

υπάρχει μια θετικά ορισμένη, πραγματική, συμμετρική μήτρα P ώστε να ικανοποιεί την :

$$P(A+BK) + (A+BK)^T P = -N - \frac{\partial P}{\partial t} \quad (5.41)$$

(Σημειώνεται ότι ο τελευταίος όρος του β' μέλους της εξ. (5.41) απαλείφεται για χρονικά αμετάβλητα συστήματα).

Αλλά αν η K έχει βρεθεί με βέλτιστο τρόπο θα υπάρχει κάποια P που θα προκύπτει από την εξίσωση Riccati (5.17) ή από την (5.36) για την περίπτωση που τείνει στο άπειρο. Επειδή η (5.17) μπορεί ισοδύναμα να γραφτεί στη μορφή:

$$P(A+BK) + (A+BK)^T P = -[-Q + K^T RK + \dot{P}] \quad (5.42)$$

συνάγεται αμέσως το συμπέρασμα ότι ικανοποιείται η κατά Lyapunov συνθήκη ευστάθειας (5.41) για P θετικά ορισμένη, πραγματικά και συμμετρική.

Αντίστοιχα η συνθήκη ευστάθειας ικανοποιείται και για τη λύση απείρου χρόνου αφού τότε ισχύει :

$$P(A+BK) + (A+BK)^T P = -[Q + K^T RK] \quad (5.43)$$

η οποία αποτελεί μια Lyapunov εξίσωση.

5.3 Linear Quadratic regulator-Μία εναλλακτική απόδειξη

5.3.1 Αλγεβρική εξίσωση Riccati

Θεωρούμε το μοντέλο του γραμμικού συστήματος

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0$$

και τον συσχετισμένο δείκτη απόδοσης (κριτήριο κόστους)

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Qx + u^T Ru) dt$$

όπου $Q = Q^T \geq 0$ και $R = R^T > 0$. Ο στόχος μας είναι να κατασκευάσουμε ένα σταθεροποιήσιμο (stabilizing) γραμμικό ελεγκτή ανάδρασης κατάστασης της μορφής $u = -Kx$, ο οποίος να ελαχιστοποιεί τον δείκτη απόδοσης J . Συμβολίζουμε αυτόν τον γραμμικό νόμο ελέγχου με u^* .

Πρώτα θεωρούμε ότι υπάρχει ο βέλτιστος γραμμικός ελεγκτής ανάδρασης κατάστασης ώστε το βέλτιστο σύστημα κλειστού βρόχου $\dot{x} = (A - BK)x$ να είναι ασυμπτωτικά ευσταθές. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει μια Lyapunov συνάρτηση $V = x^T P x$ για το σύστημα κλειστού βρόχου, δηλαδή για κάποια θετικά ορισμένη μήτρα P η παράγωγος ως προς τον χρόνο dV/dt υπολογισμένη στις τροχιές του συστήματος κλειστού βρόχου είναι αρνητικά ορισμένη.

Θεώρημα 5.2. Αν για τον ελεγκτή ανάδρασης κατάστασης $u^* = -Kx$ ισχύει

$$\min_u \left(\frac{dV}{dt} + x^T Qx + u^T Ru \right) = 0 \quad (5.44)$$

για κάποια $V = x^T Px$, τότε ο ελεγκτής είναι βέλτιστος.

Απόδειξη. Ξαναγράφουμε τη συνθήκη του θεωρήματος ως εξής

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{u=u^*} + x^T Qx + u^{*T} Ru^* = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{u=u^*} = -x^T Qx - u^{*T} Ru^*$$

Ολοκληρώνουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης που προκύπτει ως προς τον χρόνο από 0 έως ∞ κι έχουμε

$$V(x(\infty)) - V(x(0)) = - \int_0^\infty x^T Qx + u^{*T} Ru^* dt.$$

Έχοντας θεωρήσει ότι το σύστημα κλειστού βρόχου είναι ασυμπτωτικά ευσταθές, $x(\infty) = 0$, έχουμε

$$V(x(0)) = x_0^T Px_0 = \int_0^\infty x^T Qx + u^{*T} Ru^* dt.$$

Έτσι έχουμε δείξει ότι αν ο γραμμικός ελεγκτής ανάδρασης κατάστασης ικανοποιεί την παραδοχή του θεωρήματος, τότε η τιμή του δείκτη απόδοσης για αυτόν τον ελεγκτή είναι

$$J(u^*) = x_0^T Px_0$$

Για να δείξουμε ότι ο ελεγκτής είναι βέλτιστος, χρησιμοποιούμε την εις άτοπο απαγωγή. Θεωρούμε ότι η (5.44) ισχύει και ότι ο u^* δεν είναι βέλτιστος. Έστω ότι ο \tilde{u} δίνει ως αποτέλεσμα μια μικρότερη τιμή για το J .

$$J(u^*) \leq J(\tilde{u}).$$

Από την σχέση (5.44) προκύπτει

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{u=u^*} + x^T Qx + u^{*T} Ru^* \geq 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{u=\tilde{u}} \geq -x^T Qx - \tilde{u}^T R\tilde{u}.$$

Ολοκληρώνουμε την παραπάνω σχέση ως προς τον χρόνο από 0 έως ∞ και έχουμε

$$V(x(0)) \leq \int_0^\infty x^T Qx + \tilde{u}^T R\tilde{u} dt$$

δηλαδή

$$J(u^*) \leq J(\tilde{u})$$

το οποίο είναι άτοπο σύμφωνα με την υπόθεση που κάναμε.

Από το ανωτέρω θεώρημα προκύπτει ότι η σύνθεση του βέλτιστου νόμου έλεγχου περιλαμβάνει την εύρεση μίας κατάλληλης συνάρτησης Lyapunov ή ισοδύναμα της μήτρας P . Η κατάλληλη P προκύπτει από την ελαχιστοποίηση της

$$f(u) = \frac{dV}{dt} + x^T Qx + u^T Ru. \quad (5.45)$$

Πρώτα εφαρμόζουμε στην (5.45) την απαραίτητη συνθήκη για ελαχιστοποίηση χωρίς περιορισμούς.

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{dV}{dt} + x^T Qx + u^T Ru \right) \Big|_{u=u^*} = 0^T$$

Διαφορίζοντας την παραπάνω εξίσωση έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{dV}{dt} + x^T Qx + u^T Ru \right) &= \frac{\partial}{\partial u} (2x^T P\dot{x} + x^T Qx + u^T Ru) \\ &= \frac{\partial}{\partial u} (2x^T PAx + 2x^T PBu + x^T Qx + u^T Ru) \\ &= 2x^T PB + 2u^T R \\ &= 0^T \end{aligned}$$

Έτσι ο πιθανός βέλτιστος νόμος ελέγχου έχει τη μορφή

$$u^* = -R^{-1} B^T P x = -Kx, \quad (5.46)$$

όπου $K = -R^{-1} B^T P$. Τότε ισχύει:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial u^2} \left(\frac{dV}{dt} + x^T Qx + u^T Ru \right) &= \frac{\partial^2}{\partial u^2} (2x^T PAx + 2x^T PBu + x^T Qx + u^T Ru) \\ &= \frac{\partial}{\partial u} (2x^T PB + 2u^T R) \\ &= 2R \\ &> 0 \end{aligned}$$

Έτσι ικανοποιείται και το κριτήριο της δευτέρας παραγώγου για το u^* για την ελαχιστοποίηση της (5.45).

Θα βρούμε τώρα την κατάλληλη μήτρα P . Το βέλτιστο σύστημα κλειστού βρόχου έχει τη μορφή

$$\dot{x} = (A - BR^{-1} B^T P)x, \quad x(0) = x_0$$

Ο βέλτιστος ελεγκτής ικανοποιεί την εξίσωση

$$\frac{dV}{dt} \Big|_{u=u^*} + x^T Qx + u^{*T} Ru^* = 0,$$

δηλαδή

$$2x^T PAx + 2x^T PBu^* + x^T Qx + u^{*T} Ru^* = 0$$

Αντικαθιστούμε το u^* από την σχέση (5.46) στην παραπάνω εξίσωση και έχουμε:

$$x^T (A^T P + PA)x - 2x^T PBR^{-1} B^T Px + x^T Qx + x^T PBR^{-1} B^T Px = 0$$

Βγάζοντας το x ως κοινό παράγοντα έχουμε :

$$x^T (A^T P + PA + Q - PBR^{-1} B^T P)x = 0$$

Η παραπάνω εξίσωση πρέπει να ισχύει για κάθε x . Για να ισχύει αυτό πρέπει

$$\boxed{A^T P + PA + Q - PBR^{-1} B^T P = 0}$$

Η παραπάνω εξίσωση ονομάζεται αλγεβρική εξίσωση Riccati (Algebraic Riccati Equation-ARE). Συμπεραίνουμε ότι η σύνθεση του βέλτιστου γραμμικού ελεγκτή ανάδρασης κατάστασης που ελαχιστοποιεί τον δείκτη απόδοσης

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Qx + u^T Ru) dt$$

του συστήματος

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0$$

απαιτεί την επίλυση της εξίσωσης Riccati που δίνεται από την (5.47). Η κυριότερη δυσκολία κατά την επίλυση της ARE είναι ότι πρόκειται για μια μη γραμμική εξίσωση. Στην επόμενη ενότητα παρουσιάζεται μια μέθοδος επίλυσης της ARE.

5.3.2. Επίλυση της ARE με την μέθοδο των ιδιοδιανυσμάτων.

Περιγράφουμε τώρα μία μέθοδο επίλυσης της ARE που αναφέρεται ως μέθοδο MacFarlane και Potter ή μέθοδος των ιδιοδιανυσμάτων. Για την περιγραφή της μεθόδου ακολουθούμε την ανάπτυξη των Power και Simpson. Αρχικά γράφουμε την ARE στην μορφή.

$$\begin{bmatrix} P & -I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ P \end{bmatrix} = O \quad (5.48)$$

Η $2n \times 2n$ μήτρα ενδιάμεσα λέγεται *Hamiltonian* μήτρα και την συμβολίζουμε με H .

$$H = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix}$$

Έτσι η ARE γράφεται

$$\begin{bmatrix} P & -I_n \end{bmatrix} H \begin{bmatrix} I_n \\ P \end{bmatrix} = O$$

Προπολλαπλασιάζουμε την παραπάνω εξίσωση με X^{-1} και μετά την μεταπολλαπλασιάζουμε με X , όπου X μια $n \times n$ μη ιδιάζουσα μήτρα.

$$\begin{bmatrix} X^{-1}P & -X^{-1} \end{bmatrix} H \begin{bmatrix} X \\ PX \end{bmatrix} = O \quad (5.49)$$

Παρατηρήστε ότι αν μπορούμε να βρούμε μήτρες X και PX τέτοιες ώστε

$$H \begin{bmatrix} X \\ PX \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ PX \end{bmatrix} \Lambda$$

η εξίσωση (5.49) γίνεται

$$\begin{bmatrix} X^{-1}P & -X^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ PX \end{bmatrix} \Lambda = O$$

Έτσι έχουμε περιορίσει το πρόβλημα της επίλυσης της ARE σε αυτό της εύρεσης κατάλληλων μήτρων X και PX . Προχωρούμε θεωρώντας v_i ένα ιδιοδιάνυσμα της H και s_i την αντίστοιχη ιδιοτιμή, τότε

$$Hv_i = s_i v_i$$

Θεωρούμε ότι η H έχει τουλάχιστον n διακριτές πραγματικές ιδιοτιμές ανάμεσα στις $2n$ ιδιοτιμές της. (Τα αποτελέσματα που θα πάρουμε μπορούν να γενικευτούν και για την περίπτωση που οι ιδιοτιμές της H είναι μιγαδικές ή μη διακριτές.) Συνεπώς γράφουμε

$$H[v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n] = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n] \begin{bmatrix} s_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & s_n \end{bmatrix}$$

Έστω

$$\begin{bmatrix} X \\ PX \end{bmatrix} = [\nu_1 \quad \nu_2 \quad \dots \quad \nu_n]$$

και

$$\Lambda = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & s_n \end{bmatrix}$$

Η ανωτέρω επιλογή των X και PX συνιστά μια πιθανή λύση της εξίσωσης

$$\begin{bmatrix} X^{-1}P & -X^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ PX \end{bmatrix} \Lambda = 0$$

Για να ευρεθεί η P χωρίζουμε την $2n \times 2n$ μήτρα ιδιοδιανυσμάτων $[\nu_1 \quad \nu_2 \quad \dots \quad \nu_n]$ σε δύο $n \times n$ υπομήτρες ως ακολούθως :

$$H[\nu_1 \quad \nu_2 \quad \dots \quad \nu_n] = \begin{bmatrix} W \\ Z \end{bmatrix}$$

Ισχύει

$$\begin{bmatrix} X \\ PX \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W \\ Z \end{bmatrix}$$

Θεωρώντας $X=W, PX=Z$ και ότι η μήτρα W είναι αντιστρέψιμη, έχουμε

$$\boxed{P = ZW^{-1}} \quad (5.50)$$

Τώρα πρέπει να αποφασίσουμε ποιό σύνολο n ιδιοτιμών πρέπει να διαλέξουμε από τις ιδιοτιμές της H για να βρούμε συγκεκριμένη μήτρα P . Στην περίπτωση που όλες οι $2n$ ιδιοτιμές της H είναι διακριτές, ο αριθμός των διαφορετικών μήτρων P που δημιουργούνται με την παραπάνω μέθοδο είναι

$$\frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

Έστω $Q = C^T C$ μια παραγοντοποίηση πλήρους τάξης της Q όπως ορίζεται στην σελίδα 636. Από το Θεώρημα 3 του Kucera [172, σελ 346] προκύπτει ότι η Hamiltonian μήτρα H έχει n ιδιοτιμές στο ανοικτό αριστερό ημιεπίπεδο και n ιδιοτιμές στο ανοικτό δεξί ημιεπίπεδο αν και μόνο αν το ζεύγος (A, B) είναι σταθεροποιήσιμο (stabilizable) και το ζεύγος (A, C) είναι ανιχνεύσιμο (detectable). Η μήτρα P που αναζητούμε αντιστοιχεί στις ασυμπτωτικά ευσταθείς ιδιοτιμές της H . Οι ιδιοτιμές της Hamiltonian μήτρας είναι ζεύγη $\pm s_i$, (βλ. Άσκηση 5.15). Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της H περιέχει μόνο άρτιες δυνάμεις του s . Για μία μήτρα P που έχει ευρεθεί με αυτόν τον τρόπο, έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα :

Θεώρημα 5.3. Οι πόλοι του συστήματος κλειστού βρόχου

$$\dot{x}(t) = (A - BR^{-1}B^T P)x(t)$$

είναι οι ιδιοτιμές της H με αρνητικά πραγματικά μέρη.

Απόδειξη. Επειδή $[\nu_1 \quad \nu_2 \quad \dots \quad \nu_n] = \begin{bmatrix} W \\ Z \end{bmatrix}$ μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W \\ Z \end{bmatrix} \Lambda$$

Μετά από τους πολλαπλασιασμούς έχουμε :

$$AW - BR^{-1}B^T Z = W\Lambda$$

ή

$$A - BR^{-1}B^T ZW^{-1} = A - BR^{-1}B^T P = W\Lambda W^{-1}$$

επειδή $P = ZW^{-1}$. Έτσι η μήτρα $A - BR^{-1}B^T P$ είναι όμοια με την Λ της οποίας οι ιδιοτιμές είναι οι ασυμπτωτικά ευσταθείς ιδιοτιμές της H .

5.3.3. Βέλτιστα συστήματα με προκαθορισμένους πόλους.

Μπορούμε πάντα να βρούμε ανάδραση κατάστασης $u = -Kx$, ώστε το σύστημα κλειστού βρόχου $\dot{x} = (A - BK)x$ να έχει τους πόλους του σε προκαθορισμένα σημεία (συμμετρικά ως προς τον πραγματικό άξονα) αν και μόνο αν το ζεύγος (A, B) είναι προσιτό (reachable). Σε ένα σύστημα πολλών εισόδων η μήτρα κέρδους K που μεταφέρει τους πόλους σε προκαθορισμένες θέσεις δεν είναι μοναδική. Θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε τους εναπομείναντες βαθμούς ελευθερίας για να βρούμε μια μήτρα κέρδους K που μεταφέρει τους πόλους του συστήματος στις επιθυμητές θέσεις και παράλληλα ελαχιστοποιεί τον δείκτη απόδοσης. Ειδικότερα, έχουμε το μοντέλο του συστήματος :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

το σύνολο των επιθυμητών πόλων του συστήματος κλειστού βρόχου

$$\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$$

και μία $m \times n$ θετικά ορισμένη μήτρα $R = R^T$. Θέλουμε να βρούμε ένα νόμο ελέγχου ανάδρασης κατάστασης $u(t) = -Kx(t)$ και μια $n \times n$ θετικά ημιορισμένη μήτρα $Q = Q^T$ τέτοια ώστε το σύστημα κλειστού βρόχου να έχει πόλους σε επιθυμητές θέσεις και ταυτόχρονα ο δείκτης απόδοσης

$$J = \int_0^{\infty} (x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t))dt$$

να ελαχιστοποιείται. Με άλλα λόγια, θέλουμε να σχεδιάσουμε ένα βέλτιστο σύστημα ελέγχου με προκαθορισμένους πόλους.

Τώρα περιγράφουμε μια μέθοδο σχεδιασμού βέλτιστων συστημάτων ελέγχου με προκαθορισμένους πόλους. Για να βρούμε τη μήτρα κέρδους K και την μήτρα βαρών Q , χρησιμοποιούμε επαναληπτικά την αλλαγή μεταβλητής κατάστασης. Προχωρούμε αναλύοντας το μοντέλο του συστήματος, τον δείκτη απόδοσης και την Hamiltonian μήτρα σε νέα βάση. Έστω

$$x = T\tilde{x}$$

Όπου $\det T \neq 0$. Τότε το μοντέλο του συστήματος με τις νέες συντεταγμένες έχει την μορφή

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= T^{-1}AT\tilde{x}(t) + T^{-1}Bu(t) \\ &= \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}u(t) \end{aligned}$$

Ο δείκτης απόδοσης J μετά την αλλαγή μεταβλητής κατάστασης έχει την μορφή:

$$\tilde{J} = \int_0^{\infty} (\tilde{x}^T T^T Q T \tilde{x}(t) + u^T(t)Ru(t))dt$$

Η Hamiltonian μήτρα μετασχηματίζεται σε

$$\begin{aligned}\tilde{H} &= \begin{bmatrix} T^{-1}AT & -T^{-1}BR^{-1}B^T T^{-T} \\ -T^{-1}QT & -T^T A^T T^{-T} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \tilde{A} & -\tilde{B}R^{-1}\tilde{B}^T \\ -\tilde{Q} & -\tilde{A}^T \end{bmatrix}\end{aligned}$$

όπου $T^{-T} = (T^{-1})^T = (T^T)^{-1}$. Παρατηρήστε ότι

$$\tilde{H} = \begin{bmatrix} T^{-1} & 0 \\ 0 & T^T \end{bmatrix} H \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & T^{-T} \end{bmatrix}$$

δηλαδή οι μήτρες H και \tilde{H} είναι όμοιες (similarity matrices) επειδή

$$\begin{bmatrix} T^{-1} & 0 \\ 0 & T^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & T^{-T} \end{bmatrix} = I_{2n}$$

Έτσι οι ιδιοτιμές των H και \tilde{H} είναι οι ίδιες. Το επόμενο βήμα είναι να υπολογίσουμε την χαρακτηριστική εξίσωση της \tilde{H} ως συνάρτηση της \tilde{Q} . Ο υπολογισμός της $\det(sI_{2n} - \tilde{H})$ γίνεται πιο εύκολος ύστερα από κάποιους χειρισμούς στην χαρακτηριστική μήτρα $sI_{2n} - \tilde{H}$ οι οποίοι όμως δεν αλλάζουν την ορίζουσά της. Ειδικότερα, προπαλλαπλασιάζουμε την χαρακτηριστική μήτρα $sI_{2n} - \tilde{H}$ με μια $2n \times 2n$ μήτρα της οποίας η ορίζουσα ισούται με 1. Τότε η ορίζουσα του γινομένου είναι ίδια με την $\det(sI_{2n} - \tilde{H})$ αλλά είναι ευκολότερο να υπολογιστεί. Έχουμε

$$\begin{aligned}& \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -\tilde{Q}(sI_n - \tilde{A})^{-1} & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sI_n - \tilde{A} & \tilde{B}R^{-1}\tilde{B}^T \\ \tilde{Q} & sI_n + \tilde{A}^T \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} sI_n - \tilde{A} & \tilde{B}R^{-1}\tilde{B}^T \\ 0 & sI_n + \tilde{A}^T - \tilde{Q}(sI_n - \tilde{A})^{-1}\tilde{B}R^{-1}\tilde{B}^T \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Έστω

$$F = \tilde{B}R^{-1}\tilde{B}^T$$

Τότε

$$\begin{aligned}\det(sI_{2n} - \tilde{H}) &= \det \begin{bmatrix} sI_n - \tilde{A} & F \\ 0 & sI_n + \tilde{A}^T - \tilde{Q}(sI_n - \tilde{A})^{-1}F \end{bmatrix} \\ &= \det(sI_n - \tilde{A}) \det(sI_n + \tilde{A}^T - \tilde{Q}(sI_n - \tilde{A})^{-1}F)\end{aligned}$$

Υποθέτουμε τώρα ότι η μήτρα A έχει n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα, έτσι μπορεί να γίνει διαγώνια. Έστω

$$T = [t_1 \ t_2 \ \dots \ t_n]$$

μια μήτρα που αποτελείται από τα ιδιοδιανύσματα του A . Συνεπώς

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Σημειώστε ότι $\tilde{A}^T = \tilde{A}$. Ας υποθέσουμε ότι

$$\tilde{Q} = \tilde{Q}_j = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{q}_{jj} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix};$$

που σημαίνει ότι ο \tilde{Q}_j έχει μόνο ένα μη μηδενικό στοιχείο, το \tilde{q}_{jj} . Κάτω από τις παραπάνω υποθέσεις ο πίνακας $(sI_n + \tilde{A}^T - \tilde{Q}_j)(sI_n - \tilde{A})^{-1}F$ παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned} (sI_n + \tilde{A}^T - \tilde{Q}_j)(sI_n - \tilde{A})^{-1}F &= \begin{bmatrix} s+\lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s+\lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & s+\lambda_n \end{bmatrix} \\ &- \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \tilde{q}_{jj} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s-\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{s-\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{s-\lambda_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{nn} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} s+\lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s+\lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & s+\lambda_j & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & s+\lambda_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\tilde{q}_{jj}f_{j1}}{s-\lambda_j} & \frac{\tilde{q}_{jj}f_{j2}}{s-\lambda_j} & \frac{\tilde{q}_{jj}f_{jj}}{s-\lambda_j} & \dots & \frac{\tilde{q}_{jj}f_{jn}}{s-\lambda_j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} s+\lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & s+\lambda_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{\tilde{q}_{jj}f_{j1}}{s-\lambda_j} & \frac{\tilde{q}_{jj}f_{j2}}{s-\lambda_j} & \dots & \dots & s+\lambda_j & -\frac{\tilde{q}_{jj}f_{jj}}{s-\lambda_j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & s+\lambda_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Για το λόγο αυτό

$$\det(sI_n + \tilde{A}^T - \tilde{Q}_j(sI_n - \tilde{A})^{-1}F) = \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n (s + \lambda_i) \right) \left(s + \lambda_j - \frac{\tilde{q}_{jj} f_{jj}}{s - \lambda_j} \right).$$

Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της Hamiltonian μήτρας.

$$\begin{aligned} \det(sI_{2n} - H) &= \det(sI_{2n} - \tilde{H}) \\ &= \left(\prod_{i=1}^n (s - \lambda_i) \right) \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n (s + \lambda_i) \right) \left(s + \lambda_j - \frac{\tilde{q}_{jj} f_{jj}}{s - \lambda_j} \right) \\ &= \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n (s + \lambda_i)(s - \lambda_i) \left((s + \lambda_j)(s - \lambda_j) - \tilde{q}_{jj} f_{jj} \right). \end{aligned}$$

Από τη μορφή του χαρακτηριστικού πολυωνύμου της Hamiltonian μήτρας, συμπεραίνουμε ότι η επιλογή μιας κατάλληλης τιμής \tilde{q}_{jj} μας επιτρέπει να μετατοπίσουμε τον j πόλο του κλειστού συστήματος σε μια προαποφασισμένη θέση διατηρώντας τους υπόλοιπους στις αρχικές τους θέσεις. Για να γίνει αυτό καλύτερα αντιληπτό αναπαριστούμε τον όρο που περιλαμβάνει το \tilde{q}_{jj} ως

$$\begin{aligned} (s + \lambda_j)(s - \lambda_j) - \tilde{q}_{jj} f_{jj} &= s^2 - \lambda_j^2 - \tilde{q}_{jj} f_{jj} \\ &= s^2 - (\lambda_j^2 + \tilde{q}_{jj} f_{jj}) \\ &= (s - s_j)(s + s_j), \end{aligned}$$

όπου

$$s_j = \pm \sqrt{\lambda_j^2 + \tilde{q}_{jj} f_{jj}}.$$

Από την παραπάνω έκφραση για το s_j , μπορούμε να υπολογίσουμε το \tilde{q}_{jj} που οδηγεί στην μετατόπιση του j πόλου στο $-\sqrt{\lambda_j^2 + \tilde{q}_{jj} f_{jj}}$. Παίρνουμε

$$\tilde{q}_{jj} = \frac{s_j^2 - \lambda_j^2}{f_{jj}} \quad (5.51)$$

Σημειώστε ότι διαλέγοντας την επιθυμητή θέση για το s_j , πρέπει να βεβαιωθούμε ότι $\tilde{q}_{jj} > 0$, ώστε να διασφαλίσουμε θετικά ημιορισμένη μήτρα βάρους \tilde{Q}_j . Έχοντας την \tilde{Q}_j , υπολογίζουμε $Q_j = T^{-T} \tilde{Q}_j T^{-1}$ και λύνουμε την εξίσωση Riccati

$$A^T P_j + P_j A + Q_j - P_j B R^{-1} B^T P_j = 0 \quad (5.52)$$

για το P_j . Υπολογίζουμε το $u = -R^{-1}B^T P_j x + u_j = -K_j x + u_j$, που μετατοπίζει μόνο έναν πόλο του κλειστού συστήματος

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (A - BK_j)x + Bu_j \\ &= A_j x + Bu_j\end{aligned}$$

στην καθορισμένη του θέση. Στη συνέχεια ξεκινούμε με το νέο σύστημα

$$\dot{x} = A_j x + Bu_j$$

και μετατοπίζουμε τον επόμενο πόλο σε μια καθορισμένη τοποθεσία, και έπειτα συνδυάζουμε τα αποκτηθέντα κέρδη ανάδρασης. Η παραπάνω μέθοδος είναι βασισμένη στο αποτέλεσμα, εδραιωμένο από τον Solheim [267], ότι διαφορετικές μήτρες ανάδρασης K_j και οι αντίστοιχες μήτρες βάρους Q_j μπορούν να συνδυαστούν ώστε να δώσουν το τελικό βέλτιστο κέρδος K και την αντίστοιχη μήτρα βάρους Q . Πράγματι, υποθέτουμε ότι εφαρμόζουμε την παραπάνω μέθοδο στο σύστημα $\dot{x} = (A - BK_j)x + Bu_j$. Αφού βρούμε μια κατάλληλη μήτρα βάρους Q_{j+1} λύνουμε την εξίσωση Riccati

$$(A - BK_j)^T P_{j+1} + P_{j+1}(A - BK_j) + Q_{j+1} - P_{j+1}BR^{-1}B^T P_{j+1} = 0 \quad (5.53)$$

ως προς P_{j+1} ώστε να υπολογίσουμε το κέρδος K_{j+1} . Προσθέτοντας τις δύο εξισώσεις Riccati (5.52) και (5.53) και εκτελώντας απλές μετατροπές, παίρνουμε

$$A^T(P_j + P_{j+1}) + (P_j + P_{j+1})A + Q_j + Q_{j+1} - (P_j + P_{j+1})BR^{-1}B^T(P_j + P_{j+1}) = 0$$

Έστω $P = P_j + P_{j+1}$ και $Q = Q_j + Q_{j+1}$, τότε

$$\begin{aligned}K &= K_j + K_{j+1} \\ &= R^{-1}B^T P_j + R^{-1}B^T P_{j+1}\end{aligned}$$

Με έναν παρόμοιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι η μέθοδος δουλεύει για περισσότερες από δύο επαναλήψεις.

◆ Παράδειγμα 5.10

Έστω το ακόλουθο μοντέλο δυναμικού συστήματος:

$$\dot{x} = 2u_1 + 2u_2, \quad x(0) = 3$$

και ο συσχετισμένος δείκτης απόδοσης

$$J = \int_0^{\infty} (x^2 + ru_1^2 + ru_2^2) dt$$

Όπου r παράμετρος με $r > 0$

1. Πρώτα βρίσκουμε την λύση της ARE που αντιστοιχεί στον βέλτιστο γραμμικό ελεγκτή ανάδρασης κατάστασης. Έχουμε

$$A=0, \quad B=[2], \quad Q=1, \quad R=rI_2$$

Η ARE για αυτό το πρόβλημα είναι

$$0 = A^T P + PA + Q - PBR^{-1}B^T P = 1 - \frac{8}{r} P^2$$

της οποίας η λύση είναι

$$P = \sqrt{\frac{r}{8}}$$

2. Γράφουμε τώρα την εξίσωση του συστήματος κλειστού βρόχου που οδηγείται από τον βέλτιστο ελεγκτή. Ο βέλτιστος ελεγκτής έχει τη μορφή

$$u = -R^{-1}B^T P x = -\frac{1}{\sqrt{2r}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} x$$

Έτσι το βέλτιστο σύστημα κλειστού βρόχου περιγράφεται ως εξής:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix} x = -\frac{4}{\sqrt{2r}} x$$

3. Τελικά, βρίσκουμε την τιμή του J του βέλτιστου κλειστού συστήματος. Έχουμε

$$J = x^T(0) P x(0) = \frac{9}{2} \sqrt{\frac{r}{2}}$$

Μπορούμε απευθείας να επαληθεύσουμε ότι $J = \frac{9}{2} \sqrt{\frac{r}{2}}$ ως εξής

$$\begin{aligned} \min J &= \min \int_0^\infty (x^2 + ru_1^2 + ru_2^2) dt \\ &= \int_0^\infty 9 \exp\left(-\frac{8t}{\sqrt{2r}}\right) (1+1) dt = 9 \frac{\sqrt{2r}}{4} = \frac{9}{2} \sqrt{\frac{r}{2}} \end{aligned}$$

◆ Παράδειγμα 5.11

Έστω το ακόλουθο μοντέλο δυναμικού συστήματος :

$$\dot{x} = 2x + u$$

και ο συσχετισμένος δείκτης απόδοσης :

$$J = \int_0^\infty (x^2 + ru^2) dt$$

Να ευρεθεί η τιμή του r ώστε το βέλτιστο σύστημα κλειστού βρόχου να έχει τον πόλο του στο -3 .

Η συσχετισμένη Hamiltonian μήτρα γίνεται :

$$H = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{r} \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση του H είναι

$$\det(sI_2 - H) = s^2 - 4 - \frac{1}{r} = 0$$

Έτσι έχουμε

$$r = \frac{1}{5}$$

και καταλήγουμε στο βέλτιστο σύστημα κλειστού βρόχου με πόλο στο -3.

◆ Παράδειγμα 5.12

Για το μοντέλο του δυναμικού συστήματος

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2x + u \\ &= Ax + Bu \end{aligned}$$

με δείκτη απόδοσης

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\infty} (qx^2 + u^2) dt \\ &= \int_0^{\infty} (x^T Qx + u^T Ru) dt \end{aligned}$$

να ευρεθεί το q ώστε η ιδιοτιμή του

$$A - BR^{-1}B^T P$$

να είναι ίση με -3.

Η αντίστοιχη Hamiltonian μήτρα είναι

$$H = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -q & -2 \end{bmatrix}$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της H είναι

$$\det[sI_2 - H] = \det \begin{bmatrix} s-2 & 1 \\ q & s+2 \end{bmatrix} = s^2 - 4 - q$$

Θέλουμε να ισχύει

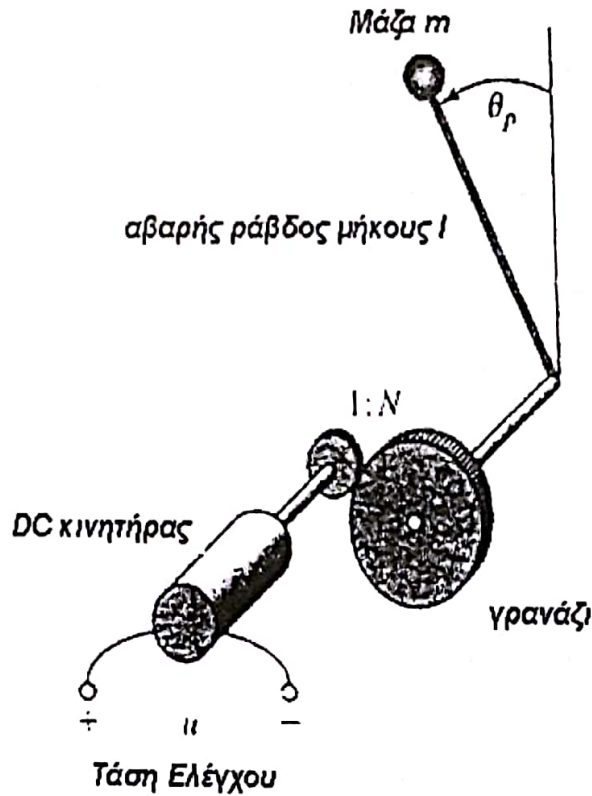
$$\det[sI_2 - H] = (s+3)(s-3) = s^2 - 9$$

Επομένως η επιθυμητή τιμή του q είναι $q=5$.

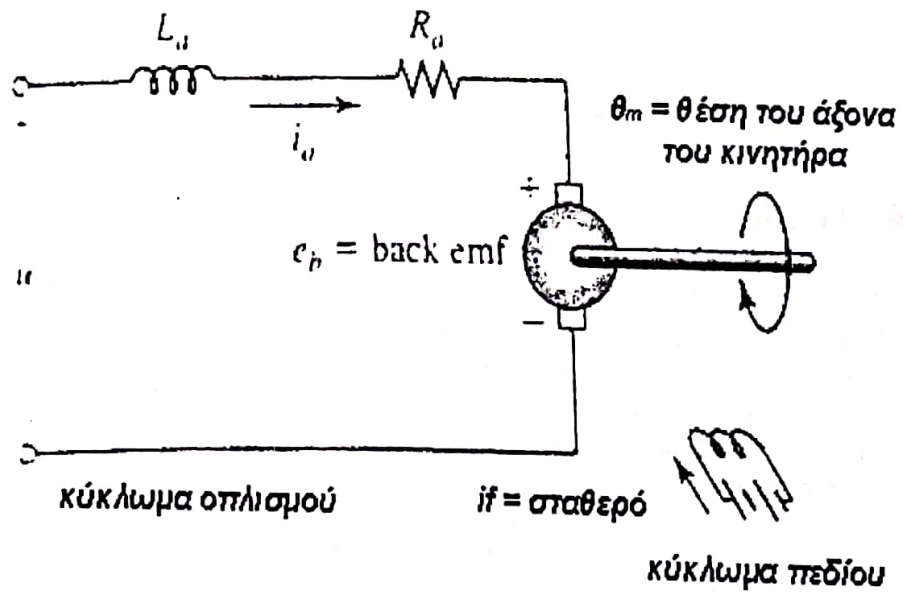
◆ Παράδειγμα 5.13

Θεωρήστε ένα απλό μοντέλο χειριστή ρομπότ ενός συνδέσμου, όπως φαίνεται στην εικόνα 5.11. Η κίνηση του ρομποτικού βραχίονα ελέγχεται από ένα DC κινητήρα μέσω ενός γραναζιού. Ο DC κινητήρας ελέγχεται μέσω του οπλισμού και το σχηματικό του διάγραμμα φαίνεται στην εικόνα 5.12. Υποθέτουμε ότι η σημασία της αδράνειας του κινητήρα είναι αμελητέα σε σχέση με αυτή του ρομποτικού βραχίονα. Μοντελοποιούμε τον βραχίονα ως μια σημειακή μάζα m συνδεδεμένη στο άκρο μιας ράβδου χωρίς μάζα και μήκους l . Έτσι η αδράνεια του βραχίονα είναι $I_a = ml^2$. Υποθέτουμε ότι το γρανάζι δεν έχει ανωμαλίες και όλοι οι άξονες σύνδεσης είναι άκαμπτοι. Όπως μπορούμε να δούμε στην εικόνα 5.11, η αριστερόστροφη περιστροφή του βραχίονα είναι ορισμένη ως θετική, και η δεξιόστροφη (σύμφωνα με

τη φορά του ρολογιού) έχει οριστεί ως αρνητική. Αντίθετα η αριστερόστροφη περιστροφή του άξονα του κινητήρα έχει οριστεί αρνητική και η δεξιόστροφη περιστροφή του άξονα ως θετική.



Σχήμα 5.11 Χειριστής ενός συνδέσμου ελεγχόμενος από ένα DC κινητήρα μέσω γραναζιού



Σχήμα 5.12 Σχηματικό διάγραμμα ενός DC κινητήρα ελεγχόμενου από τον οπλισμό

Η ροπή που ασκείται από τον κινητήρα είναι

$$T_m = K_m i_a$$

όπου K_m είναι η σταθερά ροπής του κινητήρα και i_a είναι το ρεύμα στον οπλισμό. Έστω N η αναλογία των γραναζιών. Τότε έχουμε

$$\frac{\theta_p}{\theta_m} = \frac{\text{ακτίνα του γραναζιού κινητήρα}}{\text{ακτίνα του γραναζιού βραχίονα}} = \frac{\text{αριθμός δοντιών του γραναζιού κινητήρα}}{\text{αριθμός δοντιών του γραναζιού βραχίονα}} = \frac{1}{N}$$

Αυτό συμβαίνει γιατί τα γρανάζια είναι σε επαφή και έτσι

$$\theta_p \times \text{ακτίνα γραναζιού βραχίονα} = \theta_m \times \text{ακτίνα γραναζιού κινητήρα}$$

και οι ακτίνες των γραναζιών είναι ανάλογες με τον αριθμό των δοντιών τους. Το έργο που γίνεται από τα γρανάζια πρέπει να είναι ίσο. Έστω T_p η ροπή που εφαρμόζεται στον ρομποτικό βραχίονα. Τότε

$$T_p \theta_p = T_m \theta_m$$

Έτσι η ροπή που εφαρμόζεται στο εκκρεμές είναι

$$T_p = NT_m = NK_m i_a$$

Χρησιμοποιούμε τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα για να γράψουμε την εξίσωση που μοντελοποιεί τη δυναμική του βραχίονα

$$I_a \frac{d^2 \theta_p}{dt^2} = mgl \sin \theta_p + T_p \quad (5.54)$$

Αντικαθιστώντας στην (5.54) τις εκφράσεις για το I_a και το T_p , παίρνουμε

$$ml^2 \frac{d^2 \theta_p}{dt^2} = mgl \sin \theta_p + NK_m i_a \quad (5.55)$$

όπου $g = 9.8 \text{ m/sec}^2$ είναι η σταθερά της βαρύτητας. Εφαρμόζοντας τον νόμο τάσεων του Kirchhoff στο κύκλωμα του οπλισμού παίρνουμε

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + K_b N \frac{d\theta_p}{dt} = u$$

όπου K_b είναι η σταθερά back emf. Υποθέτουμε ότι $L_a \approx 0$, έτσι

$$u = R_a i_a + K_b N \frac{d\theta_p}{dt} \quad (5.56)$$

Έπειτα υπολογίζουμε το i_a από την (5.55) και αντικαθιστούμε το αποτέλεσμα στην (5.54), για να πάρουμε

$$ml^2 \frac{d^2\theta_p}{dt^2} = mgl \sin \theta_p + NK_m \left(\frac{u}{R_a} - \frac{K_b N \frac{d\theta_p}{dt}}{R_a} \right) \quad (5.57)$$

Μπορούμε τώρα να κατασκευάσουμε ένα μοντέλο κατάστασης-χώρου του ρομπότ ενός συνδέσμου. Για το λόγο αυτό διαλέγουμε τις ακόλουθες μεταβλητές κατάστασης και εξόδου.

$$x_1 = \theta_p, \quad x_2 = \frac{d\theta_p}{dt} = \omega_p, \quad y = x_1$$

Έπειτα, χρησιμοποιώντας την (5.57), παίρνουμε το ακόλουθο απλό μοντέλο κατάστασης-χώρου για τον χειρισμό του ρομπότ

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{g}{l} \sin x_1 - \frac{K_b K_m N^2}{ml^2 R_a} x_2 + \frac{NK_m}{ml^2 R_a} u \end{bmatrix}, \quad y = x_1$$

Λογικές παράμετροι για το ρομπότ είναι: $l = 1$ m, $m = 1$ kg, $N = 10$, $K_m = 0.1$ Nm/A, $K_b = 0.1$ Vsec/rad, $R_a = 1$ Ω. Με τις παραπάνω παραμέτρους το μοντέλο του ρομπότ παίρνει τη μορφή:

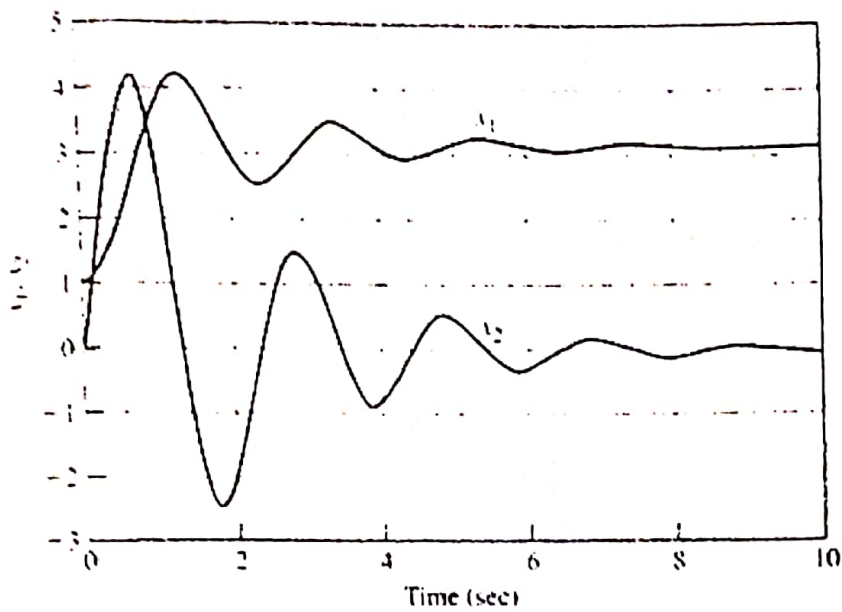
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ 9.8 \sin x_1 - x_2 + u \end{bmatrix}$$

$$y = x_1$$

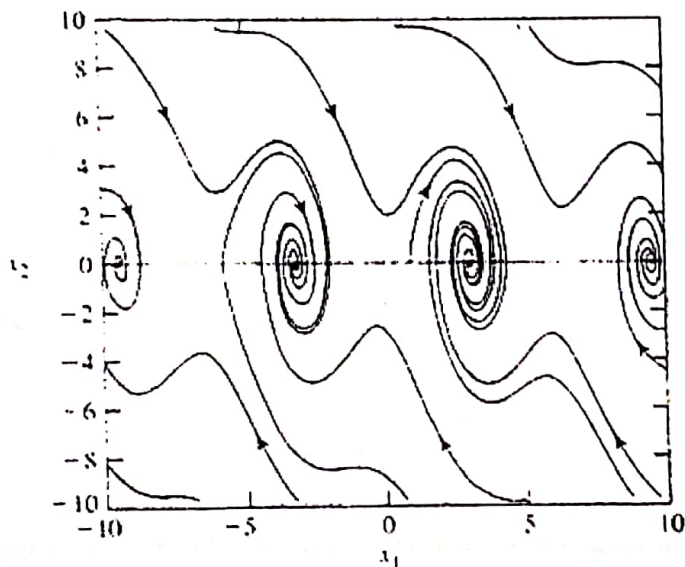
Το ιστορικό χρονικό των τροχιών κατάστασης του γραμμικού συστήματος χωρίς έλεγχο, $u=0$, φαίνονται στο σχήμα 5.13 για αρχικές συνθήκες $x_1(0) = 1$ και $x_2(0) = 0$. Ένα διάγραμμα φάσεων για το ίδιο σύστημα φαίνεται στο σχήμα 5.14. Το γραμμικοποιημένο σύστημα με $x=0$ και $u=0$ έχει τη μορφή

$$\frac{d}{dt} \Delta x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 9.8 & -1 \end{bmatrix} \Delta x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Delta u \quad (5.58)$$

$$\Delta y = [1 \ 0] \Delta x$$



Σχήμα 5.13 Διαγράμματα των $y = x_1$ και x_2 ως προς τον χρόνο του μη γραμμικού συστήματος χωρίς έλεγχο



Σχήμα 5.14 Ένα διάγραμμα φάσεων του γραμμικού συστήματος χωρίς έλεγχο

Τα γραφήματα των $y=x_1$ και x_2 ως προς τον χρόνο φαίνονται στο σχήμα 5.15. Ένα διάγραμμα φάσεων του γραμμικοποιημένου συστήματος φαίνεται στο σχήμα 5.16. Έστω

$$J = \int_0^{\infty} (y^2 + u^2) dt$$

Θα βρούμε τον νόμο γραμμικής ανάδρασης-κατάστασης $u = -kx$ που μεγιστοποιεί το J υποκείμενο στις εξισώσεις που δίνονται από το (5.58).. Έχουμε

$$Q = c^T c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και } R = [1]$$

Λύνοντας την σχετική εξίσωση Riccati παίρνουμε

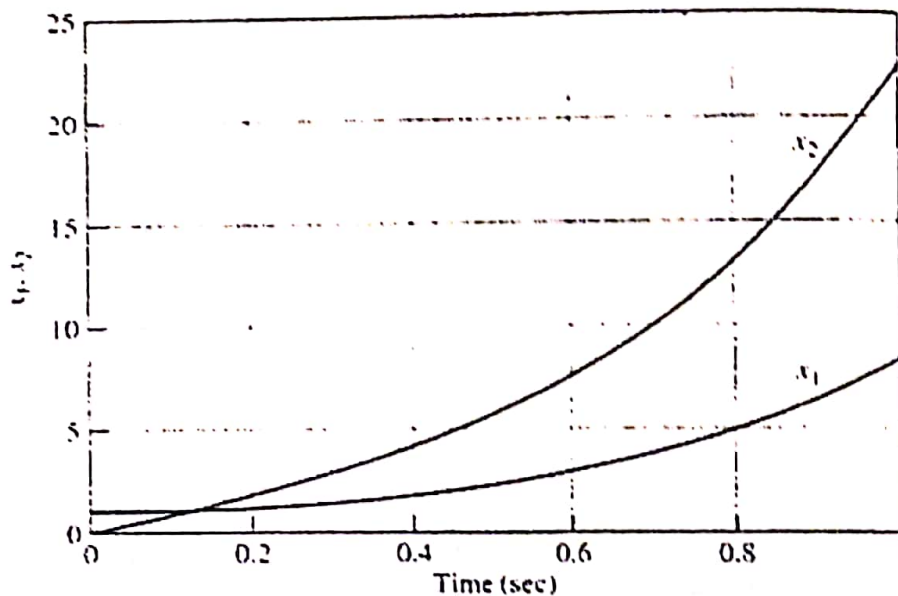
$$P = \begin{bmatrix} 72.3371 & 19.6509 \\ 19.6509 & 5.3484 \end{bmatrix} \quad (5.59)$$

Έτσι

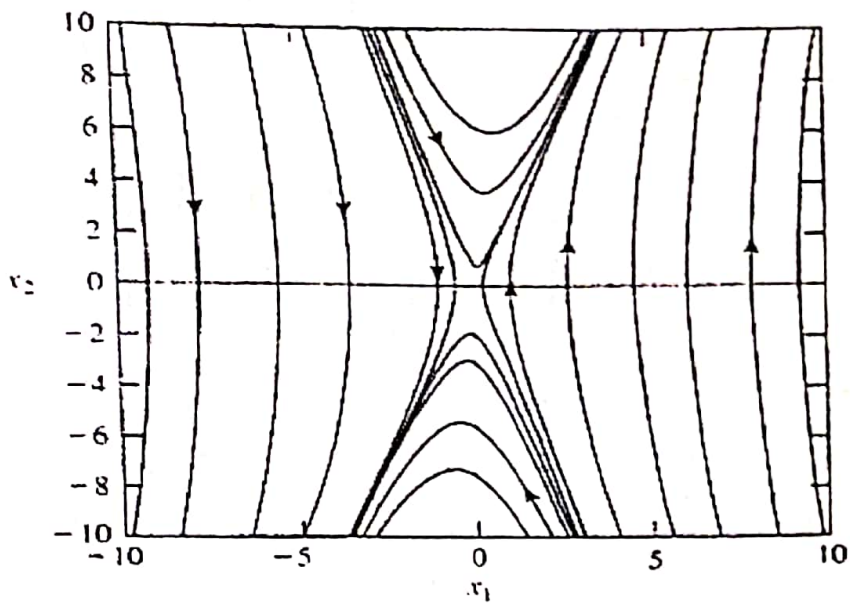
$$k = [19.6509 \quad 5.3484] \quad (5.60)$$

και

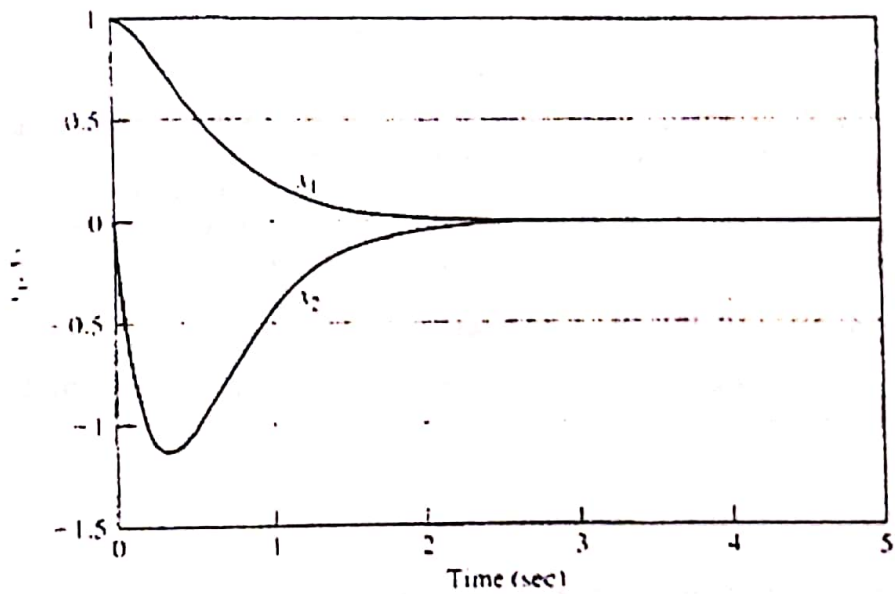
$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9.8509 & -6.3484 \end{bmatrix}$$



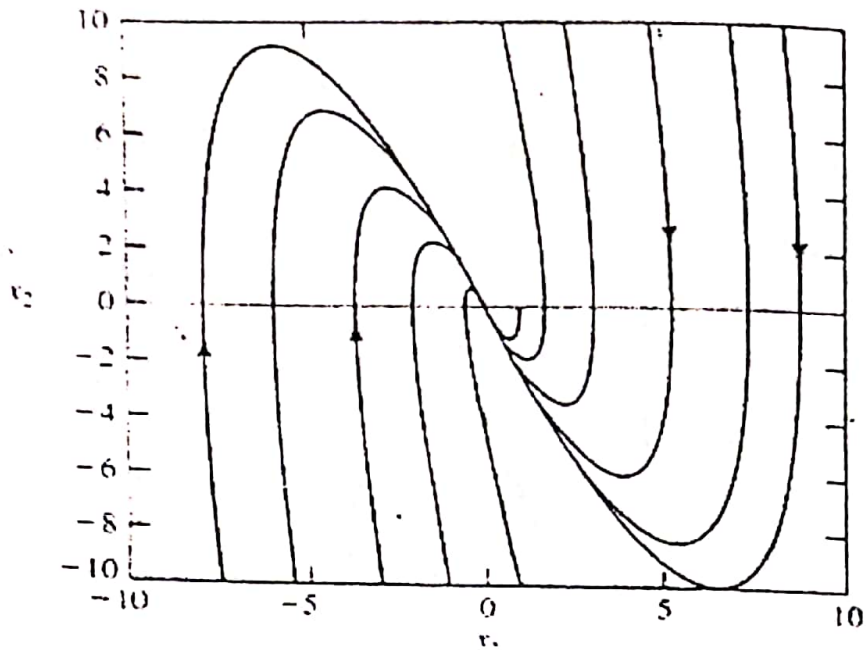
Σχήμα 5.15 Τα διαγράμματα των x_1 και x_2 ως προς το χρόνο, του γραμμικοποιημένου συστήματος



Σχήμα 5.16 Διάγραμμα φάσεων του γραμμικοποιημένου συστήματος



Σχήμα 5.17 Τα διαγράμματα των x_1 και x_2 του κλειστού γραμμικού συστήματος



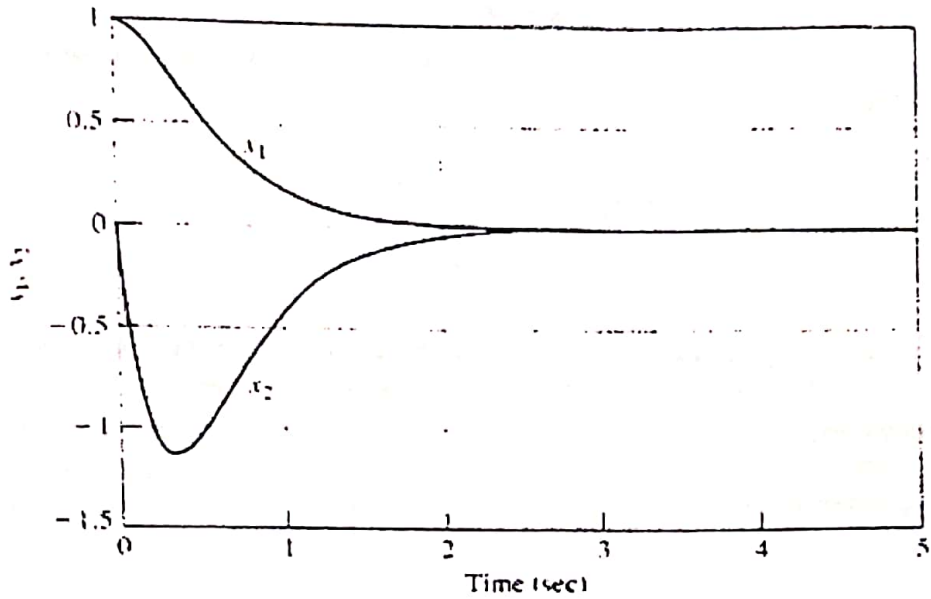
Σχήμα 5.18 Διάγραμμα φάσεων του κλειστού γραμμικού συστήματος

Τα διαγράμματα του x_1 και του x_2 ως προς τον χρόνο του κλειστού γραμμικού συστήματος

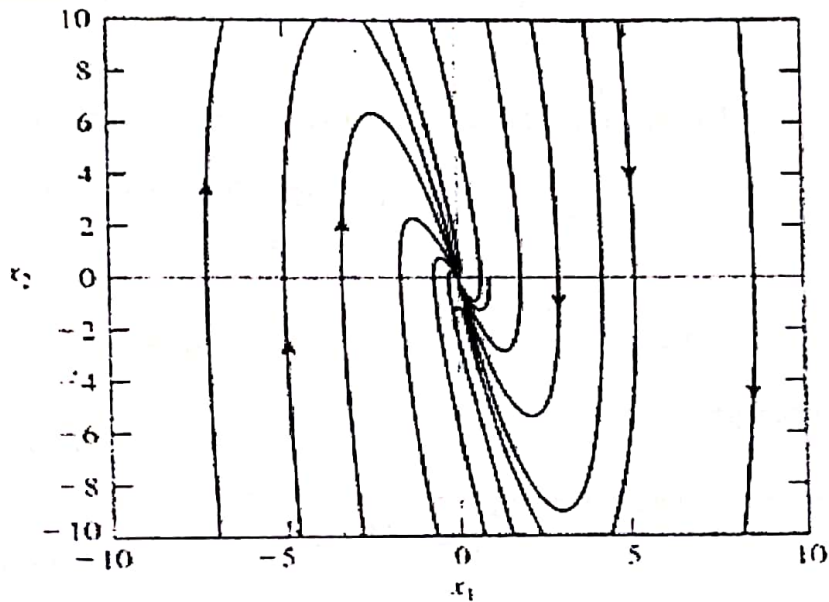
$$\dot{x} = (A - bk)x = A_c x$$

$$y = x_1,$$

όταν οι αρχικές συνθήκες είναι $x_1(0) = 1$ και $x_2(0) = 0$, φαίνονται στο σχήμα 5.17. Ένα διάγραμμα φάσεων του κλειστού γραμμικού συστήματος φαίνεται στο σχήμα 5.18. Τώρα εφαρμόζουμε τον παραπάνω βέλτιστο ελεγκτή στο μη γραμμικό μοντέλο. Τα διαγράμματα των x_1 και x_2 ως προς τον χρόνο φαίνονται στο σχήμα 5.19. Ένα διάγραμμα φάσεων του μη γραμμικού κλειστού συστήματος φαίνεται στο σχήμα 5.20. Οι πόλοι του κλειστού γραμμικοποιημένου συστήματος – δηλαδή, οι ιδιοτιμές του A_c – είναι $\lambda_1 = -2.7003$ και $\lambda_2 = -3.6481$.



Σχήμα 5.19 Τα διαγράμματα των x_1 και x_2 του μη γραμμικού κλειστού συστήματος



Σχήμα 5.20 Διάγραμμα φάσεων του μη γραμμικού κλειστού συστήματος.

◆ Παράδειγμα 5.14

Χρησιμοποιούμε τα δεδομένα του προηγούμενου παραδείγματος ώστε να βρούμε τη μήτρα βάρους Q_2 και το αντίστοιχο k_2 έτσι ώστε το λ_2 να μετατοπίζεται στο $s_2 = -5$, δηλαδή, οι νέοι πόλοι του κλειστού συστήματος.

$$\dot{x} = (A_c - bk_2)x$$

είναι $s_1 = \lambda_1$ και $s_2 = -5$. Για τον νόμο ελέγχου $u = -kx + r$, το κλειστό γραμμικό σύστημα είναι

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9.8509 & -6.3484 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ &= A_c x + b_r\end{aligned}$$

Όπου για απλότητα χρησιμοποιούμε x αντί για Δx και u αντί για Δu . Οι ιδιοτιμές του A_c είναι $\lambda_1 = -2.7003$ και $\lambda_2 = -3.6481$. Έχουμε $\lambda_1 \neq \lambda_2$ και έτσι ο πίνακας A_c είναι διαγωνοποιήσιμος. Σημειώστε ότι διαφορετικές ιδιοτιμές είναι η μόνη επαρκής συνθήκη για διαγωνοποιησιμότητα. Κατασκευάζουμε τον μετασχηματισμό ομοιότητας χρησιμοποιώντας τα ιδιοδιανύσματα του A_c . Τα ιδιοδιανύσματα του A_c είναι

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0.3473 \\ -0.9378 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad v_2 = \begin{bmatrix} -0.2644 \\ -0.9644 \end{bmatrix}.$$

Έστω $x = Tz$, όπου $T = [v_1 \ v_2]$. Τότε, ο A_c στις νέες συντεταγμένες έχει τη μορφή

$$\tilde{A}_c = T^{-1} A_c T = \begin{bmatrix} -2.7003 & 0 \\ 0 & -3.6481 \end{bmatrix}$$

και

$$\tilde{b} = T^{-1} b = \begin{bmatrix} 3.0383 \\ 3.9912 \end{bmatrix}$$

Έπειτα υπολογίζουμε

$$T^{-1} b R^{-1} b^T T^{-T} = \begin{bmatrix} 9.2312 & 12.1264 \\ 12.1264 & 15.9296 \end{bmatrix}$$

Έτσι,

$$\tilde{q}_{22} = \frac{s_2^2 - \lambda_2^2}{15.9296} = 0.7339$$

Επομένως

$$\tilde{Q}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.7339 \end{bmatrix} = T^T Q_2 T$$

και

$$Q_2 = T^{-T} \tilde{Q}_2 T^{-1} = \begin{bmatrix} 85.2450 & 31.5686 \\ 31.5686 & 11.6907 \end{bmatrix}$$

Λύνοντας την ARE με A_c , b , Q_2 και R παίρνουμε

$$P_2 = \begin{bmatrix} 9.8572 & 3.6504 \\ 3.6504 & 1.3518 \end{bmatrix}$$

και

$$k_2 = [3.6504 \quad 1.3518]$$

Ως έλεγχο, αν πάρουμε

$$Q_{new} = Q + Q_2 = \begin{bmatrix} 86.2450 & 31.5686 \\ 31.5686 & 11.6907 \end{bmatrix}$$

Όπου $Q = c^T c$ όπως στο παράδειγμα 5.13, και $R_{new} = R$, τότε λύνοντας την σχετική ARE χρησιμοποιώντας A , αντί για A_c , παίρνουμε

$$P_{new} = \begin{bmatrix} 82.1943 & 23.3013 \\ 23.3013 & 6.7002 \end{bmatrix} = P + P_2$$

όπου το P δίνεται από την (5.59)

$$k_{new} = [23.3013 \quad 6.7002] = k + k_2$$

όπου το k είναι το βέλτιστο κέρδος όπως δίνεται από την (5.60)

Παράδειγμα 5.15

Για το γραμμικοποιημένο μοντέλο που δίνεται από την (5.58) και για $R=[2]$, θα προσδιορίσουμε το Q και το αντίστοιχο k τα οποία οδηγούν στο κλειστό σύστημα $\dot{x} = (A - bk)x$ με πόλους στο $s_1 = -4$ και $s_2 = -5$, όπου

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9.8 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Μετατοπίζουμε τους πόλους στις επιθυμητές θέσεις έναν προς έναν. Πρώτα διαγωνοποιούμε τον A χρησιμοποιώντας μετασχηματισμό ομοιότητας κατασκευασμένο από τα ιδιοδιανύσματα του A . Οι ιδιοτιμές του A είναι $\lambda_1 = 2.6702$ και $\lambda_2 = -3.6702$. Απεικονίζουμε τα σχετικά ιδιοδιανύσματα με v_1 και v_2 , αντίστοιχα. Έτσι παίρνουμε

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 2.6702 & 0 \\ 0 & -3.6702 \end{bmatrix}$$

όπου

$$T = [v_1 \quad v_2] = \begin{bmatrix} 0.3507 & -0.2629 \\ 0.9365 & 0.9648 \end{bmatrix}$$

Τώρα θα κατασκευάσουμε το k_1 ούτως ώστε το λ_1 να μετατοπιστεί στο $s_1 = -4$, ενώ το λ_2 παραμένει αμετάβλητο, δηλαδή οι ιδιοτιμές του $A - bk_1$ γίνονται s_1 και λ_2 . Για το λόγο αυτό, πρώτα υπολογίζουμε,

$$F = T^{-1}bR^{-1}T^T b^T = \begin{bmatrix} 0.1011 & 0.1349 \\ 0.1349 & 0.1800 \end{bmatrix}$$

Έτσι, $f_{11} = 0.1011$

$$\tilde{q}_{11} = \frac{4^2 - (2.6702)^2}{0.1011} = 87.7352$$

και

$$\tilde{Q}_1 = \begin{bmatrix} 87.7352 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = T^T Q_1 T$$

Επομένως

$$Q_1 = T^{-T} \tilde{Q}_1 T^{-1} = \begin{bmatrix} 239.0024 & 65.1202 \\ 65.1202 & 17.7431 \end{bmatrix}$$

Λύνοντας την σχετική ARE, χρησιμοποιώντας $R=[2]$, παίρνουμε

$$P_1 = \begin{bmatrix} 179.7014 & 48.9626 \\ 48.9626 & 13.3407 \end{bmatrix}$$

Συνεπώς

$$k_1 = [24.4813 \quad 6.6703]$$

και

$$A_1 = A - bk_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -14.6813 & -7.6703 \end{bmatrix}$$

Θα κατασκευάσουμε τώρα ένα k_2 το οποίο μετατοπίζει το λ_2 στο s_2 αφήνοντας το s_1 αμετάβλητο. Πρώτα διαγωνοποιούμε τον A , χρησιμοποιώντας τα ιδιοδιανύσματα του. Σημειώστε ότι ο A_1 και ο A μοιράζονται το κοινό ιδιοδιάνυσμα v_2 . Το άλλο

ιδιοδιάνυσμα του A_1 που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή του s_1 είναι $u_1 = [-0.2425 \ 0.9701]^T$. Έτσι έχουμε

$$T^{-1}A_1T = \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Όπου

$$T = [u_1 \ v_2] = \begin{bmatrix} -0.2425 & 0.2629 \\ 0.9701 & -0.9648 \end{bmatrix}$$

Έπειτα υπολογίζουμε

$$T^{-1}bR^{-1}b^T T^{-T} = \begin{bmatrix} 78.0607 & 72.0157 \\ 72.0157 & 66.4389 \end{bmatrix}$$

Έτσι $\tilde{f}_{22} = 66.4389$

$$\tilde{q}_{22} = \frac{5^2 - (-3.6702)^2}{66.4389} = 0.1735$$

και

$$\tilde{Q}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.1735 \end{bmatrix} = T^T Q_2 T$$

Από τα παραπάνω, παίρνουμε

$$Q_2 = T^{-T} \tilde{Q}_2 T^{-1} = \begin{bmatrix} 368.9003 & 92.2211 \\ 92.2211 & 23.0543 \end{bmatrix}$$

Λύνοντας την σχετική ARE, παίρνουμε

$$P_2 = \begin{bmatrix} 42.5495 & 10.6369 \\ 10.6369 & 2.6591 \end{bmatrix}$$

και

$$k_2 = [5.3185 \ 1.3296]$$

Η τελική μήτρα βάρους Q η οποία έχει ως αποτέλεσμα την μετατόπιση των πόλων στις επιθυμητές θέσεις είναι η

$$Q = Q_1 + Q_2 = \begin{bmatrix} 607.9027 & 157.3413 \\ 157.3413 & 40.7974 \end{bmatrix}$$

Το αντίστοιχο P είναι

$$P = P_1 + P_2 = \begin{bmatrix} 222.2509 & 59.996 \\ 59.996 & 15.998 \end{bmatrix}$$

Το αντίστοιχο βέλτιστο διάνυσμα κέρδους k είναι

$$k = k_1 + k_2 = [29.7998 \quad 7.9999]$$

6. ΤΟ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΒΕΛΤΙΣΤΗΣ ΠΑΡΑΚΟΛΟΥΘΗΣΗΣ ή Ο ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΣΕΡΒΟΜΗΧΑΝΙΣΜΟΣ (LINEAR TRACKING PROBLEM ή LINEAR SERVOMECHANISM)

Το γραμμικό τετραγωνικό πρόβλημα βέλτιστης παρακολούθησης έχει σαν αντικείμενο τη σχεδίαση του βέλτιστου ελέγχου που οδηγεί την έξοδο κάποιου γραμμικού δυναμικού συστήματος να ακολουθήσει κάποια είσοδο αναφοράς σύμφωνα με κάποιο τετραγωνικό κριτήριο σφάλματος ως προς την είσοδο αναφοράς.

Η ονομασία σερβομηχανισμός έχει προέλθει από τις λέξεις *servant* και *mechanism* που σημαίνει ένα μηχανισμό υπηρέτη και ιστορικά έχει μείνει από τη χρήση του σε σερβοκινητήρες.

Έστω λοιπόν το γραμμικό δυναμικό σύστημα που δίνεται από τη σχέση (5.1) :

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

με έξοδο

$$y(t) = C(t)x(t) \quad (6.1)$$

για το οποίο θέλουμε η έξοδος να ακολουθεί κάποια μη μηδενική είσοδο αναφοράς $r(t)$.

Αν ορίσουμε το σφάλμα e μεταξύ της εξόδου και του σήματος αναφοράς:

$$e(t) = y(t) - r(t) \quad (6.2)$$

το κριτήριο που ελαχιστοποιούμε είναι το ακόλουθο :

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [e^T(t)Q(t)e(t) + u^T(t)R(t)u(t)] dt + \frac{1}{2} e^T(t_f)S e(t_f) \quad (6.3)$$

όπου το $t_0, x(t_0)$ και t_f θεωρούνται δεδομένα, ενώ το $x(t_f)$ αφήνεται ελεύθερο. Οι μήτρες βάρους Q, R, S λαμβάνονται όπως στην περίπτωση του κεφαλαίου 5, πραγματικές, συμμετρικές, τετραγωνικές, με τη μήτρα R θετικά ορισμένη και τις Q και S θετικά ημιορισμένες.

Η Hamiltonian για το συγκεκριμένο πρόβλημα είναι :

$$H = \frac{1}{2} (Cx - r)^T Q (Cx - r) + \frac{1}{2} u^T R u + \lambda^T [Ax + Bu] \quad (6.4)$$