^2 = (x_{1,1} - x_{1,2})^2 + (x_{2,1} - x_{2,2})^2 = \alpha^2$

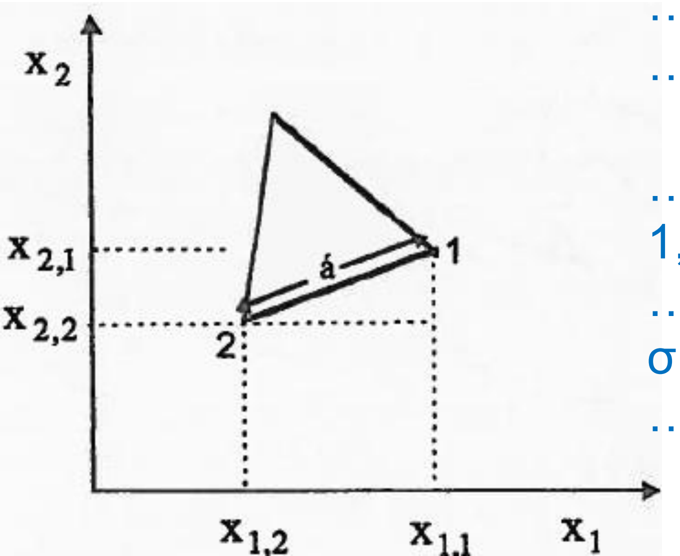
…και για δύο γενικά σημεία j και k…

…$(x_{1,j} - x_{1,k})^2 + (x_{2,j} - x_{2,k})^2 = \sum_{i=1}^{2}(x_{i,j} - x_{i,k})^2 = \alpha^2$…

…για ένα ισόπλευρο τρίγωνο που ορίζεται από τα σημεία 1,2,3 θα ορίζονται 3 τέτοιες εξισώσεις (έχει 3 πλευρές)…

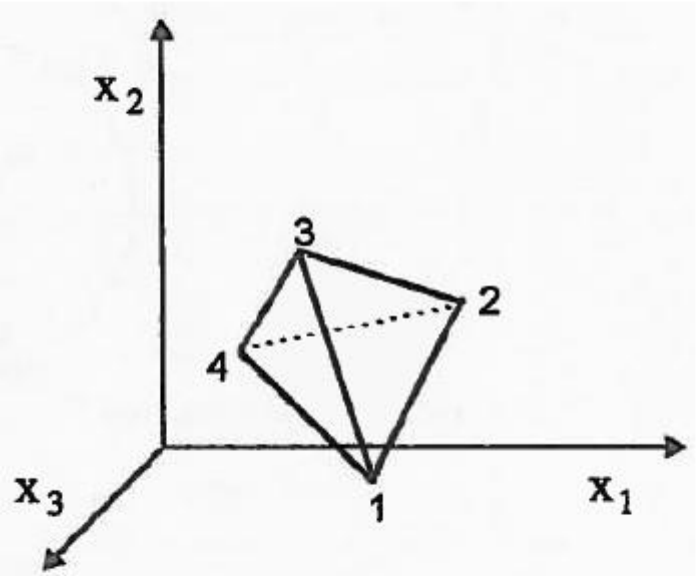
…ενώ έχουμε 6 αγνώστους για να καθορίσουμε τις συντεταγμένες του αρχικού ισόπλευρου τριγώνου…

…χρειάζεται να κάνουμε μια σύμβαση…



Μαθηματική διατύπωση γεωμετρικής έρευνας (2)

- Πέρα από την (απλούστερη) περίπτωση συνάρτησης 2 μεταβλητών…



Για συνάρτηση 3 μεταβλητών η παραπάνω σχέση γίνεται $\sum_{i=1}^{3}(x_{i,j} - x_{i,k})^2 = \alpha^2$ …
…για ένα ισόπλευρο τετράεδρο που ορίζεται από τα σημεία 1,2,3,4 θα ορίζονται 6 τέτοιες εξισώσεις (έχει 6 ακμές)…
…ενώ έχουμε 12 αγνώστους για να καθορίσουμε τις συντεταγμένες του αρχικού ισόπλευρου τετράεδρου…

Για συνάρτηση *n* μεταβλητών η παραπάνω σχέση γίνεται $\sum_{i=1}^{n}(x_{i,j} - x_{i,k})^2 = \alpha^2$ …
…για ένα κανονικό γεωμετρικό σχήμα *n* διαστάσεων θα ορίζονται $\frac{(n+1)n}{2}$ τέτοιες εξισώσεις…
…ενώ έχουμε $(n+1)n$ αγνώστους για να καθορίσουμε τις αρχικές συντεταγμένες…

Μαθηματική διατύπωση γεωμετρικής έρευνας (3)

- Για τις αρχικές συντεταγμένες χρησιμοποιείται συνήθως η ακόλουθη σύμβαση (βιβλίο):

σημείο j	$\zeta_{1,j}$	$\zeta_{2,j}$	$\zeta_{3,j}$	$\zeta_{4,j}$	…	$\zeta_{\eta-1,j}$	$\zeta_{\eta,j}$
1	0	0	0	0	…	0	0
2	p	q	q	q	…	q	q
3	q	p	q	q	…	q	q
…..	…..	…..	…..	…..	…..	…..	…..
η	q	q	q	q	…	p	q
η+1	q	q	q	q	…	q	p

- Αρχικές συντεταγμένες για τη γενική περίπτωση *n* μεταβλητών (για συνάρτηση 2 μεταβλητών παίρνουμε μόνο τις 3 πρώτες γραμμές κ.ο.κ.)
- Οι αρχικές συντεταγμένες των σημείων κορυφών εκφράζονται σχετικά με τις συντεταγμένες του ***βασικού σημείου*** $\boldsymbol{x_1}$ ως $\boldsymbol{x_j} = \{x_{1,1} + \zeta_{1,j}, x_{2,1} +$

Μαθηματική διατύπωση γεωμετρικής έρευνας (4)

- Για τις αρχικές συντεταγμένες χρησιμοποιείται συνήθως η ακόλουθη σύμβαση (βιβλίο):

σημείο j	$\zeta_{1,j}$	$\zeta_{2,j}$	$\zeta_{3,j}$	$\zeta_{4,j}$	...	$\zeta_{\eta-1,j}$	$\zeta_{\eta,j}$
1	0	0	0	0	...	0	0
2	p	q	q	q	...	q	q
3	q	p	q	q	...	q	q
.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
η	q	q	q	q	...	p	q
η+1	q	q	q	q	...	q	p

Πέρα από την αρχική πλευρά του σχήματος a και το βασικό σημείο (που επιλέγονται αυθαίρετα), απαιτείται ο υπολογισμός μόνο 2 παραμέτρων…

…οι οποίες υπολογίζονται ως (βιβλίο):

$$p = \frac{a}{n\sqrt{2}}(n - 1 + \sqrt{n+1})$$

$$q = \frac{a}{n\sqrt{2}}(-1 + \sqrt{n+1})$$

Μαθηματική διατύπωση γεωμετρικής έρευνας (5)

- *Παράδειγμα*: Περίπτωση 2 μεταβλητών…
- …επιλέγω (αυθαίρετα) το αρχικό μήκος της πλευράς του ισόπλευρου τριγώνου ως α και τις συντεταγμένες του βασικού σημείου ως $\boldsymbol{x_1} = \{3.1, 6.7\}$…
- …οι συντεταγμένες των δύο επόμενων σημείων είναι $\boldsymbol{x_2} = \{3.1 + p, 6.7 + q\}$ και $\boldsymbol{x_3} = \{3.1 + q, 6.7 + p\}$…
- …όπου $p = \frac{a}{n\sqrt{2}}\left(n - 1 + \sqrt{n+1}\right) = \frac{\alpha(1+\sqrt{3})}{2\sqrt{2}} = 0.9657\alpha$
- …και $q = \frac{a}{n\sqrt{2}}\left(-1 + \sqrt{n+1}\right) = \frac{\alpha(-1+\sqrt{3})}{2\sqrt{2}} = 0.2587\alpha$

κορυφή j	$x_{1,j}$	$x_{2,j}$
1	3.1	6.7
2	3.1+0.9657α	6.7+0.2587α
3	3.1+0.2587α	6.7+0.9657α

Μαθηματική διατύπωση γεωμετρικής έρευνας (6)

- Πώς αντικαθιστώ ένα σημείο που έχω αποφασίσει να απορρίψω (“Κανόνες 1 και 2”) ?
- … “με νέο σημείο σε κατεύθυνση κάθετη της απέναντι πλευράς του τριγώνου, και τέτοιο ώστε να προκύψει ξανά ισόπλευρο τρίγωνο” (δύο διαστάσεις, διαφάνεια 13)

Έστω 1-2-R το αρχικό τρίγωνο, R το σημείο που απορρίπτω και N το νέο σημείο…

…η κάθετη γραμμή από το R στην απέναντι πλευρά 1-2 τέμνει αυτή την πλευρά στο (μέσο) σημείο F…

…άρα $x_{1,F} = (x_{1,1} + x_{1,2})/2$ και $x_{2,F} = (x_{2,1} + x_{2,2})/2 \ldots$

…ή γενικά $x_{i,F} = (x_{i,1} + x_{i,2})/2\,, \forall i = 1{,}2$

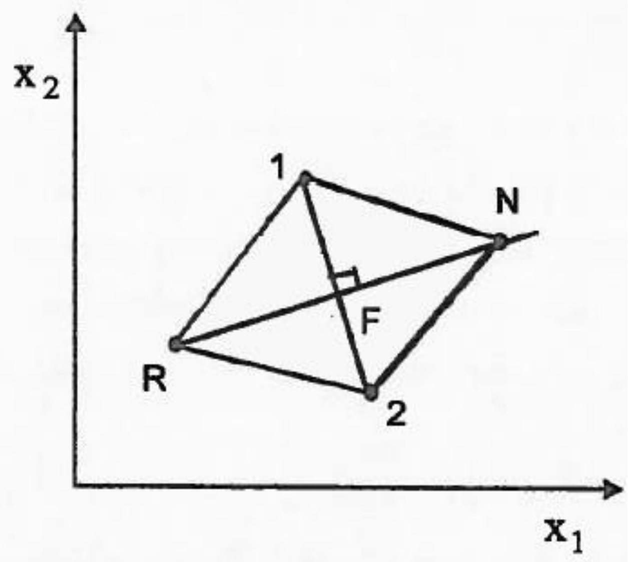
Επίσης το σημείο F είναι και το μέσο της ευθείας R-N…

…άρα $x_{i,F} = (x_{i,R} + x_{i,N})/2\,, \forall i = 1{,}2$

Συνδυάζοντας τις 2 παραπάνω σχέσεις προκύπτει…

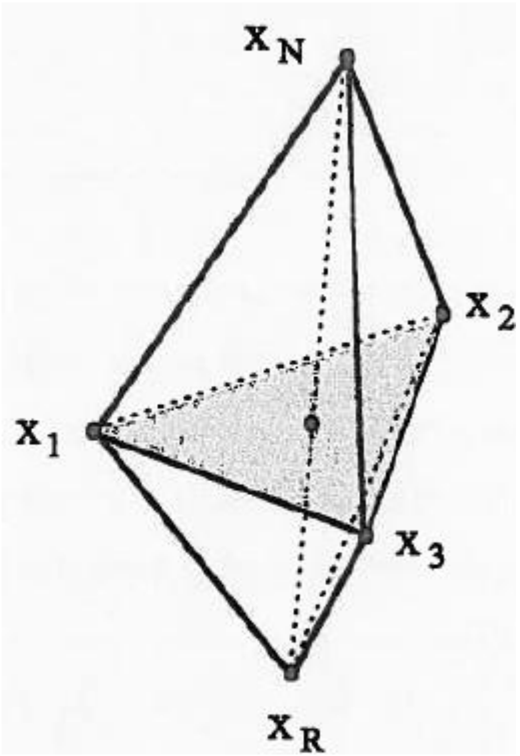
… $(x_{i,R} + x_{i,N})/2 = (x_{i,1} + x_{i,2})/2\,, \forall i = 1{,}2$ ή τελικά…

…$x_{i,N} = \frac{2(x_{i,1}+x_{i,2})}{2} - x_{i,R}, \forall i = 1{,}2$



Μαθηματική διατύπωση γεωμετρικής έρευνας (7)

- Πώς αντικαθιστώ ένα σημείο που έχω αποφασίσει να απορρίψω ("Κανόνες 1 και 2") ?



Παρομοίως στις 3 διαστάσεις προκύπτει (βιβλίο)…

$\ldots x_{i,N} = \frac{2}{3}\sum_{j=1}^{3} x_{i,j} - x_{i,R}, \forall i = 1,2,3$

…ή γενικά $x_{i,N} = \frac{2}{3}\sum_{j,\varepsilon\kappa\tau o\varsigma\ \tau o\upsilon\ \alpha\pi o\rho\rho\iota\pi\tau\varepsilon o\upsilon} x_{i,j} - x_{i,R}, \forall i = 1,2,3$

Παρομοίως στις n διαστάσεις προκύπτει…

$\ldots\ x_{i,N} = \frac{2}{n}\sum_{j,\varepsilon\kappa\tau o\varsigma\ \tau o\upsilon\ \alpha\pi o\rho\rho\iota\pi\tau\varepsilon o\upsilon} x_{i,j} - x_{i,R}, \forall i = 1,2,..,n$

Παράδειγμα γεωμετρικής έρευνας (1)

- Τοπικό μέγιστο συνάρτησης $y = 100 - (10 - x_1)^2 - (5 - x_2)^2$ με αρχικό μήκος πλευράς $\alpha = 2$ και βασικό σημείο το $x_1 = \{0,0\}$

➢ Καθορίζουμε τις αρχικές συντεταγμένες του ισόπλευρου τριγώνου ως (διαφάνεια 21) $x_1 = \{0,0\}$, $x_2 = \{0 + p, 0 + q\}$ και $x_3 = \{0 + q, 0 + p\}$…

➢ …με $p = 0.9657\alpha$ και $q = 0.2587\alpha$ (διαφάνεια 23)

➢ …επομένως αντικαθιστώντας $\alpha = 2$ προκύπτουν οι αρχικές συντεταγμένες:

Σημείο *j*	$x_{1,j}$	$x_{2,j}$
1 (βασικό σημείο)	0	0
2	1.9314	0.5174
3	0.5174	1.9314

Παράδειγμα γεωμετρικής έρευνας (2)

- Τοπικό μέγιστο συνάρτησης $y = 100 - (10 - x_1)^2 - (5 - x_2)^2$ με αρχικό μήκος πλευράς $\alpha = 2$ και βασικό σημείο το $x_1 = \{0,0\}$
  - ➢ Αρχίζω τη γεωμετρική έρευνα σύμφωνα με τους κανόνες 1,2 και 3 που περιεγράφηκαν παραπάνω…

Σημείο j	$x_{1,j}$	$x_{2,j}$	y_j
1	0	0	-25
2	1.9314	0.5174	14.8039
3	0.5174	1.9314	0.664
4	2.4488	2.4488	

Υπολογίζω την τιμή της συνάρτησης σε καθένα από τα 3 αρχικά σημεία…
…απορρίπτω το σημείο με τη χειρότερη (μικρότερη) τιμή (σημείο 1)…
…και το αντικαθιστώ με το σημείο 4, οι συντεταγμένες του οποίου υπολογίζονται από τη γενική σχέση (διαφάνεια 25)
$x_{i,4} = \frac{2}{2}(x_{i,2} + x_{i,3}) - x_{i,1}, \forall i = 1,2$
…άρα $x_{1,4} = \frac{2}{2}(1.9314 + 0.5174) - 0 = 2.4488$ και $x_{2,4} = \frac{2}{2}(0.5174 + 1.9314) - 0 = 2.4488$

Δηλαδή σε αυτήν την επανάληψη εφάρμοσα τον Κανόνα 1

Παράδειγμα γεωμετρικής έρευνας (3)

- Τοπικό μέγιστο συνάρτησης $y = 100 - (10 - x_1)^2 - (5 - x_2)^2$ με αρχικό μήκος πλευράς $\alpha = 2$ και βασικό σημείο το $x_1 = \{0,0\}$
  - ➢ Στην επόμενη επανάληψη ξεκινάω από τα σημεία 2, 3, 4 (που επίσης σχηματίζουν ισόπλευρο τρίγωνο)

Σημείο *j*	$x_{1,j}$	$x_{2,j}$	y_j
2	1.9314	0.5174	14.8039
3	0.5174	1.9314	0.664
4	2.4488	2.4488	36.4708
5	3.8628	1.0348	

Υπολογίζω την τιμή της συνάρτησης σε καθένα από τα 3 σημεία…
…απορρίπτω το σημείο με τη χειρότερη (μικρότερη) τιμή (σημείο 3)…
…και το αντικαθιστώ με το σημείο 5, οι συντεταγμένες του οποίου υπολογίζονται από τη γενική σχέση (διαφάνεια 24)

$x_{i,5} = \frac{2}{2}(x_{i,2} + x_{i,4}) - x_{i,3}, \forall i = 1,2$

…άρα $x_{1,5} = \frac{2}{2}(1.9314 + 2.4488) - 0.5174 = 3.8628$ και $x_{2,5} = \frac{2}{2}(0.5174 +$

Δηλαδή σε αυτήν την επανάληψη εφάρμοσα τον Κανόνα 1

Παράδειγμα γεωμετρικής έρευνας (4)

- Συνεχίζω με τον ίδιο τρόπο (πίνακας 1.2 βιβλίου)

Σημείο & συντεταγμένες			y_j	Σημείο & κανόνας απόρριψης		Τρίγωνο έρευνας		
1	0	0	-25					
2	1.9314	0.5174	14.9	~~αρχή~~	~~simplex~~	1	2	3
3	0.5174	1.9314	0.6					
4	2.4488	2.4488	~~26.5~~	1	1	4	2	3
5	3.8628	1.0348	46.6	3	1	4	2	5
6	4.3802	2.9662	64.3	2	1	4	6	5
7	5.7972	1.5522	70.3	4	1	7	6	5
8	6.3116	3.4836	84.1	5	1	7	6	8
9	7.7256	2.0696	79.4	6	1	7	9	8
10	8.2430	4.0010	95.9	7	1	10	9	8
11	6.8290	5.4150	89.7	9	1	10	11	8
12	8.7604	5.9324	97.60	8	1	10	11	12
13	10.1744	4.5184	99.74	11	1	10	13	12
14	10.6918	6.4498	97.42	10	1	14	13	12
15	12.1054	5.0358	95.57	12	2	14	13	15
16	11.5884	3.1044	93.88	14	2	16	13	15

Λάθη στο βιβλίο ($y_4 = 36.5$)

Αφού φθάσω στο τρίγωνο 10-13-12, σύμφωνα με τον Κανόνα 1 απορρίπτω το σημείο 10 και το αντικαθιστώ με το σημείο 14…

…στο τρίγωνο 14-13-12, σύμφωνα με τον Κανόνα 1 θα έπρεπε να απορρίψω το σημείο 14 και να το αντικαταστήσω με το σημείο 10…

…όμως έτσι θα άρχιζε φαύλος κύκλος…

…επομένως εφαρμόζω τον Κανόνα 2, και αντικαθιστώ το σημείο με τη δεύτερη χειρότερη τιμή της συνάρτησης (σημείο 12)

Παράδειγμα γεωμετρικής έρευνας (5)

- Συνεχίζω με τον ίδιο τρόπο (πίνακας 1.2 βιβλίου)

Σημείο & συντεταγμένες			y_j	Σημείο & κανόνας απόρριψης		Τρίγωνο έρευνας		
1	0	0	-25					
2	1.9314	0.5174	14.9	~~αρχή~~	~~simplex~~	1	2	3
3	0.5174	1.9314	0.6					
4	2.4488	2.4488	~~26.5~~	1	1	4	2	3
5	3.8628	1.0348	46.6	3	1	4	2	5
6	4.3802	2.9662	64.3	2	1	4	6	5
7	5.7972	1.5522	70.3	4	1	7	6	5
8	6.3116	3.4836	84.1	5	1	7	6	8
9	7.7256	2.0696	79.4	6	1	7	9	8
10	8.2430	4.0010	95.9	7	1	10	9	8
11	6.8290	5.4150	89.7	9	1	10	11	8
12	8.7604	5.9324	97.60	8	1	10	11	12
13	10.1744	4.5184	99.74	11	1	10	13	12
14	10.6918	6.4498	97.42	10	1	14	13	12
15	12.1054	5.0358	95.57	12	2	14	13	15
16	11.5884	3.1044	93.88	14	2	16	13	15

Λάθη στο βιβλίο ($y_4 = 36.5$)

Αφού φθάσω στο τρίγωνο 16-13-15, εδώ πλέον θα πρέπει να εφαρμόσω τον Κανόνα 3…
…αφού το σημείο με την καλύτερη τιμή της συνάρτησης (σημείο 13) δεν έχει αλλάξει για $M = 4$ επαναλήψεις…
…μπορώ να πω πως το σημείο 13 είναι το τοπικό μέγιστο που ψάχνω με απόλυτη ακρίβεια α, δηλαδή το τοπικό μέγιστο θα βρίσκεται στην περιοχή $\{10.1744 \pm \alpha, 4.5184 \pm \alpha\} = \{10.1744 \pm$

Παράδειγμα γεωμετρικής έρευνας (6)

- Έστω πως μειώνω το μήκος πλευράς σε $\alpha = 0.1$…
- …ξαναρχίζω τη γεωμετρική έρευνα με βασικό σημείο x_1 το σημείο 13 που κατέληξα παραπάνω…
- …δηλαδή οι (νέες) αρχικές συντεταγμένες του ισόπλευρου τριγώνου είναι $x_1 = \{10.1744, 4.5184\}$, $x_2 = \{10.1744 + p, 4.5184 + q\}$ και $x_3 = \{10.1744 + q, 4.5184 + p\}$…
- …με $p = 0.9657\alpha$ και $q = 0.2587\alpha$ (διαφάνεια 23)
- …επομένως αντικαθιστώντας $\alpha = 0.1$ προκύπτουν οι αρχικές συντεταγμένες:

Σημείο j	$x_{1,j}$	$x_{2,j}$
1 (βασικό σημείο)	10.1744	4.5184
2	10.271	4.5443
3	10.2003	4.615

Παράδειγμα γεωμετρικής έρευνας (7)

- …και ακολουθώντας την ίδια μέθοδο γεωμετρικής έρευνας (Πίνακας 1.3 βιβλίου, αλλά προσοχή στο ότι ο συγγραφέας έχει *επίτηδες** εισάγει λάθη στον υπολογισμό της τιμής της συνάρτησης…)…
- …καταλήγω στο ότι το τοπικό μέγιστο θα βρίσκεται στην περιοχή $\{10.0389 \pm \alpha, 5.0200 \pm \alpha\} = \{10.0389 \pm$

*προκειμένου να δείξει πως η μέθοδος είναι σε ένα βαθμό σθεναρή σε σφάλματα υπολογισμού της τιμής της συνάρτησης (παρόλο που τέτοια σφάλματα επιβραδύνουν τη σύγκλιση στο τοπικό ακρότατο, η μέθοδος καταφέρνει να συγκλίνει)

Τέλος Ενότητας