



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS

Εφαρμοσμένη Βελτιστοποίηση

Ενότητα 4: Αναλυτικές μέθοδοι βελτιστοποίησης για προβλήματα πολλών μεταβλητών (2^ο μέρος)

Δημήτρης Παπαδασκαλόπουλος (Επικ. Καθηγητής)
Πολυτεχνική Σχολή
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Τεχνολογίας
Υπολογιστών

Αναλυτικές μέθοδοι για προβλήματα πολλών μεταβλητών

- Προβλήματα χωρίς περιορισμούς
 - Αναλυτική μέθοδος (αναγκαίες και ικανές συνθήκες)
 - Παραδείγματα

- Προβλήματα με ισοτικούς περιορισμούς
 - Αναλυτικές μέθοδοι (μέθοδοι απαλοιφής και Lagrange)
 - Παραδείγματα

1^ο μέρος (23/10 και 30/10)

2^ο μέρος (σημερινή διάλεξη)

- Προβλήματα με ανισοτικούς περιορισμούς
 - Αναλυτικές μέθοδοι
 - Παραδείγματα

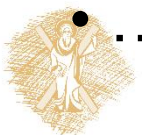
3^ο μέρος (επόμενη διάλεξη)

- Προβλήματα με ισοτικούς και ανισοτικούς περιορισμούς
 - Παραδείγματα



Προβλήματα με ανισοτικούς περιορισμούς (1)

- Στο 1^ο μέρος της ενότητας αυτής μελετήσαμε προβλήματα πολλών (n) μεταβλητών με (m) **ισοτικούς περιορισμούς** (της μορφής $g(x) = 0$), με $m < n$...
- ...οι οποίοι ουσιαστικά **περιορίζουν κατά m τους n “βαθμούς ελευθερίας”** στην αναζήτηση τοπικών ακροτάτων
- Σήμερα (2^ο μέρος) θα μελετήσουμε προβλήματα πολλών (n) μεταβλητών με (l) **ανισοτικούς περιορισμούς** (της μορφής $g(x) \leq 0$)...
- ...οι οποίοι αποτελούν **ασθενέστερους περιορισμούς**: απλά ορίζουν τους υποχώρους μέσα στους οποίους πρέπει να αναζητήσουμε τη βέλτιστη λύση
- ...επομένως τώρα δεν απαιτείται να ισχύει $l < n$



Προβλήματα με ανισοτικούς περιορισμούς (2)

• Η αναζήτηση τοπικών ακροτάτων σε αυτήν την περίπτωση πρέπει να χωριστεί στην αναζήτηση ακροτάτων στα α) **εσωτερικά σημεία** της αντικειμενικής συνάρτησης $f(x)$ και στα β) στα **οριακά σημεία** του πεδίου ορισμού της συνάρτησης (που ορίζονται από τους περιορισμούς)

...όπως στα προβλήματα 1 μεταβλητής (Ενότητα 3)

- Η περίπτωση α) είναι σχετικά απλή:
 - Εξετάζουμε τα τοπικά ακρότατα της $f(x)$ **χωρίς περιορισμούς** με βάση τις ικανές συνθήκες 1) $\nabla f(x) = 0$ και 2) $\nabla^2 f(x)$ (ή γενικότερα πρώτη μη-μηδενική βάρθρωση άρτιας τάξης) θετικά ορισμένη για ελάχιστο (αρνητικά ορισμένη για μέγιστο)...
 - ...και ελέγχουμε αν τα τοπικά ακρότατα που προέκυψαν **ικανοποιούν τους ανισοτικούς περιορισμούς** $g(x) \leq 0$



Προβλήματα με ανισοτικούς περιορισμούς (3)

- Η περίπτωση β) είναι λίγο πιο σύνθετη:
 - Εξετάζουμε τα τοπικά ακρότατα της $f(x)$ στα όρια των υποχώρων που ορίζουν οι ανισοτικοί περιορισμοί $g(x) \leq 0$, δηλαδή στις περιοχές που ισχύει $g^k(x) = 0$, όπου $g^k(x)$ το υποσύνολο k στοιχείων από τους l περιορισμούς, δηλαδή $g^k(x) \subseteq g(x)$, για κάθε $k \dots$
 - ...με $k = 1, 2, \dots, 2^l - 1$ οι οριακές υπο-περιπτώσεις / συνδυασμοί που πρέπει να εξεταστούν...
 - ...και για κάθε υπο-περίπτωση λέμε πως k από τους l ανισοτικούς περιορισμούς είναι **ενεργοί (active) και ικανοποιούνται ως ισότητες** ενώ οι υπόλοιποι $l - k$ περιορισμοί είναι **ανενεργοί και πρέπει να ικανοποιούνται ως αυστηρές ανισότητες**
- 2^l αν μετρήσω και την περίπτωση α) (εσωτερικά σημεία)*



Παραδείγματα οριακών υπο-περιπτώσεων (1)

- Αν έχω $l = 1$ ανισοτικό περιορισμό?
- ...ή θα είναι ενεργός (περίπτωση β με $2^l - 1 = 1$ οριακή υπο-περίπτωση) ή θα είναι ανενεργός (περίπτωση α, εσωτερικά σημεία)...σύνολο $2^l = 2$ υπο-περιπτώσεις
- Αν έχω $l = 2$ ανισοτικούς περιορισμούς?

	Περιορισμός 1	Περιορισμός 2
Υπο-περίπτωση 1	Ανενεργός	Ανενεργός
Υπο-περίπτωση 2	Ενεργός	Ανενεργός
Υπο-περίπτωση 3	Ανενεργός	Ενεργός
Υπο-περίπτωση 4	Ενεργός	Ενεργός

Περίπτωση α

Περίπτωση β με $2^l - 1 = 3$ οριακές υπο-περιπτώσεις

Σύνολο $2^l = 4$ υπο-περιπτώσεις



Παραδείγματα οριακών υπο-περιπτώσεων (2)

- Αν έχω $l = 3$ ανισοτικούς περιορισμούς?

	Περιορισμός 1	Περιορισμός 2	Περιορισμός 3
Υπο-περίπτωση 1	Ανενεργός	Ανενεργός	Ανενεργός
Υπο-περίπτωση 2	Ενεργός	Ανενεργός	Ανενεργός
Υπο-περίπτωση 3	Ανενεργός	Ενεργός	Ανενεργός
Υπο-περίπτωση 4	Ανενεργός	Ανενεργός	Ενεργός
Υπο-περίπτωση 5	Ενεργός	Ενεργός	Ανενεργός
Υπο-περίπτωση 6	Ενεργός	Ανενεργός	Ενεργός
Υπο-περίπτωση 7	Ανενεργός	Ενεργός	Ενεργός
Υπο-περίπτωση 8	Ενεργός	Ενεργός	Ενεργός

Περίπτωση β με $2^l - 1 = 7$ οριακές υπο-περιπτώσεις

Περίπτωση α

Σύνολο $2^l = 8$ υπο-περιπτώσεις



Προβλήματα με ανισοτικούς περιορισμούς (4)

- Για κάθε οριακή υπο-περίπτωση, η θεωρία μας λέει:
 - Αν ένα σημείο x είναι τοπικό ελάχιστο στην περίπτωση αυτή, θα πρέπει για οποιοδήποτε επιτρεπτό $x + \Delta x$ στην περιοχή γύρω από το x να ισχύουν $f(x + \Delta x) - f(x) \geq 0$ καθώς και $g_i^k(x + \Delta x) - g_i^k(x) \leq 0$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, k$
 - ...και επομένως, σύμφωνα με τον ορισμό του διαφορικού (δείτε Ενότητα 2), ισχύουν $df(x, \Delta x) = \nabla^T f(x) \Delta x \geq 0$ καθώς και $dg_i^k(x, \Delta x) = \nabla^T g_i^k(x) \Delta x \leq 0$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, k$
 - ...οι οποίες σχέσεις ορίζουν μια γεωμετρική σχέση μεταξύ των διανυσμάτων ∇f και ∇g_i^k ...
 - ...συγκεκριμένα οι σχέσεις αυτές θα ικανοποιούνται αν και μόνο αν η βάθμωση της f είναι **γεωμετρικά αντίρροπη** κάποιου γραμμικού συνδυασμού όλων των βαθμώσεων των g_i^k



Προβλήματα με ανισοτικούς περιορισμούς: Μέθοδος Lagrange

- Αυτή η γεωμετρική σχέση μπορεί να εκφρασθεί μαθηματικά ως $sign \nabla f(x) = -sign \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i \nabla g_i^k(x) \right\}$ για $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k > 0$

Αντίστοιχη της συνθήκης $sign[f'(x)] = -sign[g'(x)]$ στα προβλήματα 1 μεταβλητής (Ενότητα 3)

- ...αυτή η σχέση, σε συνδυασμό με το γεγονός πως οι k ανισοτικοί περιορισμοί είναι ενεργοί, μας οδηγεί στο συμπέρασμα πως η $f(x)$ έχει τοπικό ακρότατο στο οριακό σημείο που ορίζεται από τους $g^k(x)$ περιορισμούς αν και μόνο αν υπάρχει ένα σύνολο πραγματικών **θετικών** αριθμών $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ που ικανοποιούν τη συνθήκη $\nabla^T f(x) + \lambda^T \nabla g^k(x) = 0$ με $g^k(x) = 0 \dots$

- ...όπου το διάνυσμα $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k]^T$ περιέχει τους παράγοντες Lagrange (ή μεταβλητές Lagrange) των ανισοτικών περιορισμών



Προβλήματα με ανισοτικούς περιορισμούς: Μέθοδος Lagrange

- Αυτή η σχέση αποτελεί την **1^η αναγκαία και ικανή συνθήκη για τοπικά ακρότατα της $f(x)$ υπό ανισοτικούς περιορισμούς στο οριακά σημείο που ορίζεται από τους $g^k(x)$ περιορισμούς...**
- ...και μοιάζει πολύ με την αντίστοιχη συνθήκη για τοπικά ακρότατα της $f(x)$ υπό ισοτικούς περιορισμούς (δείτε 1^ο μέρος Ενότητας 4) αλλά με δύο σημαντικές διαφορές:
 - Οι παράγοντες Lagrange των ενεργών ανισοτικών περιορισμών πρέπει να είναι αυστηρά θετικοί (των ισοτικών περιορισμών μπορεί να είναι θετικοί ή αρνητικοί)
 - Η συνθήκη αυτή ορίζεται για κάθε συνδυασμό k ενεργών ανισοτικών περιορισμών... που σημαίνει πως σε πρακτικά προβλήματα πρέπει να εξετάσουμε πολλές υποπεριπτώσεις...



Προβλήματα με ανισοτικούς περιορισμούς: Μέθοδος Lagrange

- Αν η 1^η ικανή συνθήκη ικανοποιείται με τους παράγοντες Lagrange των ενεργών ανισοτικών περιορισμών του εξεταζόμενου συνδυασμού να είναι θετικοί...
- ...ελέγχουμε αν οι ανενεργοί ανισοτικοί περιορισμοί του εξεταζόμενου συνδυασμού ικανοποιούνται (ως αυστηρές ανισότητες) – αν δεν ικανοποιούνται το οριακό σημείο απορρίπτεται...
- ...αν ικανοποιούνται εξετάζουμε και τη 2^η ικανή συνθήκη $\nabla_x^2 L(x, \lambda)$ θετικά / αρνητικά ορισμένη για τοπικό ελάχιστο / μέγιστο...
- ...και (μόνο αν η 2^η ικανή συνθήκη υποδεικνύει σαγματικό σημείο) την εναλλακτική 2^η ικανή συνθήκη βάσει της Bordered Hessian (δείτε 1^ο μέρος Ενότητας 4)



Παραδείγματα προβλημάτων με ανισοτικούς περιορισμούς (1)

- Συνάρτηση $f(x_1, x_2) = 3x_1^2 + x_2^3 + 3x_1x_2 + 3x_2^2$, υπό τον ανισοτικό περιορισμό $g(x_1, x_2) = x_1x_2 \leq a$, με $a > 0$
- Ξεκινάμε με την περίπτωση a) (εσωτερικά σημεία)...
- 1^η ικανή συνθήκη: $\nabla f(x) = 0$, το οποίο συνεπάγεται...
- $\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0 \rightarrow 6x_1 + 3x_2 = 0$
- $\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0 \rightarrow 3x_2^2 + 3x_1 + 6x_2 = 0$
- Επιλύοντας αυτό το σύστημα 2 εξισώσεων, προκύπτουν δύο σημεία ενδιαφέροντος: το $(x_1, x_2) = (0,0)$ και το $(x_1, x_2) = (\frac{3}{4}, -\frac{3}{2})$ Προκύπτουν 2 σημεία ενδιαφέροντος επειδή η δεύτερη εξίσωση είναι δευτέρου βαθμού
- ...και τα 2 σημεία ικανοποιούν τον ανισοτικό περιορισμό ως αυστηρή ανισότητα ($0 * 0 < a$ για το πρώτο, $\frac{3}{4} * (-\frac{3}{2}) < a$ για το δεύτερο) οπότε τα εξετάζω παραιτέρω



Παραδείγματα προβλημάτων με ανισοτικούς περιορισμούς (2)

- Συνάρτηση $f(x_1, x_2) = 3x_1^2 + x_2^3 + 3x_1x_2 + 3x_2^2$, υπό τον ανισοτικό περιορισμό $g(x_1, x_2) = x_1x_2 \leq a$, με $a > 0$
- 2^η ικανή συνθήκη: η Hessian είναι $\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 6x_2 + 6 \end{bmatrix}$
- Για το πρώτο σημείο ενδιαφέροντος $(x_1, x_2) = (0,0)$, προκύπτει $\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$, με $D_1 = 6$ και $D_2 = 27$
- ...άρα είναι θετικά ορισμένη...άρα αυτό το σημείο ενδιαφέροντος είναι τοπικό ελάχιστο
- Για το δεύτερο σημείο ενδιαφέροντος $(x_1, x_2) = (\frac{3}{4}, -\frac{3}{2})$, η Hessian είναι $\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$, με $D_1 = 6$ και $D_2 = -27$
- ...άρα δεν είναι ούτε θετικά ούτε αρνητικά ορισμένη, άρα αυτό είναι σαγματικό σημείο **ΠΡΟΣΟΧΗ: ΔΕΝ εξετάζω Bordered Hessian στα εσωτερικά σημεία !**



Παραδείγματα προβλημάτων με ανισοτικούς περιορισμούς (3)

- Συνάρτηση $f(x_1, x_2) = 3x_1^2 + x_2^3 + 3x_1x_2 + 3x_2^2$, υπό τον ανισοτικό περιορισμό $g(x_1, x_2) = x_1x_2 \leq a$, με $a > 0$
- Συνεχίζουμε με την περίπτωση β) (οριακά σημεία)...
- ...εδώ έχουμε έναν μόνο ανισοτικό περιορισμό, άρα χρειάζεται να εξετάσουμε ένα μόνο ($2^l - 1 = 1$) οριακό σημείο
- Διατυπώνουμε τη Lagrangian συνάρτηση του προβλήματος: $L(x, \lambda) = 3x_1^2 + x_2^3 + 3x_1x_2 + 3x_2^2 + \lambda(x_1x_2 - a)$ ΠΡΟΣΟΧΗ: Ο ανισοτικός πρέπει να έρθει στη μορφή $g(x) \leq 0$
- 1^η ικανή συνθήκη: $\nabla_x L(x, \lambda) = 0$ ΚΑΙ $\nabla_\lambda L(x, \lambda) = 0$, δηλ.
- $\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1} = 0 \rightarrow 6x_1 + 3x_2 + \lambda x_2 = 0$
- $\frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_2} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_2} = 0 \rightarrow 3x_2^2 + 3x_1 + 6x_2 + \lambda x_1 = 0$
- $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \rightarrow g(x_1, x_2) = 0 \rightarrow x_1x_2 - a = 0$



Παραδείγματα προβλημάτων με ανισοτικούς περιορισμούς (4)

- Συνάρτηση $f(x_1, x_2) = 3x_1^2 + x_2^3 + 3x_1x_2 + 3x_2^2$, υπό τον ανισοτικό περιορισμό $g(x_1, x_2) = x_1x_2 \leq a$, με $a > 0$
- Η τελευταία σχέση μας δίνει $x_2 = \frac{a}{x_1}$
- ...το οποίο αν χρησιμοποιήσουμε στην πρώτη σχέση παίρνουμε $6x_1 + 3\frac{a}{x_1} + \lambda\frac{a}{x_1} = 0 \rightarrow \lambda = -6\frac{x_1^2}{a} - 3$
- ...η οποία τιμή είναι πάντα αρνητική, άρα δεν υπάρχει θετικός παράγοντας Lagrange για τον οποίο ισχύουν οι παραπάνω τρεις σχέσεις...
- ...άρα δεν υπάρχει τοπικό ακρότατο στο οριακό σημείο
- Ανακεφαλαιώνοντας (δείτε διαφάνειες 10-15): το εσωτερικό σημείο $(x_1, x_2) = (0,0)$ είναι τοπικό ελάχιστο, το μοναδικό οριακό σημείο δεν είναι τοπικό ακρότατο



Παραδείγματα προβλημάτων με ανισοτικούς περιορισμούς (5)

- Συνάρτηση $f(x_1, x_2) = (x_1 - 2)^2 + 2(x_2 - 1)^2$, υπό τους ανισοτικούς περιορισμούς $x_1 + 4x_2 \leq 3$ και $x_1 \geq x_2$
 - Ξεκινάμε με την περίπτωση α) (εσωτερικά σημεία)...
 - 1^η ικανή συνθήκη: $\nabla f(x) = 0$, το οποίο συνεπάγεται...
 - $\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0 \rightarrow 2x_1 - 4 = 0 \rightarrow x_1 = 2$
 - $\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0 \rightarrow 4x_2 - 4 = 0 \rightarrow x_2 = 1$
 - Το σημείο $(x_1, x_2) = (2, 1)$ είναι σημείο ενδιαφέροντος...
 - ...αλλά δεν ικανοποιεί τον πρώτο ανισοτικό περιορισμό ($2 + 4 * 1 > 3$) επομένως απορρίπτεται εκ των προτέρων (δηλαδή δεν χρειάζεται να εξετάσουμε τη 2^η ικανή συνθήκη)



Παραδείγματα προβλημάτων με ανισοτικούς περιορισμούς (6)

- Συνάρτηση $f(x_1, x_2) = (x_1 - 2)^2 + 2(x_2 - 1)^2$, υπό τους ανισοτικούς περιορισμούς $x_1 + 4x_2 \leq 3$ και $x_1 \geq x_2$
 - Συνεχίζουμε με την περίπτωση β) (οριακά σημεία)...
 - ...αρχικά θα πρέπει να φέρουμε τους ανισοτικούς περιορισμούς στη μορφή $g_i(x) \leq 0$, επομένως αυτοί διατυπώνονται ισοδύμα ως $g_1(x_1, x_2) = x_1 + 4x_2 - 3 \leq 0$ και $g_2(x_1, x_2) = x_2 - x_1 \leq 0$
 - ...εδώ έχουμε δύο ανισοτικούς περιορισμούς, άρα χρειάζεται να εξετάσουμε τρία ($2^l - 1 = 3$) οριακά σημεία (τρεις οριακές υπο-περιπτώσεις): i) g_1 ενεργός (και g_2 όχι), ii) g_2 ενεργός (και g_1 όχι), και iii) g_1 και g_2 ενεργοί
 - ...αν υπολογίσουμε και την περίπτωση α) (εσωτερικά σημεία), έχουμε συνολικά να εξετάσουμε $2^l = 4$ υπο-περιπτώσεις



Παραδείγματα προβλημάτων με ανισοτικούς περιορισμούς (7)

• Συνάρτηση $f(x_1, x_2) = (x_1 - 2)^2 + 2(x_2 - 1)^2$, υπό τους ανισοτικούς περιορισμούς $x_1 + 4x_2 \leq 3$ και $x_1 \geq x_2$

➤ Για την υπο-περίπτωση β-ι) (g_1 ενεργός)...

➤ ...διατυπώνουμε τη Lagrangian συνάρτηση του προβλήματος: $L(x, \lambda) = (x_1 - 2)^2 + 2(x_2 - 1)^2 + \lambda(x_1 + 4x_2 - 3)$

➤ 1^η ικανή συνθήκη: $\nabla_x L(x, \lambda) = 0$ ΚΑΙ $\nabla_\lambda L(x, \lambda) = 0$, δηλ.

➤ $\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \rightarrow 2x_1 - 4 + \lambda = 0$

➤ $\frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \rightarrow 4x_2 - 4 + 4\lambda = 0$

➤ $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \rightarrow g_1(x_1, x_2) = 0 \rightarrow x_1 + 4x_2 - 3 = 0$

➤ Επιλύοντας αυτό το σύστημα 3 εξισώσεων, παίρνουμε $x_1 = \frac{5}{3}$, $x_2 = \frac{1}{3}$ και $\lambda = \frac{2}{3}$



Παραδείγματα προβλημάτων με ανισοτικούς περιορισμούς (8)

- Συνάρτηση $f(x_1, x_2) = (x_1 - 2)^2 + 2(x_2 - 1)^2$, υπό τους ανισοτικούς περιορισμούς $x_1 + 4x_2 \leq 3$ και $x_1 \geq x_2$
 - Για την υπο-περίπτωση β-ι) (g_1 ενεργός)...
 - ...επομένως το σημείο $(x_1, x_2) = (\frac{5}{3}, \frac{1}{3})$ είναι οριακό σημείο ενδιαφέροντος καθώς ο σχετικός παράγοντας Lagrange είναι θετικός ($\lambda = \frac{2}{3}$)
 - ...επίσης αυτό το οριακό σημείο ικανοποιεί και το δεύτερο ανισοτικό περιορισμό ως αυστηρή ανισότητα $g_2(x_1, x_2) = \frac{1}{3} - \frac{5}{3} < 0$



Παραδείγματα προβλημάτων με ανισοτικούς περιορισμούς (9)

- Συνάρτηση $f(x_1, x_2) = (x_1 - 2)^2 + 2(x_2 - 1)^2$, υπό τους ανισοτικούς περιορισμούς $x_1 + 4x_2 \leq 3$ και $x_1 \geq x_2$
 - Για την υπο-περίπτωση β-ι) (g_1 ενεργός)...
 - Επομένως τώρα μπορούμε να εξετάσουμε τη 2^η ικανή συνθήκη: εξετάζουμε τη Hessian της Lagrangian συνάρτησης, η οποία είναι $\nabla_x^2 L(x, \lambda) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$
 - Η πρώτη ορίζουσα της Hessian είναι $D_1 = 2$ και η δεύτερη ορίζουσα είναι $D_2 = 8$
 - Άρα η Hessian είναι θετικά ορισμένη
 - Άρα το οριακό σημείο ενδιαφέροντος $(x_1, x_2) = \left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}\right)$ είναι τοπικό ελάχιστο



Παραδείγματα προβλημάτων με ανισοτικούς περιορισμούς (10)

- Συνάρτηση $f(x_1, x_2) = (x_1 - 2)^2 + 2(x_2 - 1)^2$, υπό τους ανισοτικούς περιορισμούς $x_1 + 4x_2 \leq 3$ και $x_1 \geq x_2$
 - Για την υπο-περίπτωση β-ii) (g_2 ενεργός)...
 - ...διατυπώνουμε τη Lagrangian συνάρτηση του προβλήματος: $L(x, \lambda) = (x_1 - 2)^2 + 2(x_2 - 1)^2 + \lambda(x_2 - x_1)$
 - 1^η ικανή συνθήκη: $\nabla_x L(x, \lambda) = 0$ ΚΑΙ $\nabla_\lambda L(x, \lambda) = 0$, δηλ.
 - $\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \rightarrow 2x_1 - 4 - \lambda = 0$
 - $\frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \rightarrow 4x_2 - 4 + \lambda = 0$
 - $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \rightarrow g_2(x_1, x_2) = 0 \rightarrow x_2 - x_1 = 0$
 - Επιλύοντας αυτό το σύστημα 3 εξισώσεων, παίρνουμε $x_1 = \frac{4}{3}$, $x_2 = \frac{4}{3}$ και $\lambda = -\frac{4}{3}$
 - ...αυτό το οριακό σημείο απορρίπτεται καθώς $\lambda < 0$



Παραδείγματα προβλημάτων με ανισοτικούς περιορισμούς (11)

• Συνάρτηση $f(x_1, x_2) = (x_1 - 2)^2 + 2(x_2 - 1)^2$, υπό τους ανισοτικούς περιορισμούς $x_1 + 4x_2 \leq 3$ και $x_1 \geq x_2$

➤ Για την υπο-περίπτωση β-iii) (g_1 και g_2 ενεργοί)...

➤ ...διατυπώνουμε τη Lagrangian συνάρτηση του προβλήματος: $L(x, \lambda) = (x_1 - 2)^2 + 2(x_2 - 1)^2 + \lambda_1(x_1 + 4x_2 - 3) + \lambda_2(x_2 - x_1)$

➤ 1^η ικανή συνθήκη: $\nabla_x L(x, \lambda) = 0$ ΚΑΙ $\nabla_\lambda L(x, \lambda) = 0$, δλδ.

➤ $\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \rightarrow 2x_1 - 4 + \lambda_1 - \lambda_2 = 0$

➤ $\frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \rightarrow 4x_2 - 4 + 4\lambda_1 + \lambda_2 = 0$

➤ $\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 0 \rightarrow x_1 + 4x_2 - 3 = 0$

➤ $\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 0 \rightarrow x_2 - x_1 = 0$

Ο πιο εύκολος τρόπος επίλυσης αυτού του συστήματος 4x4 είναι να λύσουμε πρώτα το υποσύστημα των 2 τελευταίων εξισώσεων, που μας δίνει $x_1 = x_2 = \frac{3}{5}$ και στη συνέχεια να χρησιμοποιήσουμε αυτές τις τιμές για να λύσουμε το υποσύστημα των 2 πρώτων εξισώσεων



Παραδείγματα προβλημάτων με ανισοτικούς περιορισμούς (12)

- Συνάρτηση $f(x_1, x_2) = (x_1 - 2)^2 + 2(x_2 - 1)^2$, υπό τους ανισοτικούς περιορισμούς $x_1 + 4x_2 \leq 3$ και $x_1 \geq x_2$
 - Για την υπο-περίπτωση β-iii) (g_1 και g_2 ενεργοί)...
 - Επιλύοντας αυτό το σύστημα 4 εξισώσεων, παίρνουμε $x_1 = \frac{3}{5}$, $x_2 = \frac{3}{5}$, $\lambda_1 = \frac{22}{25}$ και $\lambda_2 = -\frac{48}{25}$
 - ...αυτό το οριακό σημείο απορρίπτεται καθώς δεν ισχύει $\lambda_1 > 0$ και $\lambda_2 > 0$ **ταυτόχρονα** !
 - Ανακεφαλαιώνοντας (δείτε διαφάνειες 16-23): δεν υπάρχει τοπικό ακρότατο σε εσωτερικά σημεία, το οριακό σημείο με g_1 μόνο ενεργό είναι τοπικό ελάχιστο, το οριακό σημείο με g_2 μόνο ενεργό δεν είναι τοπικό ακρότατο, το οριακό σημείο με g_1 και g_2 ενεργούς δεν είναι τοπικό ακρότατο



Τέλος Ενότητας