



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ  
ΠΑΤΡΩΝ  
UNIVERSITY OF PATRAS

# Εφαρμοσμένη Βελτιστοποίηση

## Ενότητα 1: Εισαγωγή

Δημήτρης Παπαδασκαλόπουλος (Επικ. Καθηγητής)  
Πολυτεχνική Σχολή  
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Τεχνολογίας  
Υπολογιστών

# Πρόλογος

- Διδάσκοντες:

- Δημήτρης Παπαδασκαλόπουλος (dimpar@upatras.gr),  
Γιώργος Κωνσταντόπουλος

- Σημειώσεις μαθήματος:

- Εφαρμοσμένη Βελτιστοποίηση, Αντώνης Αλεξανδρίδης
- Ήδη διαθέσιμες στο eclass
- Διαθέσιμες σε μορφή βιβλίου

- Διαφάνειες διαλέξεων:

- Διαθέσιμες στο eclass (λίγο μετά την κάθε διάλεξη)

- Εξέταση μαθήματος:

- Από φέτος χωρίς σημειώσεις (αλλά με αριθμομηχανή!)



# Δομή διάλεξης

- Σημασία εφαρμοσμένης βελτιστοποίησης και παραδείγματα
- “Δομικά στοιχεία” προβλημάτων βελτιστοποίησης
  - Μεταβλητές απόφασης
  - Αντικειμενική συνάρτηση
  - Περιορισμοί
  - Παράμετροι
- Προκλήσεις, πολυπλοκότητα και μέθοδοι επίλυσης προβλημάτων βελτιστοποίησης
- Περιληπτική δομή επόμενων διαλέξεων



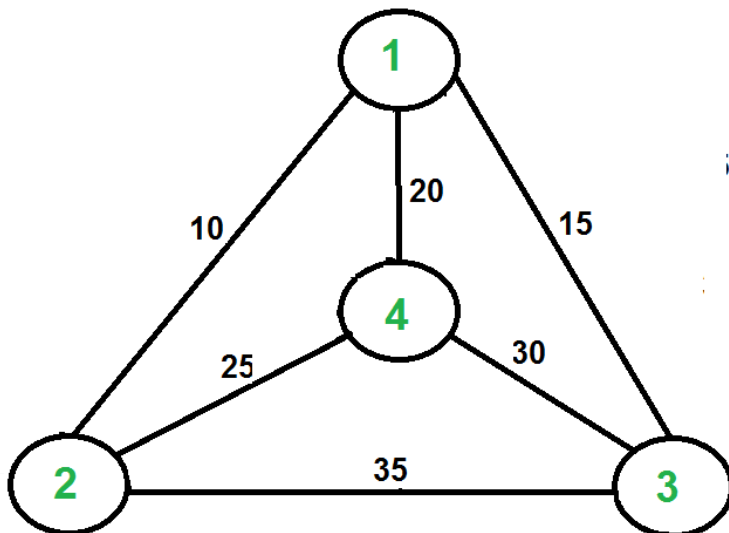
# Σημασία Εφαρμοσμένης Βελτιστοποίησης

- Η **εφαρμοσμένη βελτιστοποίηση** (ή μαθηματικός προγραμματισμός) ασχολείται με την ανάπτυξη κατάλληλων μαθηματικών μεθοδολογιών για τη **συστηματική** (όχι ευριστική...) εύρεση της **“καλύτερης δυνατής”** απόφασης σε πρακτικά προβλήματα
- **Χρησιμοποιείται σε πάρα πολλούς τομείς:** βιομηχανία, μεταφορές, συστήματα ηλεκτρικής ενέργειας, χρηματοοικονομικά κλπ.
- **Τελευταία 10 χρόνια:** ραγδαία αύξηση των εφαρμογών της βελτιστοποίησης, ως συνέπεια της αύξησης των δυνατοτήτων των υπολογιστών, των εξελίξεων σε σχετικά λογισμικά και του οικονομικού ανταγωνισμού



# Ένα γνωστό παράδειγμα

- Πρόβλημα του πλανόδιου πωλητή (travelling salesman problem)
- Λαμβάνοντας υπόψη μια λίστα με τις πόλεις και τις αποστάσεις μεταξύ κάθε ζεύγους πόλεων, ποια είναι η πορεία που πρέπει να ακολουθήσει ένας πλανόδιος πωλητής που πρέπει να επισκεφτεί όλες τις πόλεις, ώστε να ελαχιστοποιήσει τη διαδρομή που θα διανύσει?



- Μέθοδος επίλυσης?
  - Πλήρης απαρίθμηση (*complete enumeration*) ως μια απλή μέθοδος...
  - ...αλλά είναι πρακτική σε μεγάλα προβλήματα?



# Σχέση με το αντικείμενό μας

- Στο πλαίσιο της επιστήμης των ηλεκτρολόγων μηχανικών, η εφαρμοσμένη βελτιστοποίηση στοχεύει στην “καλύτερη δυνατή” σχεδίαση και λειτουργία ενός συστήματος
- Παραδείγματα εφαρμογής (συστήματα ηλεκτρικής ενέργειας):
  - Ποιες είναι οι βέλτιστες επενδύσεις σε νέες μονάδες παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας? (πρόβλημα μακροπρόθεσμης σχεδίασης)
  - Ποια είναι η βέλτιστη παραγόμενη ισχύς της κάθε υφιστάμενης μονάδας παραγωγής κάθε ώρα της ημέρας ώστε να ελαχιστοποιηθεί το συνολικό κόστος παραγωγής, ενώ ικανοποιείται η συνολική ζήτηση κάθε ώρας? (πρόβλημα βραχυπρόθεσμης λειτουργίας)



# Προβλήματα βελτιστοποίησης

- Η εφαρμοσμένη βελτιστοποίηση προσεγγίζει ερωτήσεις όπως οι παραπάνω, διατυπώνοντάς τις ως προβλήματα βελτιστοποίησης
- Ένα **πρόβλημα βελτιστοποίησης** περιλαμβάνει τα ακόλουθα **“δομικά στοιχεία”**:
  - **Μεταβλητές απόφασης**: ποιες είναι οι *αποφάσεις* που πρέπει να λάβω?
  - **Αντικειμενική συνάρτηση (ή συνάρτηση στόχος)**: ποιος είναι ο *στόχος* μου στην εφαρμογή? / ποιο είναι το κριτήριο της “καλύτερης δυνατής” απόφασης?
  - **Περιορισμοί**: ποιες είναι οι συνθήκες που η λύση μου θα *πρέπει* να ικανοποιεί ώστε να είναι εφικτή?
  - **Παράμετροι**: ποιες είναι οι ποσότητες που θεωρούνται *γνωστές και σταθερές*?



# Μεταβλητές απόφασης

- ...ποιες είναι οι *αποφάσεις* που πρέπει να λάβω?
- Αποτελούν δηλαδή μεταβλητές [της γενικής μορφής  $x$ ] την τιμή των οποίων πρέπει να αποφασίσω / καθορίσω (...ώστε να μεγιστοποιήσω ή να ελαχιστοποιήσω την αντικειμενική συνάρτηση)
- Υπάρχουν **διαφορετικοί τύποι μεταβλητών απόφασης** ανάλογα:
  - **Τη μαθηματική τους φύση:** συνεχείς (άπειρες στο πλήθος τιμές), δυαδικές (τιμές 0/1), ακέραιες (ακέραιες τιμές)
  - **Τις μεταξύ τους σχέσεις** (σε προβλήματα πολλαπλών μεταβλητών): ανεξάρτητες ή εξαρτημένες





# Μεταβλητές απόφασης: Παραδείγματα

- Λαμβάνοντας υπόψη μια λίστα με τις πόλεις και τις αποστάσεις μεταξύ κάθε ζεύγους πόλεων, ποια είναι η πορεία που πρέπει να ακολουθήσει ένας πλανόδιος πωλητής που πρέπει να επισκεφτεί όλες τις πόλεις, ώστε να ελαχιστοποιήσει τη διαδρομή που θα διανύσει?
- Ποια είναι η βέλτιστη παραγόμενη ισχύς της κάθε υφιστάμενης μονάδας παραγωγής κάθε ώρα της ημέρας ώστε να ελαχιστοποιηθεί το συνολικό κόστος παραγωγής, ενώ ικανοποιείται η συνολική ζήτηση κάθε ώρας?



# Αντικειμενική συνάρτηση

- ...ποιος είναι ο στόχος μου στην εφαρμογή? / ποιο είναι το κριτήριο της “καλύτερης δυνατής” απόφασης?
- Αποτελεί δηλαδή μια αριθμητική συνάρτηση [της γενικής μορφής  $f(x)$ ] την τιμή της οποίας στοχεύω να μεγιστοποιήσω ή να ελαχιστοποιήσω (ανάλογα ορίζουμε προβλήματα μεγιστοποίησης  $\max f(x)$  ή ελαχιστοποίησης  $\min f(x)$ )
- Υπάρχουν **διαφορετικοί τύποι** αντικειμενικών συναρτήσεων ανάλογα:
  - **Το πλήθος των μεταβλητών τους:** μία ή περισσότερες μεταβλητές
  - **Τα μαθηματικά χαρακτηριστικά τους:** συνέχεια, γραμμικότητα, κυρτότητα...



# Αντικειμενική συνάρτηση: Παραδείγματα

- Λαμβάνοντας υπόψη μια λίστα με τις πόλεις και τις αποστάσεις μεταξύ κάθε ζεύγους πόλεων, ποια είναι η πορεία που πρέπει να ακολουθήσει ένας πλανόδιος πωλητής που πρέπει να επισκεφτεί όλες τις πόλεις, ώστε να ελαχιστοποιήσει τη διαδρομή που θα διανύσει?
- Ποια είναι η βέλτιστη παραγόμενη ισχύς της κάθε υφιστάμενης μονάδας παραγωγής κάθε ώρα της ημέρας ώστε να ελαχιστοποιηθεί το συνολικό κόστος παραγωγής, ενώ ικανοποιείται η συνολική ζήτηση κάθε ώρας?



# Αντικειμενική συνάρτηση: Ανταγωνιστικές συνιστώσες (1)

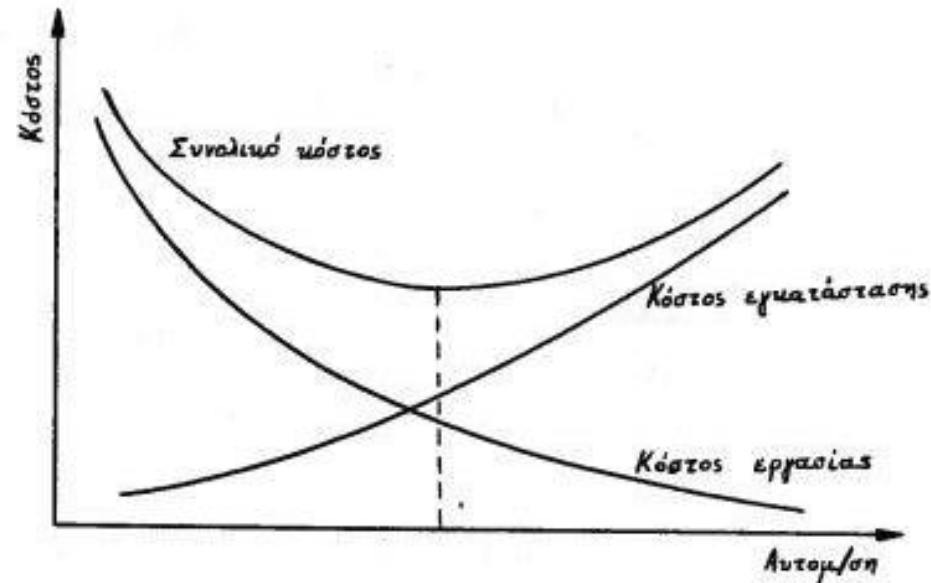
- Σε πολλές περιπτώσεις, οι αντικειμενικές συναρτήσεις περιέχουν **ανταγωνιστικές συνιστώσες** > συνιστώσες που μεταβάλλονται με αντίθετο / διαφορετικό τρόπο στο διάστημα ορισμού της συνάρτησης
- Παράδειγμα: αντικειμενική συνάρτηση είναι η ελαχιστοποίηση του συνολικού κόστους μιας βιομηχανικής διεργασίας και μεταβλητή απόφασης είναι το επίπεδο αυτοματοποίησης



# Αντικειμενική συνάρτηση: Ανταγωνιστικές συνιστώσες (2)

- Η αντικειμενική αυτή συνάρτηση περιέχει δύο ανταγωνιστικές συνιστώσες:
  - Το κόστος εγκατάστασης > το οποίο αυξάνεται όσο αυξάνεται το επίπεδο αυτοματοποίησης
  - Το κόστος εργασίας > το οποίο μειώνεται όσο αυξάνεται το επίπεδο αυτοματοποίησης

- Το συνολικό κόστος παρουσιάζει ένα ελάχιστο για κάποιο ενδιάμεσο επίπεδο αυτοματοποίησης...
- ...το οποίο οφείλεται ακριβώς στην ύπαρξη δύο ανταγωνιστικών συνιστωσών



# Περιορισμοί

- ...ποιοι είναι οι συνθήκες που η λύση μου θα *πρέπει* να ικανοποιεί ώστε να είναι εφικτή?

Θεωρητικά, ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης μπορεί να μην περιλαμβάνει περιορισμούς...πρακτικά, αυτό δεν συμβαίνει σχεδόν ποτέ...

- Αποτελούν δηλαδή μαθηματικές σχέσεις [της γενικής μορφής  $g(x) = 0$  ή  $h(x) \leq 0$ ] οι οποίες πρέπει να ικανοποιούνται

- Υπάρχουν **διαφορετικοί τύποι** περιορισμών ανάλογα:
  - **Τη μαθηματική τους φύση:** ισοτικοί ή ανισοτικοί
  - **Το πλήθος των μεταβλητών τους:** μια μεταβλητή (αυτοί οι περιορισμοί είναι *πάντα ανισοτικοί*, και συνήθως αποκαλούνται όρια), πολλές μεταβλητές
  - **Τα μαθηματικά χαρακτηριστικά τους:** συνέχεια, γραμμικότητα, κυρτότητα...



# Περιοριστικές συνθήκες: Παραδείγματα

- Λαμβάνοντας υπόψη μια λίστα με τις πόλεις και τις αποστάσεις μεταξύ κάθε ζεύγους πόλεων, ποια είναι η πορεία που πρέπει να ακολουθήσει ένας πλανόδιος πωλητής που πρέπει να επισκεφτεί όλες τις πόλεις, ώστε να ελαχιστοποιήσει τη διαδρομή που θα διανύσει?
- Ποια είναι η βέλτιστη παραγόμενη ισχύς της κάθε υφιστάμενης μονάδας παραγωγής κάθε ώρα της ημέρας, ώστε να ελαχιστοποιηθεί το συνολικό κόστος παραγωγής, ενώ ικανοποιείται η συνολική ζήτηση κάθε ώρας?



# Παράμετροι

- ...ποιες είναι οι ποσότητες που θεωρούνται γνωστές και σταθερές?
- Αποτελούν δηλαδή ποσότητες [της γενικής μορφής  $\alpha, \beta, \gamma \dots$ ] η τιμή των οποίων θεωρείται γνωστή (δεδομένη) και είναι σταθερή στα πλαίσια του εξεταζόμενου προβλήματος





# Παράμετροι: Παραδείγματα

- Λαμβάνοντας υπόψη μια λίστα με τις πόλεις και τις αποστάσεις μεταξύ κάθε ζεύγους πόλεων, ποια είναι η πορεία που πρέπει να ακολουθήσει ένας πλανόδιος πωλητής που πρέπει να επισκεφτεί όλες τις πόλεις, ώστε να ελαχιστοποιήσει τη διαδρομή που θα διανύσει?
- Ποια είναι η βέλτιστη παραγόμενη ισχύς της κάθε υφιστάμενης μονάδας παραγωγής κάθε ώρα της ημέρας ώστε να ελαχιστοποιηθεί το συνολικό κόστος παραγωγής, ενώ ικανοποιείται η συνολική ζήτηση κάθε ώρας?



# Προκλήσεις εφαρμοσμένης βελτιστοποίησης

- Ο μελετητής αντιμετωπίζει δύο βασικές προκλήσεις:
  1. **Διατύπωση προβλήματος:** Πώς να διατυπώσω εύστοχα την ερώτηση που με απασχολεί ως ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης? Ποιες (πρέπει να) είναι οι μεταβλητές απόφασης / αντικειμενική συνάρτηση / περιορισμοί / παράμετροι ?
- Η πρόκληση αυτή αντιμετωπίζεται μέσω της καλής γνώσης των φυσικών και πρακτικών πτυχών της εκάστοτε εφαρμογής.
- Λόγω της μεγάλης ποικιλίας εφαρμογών, δεν θα ασχοληθούμε με αυτήν την πρόκληση σε αυτό το μάθημα > μεταβλητές απόφασης / αντικειμενική συνάρτηση / περιορισμοί / παράμετροι θα δίνονται

# ...ας δούμε όμως ένα σχετικό παράδειγμα... (1)

- Ποια είναι η βέλτιστη παραγόμενη ισχύς της κάθε υφιστάμενης μονάδας παραγωγής κάθε ώρα της ημέρας ώστε να ελαχιστοποιηθεί το συνολικό κόστος παραγωγής, ενώ ικανοποιείται η συνολική ζήτηση κάθε ώρας? (και ας υποθέσουμε πως μας ενδιαφέρει μία μόνο ώρα)
- **Αντικειμενική συνάρτηση:** συνολικό κόστος παραγωγής > το οποίο δίνεται από το άθροισμα του επιμέρους κόστους της κάθε μονάδας  $i$  > το οποίο εκφράζεται από μια συνάρτηση  $C_i(p_i) = \alpha_i * p_i^2 + \beta_i * p_i + \gamma_i$  όπου  $p_i$  η παραγόμενη ισχύς της μονάδας  $i$
- Άρα η αντικειμενική συνάρτηση μπορεί να εκφραστεί ως:  
$$\min \sum_i C_i(p_i) = \min \sum_i \alpha_i * p_i^2 + \beta_i * p_i + \gamma_i$$



# ...ας δούμε όμως ένα σχετικό παράδειγμα... (2)

- **Μεταβλητές απόφασης:** η παραγόμενη ισχύς  $p_i$  κάθε μονάδας  $i >$  το πλήθος των μεταβλητών είναι ίσο με το πλήθος των μονάδων
- **Περιορισμοί:** το άθροισμα της παραγόμενης ισχύος όλων των μονάδων παραγωγής πρέπει να ικανοποιεί τη συνολική ζήτηση της εξεταζόμενης ώρας:  $\sum_i p_i = D$
- **Παράμετροι:** τα χαρακτηριστικά της συνάρτησης κόστους της κάθε μονάδας  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$  καθώς και η συνολική ζήτηση  $D$



# ...ας δούμε όμως ένα σχετικό παράδειγμα...(3)

- Η τελική διατύπωση του προβλήματος βελτιστοποίησης είναι:

$$\min \sum_i \alpha_i * p_i^2 + \beta_i * p_i + \gamma_i$$

- ως προς τις (συνεχείς) μεταβλητές απόφασης  $p_i, \forall i$
- υπό την περιοριστική συνθήκη (ισότητα)

$$\sum_i p_i = D$$

...όμως κάποιος ειδικός στα ΣΗΕ θα έλεγε πως αυτή η απλή διατύπωση δεν είναι ακριβής (ως προς την αντικειμενική συνάρτηση, τις περιοριστικές συνθήκες κλπ)...



# Προκλήσεις για το μελετητή εφαρμοσμένης βελτιστοποίησης

- Ο μελετητής αντιμετωπίζει δύο βασικές προκλήσεις:
2. **Επίλυση προβλήματος:** Με δεδομένη τη διατύπωση του προβλήματος (μεταβλητές απόφασης / αντικειμενική συνάρτηση / περιορισμοί / παράμετροι), πώς να το επιλύσω?
    - Η πρόκληση αυτή δεν εξαρτάται από την εκάστοτε εφαρμογή, και αντιμετωπίζεται μέσω κατάλληλων αναλυτικών και αριθμητικών μεθόδων (η πιο κατάλληλη εξαρτάται από τα χαρακτηριστικά των μεταβλητών απόφασης / αντικειμενικής συνάρτησης / περιορισμών)
    - ...με αυτήν ακριβώς την πρόκληση θα ασχοληθούμε σε αυτό το μάθημα!



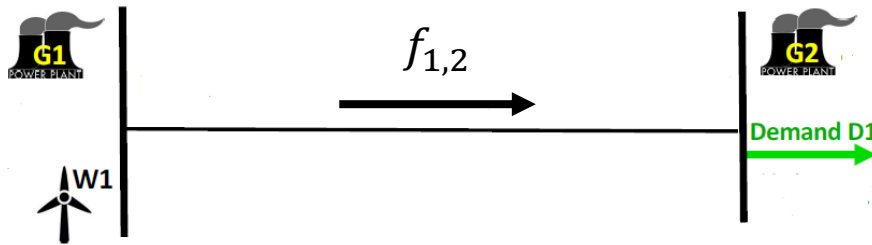
# Λύσεις προβλημάτων βελτιστοποίησης (1)

- Ως μία **λύση (solution)** ενός προβλήματος βελτιστοποίησης ορίζουμε τις τιμές (όλων) των μεταβλητών απόφασης  $x$  που καθορίζουμε
- **Εφικτή λύση (feasible solution)** είναι μια λύση που ικανοποιεί όλους τους περιορισμούς (...αλλά δεν είναι απαραίτητα η βέλτιστη λύση!)
  - Πόσες υπάρχουν (καμμία / μία / πολλές)?
- **Βέλτιστη λύση (optimal solution)** είναι η λύση  $x^*$  που ΚΑΙ είναι εφικτή ΚΑΙ μεγιστοποιεί / ελαχιστοποιεί την αντικειμενική συνάρτηση
  - Πόσες υπάρχουν (καμμία / μία / πολλές)?



# Λύσεις προβλημάτων βελτιστοποίησης (2)

- Όταν εισέρχεται ένας νέος περιορισμός ή ένας πιο αυστηρός περιορισμός σε ένα πρόβλημα...



- A) Περίπτωση χωρίς περιορισμούς: αγνοούμε τους περιορισμούς του δικτύου
- B) Περίπτωση με περιορισμούς: περιορισμοί δικτύου με  $F_{1,2}^{max} = 80MW$
- Γ) Περίπτωση με πιο αυστηρούς περιορισμούς: περιορισμοί δικτύου με  $F_{1,2}^{max} = 60MW$

- ...το **πεδίο ορισμού** ή (ισοδύναμα) ο **χώρος λύσεων** (solution space) του προβλήματος μειώνεται...

- ...και η βέλτιστη λύση θα είναι ίδια ή χειρότερη (σίγουρα όχι καλύτερη !)

Πρόβλημα  $\max f(x)$ : ίδια ή μικρότερη  $f(x^*)$

Πρόβλημα  $\min f(x)$ : ίδια ή μεγαλύτερη  $f(x^*)$





# Πολυπλοκότητα προβλημάτων βελτιστοποίησης

- **Πολυπλοκότητα:** πόσο “δύσκολη” είναι (πόσο μεγάλες υπολογιστικές απαιτήσεις έχει) η επίλυση ενός προβλήματος
- Η πολυπλοκότητα ενός προβλήματος εξαρτάται από δύο παράγοντες:
  - **Μέγεθος προβλήματος:** το πλήθος των μεταβλητών απόφασης και το πλήθος των περιορισμών
  - **Μαθηματικά χαρακτηριστικά προβλήματος:** συνέχεια, γραμμικότητα, κυρτότητα...



# Παραδοχή μαθηματικών χαρακτηριστικών στο μάθημα

- Θα καλύψουμε όλες τις περιπτώσεις...
- ...εκτός από προβλήματα με δυαδικές / ακέραιες μεταβλητές απόφασης (είτε με “mixed-integer problems” που περιέχουν και συνεχείς και δυαδικές / ακέραιες μεταβλητές απόφασης)...
- ...τα τελευταία εξετάζονται σε μάθημα του 8<sup>ου</sup> εξαμήνου (Γραμμική και Συνδυαστική Βελτιστοποίηση)



# Ισχύς παραδοχής: Παραδείγματα

- Λαμβάνοντας υπόψη μια λίστα με τις πόλεις και τις αποστάσεις μεταξύ κάθε ζεύγους πόλεων, ποια είναι η πορεία που πρέπει να ακολουθήσει ένας πλανόδιος πωλητής που πρέπει να επισκεφτεί όλες τις πόλεις, ώστε να ελαχιστοποιήσει τη διαδρομή που θα διανύσει?

Δεν ικανοποιεί την παραδοχή > οι μεταβλητές απόφασης είναι διακριτές

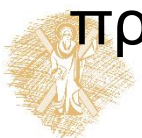
- Ποια είναι η βέλτιστη παραγόμενη ισχύς της κάθε υφιστάμενης μονάδας παραγωγής κάθε ώρα της ημέρας ώστε να ελαχιστοποιηθεί το συνολικό κόστος παραγωγής, ενώ ικανοποιείται η συνολική ζήτηση κάθε ώρας?

Ικανοποιεί την παραδοχή > οι μεταβλητές απόφασης είναι συνεχείς



# Μέθοδοι επίλυσης προβλημάτων βελτιστοποίησης

- Οι μέθοδοι επίλυσης προβλημάτων βελτιστοποίησης ταξινομούνται σε δύο βασικές κατηγορίες
- **Αναλυτικές μέθοδοι (analytical methods):** η βέλτιστη λύση βρίσκεται με ακρίβεια και μπορεί να εκφραστεί σε “κλειστή μορφή (closed form)”, διατυπώνοντας τις *αναγκαίες και ικανές συνθήκες* για την εύρεσή της > συνήθως για προβλήματα μικρότερης πολυπλοκότητας
- **Αριθμητικές μέθοδοι (numerical methods):** η βέλτιστη λύση βρίσκεται με κάποια προσέγγιση, συνήθως μέσω κάποιου *επαναληπτικού αλγορίθμου* > συνήθως για προβλήματα μεγαλύτερης πολυπλοκότητας



# Περιληπτική δομή επόμενων διαλέξεων

- Μαθηματικά χαρακτηριστικά μεταβλητών και συναρτήσεων ...συνέχεια, γραμμικότητα, κυρτότητα... (2<sup>η</sup> εβδομάδα)
- Αναλυτικές μέθοδοι βελτιστοποίησης για προβλήματα μιας μεταβλητής (3<sup>η</sup> εβδομάδα)
- Αναλυτικές μέθοδοι βελτιστοποίησης για προβλήματα πολλών μεταβλητών (4<sup>η</sup>-8<sup>η</sup> εβδομάδα)
- Αριθμητικές μέθοδοι βελτιστοποίησης για συναρτήσεις μιας μεταβλητής (9<sup>η</sup> εβδομάδα)
- Αριθμητικές μέθοδοι βελτιστοποίησης για συναρτήσεις πολλών μεταβλητών (10<sup>η</sup>-11<sup>η</sup> εβδομάδα)
- Εισαγωγή σε διαθέσιμα λογισμικά βελτιστοποίησης / Επανάληψη (12<sup>η</sup> -13<sup>η</sup> εβδομάδα)



Τέλος Ενότητας