Εφαρμοσμένη Βελτιστοποίηση

Ενότητα 3: Αναλυτικές μέθοδοι βελτιστοποίησης για προβλήματα μιας μεταβλητής

Δημήτρης Παπαδασκαλόπουλος (Επικ. Καθηγητής)
Πολυτεχνική Σχολή
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Τεχνολογίας Υπολογιστών

Περίληψη προηγούμενων διαλέξεων

- **Ενότητα 1: Εισαγωγή στο μάθημα**
  - Σημασία εφαρμοσμένης βελτιστοποίησης / παραδείγματα
  - “Δομικά στοιχεία” προβλημάτων βελτιστοποίησης
  - Αντικείμενο μαθήματος και παραδοχές

- **Ενότητα 2: Απαιτούμενες μαθηματικές γνώσεις για τη συνέχεια του μαθήματος**
  - Μαθηματικά χαρακτηριστικά συναρτήσεων και προβλημάτων βελτιστοποίησης (συνέχεια, μονοτονία, ακρότατα και μονοτροπικότητα, κυρτότητα, γραμμικότητα)
  - *Διευθύνσεις στο χώρο πολλαπλών διαστάσεων*
  - *Ανάπτυγμα Taylor, Jacobian και Hessian μήτρες*

- **Ενότητα 3 (σήμερα)**: Μπαίνουμε στο κύριο μέρος του μαθήματος … την επίλυση προβλημάτων βελτιστοποίησης

Σύνδεση Ενότητας 1 με τη σημερινή διάλεξη

- Οι μέθοδοι επίλυσης προβλημάτων βελτιστοποίησης ταξινομούνται σε δύο βασικές κατηγορίες:

- **Αναλυτικές μέθοδοι**: η βέλτιστη λύση βρίσκεται με ακρίβεια και μπορεί να εκφραστεί σε “κλειστή μορφή (closed form)”, διατυπώνοντας τις *αναγκαίες και ικανές συνθήκες* για την εύρεσή της > συνήθως για προβλήματα μικρότερης πολυπλοκότητας

Με αυτές θα ασχοληθούμε σήμερα, και συγκεκριμένα για προβλήματα 1 μεταβλητής

- **Αριθμητικές μέθοδοι**: η βέλτιστη λύση βρίσκεται με κάποια προσέγγιση, συνήθως μέσω κάποιου *επαναληπτικού αλγορίθμου* > συνήθως για προβλήματα μεγαλύτερης πολυπλοκότητας

Σύνδεση Ενότητας 2 με τη σημερινή διάλεξη (1)

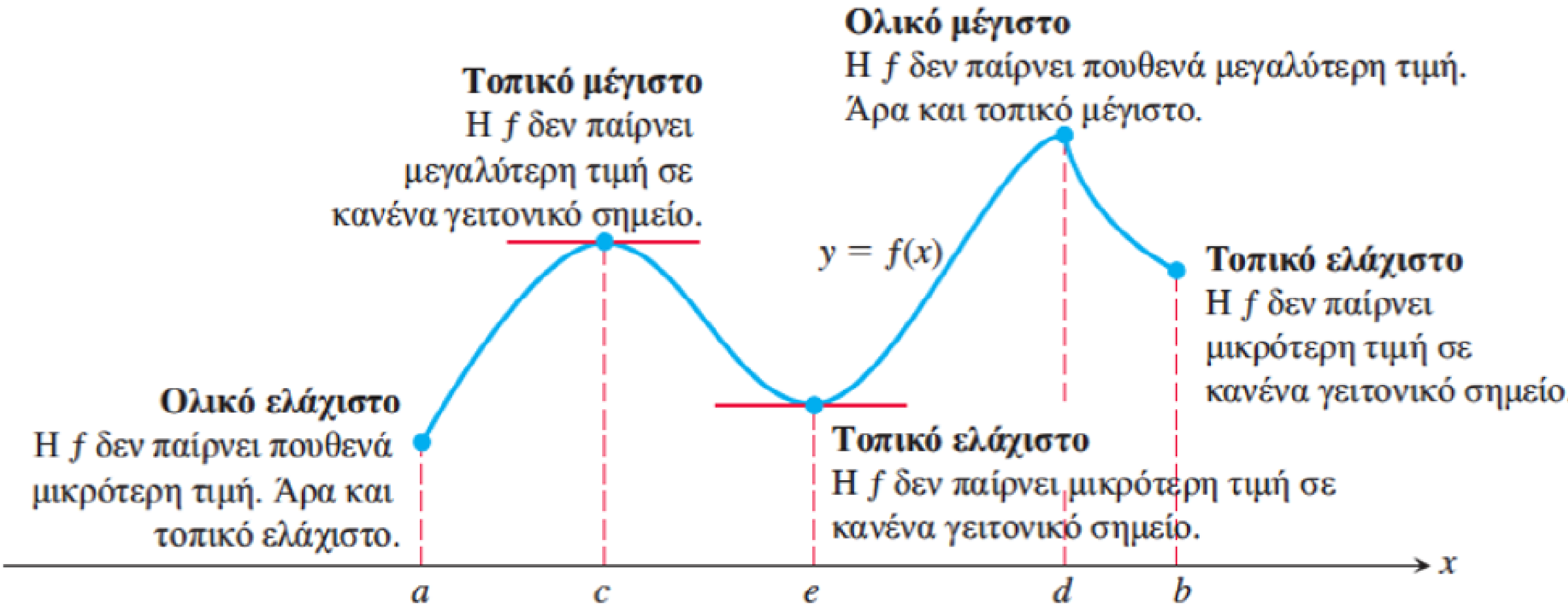
- **Ολικό ή απόλυτο ακρότατο (μέγιστο / ελάχιστο)** x^* είναι το σημείο στο οποίο η συνάρτηση μεγιστοποιείται / ελαχιστοποιείται σε όλο το πεδίο ορισμού της (δηλαδή η βέλτιστη λύση που ψάχνουμε…Ενότητα 1)
- Για ολικό ελάχιστο ισχύει $f(x^*) \leq f(x), \forall x$
- Για ολικό μέγιστο ισχύει $f(x^*) \geq f(x), \forall x$

- **Τοπικό ή σχετικό ακρότατο** $x^{\sim}$ είναι το σημείο στο οποίο η συνάρτηση μεγιστοποιείται / ελαχιστοποιείται σε μια "γειτονική περιοχή" του πεδίου ορισμού της
- Για τοπικό ελάχιστο ισχύει $f(x^{\sim}) \leq f(x), \forall x\colon \|x - x^{\sim}\| \leq \varepsilon$
- Για τοπικό μέγιστο ισχύει $f(x^{\sim}) \geq f(x), \forall x\colon \|x - x^{\sim}\| \leq \varepsilon$

όπου ε θέτει τα όρια της "γειτονικής περιοχής"

Για να βρούμε τα ολικά ακρότατα, πρέπει να βρούμε όλα τα τοπικά ακρότατα

Σύνδεση Ενότητας 2 με τη σημερινή διάλεξη (2)



Δομή σημερινής διάλεξης

- "Σημεία ενδιαφέροντος" (πού μπορεί να βρίσκονται τα τοπικά ακρότατα) προβλημάτων 1 μεταβλητής

- **Εσωτερικά σημεία**
  - Αναλυτική μέθοδος (αναγκαίες και ικανές συνθήκες)
  - Παραδείγματα

- **Οριακά σημεία**
  - Αναλυτική μέθοδος (αναγκαίες και ικανές συνθήκες)
  - Παραδείγματα

- **Σημεία ασυνέχειας**
  - Αναλυτική μέθοδος (αναγκαίες και ικανές συνθήκες)
  - Παραδείγματα

Σημεία ενδιαφέροντος για προβλήματα 1 μεταβλητής

- Για προβλήματα 1 μεταβλητής, τα τοπικά ακρότατα της αντικειμενικής συνάρτησης μπορεί να βρίσκονται (τα παρακάτω ονομάζονται και **“σημεία ενδιαφέροντος”**):
  - Σε κάποιο από τα **εσωτερικά σημεία** του πεδίου ορισμού της συνάρτησης
  - Σε κάποιο από τα **οριακά σημεία** του πεδίου ορισμού της συνάρτησης (…σημεία που ορίζονται από τους περιορισμούς του προβλήματος, αν υπάρχουν)
  - Σε κάποιο από τα **σημεία ασυνέχειας** της αντικειμενικής συνάρτησης (…αν υπάρχουν)

- **Σημαντική σημείωση: Η έρευνα για τοπικά ακρότατα γίνεται ανεξάρτητα για τα σημεία καθεμίας από τις παραπάνω κατηγορίες**

Εσωτερικά σημεία: Αναγκαίες συνθήκες ελαχίστου (1)

• Για μια **συνάρτηση μιας μεταβλητής** $f(x)$, η τιμή της στη γειτονιά ενός τυχαίου σημείου x δίνεται από την **άπειρη σειρά Taylor**:

$$f(x+\Delta x)=f(x)+f'(x)\Delta x+\frac{1}{2}f''(x)(\Delta x)^2+\ldots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x)(\Delta x)^n+\ldots$$

• ή από ένα **πεπερασμένο ανάπτυγμα** (τύπος του Taylor):

$$f(x+\Delta x)=f(x)+f'(x)\Delta x+\frac{1}{2}f''(x)(\Delta x)^2+\ldots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(k)(\Delta x)^n$$

όπου k κάποιο ενδιάμεσο σημείο μεταξύ x και $x+\Delta x$, δηλαδή $k=x+c\Delta x$, όπου $0<c<1$ (δείτε Ενότητα 2)

• Κάνοντας χρήση του πεπερασμένου αναπτύγματος **μέχρι τον όρο δεύτερης τάξης** για ένα σημείο x^*, παίρνουμε:

$$f(x^*+\Delta x)-f(x^*)=f'(x^*)\Delta x+\frac{1}{2}f''(x^*+c\Delta x)(\Delta x)^2$$

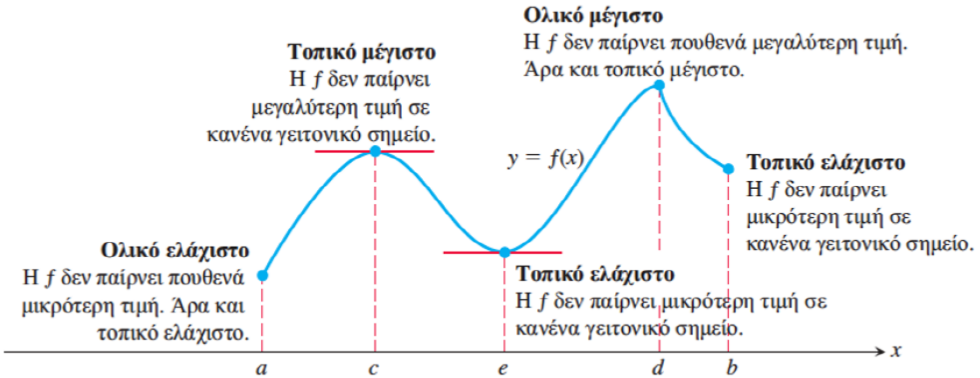
Εσωτερικά σημεία: Αναγκαίες συνθήκες ελαχίστου (2)

- Μπορούμε να αποδείξουμε δια της ατόπου απαγωγής πως για να είναι το x^* τοπικό ελάχιστο τότε θα πρέπει να ισχύει **(1η αναγκαία συνθήκη)** $\boldsymbol{f'(x^*) = 0}$

➢ Συγκεκριμένα, αν υποθέσουμε πως $f'(x^*) \neq 0$, τότε (όπως δείχνεται στις σημειώσεις) θα υπάρχει κάποιο Δx για το οποίο θα ισχύει $f'(x^*)\Delta x < -\frac{1}{2} f''(x^* + c\Delta x)(\Delta x)^2$

➢ …το οποίο σημαίνει (από το ανάπτυγμα Taylor δεύτερης τάξης) πως $f(x^* + \Delta x) - f(x^*)$<0…

➢ …το οποίο είναι άτοπο καθώς αντιφάσκει με τον ορισμό του τοπικού ελαχίστου



Εσωτερικά σημεία: Αναγκαίες συνθήκες ελαχίστου (3)

- Κάνοντας χρήση του πεπερασμένου αναπτύγματος **μέχρι τον όρο τρίτης τάξης** για το x^* και λαμβάνοντας υπ' όψη την 1η αναγκαία συνθήκη, παίρνουμε:

$$f(x^* + \Delta x) - f(x^*) = \frac{1}{2} f''(x^*)(\Delta x)^2 + \frac{1}{6} f'''(x^* + c\Delta x)(\Delta x)^3$$

- Μπορούμε να αποδείξουμε με παρόμοιο τρόπο (όπως δείχνεται στις σημειώσεις) πως για να είναι το x^* τοπικό ελάχιστο τότε θα πρέπει να ισχύει **(2η αναγκαία συνθήκη)** $\boldsymbol{f''(x^*) \geq 0}$

Εσωτερικά σημεία: Ικανές συνθήκες ελαχίστου (1)

- Παρόμοια αποδεικνύεται πως οι *ικανές συνθήκες* ελαχίστου (αν ισχύουν για ένα x^*, αυτό είναι τοπικό ελάχιστο) είναι:
  - **1η ικανή συνθήκη: $\boldsymbol{f'(x^*) = 0}$**
  - **2η ικανή συνθήκη: $\boldsymbol{f''(x^*) > 0}$**

Διαφορά μεταξύ 2ης αναγκαίας συνθήκης και 2ης ικανής συνθήκης…

  - Αν $f''(x^*) = 0$, τότε θα πρέπει να ισχύει $f'''(x^*) = 0$ – διαφορετικά, αν $f'''(x^*) \neq 0$, τότε το x^* δεν αποτελεί τοπικό ελάχιστο αλλά **σημείο καμπής** (εκατέρωθεν του σημείου αυτού η κυρτότητα της συνάρτησης αλλάζει)
  - Αν $f'(x^*) = f''(x^*) = f'''(x^*) = 0$ και $f^{(4)}(x^*) > 0$, τότε το x^* είναι **τοπικό ελάχιστο** … αν όμως $f^{(4)}(x^*) = 0$, πρέπει να ερευνήσουμε τις υψηλότερης τάξης παραγώγους…
  - **… η πρώτη μη-μηδενική παράγωγος πρέπει να είναι μιας άρτιας τάξης παράγωγος και πρέπει να είναι θετική (για τοπικό ελάχιστο)**

Εσωτερικά σημεία: Ικανές συνθήκες ελαχίστου (2)

- Συνοψίζοντας, οι **ικανές συνθήκες ελαχίστου** είναι:

➢ $f'(x^*) = f''(x^*) = \cdots = f^{(2k-1)}(x^*) = 0$

➢ $f^{(2k)}(x^*) > 0$

όπου $k \geq 1$ ακέραιος αριθμός

- Εάν ισχύει $f^{(2k)}(x^*) = 0$ και $f^{(2k+1)}(x^*) \neq 0$, τότε το x^* ΔΕΝ αποτελεί τοπικό ελάχιστο αλλά **σημείο καμπής** της συνάρτησης

- Με αντίστοιχο τρόπο, προκύπτει πως οι **ικανές συνθήκες μεγίστου** είναι:

➢ $f'(x^*) = f''(x^*) = \cdots = f^{(2k-1)}(x^*) = 0$

➢ $f^{(2k)}(x^*) < 0$

όπου $k \geq 1$ ακέραιος αριθμός

Εσωτερικά σημεία: Ικανές συνθήκες ελαχίστου (3)

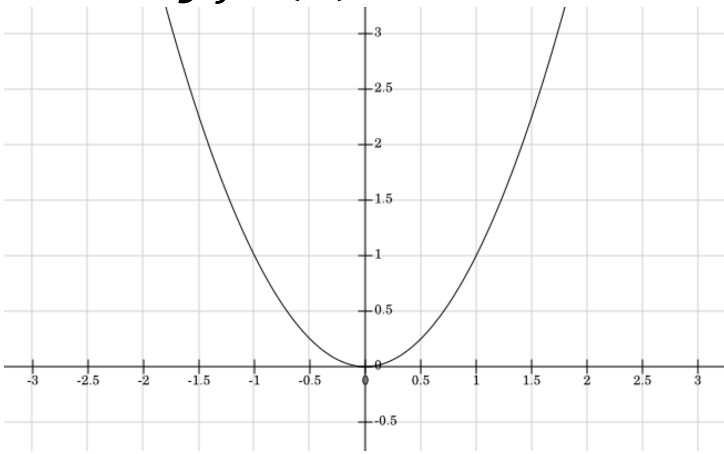
Πίνακας 3.1

$f'(x)$	$f''(x)$	$f'''(x)$	$f^{IV}(x)$	$f^{V}(x)$	Χαρακτηρισμός x
0	+	υπάρχει	οτιδήποτε	οτιδήποτε	 Τοπικό ελάχιστο
0	-	υπάρχει	οτιδήποτε	οτιδήποτε	 Τοπικό μέγιστο
0	0	+	υπάρχει	οτιδήποτε	 Σημείο καμπής (κοίλη - κυρτή)
0	0	-	υπάρχει	οτιδήποτε	 Σημείο καμπής (κυρτή - κοίλη)
0	0	0	+	υπάρχει	 Τοπικό ελάχιστο
0	0	0	-	υπάρχει	 Τοπικό μέγιστο
0	0	0	0	εξέτασε $f^{V}(x)$	Κ.Ο.Κ.

Παραδείγματα ακροτάτων σε εσωτερικά σημεία (1)

- Συνάρτηση $f(x) = ax + b$, όπου $a, b \neq 0$ παράμετροι
  - ➢ $f'(x) = a \neq 0, \forall x$
  - ➢ Δεν υπάρχουν ελάχιστα (ή μέγιστα) σε εσωτερικά σημεία

- Συνάρτηση $f(x) = x^2$
  - ➢ $f'(x) = 2x, \forall x$
  - ➢ Το $x = 0$ είναι σημείο ενδιαφέροντος καθώς $f'(0) = 0$
  - ➢ $f''(x) = 2 > 0, \forall x$
  - ➢ Το $x = 0$ είναι τοπικό ελάχιστο



Παραδείγματα ακροτάτων σε εσωτερικά σημεία (2)

- Συνάρτηση $f(x) = ax^2 + bx + c$, όπου $a, b, c \neq 0$ παράμετροι
  - $f'(x) = 2ax + b, \forall x$
  - Το $x = -b/2a$ είναι σημείο ενδιαφέροντος καθώς $f'(-b/2a) = 0$
  - $f''(x) = 2a, \forall x$
  - Αν $\alpha > 0$, το $x = -b/2a$ είναι τοπικό ελάχιστο
  - Αν $\alpha < 0$, το $x = -b/2a$ είναι τοπικό μέγιστο

Παραδείγματα ακροτάτων σε εσωτερικά σημεία (3)

- Συνάρτηση $f(x) = x^3$

➢ $f'(x) = 3x^2, \forall x$

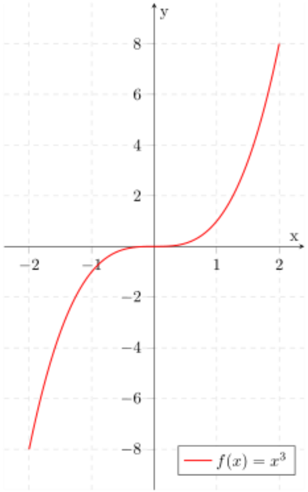
➢ Το $x = 0$ είναι σημείο ενδιαφέροντος καθώς $f'(0) = 0$

➢ $f''(x) = 6x, \forall x$

➢ Για το σημείο ενδιαφέροντος ισχύει $f''(0) = 0$

➢ Πρέπει να εξετάσουμε και την τρίτη παράγωγο η οποία είναι $f'''(x) = 6 > 0, \forall x$

➢ Άρα το σημείο ενδιαφέροντος ΔΕΝ είναι τοπικό ελάχιστο, αλλά σημείο καμπής



Παραδείγματα ακροτάτων σε εσωτερικά σημεία (4)

- Συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + cx + d$, όπου $a, b, c, d \neq 0$
  - ➢ $f'(x) = ax^2 + bx + c, \forall x$
  - ➢ Τα σημεία ενδιαφέροντος αντιστοιχούν στις ρίζες της τετραγωνικής $f'(x)$, οι οποίες είναι $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ και $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, όπου $\Delta = b^2 - 4ac$ (αν $\Delta = 0$, υπάρχει μία μόνο ρίζα $x_1 = x_2 = -b/2a$)
  - ➢ $f''(x) = 2ax + b, \forall x$
  - ➢ $\boxed{\text{Αν } \Delta = 0,}$ για το μοναδικό σημείο ενδιαφέροντος ισχύει $f''(-b/2a) = 0$

    Αν $\Delta \neq 0$, πρέπει να εξετάσουμε τις υποπεριπτώσεις που αφορούν τα δύο σημεία ενδιαφέροντος
  - ➢ Πρέπει να εξετάσουμε και την τρίτη παράγωγο η οποία είναι $f'''(x) = 2a \neq 0, \forall x$
  - ➢ Άρα το σημείο ενδιαφέροντος ΔΕΝ είναι τοπικό ελάχιστο, αλλά σημείο καμπής

Παραδείγματα ακροτάτων σε εσωτερικά σημεία (5)

- Συνάρτηση $f(x) = x^3 + 2.5x^2 + 2x + 1.5$

➢ $f'(x) = 3x^2 + 5x + 2, \forall x$

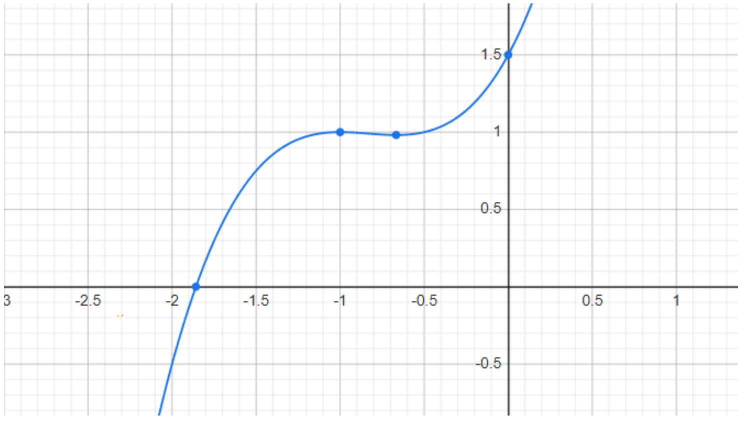
➢ Τα σημεία ενδιαφέροντος αντιστοιχούν στις ρίζες της τετραγωνικής $f'(x)$, οι οποίες είναι $x_1 = -2/3$ και $x_2 = -1$

➢ $f''(x) = 6x + 5, \forall x$

➢ Για τα σημείο ενδιαφέροντος ισχύει $f''(x_1) = 1$ και $f''(x_2) = -1$

➢ Το x_1 είναι τοπικό ελάχιστο

➢ Το x_2 είναι τοπικό μέγιστο



Παραδείγματα ακροτάτων σε εσωτερικά σημεία (6)

- Συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 5x + 3$
  - $f'(x) = x^2 + 2x + 5, \forall x$
  - Τα σημεία ενδιαφέροντος αντιστοιχούν στις ρίζες της τετραγωνικής $f'(x)$, οι οποίες … δεν είναι πραγματικές ! (καθώς $\Delta < 0$)
  - Δεν υπάρχουν ελάχιστα (ή μέγιστα) σε εσωτερικά σημεία

Τοπικά ακρότατα στα οριακά σημεία (1)

- **Οριακά σημεία** είναι εκείνα τα σημεία που ορίζονται από τους περιορισμούς του προβλήματος…

- …οι οποίοι γενικά σε ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης είναι είτε ισοτικοί της μορφής $g(x) = 0$ είτε ανισοτικοί της μορφής $h(x) \leq 0$ (δείτε Ενότητα 1)…

- …αλλά σε προβλήματα 1 μεταβλητής ισοτικοί περιορισμοί της μορφής $g(x) = 0$ δεν έχουν νόημα…

- …νόημα έχουν μόνο ανισοτικοί περιορισμοί της μορφής:
  - $A \leq x \leq B$, όπου $A < B$ παράμετροι, ή ισοδύναμα
  - $h_1(x) = A - x \leq 0$ και $h_2(x) = x - B \leq 0$ (*πρότυπη μορφή*)

Τοπικά ακρότατα στα οριακά σημεία (2)

- Σύμφωνα με τον ορισμό του τοπικού ελαχίστου, ένα οριακό σημείο x είναι τοπικό ελάχιστο αν ισχύει $f(x+\Delta x) - f(x) > 0, \forall \|\Delta x\| \leq \varepsilon$, **αλλά για κάθε επιτρεπτό $\boldsymbol{\Delta x}$** (δηλαδή κάθε Δx που μας οδηγεί σε ένα σημείο εντός του πεδίου ορισμού)

- Σύμφωνα με τον **ορισμό του διαφορικού** της συνάρτησης f στο σημείο x ως προς Δx (δείτε Ενότητα 2):

$$df(x, \Delta x) \equiv f'(x)\Delta x \approx f(x + \Delta x) - f(x)$$

- Ο συνδυασμός των δύο παραπάνω σχέσεων μας δίνει $f'(x)\Delta x > 0$, για κάθε επιτρεπτό Δx

Τοπικά ακρότατα στα οριακά σημεία (3)

- Όμως το **επιτρεπτό Δx** ορίζεται από τους περιορισμούς $h(x) \leq 0$, δηλαδή το σημείο $x + \Delta x$ πρέπει να βρίσκεται εντός της περιοχής που ορίζουν αυτές οι ανισότητες…

- … δηλαδή να ισχύει $h(x + \Delta x) < 0$…

- … ή ισοδύναμα, χρησιμοποιώντας τον **ορισμό του διαφορικού** της συνάρτησης h, να ισχύει $h(x) + dh(x, \Delta x) < 0$…

- … επειδή όμως το εξεταζόμενο οριακό σημείο ικανοποιεί την εξίσωση $h(x) = 0$, η παραπάνω σχέση καταλήγει στην

$$dh(x, \Delta x) \equiv h'(x)\Delta x < 0$$

Τοπικά ακρότατα στα οριακά σημεία (4)

- Η τελευταία σχέση της προ-προηγούμενης διαφάνειας και η τελευταία σχέση της προηγούμενης διαφάνειας μας λένε πως θα πρέπει να ισχύουν (ταυτόχρονα) $f'(x)\Delta x > 0$ και $h'(x)\Delta x < 0$ …

- … όπου αν απαλείψουμε το Δx καταλήγουμε στη συνθήκη (όπου “sign” σημαίνει πρόσημο): $sign[f'(x)] = -sign[h'(x)]$

- Η συνθήκη αυτή είναι **αναγκαία και ικανή** για να είναι το οριακό σημείο x **τοπικό ελάχιστο** της f

- …ενώ η συνθήκη $sign[f'(x)] = sign[h'(x)]$ είναι **αναγκαία και ικανή** για να είναι το οριακό σημείο x **τοπικό μέγιστο** της f

Παραδείγματα ακροτάτων σε οριακά σημεία (1)

- Συνάρτηση $f(x) = ax + b$, όπου $a, b \neq 0$ παράμετροι, υπό τους περιορισμούς $A \leq x \leq B$ (ή ισοδύναμα στην *πρότυπη μορφή* $h_1(x) = A - x \leq 0$ και $h_2(x) = x - B \leq 0$)

➢ Πρέπει να εξετάσω 2 οριακά σημεία (το A και το B)

➢ $f'(x) = a, \forall x$

➢ Για το οριακό σημείο A, ισχύει $f'(A) = a$ και $h_1'(A) = -1$

➢ Αν $a > 0$, αυτό το σημείο είναι τοπικό ελάχιστο, ενώ αν $a < 0$, αυτό το σημείο είναι τοπικό μέγιστο

➢ Για το οριακό σημείο B, ισχύει $f'(B) = a$ και $h_2'(B) = 1$

➢ Αν $a > 0$, αυτό το σημείο είναι τοπικό μέγιστο, ενώ αν $a < 0$, αυτό το σημείο είναι τοπικό ελάχιστο

Τα γραμμικά προβλήματα βελτιστοποίησης έχουν τοπικά (άρα και ολικά) ακρότατα ΜΟΝΟ σε οριακά σημεία…θα μας χρησιμεύσει αργότερα στο μάθημα !

Παραδείγματα ακροτάτων σε οριακά σημεία (2)

- Συνάρτηση $f(x) = x^2$, υπό τους περιορισμούς $A \leq x \leq B$ (ή ισοδύναμα στην *πρότυπη μορφή* $h_1(x) = A - x \leq 0$ και $h_2(x) = x - B \leq 0$)

➢ $f'(x) = 2x, \forall x$

➢ Για το οριακό σημείο A, ισχύει $f'(A) = 2A$ και $h_1'(A) = -1$

➢ Αν $A > 0$, αυτό το σημείο είναι τοπικό ελάχιστο, ενώ αν $A < 0$, αυτό το σημείο είναι τοπικό μέγιστο

➢ Αν $A = 0$?? Αυτό το σημείο είναι τοπικό ελάχιστο !!

➢ Για το οριακό σημείο B, ισχύει $f'(B) = 2B$ και $h_2'(B) = 1$

➢ Αν $B > 0$, αυτό το σημείο τοπικό μέγιστο, ενώ αν $B < 0$, αυτό το σημείο είναι τοπικό ελάχιστο

➢ Αν $B = 0$?? Αυτό το σημείο είναι τοπικό ελάχιστο !!

Η αναγκαία και ικανή συνθήκη της διαφάνειας 23 υπονοεί πως δεν μπορούμε να αποφανθούμε για κάποιο οριακό σημείο για το οποίο ισχύει πως μία από τις δύο (ή και οι δύο) παραγώγους είναι 0…πρέπει να ερευνήσουμε «γειτονικά σημεία»

Τοπικά ακρότατα στα οριακά σημεία (5)

- **Σημαντική σημείωση (δείτε διαφάνεια 7)**:

➢ **"Η έρευνα για τοπικά ακρότατα γίνεται ανεξάρτητα για τα σημεία καθεμίας από τις παραπάνω κατηγορίες (εσωτερικά σημεία, οριακά σημεία, σημεία ασυνέχειας)"**

➢ … άρα η έρευνα για τοπικά ακρότατα στα οριακά σημεία γίνεται ανεξάρτητα από το αν υπάρχουν ή όχι ακρότατα στα εσωτερικά σημεία του πεδίου ορισμού !!!

Παραδείγματα ακροτάτων σε εσωτερικά & οριακά σημεία (1)

- Συνάρτηση $f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x - 9$, υπό τον περιορισμό $h(x) = x^2 - 9 \leq 0$

- **Ξεκινάμε με τα εσωτερικά σημεία**…
- $f'(x) = 3x^2 - 24x + 36, \forall x$
- Τα σημεία ενδιαφέροντος αντιστοιχούν στις ρίζες της τετραγωνικής $f'(x)$, οι οποίες είναι $x_1 = 2$ και $x_2 = 6$
- Το σημείο $x_2 = 6$ απορρίπτεται εκ των προτέρων καθώς δεν ικανοποιεί τον περιορισμό, ενώ το σημείο $x_1 = 2$ εξετάζεται περαιτέρω καθώς ικανοποιεί τον περιορισμό
- $f''(x) = 6x - 24, \forall x$
- Για το σημείο ενδιαφέροντος ισχύει $f''(x_1) = -12$
- Το x_1 είναι τοπικό μέγιστο

Παραδείγματα ακροτάτων σε εσωτερικά & οριακά σημεία (2)

- Συνάρτηση $f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x - 9$, υπό τον περιορισμό $h(x) = x^2 - 9 \leq 0$
- **Συνεχίζουμε με τα οριακά σημεία**…
- …τα οποία είναι τα $x_3 = -3$ και $x_4 = 3$
- $f'(x) = 3x^2 - 24x + 36, \forall x$
- $h'(x) = 2x, \forall x$
- Για το οριακό σημείο x_3 ισχύει $f'(x_3) = 135$ και $h'(x_3) = -6$, άρα το σημείο αυτό είναι τοπικό ελάχιστο
- Για το οριακό σημείο x_4 ισχύει $f'(x_4) = -9$ και $h'(x_4) = 6$, άρα το σημείο αυτό είναι τοπικό ελάχιστο

Ολικό ελάχιστο?
…συγκρίνω την τιμή της f στα τοπικά ελάχιστα $x_3 = -3$ και $x_4 = 3$…ολικό ελάχιστο αυτό στο οποίο η τιμή της f είναι η μικρότερη…το $x_3 = -3$
Ολικό μέγιστο?
…το μοναδικό τοπικό μέγιστο $x_1 = 2$

Τοπικά ακρότατα στα σημεία ασυνέχειας (1)

• Τα **σημεία ασυνέχειας** x_0 μιας συνάρτησης f μπορεί να είναι (δείτε Ενότητα 2):

- Είτε **σημεία ασυνέχειας καμπύλης**, αν η f παίρνει διαφορετικές τιμές ανάλογα με την διεύθυνση που προσεγγίζουμε αυτό το σημείο
- Είτε **σημεία ασυνέχειας βάθμωσης**, αν κάποια από τις παραγώγους της f παίρνει διαφορετικές τιμές ανάλογα με την διεύθυνση που προσεγγίζουμε αυτό το σημείο

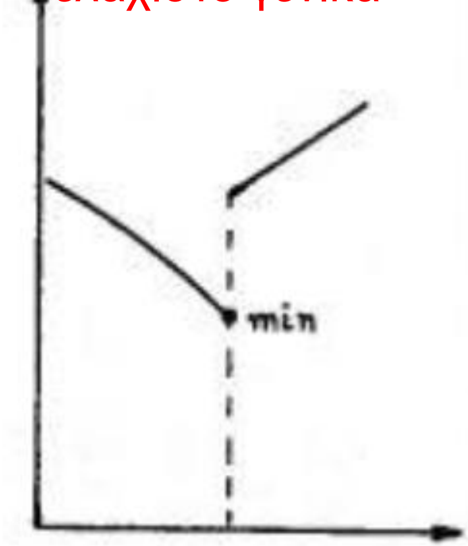
• Για να διερευνήσουμε την ύπαρξη ακροτάτων στα σημεία ασυνέχειας, **θεωρούμε αυτά τα σημεία σαν οριακά σημεία**, και ελέγχουμε αν αποτελούν ακρότατα σύμφωνα με τη μέθοδο της προηγούμενης υπο-ενότητας

Τοπικά ακρότατα στα σημεία ασυνέχειας (2)

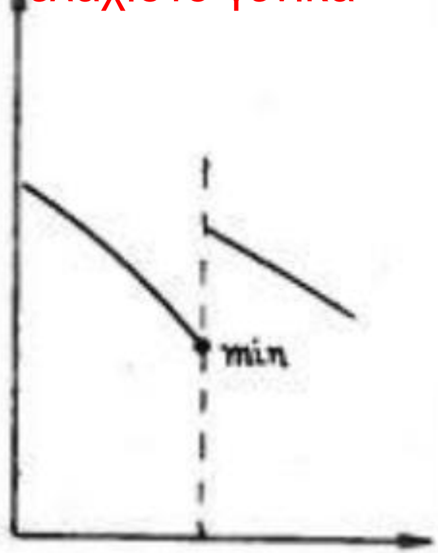
- Για **ένα σημείο ασυνέχειας καμπύλης** x_0 χωρίζουμε το διάστημα ορισμού της συνάρτησης στα υπο-διαστήματα αριστερά ($x \leq x_0$) και δεξιά ($x \geq x_0$) του σημείου αυτού…
- … και ελέγχουμε αν το σημείο x_0 αποτελεί ακρότατο ως οριακό σημείο για καθένα από τα δύο υπο-διαστήματα, σύμφωνα με τη μέθοδο της προηγούμενης υπο-ενότητας
  - Αν προκύψει πως το x_0 αποτελεί τοπικό ελάχιστο και για τα δύο υπο-διαστήματα, τότε το x_0 αποτελεί τοπικό ελάχιστο της συνάρτησης
  - Αν προκύψει πως το x_0 αποτελεί τοπικό ελάχιστο για ένα από τα δύο υπο-διαστήματα, τότε το x_0 αποτελεί τοπικό ελάχιστο της συνάρτησης μόνο αν η τιμή της συνάρτησης σε αυτό το υπο-διάστημα είναι μικρότερη σε σχέση με την τιμή της στο άλλο υπο-διάστημα

Τοπικά ακρότατα στα σημεία ασυνέχειας (3)

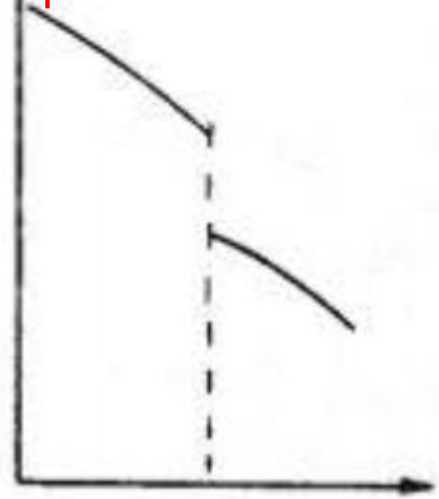
Το σημείο ασυνέχειας αποτελεί ελάχιστο και για τα δύο υπο-διαστήματα … άρα αποτελεί και τοπικό ελάχιστο γενικά



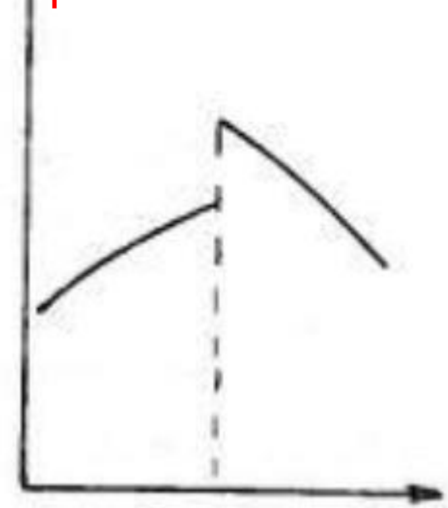
Το σημείο ασυνέχειας αποτελεί ελάχιστο μόνο για το αριστερό υπο-διάστημα … και αποτελεί τοπικό ελάχιστο γενικά



Το σημείο ασυνέχειας αποτελεί ελάχιστο μόνο για το αριστερό υπο-διάστημα … αλλά δεν αποτελεί τοπικό ελάχιστο γενικά



Το σημείο ασυνέχειας δεν αποτελεί ελάχιστο για κανένα από τα δύο υπο-διαστήματα … άρα δεν αποτελεί τοπικό ελάχιστο γενικά



Τοπικά ακρότατα στα σημεία ασυνέχειας (4)

- Για ένα **σημείο ασυνέχειας βάθμωσης** x_0 χωρίζουμε το διάστημα ορισμού της συνάρτησης στα υπο-διαστήματα αριστερά ($x \leq x_0$) και δεξιά ($x \geq x_0$) του σημείου αυτού

- … και ελέγχουμε αν το σημείο x_0 αποτελεί ακρότατο ως οριακό σημείο για καθένα από τα δύο υπο-διαστήματα, σύμφωνα με τη μέθοδο της προηγούμενης υπο-ενότητας
  - Αν προκύψει πως το x_0 αποτελεί τοπικό ελάχιστο και για τα δύο υπο-διαστήματα, τότε το x_0 αποτελεί τοπικό ελάχιστο της συνάρτησης
  - Αν προκύψει πως το x_0 αποτελεί τοπικό ελάχιστο για ένα από τα δύο υπο-διαστήματα, τότε το x_0 δεν αποτελεί τοπικό ελάχιστο της συνάρτησης

Διαφορά μεταξύ σημείων ασυνέχειας καμπύλης και ασυνέχειας βάθμωσης…

Τοπικά ακρότατα στα σημεία ασυνέχειας (5)

- **Σημαντική σημείωση (δείτε διαφάνεια 7)**:

➢ **“Η έρευνα για τοπικά ακρότατα γίνεται ανεξάρτητα για τα σημεία καθεμίας από τις παραπάνω κατηγορίες (εσωτερικά σημεία, οριακά σημεία, σημεία ασυνέχειας)”**

➢ … άρα η έρευνα για τοπικά ακρότατα στα οριακά σημεία (άρα και στα σημεία ασυνέχειας) γίνεται ανεξάρτητα από το αν υπάρχουν ή όχι ακρότατα στα εσωτερικά σημεία του πεδίου ορισμού !!!

Παραδείγματα ακροτάτων σε εσωτερικά & σημεία ασυνέχειας (1)

- Συνάρτηση $f(x) = \begin{Bmatrix} (x-5)^2, για\ x \leq 4 \\ e^{x-1}, για\ x > 4 \end{Bmatrix}$

➢ **Ξεκινάμε με τα εσωτερικά σημεία**…

➢ Για το υπο-διάστημα $x \leq 4$ ισχύει $f'(x) = 2x - 10, \forall x$

➢ Το σημείο $x_1 = 5$ αποτελεί σημείο ενδιαφέροντος καθώς $f'(5) = 0$ …

➢ … όμως απορρίπτεται εκ των προτέρων καθώς βρίσκεται εκτός του εξεταζόμενου υπο-διαστήματος!

➢ Για το υπο-διάστημα $x > 4$ ισχύει $f'(x) = e^{x-1} > 0, \forall x$ …

➢ … το οποίο σημαίνει πως δεν υπάρχουν εσωτερικά σημεία ενδιαφέροντος σε αυτό το υπο-διάστημα

Παραδείγματα ακροτάτων σε εσωτερικά & σημεία ασυνέχειας (2)

- Συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} (x-5)^2, για\ x \leq 4 \\ e^{x-1}, για\ x > 4 \end{cases}$

Το σημείο ασυνέχειας καμπύλης αποτελεί τοπικό ελάχιστο και για τα δύο υπο-διαστήματα … άρα αποτελεί και τοπικό ελάχιστο γενικά

- **Συνεχίζουμε με το σημείο $x_0 = 4$ …**
- … το οποίο αποτελεί σημείο ασυνέχειας καμπύλης καθώς $f(4^-) = 1$ και $f(4^+) \approx 20$
- Επομένως το θεωρούμε σαν οριακό σημείο που θέτει τους περιορισμούς $h_1(x) = x - 4 \leq 0$ και $h_2(x) = 4 - x < 0$, αντίστοιχα
- Για το υπο-διάστημα $x \leq 4$ ισχύει $f'(x) = 2x - 10, \forall x$ άρα $f'(x_0) = -2$ και $h_1'(x_0) = 1$, άρα το σημείο x_0 αποτελεί τοπικό ελάχιστο για αυτό το υπο-διάστημα
- Για το υπο-διάστημα $x > 4$ ισχύει $f'(x) = e^{x-1}, \forall x$ άρα $f'(x_0) \approx 20$ και $h_2'(x_0) = -1$, άρα το σημείο x_0 αποτελεί τοπικό ελάχιστο για αυτό το υπο-διάστημα

Παραδείγματα ακροτάτων σε εσωτερικά & σημεία ασυνέχειας (3)

- Συνάρτηση $f(x) = \begin{Bmatrix} -x+5, \gamma\iota\alpha\ x \leq 5 \\ 3(1-e^{-x+5}), \gamma\iota\alpha\ x > 5 \end{Bmatrix}$

➢ **Ξεκινάμε με τα εσωτερικά σημεία**…

➢ Για το υπο-διάστημα $x \leq 5$ ισχύει $f'(x) = -1 < 0, \forall x$ …

➢ … το οποίο σημαίνει πως δεν υπάρχουν εσωτερικά σημεία ενδιαφέροντος σε αυτό το υπο-διάστημα

➢ Για το υπο-διάστημα $x > 5$ ισχύει $f'(x) = 3e^{-x+5} > 0, \forall x$ …

➢ … το οποίο σημαίνει πως δεν υπάρχουν εσωτερικά σημεία ενδιαφέροντος σε αυτό το υπο-διάστημα

Παραδείγματα ακροτάτων σε εσωτερικά & σημεία ασυνέχειας (4)

- Συνάρτηση $f(x) = \left\{ \begin{array}{c} -x+5, για\ x \leq 5 \\ 3(1-e^{-x+5}), για\ x > 5 \end{array} \right\}$

➢ **Συνεχίζουμε με το σημείο $\boldsymbol{x_0 = 5}$ …**

➢ … το οποίο ΔΕΝ αποτελεί σημείο ασυνέχειας καμπύλης (καθώς $f(5^-) = 0$ και $f(5^+) = 0$) ΑΛΛΑ σημείο ασυνέχειας βάθμωσης καθώς $f'(5^-) = -1$ και $f'(5^+) = 3$

➢ Επομένως το θεωρούμε σαν οριακό σημείο που θέτει τους περιορισμούς $h_1(x) = x - 5 \leq 0$ και $h_2(x) = 5 - x < 0$, αντίστοιχα

Παραδείγματα ακροτάτων σε εσωτερικά & σημεία ασυνέχειας (5)

- Συνάρτηση $f(x) = \begin{Bmatrix} -x+5, \gamma\iota\alpha\ x \leq 5 \\ 3(1-e^{-x+5}), \gamma\iota\alpha\ x > 5 \end{Bmatrix}$

➢ Συνεχίζουμε με το σημείο ασυνέχειας βάθμωσης $x_0 = 5 \ldots$

➢ Για το υπο-διάστημα $x \leq 5$ ισχύει $f'(x_0) = -1, \forall x$ και $h_1'(x_0) = 1$, άρα το σημείο x_0 αποτελεί τοπικό ελάχιστο για αυτό το υπο-διάστημα

➢ Για το υπο-διάστημα $x > 5$ ισχύει $f'(x) = 3e^{-x+5}, \forall x$ άρα $f'(x_0) = 3$ και $h_2'(x_0) = -1$, άρα το σημείο x_0 αποτελεί τοπικό ελάχιστο για αυτό το υπο-διάστημα

➢ … επομένως το σημείο ασυνέχειας βάθμωσης $x_0 = 5$ αποτελεί τοπικό ελάχιστο και για τα δύο υπο-διαστήματα … άρα αποτελεί και τοπικό ελάχιστο γενικά

Τέλος Ενότητας