1. ΓΕΝΙΚΑ

Ο αυτόματος έλεγχος δυναμικών συστημάτων συνεχούς ή διακριτού χρόνου έχει σαν κύριο αντικείμενο τη σχεδίαση κατάλληλων βρόχων ελέγχου, τέτοιων ώστε να εξασφαλίζονται δύο βασικοί στόχοι:

α) Η ευστάθεια του συστήματος,

β) Κάποια συγκεκριμένα χαρακτηριστικά για τις εξόδους που μας ενδιαφέρουν ή και για κάποιες ή όλες τις καταστάσεις του συστήματος.

Η δεύτερη αυτή απαίτηση εστιάζεται κυρίως στις ακόλουθες κατευθύνσεις:

- Στην επίτευξη κάποιου επιθυμητού ρυθμού απόσβεσης
- Στην όσο το δυνατό πιο ομαλή μεταβατική κατάσταση
- Στην ακρίβεια με την οποία η έξοδος ακολουθεί κάποια επιθυμητή είσοδο αναφοράς.

Αυτό σημαίνει ότι η έξοδος και κατ΄ επέκταση το διάνυσμα κατάστασης του συστήματος οφείλει να πληρεί κάποιους περιορισμούς.

Για να είναι όμως πραγματοποιήσιμος ο σχεδιασμός βρόχου ελέγχου πρέπει να τηρείται άλλος ένας βασικός περιορισμός. Η είσοδος που προκύπτει κάθε φορά για το σύστημα να είναι εφικτό να εφαρμοστεί. Με άλλα λόγια αυτό σημαίνει ότι η είσοδος πρέπει να παίρνει τιμές λογικές, δηλαδή ούτε πολλές τάξεις μικρότερες ούτε πολλές τάξεις μεγαλύτερες από τις τιμές που ορίζουν το σύστημα.

Οι μέθοδοι που κύρια έχουμε για να αντιμετωπίσουμε προβλήματα αυτής της μορφής ποικίλουν ανάλογα με τη συγκεκριμένη περίπτωση.

Για παράδειγμα, στην περίπτωση του σχεδιασμού ελέγχου για γραμμικά δυναμικά συστήματα πολλών εισόδων πολλών εξόδων (n τάξης συστήματα με m εισόδους και r εξόδους) της μορφής:

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad (1.1)$$
$$y = Cx \qquad (1.2)$$

δύο βασικοί τρόποι έχουν αναπτυχθεί:

α) Η σχεδίαση κλειστών βρόχων ανάδρασης όλων των καταστάσεων με τεχνικές τοποθέτησης των πόλων του κλειστού συστήματος σε επιθυμητά σημεία.

β) Η σχεδίαση αντίστοιχων βρόχων ελέγχου έτσι ώστε να ικανοποιούνται συγκεκριμένα κριτήρια κόστους που αφορούν συγκεκριμένους περιορισμούς στις καταστάσεις και τις εισόδους του συστήματος.

Με τον πρώτο τρόπο εξασφαλίζονται η ευστάθεια του συστήματος και ο επιθυμητός ρυθμός απόσβεσης της εξόδου, αφήνεται δε και μια ελευθερία για τη διαμόρφωση της μεταβατικής συμπεριφοράς του συστήματος (η οποία δεν είναι εύκολο εν γένει να αξιοποιηθεί).

Ο δεύτερος τρόπος, που αφορά και το αντικείμενο του παρόντος μαθήματος , εξασφαλίζει σε κάθε περίπτωση την ευστάθεια του συστήματος και επί πλέον μπορεί να διαμορφώνει τη μεταβατική συμπεριφορά του συστήματος και να πετυχαίνει εφικτές τιμές εισόδων σύμφωνα με τα κριτήρια κόστους. Η ελευθερία που αφήνεται για τον προσδιορισμό επιθυμητών ρυθμών απόσβεσης είναι αρκετά δύσκολο να αξιοποιηθεί και αφορά κύρια την κατάλληλη επιλογή των κριτηρίων.

2. ΒΕΛΤΙΣΤΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ: ΠΡΟΫΠΟΘΕΣΕΙΣ – ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΚΟΣΤΟΥΣ

Στη μοντέρνα θεωρία ελέγχου το αντικείμενο του προβλήματος του βέλτιστου ελέγχου είναι ο προσδιορισμός της βέλτιστης εκείνης εισόδου u^* που μπορεί να μεταφέρει το σύστημα από μια αρχική σε μια τελική κατάσταση ελαχιστοποιώντας κάποιο κατάλληλο κριτήριο κόστους. Η είσοδος που προκύπτει μπορεί να είναι είτε ανεξάρτητη των καταστάσεων του συστήματος , οπότε μιλάμε για βέλτιστη λύση ανοιχτού βρόχου, είτε απευθείας συνάρτηση του διανύσματος κατάστασης:

$$u^* = u^*(x) \tag{2.1}$$

οπότε μιλάμε για λύση κλειστού βρόχου.

Τα κριτήρια κόστους ορίζονται μέσω των διανυσμάτων κατάστασης και ελέγχου, x(t) και u(t), αντίστοιχα. Οι απαιτούμενοι περιορισμοί στις καταστάσεις ή τις εισόδους του συστήματος εισάγονται μέσω του κριτηρίου κόστους, με τη χρήση κατάλληλων συντελεστών βάρους στις μεταβλητές κατάστασης και τις εισόδους. Οι προϋποθέσεις για την αντιμετώπιση ενός προβλήματος βέλτιστου ελέγχου δίνονται από τις ακόλουθες συνθήκες:

Συνθήκη 1. Το σύστημα περιγράφεται από την καταστατική του εξίσωση n τάξεως

$$\dot{x} = F(x, u, t) \tag{2.2}$$

για σύστημα συνεχούς χρόνου ή

$$x(j+1) = F\left[x(j).u(j), j\right] \tag{2.3}$$

για σύστημα διακριτού χρόνου.

Συνθήκη 2. Η αρχική χρονική στιγμή t_0 και η αρχική κατάσταση $x(t_0)$ είναι πάντοτε δεδομένες. Προσδιορίζονται επίσης κάποιες προδιαγραφές σχεδιασμού για την τελική χρονική στιγμή t_f ή για την τελική κατάσταση $x(t_f)$ ή και για τα δύο. Αντίστοιχα ορίζονται τα $x(0)$ και $x(N)$ για συστήματα διακριτού χρόνου (από j=0 έως N).

Συνθήκη 3. Καθορίζεται ένα ολοκληρωτικό κριτήριο κόστους της μορφής

$$J = \int_{t_0}^{t_f} L\left[x(t), u(t)\right] dt \tag{2.4}$$

ή ένα κριτήριο αθροίσματος της μορφής

$$J = \sum_{j=0}^{N-1} L\left[x(j), u(j)\right] \tag{2.5}$$

για συστήματα συνεχούς ή διακριτού χρόνου αντίστοιχα. Η επιλογή του ελέγχου u γίνεται ώστε να ελαχιστοποιείται το κριτήριο αυτό στο χρονικό διάστημα που μας ενδιαφέρει. Η L(x,u) επιλέγεται θετική έτσι ώστε να έχει νόημα η ελαχιστοποίηση.

Συνθήκη 4. Είναι δυνατό επίσης να τεθούν επιπρόσθετοι περιορισμοί στις τιμές του διανύσματος ελέγχου u. Για παράδειγμα , σε ένα φυσικό σύστημα υπάρχει ένα όριο για τον έλεγχό του. Αυτοί οι φυσικοί περιορισμοί είναι δυνατό να εκφραστούν με σχέσεις της μορφής

$$u_{min} \le u \le u_{max} \tag{2.6}$$

Συνθήκη 5. Όταν το κριτήριο είναι τετραγωνικό ως προς τις καταστάσεις και τις εισόδους και αναφέρεται σε γραμμικό σύστημα πρέπει να είναι ελέγξιμο και παρατηρήσιμο.

Η επιλογή του κατάλληλου κριτηρίου βασίζεται κάθε φορά στο συγκεκριμένο πρόβλημα ελέγχου και πρέπει να εξασφαλίζει μαθηματική ευκολία επίλυσής του, αλλά και να καταλήγει σε λύση φυσικά αποδεκτή από τη δομή του συστήματος.

Ας θεωρήσουμε για παράδειγμα ότι επιθυμούμε η κατάσταση ενός συστήματος να οδηγηθεί από μια αρχική τιμή $x(t_0)$ σε μια συγκεκριμένη τελική τιμή $x(t_f)$ σε ελάχιστο χρόνο (όπου βεβαίως το t_f δε δίνεται). Είναι το πρόβλημα βέλτιστου ελέγχου-χρόνου, όπως καλείται. Η ποσότητα προς ελαχιστοποίηση είναι το χρονικό διάστημα $t_f - t_0$, το οποίο είναι ίσο με το $\int_{t_0}^{t_f} dt$. Γι' αυτό στο κριτήριο χρησιμοποιείται η $L(x,u,t) = 1$. Η L δεν είναι συνάρτηση των x και u και δεν τίθεται κανένας περιορισμός στα διανύσματα αυτά.

$$J = \int_{t_0}^{t_f} 1dt = t_f - t_0 \tag{2.7}$$

Είναι φανερό ότι το χρονικό αυτό διάστημα μπορεί να γίνει όσο το δυνατόν μικρότερο, εφαρμόζοντας μια οσοδήποτε μεγάλη είσοδο, κάτι καθόλου πρακτικό. Συνήθως ο έλεγχος u πρέπει να πληρεί κάποιους περιορισμούς που με τη σειρά του επηρεάζουν τον ελάχιστο δυνατό χρόνο. Οι εξισώσεις του συστήματος, για το ελάχιστο J που είναι ίσο με 0, οδηγούν στην απαίτηση για άπειρη είσοδο, γεγονός που είναι ανέφικτο.

Σε αντίθεση με την απαίτηση ελαχίστου χρόνου του προηγούμενου προβλήματος , μπορούμε να θεωρήσουμε την απαίτηση για έλεγχο u ελάχιστης προσπάθειας (minimum effort). Ένα κατάλληλο κριτήριο για το πρόβλημα αυτό, με δεδομένα τα $x(t_0), x(t_f), t_0$ και t_f είναι το ακόλουθο:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} (\sum_{i=1}^{r} u_i^2) dt = \int_{t_0}^{t_f} (u^T u) dt \tag{2.8}$$

Η εξίσωση αυτή συνήθως γενικεύεται εισάγοντας ένα συντελεστή βάρους για κάθε είσοδο ελέγχου. Ένα πιο ευέλικτο κριτήριο πετυχαίνεται εισάγοντας μια μήτρα βάρους R, οπότε:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} (u^T R u) dt \tag{2.9}$$

Έτσι η $L(x,u,t) = u^T R u$, όπου R είναι μια πραγματική χρονικά μεταβαλλόμενη ή χρονικά αμετάβλητη, θετικά ορισμένη μήτρα βάρους. Για αναλυτική ευκολία η R είναι συμμετρική. Αν θεωρήσουμε τη βαθμωτή περίπτωση όπου το u παριστάνει μια μεταβλητή όπως δύναμη, ρεύμα ή τάση, τότε το κριτήριο αυτό εκφράζει ενέργεια. Γι' αυτό προβλήματα όπου χρησιμοποιούνται κριτήρια αυτής της μορφής καλούνται προβλήματα βέλτιστου ελέγχου – ελάχιστης ενέργειας εισόδου. Μια λύση για την οποία το παραπάνω κριτήριο γίνεται ελάχιστο είναι $u^*(x,t)=0$, οπότε J=0. Για αυτήν την τιμή, η λύση των εξισώσεων του δυναμικού συστήματος οδηγεί στο αποτέλεσμα ότι το σύστημα φτάνει στην τελική κατάσταση σε $t_f=\infty$, γεγονός μη αποδεκτό. (Η τιμή αυτή του u παραβιάζει εξάλλου και τη Συνθήκη 3, που απαιτεί $L(x,u,t)\rangle 0$).

Παρόμοιο κριτήριο μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την ελαχιστοποίηση των καταστάσεων σφάλματος ή των αποκλίσεων των καταστάσεων. Όταν η τελική κατάσταση $x(t_f)$ ορίζεται ως αρχή των αξόνων και αρχική κατάσταση περιγράφει τις αρχικές συνθήκες, τότε η κατάσταση ταυτίζεται με το σφάλμα και το αντίστοιχο κριτήριο είναι το παρακάτω:

$$J=\int_{t_0}^{t_f}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)dt=\int_{t_0}^{t_f}\left(x^Tx\right)dt \tag{2.10}$$

με $L(x,u,t)=x^Tx$ και καθορισμένα τα όρια του ολοκληρώματος. Εισάγοντας μια μήτρα βάρους Q το κριτήριο παίρνει την πιο γενική του μορφή:

$$J=\int_{t_0}^{t_f}\left(x^TQx\right)dt \tag{2.11}$$

όπου Q μήτρα βάρους, τάξεως n και $L(x,u,t)=x^TQx\rangle 0$. Όταν αυτό εφαρμόζεται σε ένα συγκεκριμένο πρόβλημα , είναι αναγκαίο ή μαθηματικά 'βολικό' να επιλεγεί η μήτρα Q πραγματική, συμμετρική και θετικά ορισμένη. Ο στόχος του προβλήματος σχεδίασης είναι να προσδιοριστεί ο βέλτιστος έλεγχος $u^*(x,t)$ που μεταφέρει τι σύστημα από την αρχική στη τελική του κατάσταση ελαχιστοποιώντας το J. Και σε αυτή την περίπτωση είναι προφανές ότι η ικανοποίηση του κριτηρίου οδηγεί σε τιμή εισόδου άπειρη.

Οι δυσκολίες που προκύπτουν από τη θεώρηση των προηγουμένων κριτηρίων κόστους, μπορεί να ξεπεραστούν στην πράξη με διάφορους τρόπους. Έτσι, για παράδειγμα, στο πρόβλημα ελαχίστου χρόνου, αλλά και στο τελευταίο πρόβλημα της ελαχιστοποίησης της απόκλισης των καταστάσεων, αν ληφθεί υπόψη η Συνθήκη 4 του περιορισμού των εισόδων, προκύπτει ένας εφικτός, βέλτιστος σχεδιασμός ελέγχου. Όπως εξάλλου θα δούμε σε επόμενα κεφάλαια, μια εφικτή, εναλλακτική λύση για το πρόβλημα της ελάχιστης προσπάθειας ελέγχου, πέρα από τη $u^*(t)=0$, είναι άμεσα δυνατή με τη χρήση των μεθόδων βελτιστοποίησης.

Η χρήση ενός πιο σύνθετου κριτηρίου που δεν είναι τίποτε άλλο από γραμμικός συνδυασμός των δύο τελευταίων περιπτώσεων χρησιμοποιείται ευρέως στο σχεδιασμό βέλτιστου ελέγχου. Ονομάζεται τετραγωνικό κριτήριο και έχει τη μορφή:

$$J=\int_{t_0}^{t_f}(x^TQx+u^TRu)dt \tag{2.12}$$

Η εφαρμογή του στο σχεδιασμό συστημάτων ελέγχου πετυχαίνει ένα βέλτιστο σύστημα, συνδυάζοντας τα κριτήρια ελαχίστου σφάλματος και ελαχίστης ενέργειας. Για το κριτήριο αυτό οι μήτρες Q και R είναι πραγματικές και συμμετρικές. Σύμφωνα με τη Συνθήκη 3, η $L(x,u,t) = x^T Qx + u^T Ru$ πρέπει να είναι θετικά ορισμένη. Όπως θα δειχθεί αργότερα η R πρέπει να είναι οπωσδήποτε θετικά ορισμένη. Η λύση στο πρόβλημα του βέλτιστου ελέγχου οδηγεί στην απαίτηση η Q να είναι τουλάχιστον θετικά ημιορισμένη (έτσι εξασφαλίζεται πάντοτε η ικανοποίηση των αναγκαίων συνθηκών βελτιστοποίησης).

Για το γραμμικό σύστημα $\dot{x} = Ax + Bu$, το πρόβλημα του προσδιορισμού του u το οποίο ελαχιστοποιεί το τετραγωνικό κριτήριο με όρια ολοκλήρωσης από 0 έως ∞,

$$J = \int_0^{\infty} L(x,u,t)dt = \int_0^{\infty} \left[x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)\right]dt \tag{2.13}$$

ονομάζεται <u>γραμμικό τετραγωνικό πρόβλημα ελέγχου απείρου χρόνου</u>. Με αυτά τα όρια ο προκύπτων βέλτιστος νόμος ελέγχου μπορεί να είναι σταθερά ανάλογος μόνο του διανύσματος κατάστασης x(t) για συστήματα αμετάβλητα στο χρόνο γεγονός που επιτρέπει την εφαρμογή ελέγχου ανάδρασης κατάστασης <u>κλειστού βρόχου</u> :

$$u^*[x(t)] = Kx(t) \tag{2.14}$$

Σε αυτές τις περιπτώσεις όπως θα δούμε σε επόμενα εδάφια η Q θα μπορούσε να μην είναι θετικά ημιορισμένη χωρίς να παραβιάζεται η Συνθήκη 3.

<u>3. ΒΕΛΤΙΣΤΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΧΡΟΝΟΥ</u>

Έστω το βαθμωτό δυναμικό σύστημα στο χώρο κατάστασης:

$$\dot{x} = F(x,u,t) \tag{3.1}$$

για το οποίο ζητάμε τη βέλτιστη είσοδο u^* για την οποία ελαχιστοποιείται το κριτήριο

$$J = \int_{t_0}^{t_f} L(x,u,t)dt \tag{3.2}$$

με δεδομένα και ορισμένα το $t_0, x(t_0), t_f$ και το $x(t_f)$. Το πρόβλημα αυτό είναι γνωστό σαν <u>πρόβλημα βέλτιστου ελέγχου δύο οριακών τιμών</u>.

Εισάγοντας τον παράγοντα Lagrange λ(t) σχηματίζουμε το ισοδύναμο κριτήριο

$$\begin{aligned} J^* &= \int_{t_0}^{t_f} \left\{L(x,u,t) + \lambda(t)\left[F(x,u,t) - \dot{x}\right]\right\}dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_f} K(\dot{x},x,u,\lambda,t)dt \end{aligned} \tag{3.3}$$

όπου

$$K(\dot{x}, x, u, \lambda, t) = L(x,u,t) + \lambda(t)\left[F(x,u,t) - \dot{x}\right] \tag{3.4}$$

Τότε η ελαχιστοποίηση του κριτηρίου κόστους θα δίνεται κατά τα γνωστά από τις εξισώσεις Euler – Lagrange ως προς όλες τις εμφανιζόμενες μεταβλητές x,u,λ:

$$\frac{\partial K}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{x}}\right) = 0 \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial K}{\partial u} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{u}}\right) = 0 \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial K}{\partial \lambda} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\lambda}}\right) = 0 \tag{3.7}$$

Προφανώς ισχύει:

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{x}} = -\lambda \tag{3.8}$$

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{u}} = 0 \tag{3.9}$$

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{\lambda}} = 0 \tag{3.10}$$

οπότε η εξίσωση (3.5) γίνεται:

$$\frac{\partial K}{\partial x} + \frac{d}{dt}\lambda = \frac{\partial}{\partial x}\left\{L + \lambda F\right\} + \dot{\lambda} = 0 \tag{3.11}$$

Αν ορίσουμε τη συνάρτηση:

$$\boxed{H = L + \lambda F} \tag{3.12}$$

η H είναι γνωστή σαν <u>Hamiltonian συνάρτηση.</u>
Τότε η (3.11) γράφεται ισοδύναμα

$$\boxed{\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x}} \tag{3.13}$$

Η παραπάνω εξίσωση λέγεται <u>εξίσωση των συμπληρωματικών καταστάσεων</u> λ.
Αντίστοιχα η δεύτερη Euler-Lagrange εξίσωση (3.6) δίνει:

$$\frac{\partial}{\partial u}(L+\lambda F)=0 \tag{3.14}$$

ή $$\boxed{\frac{\partial H}{\partial u}=0} \tag{3.15}$$

που αποτελεί τη Συνθήκη Βελτιστοποίησης, από την οποία προκύπτει ο βέλτιστος νόμος ελέγχου.
Ενώ η τρίτη εξ. Euler-Lagrange (3.7) καταλήγει στην αρχική εξίσωση των δυναμικών του συστήματος:

$$\boxed{\dot{x}=\frac{\partial H}{\partial \lambda}=F(x,u,t)}$$

Συνεπώς, στο πρόβλημα των δύο οριακών τιμών για βαθμωτά συστήματα, η εξίσωση των συμπληρωματικών καταστάσεων (3.13) μαζί με τη Συνθήκη Βελτιστοποίησης (3.15) και την αρχική διαφορική εξίσωση του συστήματος (3.1) αποτελούν τις αναγκαίες συνθήκες για την ύπαρξη ελαχίστου.

Παρόμοιες σχέσεις προκύπτουν και στην περίπτωση όπου η κατάσταση x και η είσοδος u είναι διανύσματα διαστάσεων n και m αντίστοιχα.
Έστω ότι $x=[\, x_1\ x_2\ .\ .\ .\ x_n]^T$, $u=[\, u_1\ u_2\ .\ .\ .\ u_n]$, $F(x,u,t)=[\, F_1(x,u,t)\ \ F_2(x,u,t)\ .\ .\ .\ F_n(x,u,t,)]^T$.

Ζητάμε τη βέλτιστη είσοδο u^* για την οποία ελαχιστοποιείται ένα κριτήριο της μορφής της σχέσης (3.2).
Εισάγοντας τους παράγοντες Lagrange λ. η ελαχιστοποίηση της J είναι ισοδύναμη προς την ελαχιστοποίηση της J^* :

$$J^*=\int_{t_0}^{t_f}\left\{L(x,u,t)+\sum_{j=1}^{n}\lambda_j(t)\left[F_j(x,u,t)-\dot{x}_j\right]\right\}dt=\int_{t_0}^{t_f}K(x,\dot{x},u,\lambda,t)dt \tag{3.16}$$

όπου

$$K(x,\dot{x},u,\lambda,t)=L(x,u,t)+\sum_{j=1}^{n}\lambda_j(t)\left[F_j(x,u,t)-\dot{x}_j\right] \tag{3.17}$$

Οι εξισώσεις Euler-Lagrange στην περίπτωση αυτή θα είναι :

$$\frac{\partial K}{\partial x_i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{x}_i}\right)=0 \text{ για } i=1,2,........,n \tag{3.18}$$

$$\frac{\partial K}{\partial u_i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{u}_i}\right)=0 \text{ για } i=1,2,........,m \tag{3.19}$$

$$\frac{\partial K}{\partial \lambda_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\lambda}_i}\right) = 0 \text{ για } i = 1,2,........,n \tag{3.20}$$

Επειδή

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{x}_i} = -\lambda_i \tag{3.21}$$

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{u}_i} = 0 \tag{3.22}$$

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{\lambda}_i} = 0 \tag{3.23}$$

και ορίζουμε σαν Hamiltonian συνάρτηση την

$$H = L + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j F_j = L + \lambda^T F \tag{3.24}$$

Η πρώτη εξίσωση Euler-Lagrange γίνεται

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \frac{\partial F_j}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\left\{-\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{x}_i}\right\} = 0 \tag{3.25}$$

από την οποία προκύπτει η συνθήκη των συμπληρωματικών καταστάσεων

$$\dot{\lambda}_i = -\frac{\partial L}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \frac{\partial F_j}{\partial x_i} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \tag{3.26}$$

που μπορούν να γραφτούν σε διανυσματική μορφή ως :

$$\boxed{\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x}} \tag{3.27}$$

όπου

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \left[\frac{\partial H}{\partial x_1} ...... \frac{\partial H}{\partial x_n}\right]^T \tag{3.28}$$

Αντίστοιχα προκύπτει και η συνθήκη βελτιστοποίησης σε διανυσματική μορφή

$$\boxed{\frac{\partial H}{\partial u} = 0} \tag{3.29}$$

όπου

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \left[\frac{\partial H}{\partial u_1}\ldots\ldots\frac{\partial H}{\partial u_n}\right]^T \tag{3.30}$$

ενώ η τελευταία εξίσωση Euler-Lagrange καταλήγει πάλι στο αρχικό σύστημα

$$\boxed{\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = F(x,u,t)}$$

όπου

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} = \left[\frac{\partial H}{\partial \lambda_1}\ldots\ldots\frac{\partial H}{\partial \lambda_n}\right]^T \tag{3.31}$$

4. ΤΟ ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΒΕΛΤΙΣΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ ΓΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΧΡΟΝΟΥ

Θεωρούμε το δυναμικό σύστημα που περιγράφεται στο χώρο κατάστασης σύμφωνα με τη σχέση (3.1) και το ακόλουθο γενικευμένο κριτήριο κόστους που περιέχει τον ξεχωριστό όριο $\Phi\left[x(t_f),t_f\right]$ για την τελική χρονική στιγμή t_f.

$$J = \int_{t_0}^{t_f} L(x,u,t)dt + \Phi\left[x(t_f),t_f\right] \tag{4.1}$$

με τα t_0 και $x(t_0)$ δεδομένα στο αρχικό όριο και γνωστά στο τελικό όριο ένα από τα t_f ή $x(t_f)$. Θεωρώντας την Φ διαφορίσιμη συνάρτηση ,ορίζουμε:

$$J^* = \int_{t_0}^{t_f} \{L(x,u,t) + \dot{\Phi}\left[x(t),t\right]\}dt \tag{4.2}$$

Τότε η ελαχιστοποίηση του κριτηρίου J είναι ισοδύναμη με αυτή του J^* , όπως προκύπτει από τις παρακάτω σχέσεις:

$$\min_u J^* = \min_u \int_{t_0}^{t_f} \left\{ L(x,u,t) + \dot{\Phi}[x(t),t] \right\} dt$$

$$= \min_u \left\{ \int_{t_0}^{t_f} L(x,,u,t)dt + \int_{t_0}^{t_f} \dot{\Phi}[x(t),t]dt \right\}$$

$$= \min_u \left\{ \int_{t_0}^{t_f} L(x,,u,t)dt + \int_{t_0}^{t_f} d\Phi[x(t),t] \right\}$$

$$= \min_u \left\{ \int_{t_0}^{t_f} L(x,,u,t)dt + \Phi[x(t_f),t_f] - \Phi[x(t_0),t_0] \right\}$$

$$= \min_u \left\{ J - \Phi[x(t_0),t_0] \right\}$$

Επειδή όμως η $\Phi[x(t_0),t_0]$ έχει κάποια σταθερή τιμή στο όριο t_0, έπεται ότι:

$$\min_u J = \min_u J^* \tag{4.3}$$

Ταυτόχρονα αναλύοντας την παράγωγο της Φ χρησιμοποιώντας κατά σειρά μερικές παραγωγίσεις , παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \dot{\Phi} = \frac{d\Phi}{dt} &= \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} \right] + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \frac{dt}{dt} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} x_i \right] + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \\ &= \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^T \dot{x} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \end{aligned} \tag{4.4}$$

Αντικαθιστώντας το $\dot{\Phi}$, το κριτήριο κόστους J^* μπορεί να γραφτεί στη μορφή:

$$J^* = \int_{t_0}^{t_f} \{ L(x,u,t) + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^T \dot{x} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \} dt \tag{4.5}$$

Αν σχηματίσουμε τη Lagrangian ,θεωρώντας ως περιορισμούς το σύνολο των καταστατικών εξισώσεων του συστήματος, καταλήγουμε στο ακόλουθο ισοδύναμο κριτήριο:

$$\begin{aligned} J^{**} &= \int_{t_0}^{t_f} \left\{ L(x,u,t) + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^T \dot{x} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \lambda^T \left[F(x.u.t) - \dot{x} \right] \right\} dt \\ &= \int_{t_0}^{t_f} K(x,\dot{x},u,\lambda,t)\,dt \end{aligned} \tag{4.6}$$

όπου

$$\lambda = \left[\lambda_1 ....\lambda_n \right]^T \tag{4.7}$$

το διάνυσμα των παραγόντων Lagrange.

Τότε η ελαχιστοποίηση της J^{**} θα δίνεται από τις εξισώσεις Euler-Lagrange ως προς όλες τις εμφανιζόμενες μεταβλητές x,u,λ.

Έτσι, <u>ως προς το διάνυσμα x</u> θα πρέπει:

$$\frac{\partial K}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{x}} \right) = 0 \tag{4.8}$$

όπου

$$\frac{\partial K}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{ L + \lambda^T F \right\} + \frac{\partial}{\partial x}\left\{ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^T \dot{x} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right\} \tag{4.9}$$

και

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}}\left\{ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^T \dot{x} - \lambda^T \dot{x} \right\} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \lambda \tag{4.10}$$

οπότε

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) - \dot{\lambda} \tag{4.11}$$

θεωρώντας την Hamiltonian

$$H = L + \lambda^T F \tag{4.12}$$

και αντικαθιστώντας τις (4.9), (4.11), στην (4.8) έχουμε:

$$\frac{\partial H}{\partial x} + \dot{\lambda} + \left\{ \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^T \dot{x} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right] - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \right\} = 0 \tag{4.13}$$

Συνεπώς βλέπουμε ότι η πρώτη εξίσωση Euler-LaGrange κατέληξε στην προηγούμενη εξίσωση (4.13) που περιλαμβάνει τη γνωστή εξίσωση των συμπληρωματικών καταστάσεων, όπως προέκυψε στο προηγούμενο κεφάλαιο, προσαυξημένη κατά τον τελευταίο όρο στην αγκύλη. Επειδή όμως:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^T \dot{x}+\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{dt}{dt}$$
$$=\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^T \dot{x}+\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right] \qquad (4.14)$$

ο τελευταίος όρος της εξίσωσης (4.13) στην αγκύλη απαλείφεται και προκύπτει πάλι η εξίσωση των συμπληρωματικών καταστάσεων:

$$\boxed{\dot{\lambda}=-\frac{\partial H}{\partial x}} \qquad (4.15)$$

Από τις υπόλοιπες εξισώσεις Euler-Lagrange ως προς u και ως προς λ, καταλήγουμε αντίστοιχα στη συνθήκη βελτιστοποίησης :

$$\boxed{\frac{\partial H}{\partial u}=0} \qquad (4.16)$$

από την οποία προκύπτει και ο βέλτιστος νόμος ελέγχου, και στην αρχική εξίσωση των δυναμικών του συστήματος:

$$\dot{x}=\frac{\partial H}{\partial \lambda}=F(x,u,t)$$

Η λύση στο γενικευμένο πρόβλημα βέλτιστου ελέγχου για συστήματα συνεχούς χρόνου δίνεται συνεπώς από την επίλυση των διαφορικών εξισώσεων των δυναμικών του συστήματος (3.1) μαζί με την εξίσωση των συμπληρωματικών καταστάσεων (4.15). Ο τελικός νόμος ελέγχου εφαρμόζεται μέσω της συνθήκης βελτιστοποίησης (4.16).

Για να επιλυθούν όμως οι διαφορικές εξισώσεις (3.1) και (4.15), χρειάζονται κάποιες αρχικές ή τελικές τιμές των μεταβλητών τους. Από αυτές έχουμε πάντοτε μόνο την αρχική συνθήκη $x(t_0)$ στο t_0 δεδομένο. Χρειαζόμαστε όμως άλλη μια οριακή συνθήκη. Αυτή θα τη βρούμε στο τελικό όριο t_f, για το οποίο, σύμφωνα με τα προηγούμενα, διακρίνουμε δύο περιπτώσεις :

α) Περίπτωση δεδομένης της τελικής κατάστασης $x(t_f)$ και ελεύθερης της τελικής χρονικής στιγμής t_f.

Τότε ισχύει (βλ. 1^o Μέρος, ειδική περίπτωση Β μη καθορισμένων οριακών συνθηκών) :

$$\left.\left[K-\dot{x}\frac{\partial K}{\partial \dot{x}}\right]\right|_{t_f}=0$$

η οποία μετά τις αντικαταστάσεις δίνει

$$\left.\left\{H+\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^T \dot{x}+\frac{\partial \Phi}{\partial t}-\lambda^T \dot{x}-\dot{x}^T\left[\frac{\partial \Phi}{\partial x}-\lambda\right]\right\}\right|_{t_f}=0$$

ή

$$\left[H + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right] \Bigg|_{t_f} = 0 \qquad (4.17)$$

β) <u>Περίπτωση δεδομένου του τελικού χρόνου</u> t_f και ελεύθερης της τελικής κατάστασης $x(t_f)$.

Τότε αντίστοιχα ισχύει (βλ. 1ο Μέρος, ειδική περίπτωση Α μη καθορισμένων οριακών συνθηκών) :

$$\left. \frac{\partial K}{\partial \dot{x}} \right|_{t_f} = 0$$

που μετά τις αντικαταστάσεις δίνει:

$$\lambda(t_f) = \left. \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right|_{t_f} \qquad (4.18)$$

5. ΤΟ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΡΥΘΜΙΣΗΣ (LQ REGULATORS)

Το γραμμικό τετραγωνικό πρόβλημα ρύθμισης αποτελεί ένα χαρακτηριστικό και ευρέως χρησιμοποιούμενο παράδειγμα της εφαρμογής του βέλτιστου ελέγχου σε <u>γραμμικά</u> δυναμικά συστήματα της μορφής:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \qquad (5.1)$$

έτσι ώστε να ελαχιστοποιούν κάποιο <u>τετραγωνικό</u> (quadratic) κριτήριο κόστους:

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \left[x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t) \right] dt + \frac{1}{2} x^T(t_f)Sx(t_f) \qquad (5.2)$$

όπου το t_0, $x(t_0)$ και t_f θεωρούνται δεδομένα, ενώ το $x(t_f)$ αφήνεται ελεύθερο.

Για το παραπάνω τετραγωνικό ως προς τις καταστάσεις κριτήριο, θεωρούμε ότι οι <u>μήτρες βάρους</u> Q,R και S είναι συμμετρικές τετραγωνικές και ότι επιπλέον η μήτρα R είναι <u>θετικά ορισμένη</u> και οι Q και S είναι <u>θετικά ημιορισμένες</u> έτσι ώστε να ικανοποιείται η Συνθήκη 3 του Κεφ. 2.

Σύμφωνα λοιπόν με όσα αναλύθηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο ,για την εύρεση του βέλτιστου ελέγχου φτιάχνουμε την Hamiltonian για το συγκεκριμένο πρόβλημα:

$$H = \frac{1}{2}\left(x^T Q x + u^T R u\right) + \lambda^T \left[Ax + Bu\right] \tag{5.3}$$

Τότε η συνθήκη βελτιστοποίησης δίνει:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = Ru + B^T \lambda = 0 \tag{5.4}$$

και η εξίσωση συμπληρωματικών καταστάσεων γίνεται:

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -Qx - A^T \lambda \tag{5.5}$$

με οριακή συνθήκη στον τελικό χρόνο t_f :

$$\lambda\left(t_f\right) = \frac{\partial}{\partial x\left(t_f\right)} = \left[\frac{1}{2} x^T (t_f) S x(t_f)\right] = Sx(t_f) \tag{5.6}$$

<u>λύση ανοιχτού βρόχου:</u>

Συνοψίζοντας λοιπόν τα προηγούμενα φθάνουμε στην παρακάτω βέλτιστη λύση ανοιχτού βρόχου (μη ανατροφοδοτούμενη από το διάνυσμα κατάστασης x) όπως προκύπτει από τη σχέση (5.4):

$$\boxed{u = -R^{-1} B^T \lambda} \tag{5.7}$$

όπου το λ δίνεται από τη λύση του συστήματος συμπληρωματικών καταστάσεων (5.5) μαζί με την αρχική εξίσωση (5.1) που περιγράφει τη δυναμική συμπεριφορά του συστήματος:

$$\boxed{\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix}} \tag{5.8}$$

με οριακές συνθήκες στο t_0 και t_f :

$$x\left(t_0\right) = x_0 \tag{5.9}$$

και

$$\lambda\left(t_f\right) = Sx(t_f) \tag{5.10}$$

<u>Λύση κλειστού βρόχου:</u>

Με στόχο να φθάσουμε από τη λύση ανοιχτού βρόχου (5.7) σε μια λύση κλειστού βρόχου:

$$u(t) = K(t)x(t) \tag{5.11}$$

θεωρούμε ότι το διάνυσμα συμπληρωματικών καταστάσεων λ μπορεί να γραφεί σε σχέση με το διάνυσμα καταστάσεων του συστήματος:

$$\lambda\left(t\right) = P(t)x(t) \tag{5.12}$$

και ψάχνουμε για τη μήτρα μετασχηματισμού P(t). (Αξίζει να σημειωθεί ότι η λύση αυτή είναι σύμφωνη με τη συνθήκη (5.10) στο τελικό όριο).

Χρησιμοποιώντας την (5.12) ώστε αντικαταστήσουμε το λ ,η (5.8) δίνει:

$$\dot{x} = Ax - BR^{-1}B^{T}Px \tag{5.13}$$

και

$$\dot{\lambda} = -Qx - A^{T}Px \tag{5.14}$$

αλλά διαφορίζοντας την (5.12) προκύπτει για το $\dot{\lambda}$:

$$\dot{\lambda} = \dot{P}x + P\dot{x} \tag{5.15}$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (5.13) και (5.15) παίρνουμε:

$$\left[\dot{P} + PA + A^{T}P - PBR^{-1}B^{T}P + Q\right]x(t) = 0 \tag{5.16}$$

Επειδή η προηγούμενη σχέση πρέπει να ισχύει για οποιοδήποτε x(t) ο όρος μπροστά από το x(t) πρέπει να είναι μηδέν. Έτσι η μήτρα P –η οποία όπως εύκολα βλέπουμε είναι μια συμμετρική nxn συμμετρική μήτρα με n(n+1)/2 διαφορετικά στοιχεία και όπως αποδεικνύεται πρέπει να είναι επίσης και θετικά ορισμένη- δίνεται από τη λύση της διαφορικής εξίσωσης Riccati :

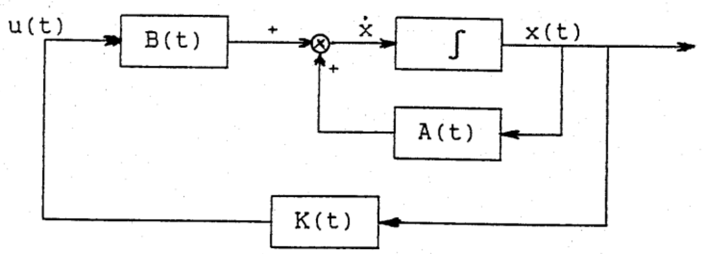
$$\boxed{\dot{P} = -PA - A^{T}P + PBR^{-1}B^{T}P - Q} \tag{5.17}$$

με οριακή συνθήκη που προκύπτει από τις σχέσεις (5.10) και (5.12) :

$$\boxed{P(t_f) = S} \tag{5.18}$$

Τότε ,αντίστοιχα , η κλειστού βρόχου λύση θα ορίζεται από την :

$$\boxed{K(t) = -R^{-1}B^{T}P(t)} \tag{5.19}$$



Σχήμα 5.1. Το κλειστού βρόχου βέλτιστο σύστημα

<u>Βασική παρατήρηση</u>:

Όπως αμέσως φαίνεται από τις σχέσεις (5.17) ως (5.19) η μήτρα ανάδρασης K(t) είναι ανεξάρτητη του x(t). Αυτό αποτελεί σπουδαίο πλεονέκτημα αφού δίνει τη δυνατότητα στην εξίσωση Riccati να μπορεί να λυθεί εκ των προτέρων (όχι on-line) ,αρχίζοντας από την τελική τιμή $P(t_f)$ και πηγαίνοντας προς την αρχή, έτσι ώστε τα K(t) να προαποθηκεύουν στη μνήμη ενός υπολογιστή και να χρησιμοποιηθούν στη συνέχεια κατά τη λειτουργία του συστήματος.

Σχόλια

1) Είτε στην ανοικτού βρόχου λύση είτε στην κλειστού βρόχου λύση ο στόχος είναι να βρεθεί το κατάλληλο u(t). Η είσοδος και μόνο είναι η παράμετρος του συστήματος στην οποία μπορώ να παρέμβω. Άρα η ελαχιστοποίηση έχει νόημα ως προς u(t). Δηλαδή για να είναι πάντοτε η λύση τέτοια ώστε να ελαχιστοποιείται το κριτήριο κόστους πρέπει να ισχύει η δεύτερη ικανή συνθήκη:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} \rangle 0 \qquad \text{ή} \qquad R \rangle 0 \tag{5.20}$$

2) Για να έχει νόημα η ελαχιστοποίηση του κριτηρίου πρέπει :

α) για την περίπτωση λύσης ανοικτού βρόχου να ελαχιστοποιώ ένα κριτήριο J που να ικανοποιεί τη Συνθήκη 3 του Κεφ. 2 δηλαδή πρέπει :

$$\frac{1}{2}\left(x^T Q x + u^T R u\right) \rangle 0 \tag{5.21}$$

και

$$\frac{1}{2} x^T(t_f) S x(t_f) \geq 0 \tag{5.22}$$

Αυτό ισχύει πάντοτε όταν :

$$Q \geq 0 \tag{5.23}$$

και

$$S \geq 0 \tag{5.24}$$

αφού σύμφωνα με το προηγούμενο σχόλιο η R είναι οπωσδήποτε θετικά ορισμένη.

β) για την περίπτωση λύσης κλειστού βρόχου πρέπει ομοίως να ισχύουν οι σχέσεις (5.21) και (5.22) .Στην περίπτωση αυτή όμως η (5.21) γίνεται:

$$\frac{1}{2}\left(x^T Q x + x^T P^T B R^{-1} B^T P x\right) = \frac{1}{2} x^T W x \tag{5.25}$$

με :

$$W = Q + P^T B R^{-1} B^T P \tag{5.26}$$

πράγμα που συνεπάγεται ότι

$$W \rangle 0 \tag{5.27}$$

και

$$S \geq 0 \tag{5.28}$$

Επειδή όμως η R είναι οπωσδήποτε θετικά ορισμένη, από την (5.26) προκύπτει ότι η Q είναι δυνατό να είναι αρνητικά ημιορισμένη αρκεί να ισχύει η (5.27).

3) Όπως φαίνεται από τις σχέσεις (5.17) και (5.18) η εξίσωση Riccati λύνεται αρχίζοντας από την οριακή τιμή για $t=t_f$ και πηγαίνοντας ανάποδα προς τα πίσω στο χρόνο, δηλαδή προς το αρχικό όριο t_0.

Ειδική περίπτωση: Το πρόβλημα βέλτιστου ελέγχου ελάχιστης ενέργειας εισόδου.

Το πρόβλημα αυτό μπορεί να θεωρηθεί σαν μια ειδική περίπτωση του προβλήματος βέλτιστης ρύθμισης για Q=0. Τότε η βέλτιστη λύση θα δίνεται από μια μήτρα ανάδρασης σύμφωνα με τη σχέση (5.19) όπου όμως τώρα η εξίσωση Riccati θα είναι:

$$\boxed{\dot{P} = -PA - A^T P + PBR^{-1}B^T P} \tag{5.29}$$

Αν θεωρήσουμε την αντίστροφη της P :

$$\Lambda = P^{-1} \tag{5.30}$$

τότε η παράγωγος της Λ θα είναι :

$$\dot{\Lambda} = -\Lambda \dot{P} \Lambda \tag{5.31}$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (5.29) και (5.30) εύκολα προκύπτει ότι ισχύει

$$\boxed{\dot{\Lambda} = A\Lambda + \Lambda A^T - BR^{-1}B^T} \tag{5.32}$$

Η εξίσωση (5.32) είναι γραμμική και είναι πολύ ευκολότερο να χρησιμοποιηθεί αντί της Riccati (5.29) αφού η λύση της δίνεται κατευθείαν από την ακόλουθη έκφραση:

$$\Lambda(t) = \Psi(t,t_0)\Lambda(t_0)\Psi^T(t,t_0) - \int_{t_0}^{t_f} \Psi(t,\tau)BR^{-1}B^T\Psi^T(t,\tau)d\tau \tag{5.33}$$

Λύση απείρου χρόνου ($t_f \rightarrow \infty$)

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση κατά την οποία ο βέλτιστος έλεγχος κλειστού βρόχου επεκτείνεται στο χρόνο. Μαθηματικά αυτό εκφράζεται με την επέκταση του τελικού ορίου t_f στο άπειρο, οπότε και η λύση που προκύπτει ονομάζεται αντίστοιχα λύση απείρου χρόνου. Τότε το κριτήριο κόστους γίνεται :

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty} \left[x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t)\right]dt \tag{5.34}$$

Για σύστημα ευσταθές (που προκύπτει από την ελαχιστοποίηση ενός κριτηρίου κόστους ως προς τις καταστάσεις) είναι προφανές ότι η λύση άπειρου χρόνου πρέπει να οδηγήσει σε κάποια μόνιμη κατάσταση λειτουργίας (steady state). Για συστήματα αμετάβλητα στο χρόνο (invariant time systems) που βρίσκονται στη μόνιμη κατάσταση το πρόβλημα ρύθμισης περιγράφεται από αλγεβρικές και όχι από διαφορικές εξισώσεις. Άμεσο επακόλουθο είναι ότι και ο βρόχος ανάδρασης ορίζεται πλέον από μια σταθερή τιμή κέρδους :

$$K(t) = K \tag{5.35}$$

η οποία θα προέρχεται από τη λύση μόξνι9μης κατάστασης της εξίσωσης Riccati, δηλ. από τη λύση της αλγεβρικής εξίσωσης Riccati που προκύπτει για :

$$\dot{P}(t) = 0$$

και είναι :

$$\boxed{PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0} \tag{5.36}$$

με το κέρδος ανάδρασης να δίνεται από τη σχέση (5.19).

Επειδή όμως η εξίσωση Riccati (5.17) με την οριακή συνθήκη (5.18) λύνεται προς τα πίσω στο χρόνο, αυτή φτάνει στη μόνιμη κατάσταση που εκφράζεται από την αλγεβρική εξίσωση Riccati (5.36) όσο πηγαίνουμε από το t_f προς το t_0. Για t_f άπειρο (δηλ. πρακτικά πολύ μεγάλο) αφού η μήτρα βάρους στο τελικό όριο S είναι 0 η λύση της Riccati θα ξεκινάει από την τιμή :

$$P(\infty) = 0 \tag{5.37}$$

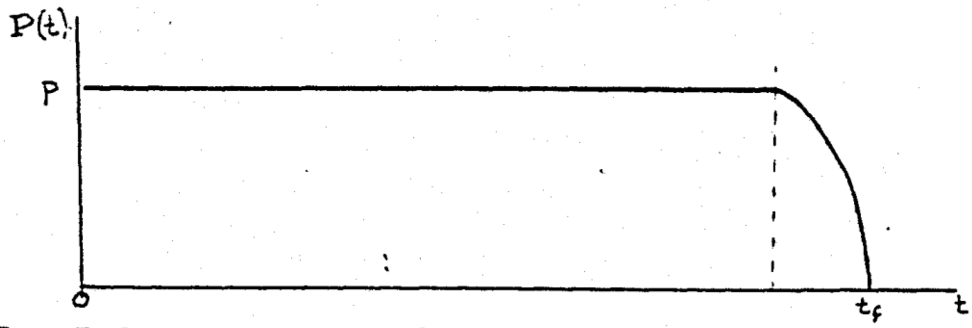
και θα πηγαίνει σε κάποια σταθερή τιμή P για χρόνους που πλησιάζουν το t_0 ,όπως δείχνεται στο σχήμα (5.2).

Έτσι για προβλήματα στα οποία το τελικό όριο πηγαίνει στο άπειρο ,η λύση κλειστού βρόχου είναι εξαρχής (από το t_0) <u>σταθερή</u> και δίνεται από τη σχέση :

$$\boxed{K = -R^{-1}B^T P} \tag{5.38}$$

όπου P η λύση της αλγεβρικής Riccati (5.36).

Λόγω της προφανούς απλούστευσης στη λύση της εξίσωσης Riccati που οδηγεί σε σταθερή μήτρα ανάδρασης η βέλτιστη λύση απείρου χρόνου είναι η περισσότερο διαδεδομένη και πρακτικά εφαρμόσιμη μέθοδος σχεδιασμού βέλτιστου ελέγχου για γραμμικά δυναμικά συστήματα.



Σχ. 5.2. Η λύση της διαφορικής Riccati για $t_f \longrightarrow \infty$

Βέλτιστος Έλεγχος και Ευστάθεια

Στο πρώτο κεφάλαιο, σκιαγραφώντας τις απαιτήσεις για ένα ικανοποιητικό σχεδιασμό ελέγχου ορίσαμε σα βασική προϋπόθεση το προκύπτον σύστημα να είναι ευσταθές, δηλ. οι πόλοι του να βρίσκονται στο αριστερό ημιεπίπεδο των μιγαδικών αριθμών. Με το βέλτιστο έλεγχο, αφού το χρησιμοποιούμενο κριτήριο κόστους απαιτεί την ελαχιστοποίηση μιας συναρτησοειδούς ως προς τις καταστάσεις και τις εισόδους του συστήματος, είναι προφανές ότι ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε να είναι δυνατή η ελαχιστοποίηση είναι το προκύπτον σύστημα να είναι ευσταθές.

Στην περίπτωση του προβλήματος της γραμμικής τετραγωνικής ρύθμισης η ευστάθεια αποδεικνύεται εύκολα με τη χρήση της δεύτερης μεθόδου Lyapunov.

Συγκεκριμένα, το κλειστό σύστημα περιγράφεται από την :

$$\dot{x} = (A + BK)X \tag{5.39}$$

όπου:

$$x(0) = x_0 \tag{5.40}$$

Σύμφωνα λοιπόν με τη μέθοδο Lyapunov ,προκύπτει ότι ένα γραμμικό σύστημα της μορφής της εξίσωσης (5.39) είναι ασυμπτωτικά ευσταθές στο σημείο x=0, εάν και μόνο εάν για κάποια δεδομένη θετικά ορισμένη, πραγματική, συμμετρική μήτρα N υπάρχει μια θετικά ορισμένη, πραγματική, συμμετρική μήτρα P ώστε να ικανοποιεί την :

$$P(A + BK) + (A + BK)^T P = -N - \frac{\partial P}{\partial t} \tag{5.41}$$

(Σημειώνεται ότι ο τελευταίος όρος του β’ μέλους της εξ. (5.41) απαλείφεται για χρονικά αμετάβλητα συστήματα).

Αλλά αν η K έχει βρεθεί με βέλτιστο τρόπο θα υπάρχει κάποια P που θα προκύπτει από την εξίσωση Riccati (5.17) ή από την (5.36) για την περίπτωση που t_f τείνει στο άπειρο. Επειδή η (5.17) μπορεί ισοδύναμα να γραφτεί στη μορφή:

$$P(A + BK) + (A + BK)^T P = -\left[-Q + K^T RK + \dot{P}\right] \tag{5.42}$$

συνάγεται αμέσως τι συμπέρασμα ότι ικανοποιείται η κατά Lyapunov συνθήκη ευστάθειας (5.41) για P θετικά ορισμένη, πραγματικά και συμμετρική.

Αντίστοιχα η συνθήκη ευστάθειας ικανοποιείται και για τη λύση απείρου χρόνου αφού τότε ισχύει :

$$P(A + BK) + (A + BK)^T P = -\left[Q + K^T RK\right] \tag{5.43}$$

6. ΤΟ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΒΕΛΤΙΣΤΗΣ ΠΑΡΑΚΟΛΟΥΘΗΣΗΣ ή Ο ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΣΕΡΒΟΜΗΧΑΝΙΣΜΟΣ
(LINEAR TRACKING PROBLEM ή LINEAR SERVOMECHANISM)

Το γραμμικό τετραγωνικό πρόβλημα βέλτιστης παρακολούθησης έχει σαν αντικείμενο τη σχεδίαση του βέλτιστου ελέγχου που οδηγεί την έξοδο κάποιου γραμμικού δυναμικού συστήματος να ακολουθήσει κάποια είσοδο αναφοράς σύμφωνα με κάποιο τετραγωνικό κριτήριο σφάλματος ως προς την είσοδο αναφοράς.

Η ονομασία σερβομηχανισμός έχει προέλθει από τις λέξεις servant και mechanism που σημαίνει ένα μηχανισμό υπηρέτη και ιστορικά έχει μείνει από τη χρήση του σε σερβοκινητήρες.

Έστω λοιπόν το γραμμικό δυναμικό σύστημα που δίνεται από τη σχέση (5.1) :

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

με έξοδο

$$y(t) = C(t)x(t) \tag{6.1}$$

για το οποίο θέλουμε η έξοδος να ακολουθεί κάποια <u>μη μηδενική</u> είσοδο αναφοράς r(t).

Αν ορίσουμε το σφάλμα e μεταξύ της εξόδου και του σήματος αναφοράς:

$$e(t) = y(t) - r(t) \tag{6.2}$$

το κριτήριο που ελαχιστοποιούμε είναι το ακόλουθο :

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}\left[e^T(t)Q(t)e(t) + u^T(t)R(t)u(t)\right]dt + \frac{1}{2}e^T(t_f)Se(t_f) \tag{6.3}$$

όπου το $t_0, x(t_0)$ και t_f θεωρούνται δεδομένα, ενώ το $x(t_f)$ αφήνεται ελεύθερο. Οι μήτρες βάρους Q,R,S λαμβάνονται όπως στην περίπτωση του κεφαλαίου 5, πραγματικές, συμμετρικές, τετραγωνικές, με τη μήτρα R <u>θετικά ορισμένη</u> και τις Q και S <u>θετικά ημιορισμένες</u>.

Η Hamiltonian για το συγκεκριμένο πρόβλημα είναι :

$$H = \frac{1}{2}(Cx - r)^T Q(Cx - r) + \frac{1}{2}u^T Ru + \lambda^T\left[Ax + Bu\right] \tag{6.4}$$

οπότε η συνθήκη βελτιστοποίησης δίνει όπως και στην περίπτωση του προβλήματος βέλτιστης ρύθμισης:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = Ru + B^T\lambda = 0 \tag{6.5}$$

ενώ η εξίσωση συμπληρωματικών καταστάσεων γίνεται:

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\left(C^Y QCx + A^T\lambda - C^T Qr\right) \tag{6.6}$$

με οριακή συνθήκη στον τελικό χρόνο t_f :

$$\lambda(t_f) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{2}(Cx-r)^T S(Cx-r)\right]\Bigg|_{t=t_f} = C^T SCx(t_f) - C^T Sr(t_f) \qquad (6.7)$$

<u>Λύση ανοικτού βρόχου:</u>

Όπως προκύπτει από τη σχέση (6.5), η βέλτιστη λύση ανοιχτού βρόχου είναι:

$$\boxed{u = -R^{-1}B^T\lambda} \qquad (6.8)$$

όπου το λ δίνεται από τη λύση του συστήματος συμπληρωματικών καταστάσεων (6.6) μαζί με την αρχική εξίσωση (5.1) που περιγράφει τη δυναμική συμπεριφορά του συστήματος:

$$\boxed{\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{\lambda}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -C^TQC & -A^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ \lambda\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ C^TQ\end{bmatrix}r} \qquad (6.9)$$

με οριακές συνθήκες στο t_0 και στο t_f :

$$x(t_0)=x_0 \qquad (6.10)$$

και

$$\lambda(t_f) = C^T S\left[Cx(t_f) - r(t_f)\right] \qquad (6.11)$$

<u>Λύση κλειστού βρόχου</u> :

Για να προσδιορίσουμε μια λύση κλειστού βρόχου, θεωρούμε ότι το διάνυσμα συμπληρωματικών καταστάσεων λ μπορεί να γραφεί σαν συνάρτηση του διανύσματος καβτάστασης x. Επειδή όμως σύμφωνα με τη σχέση (6.8) ,η είσοδος είναι ανάλογη του λ, και επειδή στη μόνιμη κατάσταση θα πρέπει το σφάλμα e να μηδενίζεται και επομένως να ισχύει:

$$y(t)=r(t) \qquad (6.12)$$

πράγμα που σημαίνει ότι το σημείο ισορροπίας του συστήματος δε βρίσκεται πλέον στο σημείο x=0 .Το γεγονός αυτό συνεπάγεται ότι για τη λύση κλειστού βρόχου θα πρέπει να δρα επίσης και μια ανεξάρτητη από το διάνυσμα κατάστασης συνιστώσα σαν είσοδος που θα εξασφαλίζει την ισορροπία του συστήματος σε κάποιο μη μηδενικό σημείο. Γι' αυτό η λ(t) δεν μπορεί να περιγραφεί μόνο σα συνάρτηση του x(t) αλλά πρέπει να έχει και μια επιπλέον ανεξάρτητη του x συνιστώσα. Θα είναι δηλαδή:

$$\lambda(t) = P(t)x(t) + \xi(t) \qquad (6.13)$$

Έτσι για τη λύση κλειστού βρόχου πρέπει να ορίσουμε τη μήτρα μετασχηματισμού P(t) καθώς και την αυθαίρετη συνιστώσα ξ(t).

Χρησιμοποιώντας την (6.13) έτσι ώστε να απαλείψουμε το λ, η (6.9) δίνει:

$$\dot{x} = \left[A - BR^{-1}B^T P\right]x - BR^{-1}B^T \xi \tag{6.14}$$

και

$$\dot{\lambda} = \left[-C^T QC - A^T P\right]x + C^T Qr - A^T \xi \tag{6.15}$$

Διαφορίζοντας όμως την (6.13) προκύπτει για το $\dot{\lambda}$:

$$\dot{\lambda} = \dot{P}x + P\dot{x} + \dot{\xi} \tag{6.16}$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (6.14) ως (6.16) παίρνουμε:

$$\begin{aligned} &\left[\dot{P} + PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + C^T QC\right]x(t) + \\ &+ \left[\dot{\xi}(t) - PBR^{-1}B^T \xi(t) + A^T \xi(t) - C^T Qr(t)\right] = 0 \end{aligned} \tag{6.17}$$

Επειδή η προηγούμενη σχέση πρέπει να ισχύει για οποιαδήποτε x(t),ξ(t) και r(t) ο όρος μπροστά από το x(t) πρέπει να είναι μηδέν. Έτσι η μήτρα P –η οποία όπως εύκολα βλέπουμε είναι μια τετραγωνική nxn συμμετρική μήτρα με n(n+1)/2 διαφορετικά στοιχεία και που όπως αποδεικνύεται πρέπει να είναι επίσης και θετικά ορισμένη- δίνεται από τη λύση της διαφορικής εξίσωσης Riccati:

$$\boxed{\dot{P} = -PA - A^T P + PBR^{-1}B^T P - C^T QC} \tag{6.18}$$

με οριακά συνθήκη που προκύπτει από τις σχέσεις (6.11) και (6.13) :

$$\boxed{P(t_f) = C^t SC} \tag{6.19}$$

Για τον ίδιο λόγο και ο δεύτερος όρος της (6.17) πρέπει να είναι ομοίως μηδέν, οπότε προκύπτει για την ξ(t) η διαφορική εξίσωση:

$$\boxed{\dot{\xi} = \left[PBR^{-1}B^T - A^T\right]\xi + C^T Qr} \tag{6.20}$$

με οριακές συνθήκες :

$$\boxed{\xi(t_f) - C^T Sr(t_f)} \tag{6.21}$$

Τότε η κλειστού βρόχου λύση θα ορίζεται από την :

$$u(t) = -R^{-1}B^T\left[P(t)x(t) + \xi(t)\right] = K(t)x(t) - R^{-1}B^T \xi(t) \tag{6.22}$$

Στο σημείο αυτό αξίζει να σημειωθεί ότι η Βασική παρατήρηση που υπογραμμίσθηκε στο κεφάλαιο 5 εξακολουθεί να ισχύει. Δηλαδή όπως αμέσως φαίνεται από τοις σχέσεις (6.18), (6.19) και (6.22) η μήτρα ανάδρασης είναι ανεξάρτητη του x(t). Αυτό αποτελεί σπουδαίο πλεονέκτημα αφού δίνει τη δυνατότητα στην εξίσωση Riccati να μπορεί να λυθεί εκ των προτέρων (όχι on-line) ,αρχίζοντας από την τελική τιμή $P(t_f)$ και πηγαίνοντας προς την αρχή, έτσι ώστε η μήτρα ανάδρασης να μπορεί να προαποθηκευθεί στη μνήμη ενός υπολογιστή και να χρησιμοποιηθεί στη συνέχεια κατά τη λειτουργία του συστήματος.

Επίσης από τις σχέσεις (6.20) και (6.21) γίνεται σαφές ότι και η αυθαίρετη συνιστώσα ξ(t) μπορεί κατά ανάλογο τρόπο να προϋπολογιστεί αν γνωρίζουμε εκ των προτέρων τη συνάρτηση της εισόδου αναφοράς.

Σημειώνεται επίσης ότι τα Σχόλια 1 και 3 που διατυπώθηκαν στο Κεφ. 5 για το αντίστοιχο πρόβλημα ρύθμισης ισχύουν και στην παρούσα περίπτωση.

Λύση απείρου χρόνου ($t_f \to \infty$)

Για τη λύση απείρου χρόνου το κριτήριο κόστους γίνεται :

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}\left[e^T(t)Q(t)e(t) + u^T(t)R(t)u(t)\right]dt \qquad (6.23)$$

Για σύστημα ευσταθές είναι προφανές ότι η λύση απείρου χρόνου πρέπει να οδηγήσει τελικά σε κάποια μόνιμη κατάσταση λειτουργίας (steady state). Για συστήματα αμετάβλητα στο χρόνο (invariant time systems) που βρίσκονται στη μόνιμη κατάσταση το πρόβλημα παρακολούθησης περιγράφεται από αλγεβρικές και όχι διαφορικές εξισώσεις όταν :

$$r(t) = \bar{r} = \text{σταθερά} \qquad (6.24)$$

Άμεσο επακόλουθο είναι ότι και ο βρόχος ανάδρασης ορίζεται πλέον από μια σταθερή τιμή κέρδους :

$$K(t)=K \qquad (6.25)$$

η οποία θα προέρχεται από τη λύση μόνιμης κατάστασης της εξίσωσης Riccati ,δηλ. από τη λύση της αλγεβρικής εξίσωσης Riccati που προκύπτει για :

$$\dot{P}(t) = 0$$

και είναι:

$$\boxed{PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + C^T QC = 0} \qquad (6.26)$$

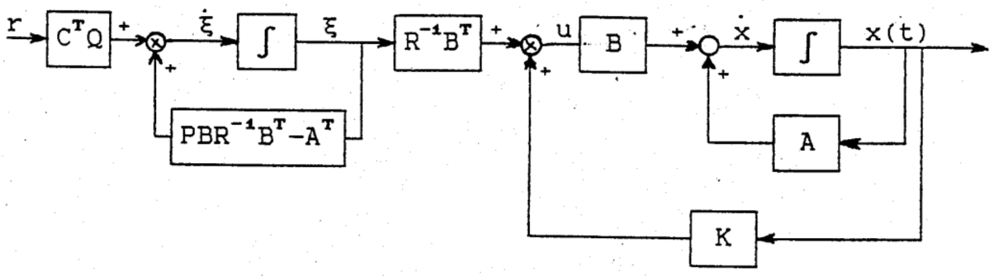
και τη λύση της αλγεβρικής ως προς ξ εξίσωσης όπως προκύπτει από την (6.20) για $\dot{\xi} = 0$:

$$\boxed{\xi = \left[A^T - PBR^{-1}B^T\right]^{-1} C^T Q\bar{r}} \qquad (6.27)$$

Επειδή όμως η εξίσωση Riccati (6.18) με την οριακή συνθήκη (6.19) λύνεται προς τα πίσω στο χρόνο, αυτή φτάνει στη μόνιμη κατάσταση που εκφράζεται από την αλγεβρική εξίσωση Riccati (6.26) όσο πηγαίνουμε από το t_f προς το t_0. Για t_f άπειρο (δηλ. πρακτικά πολύ μεγάλο) αφού η μήτρα βάρους στο τελικό όριο S είναι 0 η λύση της Riccati θα ξεκινάει από την τιμή P(∞)=0 και θα πηγαίνει σε κάποια σταθερή τιμή P για χρόνους που πλησιάζουν το t_0 .Έτσι για προβλήματα στα οποία το τελικό όριο πηγαίνει στο άπειρο, η λύση κλειστού βρόχου είναι εξαρχής (από το t_0) σταθερή και δίνεται από τη σχέση :

$$\boxed{K = -R^{-1}B^T P} \tag{6.28}$$

όπου P η λύση της αλγεβρικής Riccati (6.26).



Σχήμα 6.1. Το κλειστού βρόχου βέλτιστο σύστημα

7. ΒΕΛΤΙΣΤΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ

Για ένα βαθμωτό σύστημα διακριτού χρόνου που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών :

$$x(j+1) = F[x(j), u(j)] \tag{7.1}$$

με δεδομένο το αρχικό $x(0)=x_0$,
ο βέλτιστος έλεγχος συνίσταται στην εύρεση της βέλτιστης εισόδου u^* σε κάθε βήμα από 0 μέχρι N-1 έτσι ‘ώστε να ελαχιστοποιείται το κριτήριο κόστους :

$$J = \sum_{j=0}^{N-1} L_j [x(j), u(j)] + \Phi[x(N)] \tag{7.2}$$

Το πρόβλημα αυτό είναι για συστήματα διακριτού χρόνου το αντίστοιχο αυτού που εξετάσθηκε στα Κεφάλαια 3 και 4 για συστήματα συνεχούς χρόνου. Συνίσταται δε στην ελαχιστοποίηση της συνάρτησης J σε κάθε βήμα i ($0 \le i \le N-1$),υπό τον περιορισμό της εξίσωσης διαφορών του συστήματος. Είναι δηλαδή ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης υπό ισοτικούς περιορισμούς.

Εισάγοντας λοιπόν τους παράγοντες Lagrange σχηματίζουμε τη Lagrangian για κάθε βήμα I :

$$\sum_{j=0}^{i} L_j [x(j), u(j)] + \lambda(j+1)\{F[x(j), u(j)] - x(j+1)\} \tag{7.3}$$

Η ελαχιστοποίηση της ως προς u και x θα δώσει τις αναγκαίες συνθήκες σε κάθε για την εύρεση του βέλτιστου u^*.

Έτσι για τον αρχικό έλεγχο (i=0) θα ισχύει :

$$\frac{\partial L_0}{\partial u(0)} + \lambda(1)\frac{\partial F[x(0),u(0)]}{\partial u(0)} = 0 \tag{7.4}$$

με x(0)=x_0 δεδομένο.

Για το πρώτο βήμα (i=1) αντίστοιχα θα είναι :

$$\frac{\partial L_1}{\partial u(0)} + \lambda(2)\frac{\partial F[x(1),u(1)]}{\partial u(1)} = 0 \tag{7.5}$$

και

$$\frac{\partial L_1}{\partial x(1)} + \lambda(2)\frac{\partial F[x(1),u(1)]}{\partial x(1)} - \lambda(1) = 0 \tag{7.6}$$

Αντίστοιχα για το I βήμα (όπου 0 ≤ i ≤ N-1) θα είναι :

$$\frac{\partial L_i}{\partial u(i)} + \lambda(i+1)\frac{\partial F[x(i),u(i)]}{\partial u(i)} = 0 \tag{7.7}$$

και

$$\frac{\partial L_i}{\partial x(i)} + \lambda(i+1)\frac{\partial F[x(i),u(i)]}{\partial x(i)} - \lambda(i) = 0 \tag{7.8}$$

ενώ για το τελικό όριο i=N θα ισχύει :

$$\boxed{\lambda(N) = \frac{\partial}{\partial x(N)}\Phi[x(N)]} \tag{7.9}$$

Ορίζοντας σαν <u>Hamiltonian συνάρτηση</u> την :

$$H(i) = L_i + \lambda(i+1)F[x(i),u(i)] \tag{7.10}$$

τότε για το κάθε βήμα I ,ο βέλτιστος έλεγχος θα δίνεται από τη συνθήκη :

$$\frac{\partial H(i)}{\partial u(i)} = 0, \qquad i = 0,1,..........., N-1 \tag{7.11}$$

ενώ οι παράγοντες Lagrange θα ορίζονται από την :

$$\lambda(i) = \frac{\partial H(i)}{\partial x(i)}, \qquad i = 1,2,........., N-1 \tag{7.12}$$

με τελική τιμή αυτή που δίνεται από τη σχέση (7.9).

Στην περίπτωση κατά την οποία η σχέση (7.1) περιγράφει ένα σύστημα πολλών εισόδων – πολλών εξόδων, είναι δηλαδή

$x(j)=\begin{bmatrix} x_1(j) & x_2(j) & x_3(j) & ....x_n(j) \end{bmatrix}^T$ ένα n τάξης διάνυσμα και

$u(j)=\begin{bmatrix} u_1(j) & u_2(j) & u_3(j) & ....u_m(j) \end{bmatrix}^T$ ένα m τάξης διάνυσμα και αντίστοιχα :

$$F[x(j),u(j)]=[F_1\{x(j),u(j)\},F_2\{x(j),u(j)\},......,F_n\{x(j),u(j)\}]^T$$

τότε η ελαχιστοποίηση της J καταλήγει σε ίδιες ακριβώς συνθήκες με τις προηγούμενες (7.11),(7.12) και (7.9), σε διανυσματική όμως μορφή, αφού:

$$\lambda(j)=\begin{bmatrix} \lambda_1(j) & \lambda_2(j) & \lambda_3(j)...\lambda_n(j) \end{bmatrix}^T \qquad (7.13)$$

είναι ένα διάνυσμα n τάξης.

Τότε αντίστοιχα η Hamiltonian έχει τη μορφή:

$$H(j)=L_j[x(j),u(j)]+\lambda^T(j+1)F[x(j),u(j)] \qquad (7.14)$$

ή

$$H(j)=L_j[x(j),u(j)]+\sum_{k=1}^{n}\lambda_k(j+1)F_k[x(j),u(j)] \qquad (7.15)$$

8. ΤΟ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΡΥΘΜΙΣΗΣ (LQ) ΓΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ

Ας θεωρήσουμε το γραμμικό σύστημα διακριτού χρόνου που περιγράφεται από την αναδρομική σχέση :

$$x(j+1)=F(j)x(j)+G(j)u(j), \qquad 0 \le j \le N \qquad (8.1)$$

με δεδομένη την τιμή του x για j=0 :

$$x(0)=x_0 \qquad (8.2)$$

Κατ’ αναλογία προς το αντίστοιχο πρόβλημα για συστήματα συνεχούς χρόνου, ζητάμε να βρούμε σε κάθε βήμα j από μηδέν μέχρι N-1, τη βέλτιστη είσοδο u(j) έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται κάποιο <u>τετραγωνικό</u> κριτήριο κόστους της μορφής :

$$J = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{N-1}\left[x^T(j)Qx(j) + u^T(j)Ru(j)\right] + \frac{1}{2}x^T(N)Sx(N) \qquad (8.3)$$

Για μήτρες βάρους Q,R και S έχουμε ότι πρέπει να είναι συμμετρικές τετραγωνικές και επιπλέον η μήτρα R πρέπει να είναι θετικά ημιορισμένη και οι Q και S θετικές ημιορισμένες έτσι ώστε να ικανοποιείται η Συνθήκη 3 του Κεφ. 2.

Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα της ανάλυσης που έγινε στο προηγούμενο κεφάλαιο, για την εύρεση του βέλτιστου ελέγχου φτιάχνουμε την Hamiltonian για το συγκεκριμένο πρόβλημα:

$$H(j) = \frac{1}{2}\left[x^T(j)Qx(j) + u^T(j)Ru(j)\right] + \lambda^T(j+1)\left[F(j)x(j) + G(j)u(j)\right] \qquad (8.4)$$

Τότε η συνθήκη βελτιστοποίησης δίνει:

$$\frac{\partial H(j)}{\partial u(j)} = Ru(j) + G^T\lambda(j+1) = 0 \qquad (8.5)$$

ενώ τα λ(j) βρίσκονται από την αναδρομική σχέση :

$$\lambda(j) = \frac{\partial H(j)}{\partial x(j)} = Qx(j) + F^T\lambda(j+1) \qquad (8.6)$$

με οριακή συνθήκη στο τελικό σημείο j=N :

$$\lambda(N) = \frac{\partial}{\partial x(N)}\Phi\left[x(N)\right] = Sx(N) \qquad (8.7)$$

Όπως προκύπτει από τη σχέση (8.5) η βέλτιστη λύση ανοικτού βρόχου θα δίνεται από την :

$$\boxed{u(j) = -R^{-1}G^T\lambda(j+1)} \qquad (8.8)$$

όπου τα λ δίνονται από την (8.6) με οριακή συνθήκη την (8.7).

Από τις παραπάνω σχέσεις παρατηρούμε ότι ενώ η εξίσωση (8.1) λύνεται ξεκινώντας από j=0 προς το j=N, οι υπόλοιπες σχέσεις για τον καθορισμό του u(j) λύνονται αντίθετα ξεκινώντας από j=N προς το j=0. Το γεγονός αυτί δημιουργεί επιπρόσθετη δυσκολία στη λύση ανοικτού βρόχου.

Λύση κλειστού βρόχου

Οι παραπάνω δυσκολίες μπορούν να εξαλειφθούν αν προχωρήσουμε στον προσδιορισμό της βέλτιστης λύσης κλειστού βρόχου, έτσι ώστε σε κάθε βήμα j, η είσοδος να εξαρτάται από την κατάσταση του συστήματος στο βήμα αυτό, δηλ. αν:

$$u(j) = K(j)x(j) \tag{8.9}$$

Για να μπορέσουμε να προσδιορίσουμε τη λύση κλειστού βρόχου ας θεωρήσουμε ότι η λ(j0 μπορεί να γραφεί σαν μετασχηματισμός της x(j) – μετασχηματισμός Riccati- σύμφωνα με τη σχέση :

$$\lambda(j) = P(j)x(j) \tag{8.10}$$

Τότε αντικαθιστώντας την (8.10) στην (8,8) και συνδυάζοντάς την με την (8.1) προκύπτει ότι :

$$x(j+1) = \left[I + GR^{-1}G^T P(j+1)\right]^{-1} Fx(j) \tag{8.11}$$

Συνδυάζοντας τώρα την τελευταία εξίσωση (8.11) με τις σχέσεις (8.6) και (8.10), καταλήγουμε στην :

$$\left\{F^T P(j+1)\left[I + GR^{-1}G^T P(j+1)\right]^{-1} F + Q - P(j)\right\}x(j) = 0 \tag{8.12}$$

Για να ισχύει η σχέση (8.12) για κάθε j –δηλ. για κάθε x(j) –πρέπει ο παράγοντας μπροστά από το x(j) να είναι μηδέν. Έτσι η μήτρα μετασχηματισμού P(j) που είναι μια τετραγωνική, συμμετρική, θετικά ορισμένη μήτρα δίνεται από τη λύση της αναδρομικής εξίσωσης :

$$\boxed{P(j) = F^T P(j+1)\left[I + GR^{-1}G^T P(j+1)\right]^{-1} F + Q} \tag{8.13}$$

με οριακή συνθήκη όπως προκύπτει από την (8.7) σε συνδυασμό με την (8.10) :

$$\boxed{P(N) = S} \tag{8.14}$$

Τότε, όπως προκύπτει από την (8.6), επειδή :

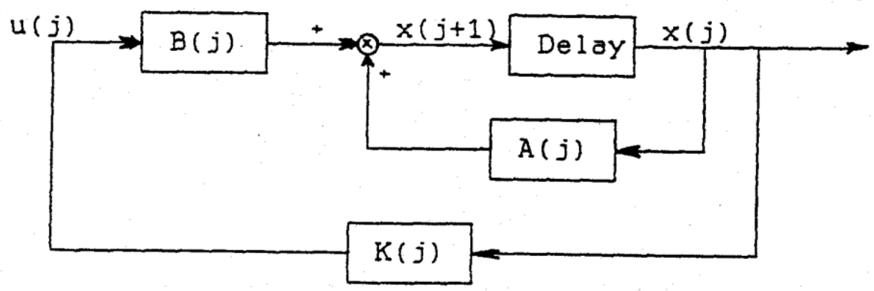
$$P(j+1)x(j+1) = F^{-T}\left[P(j) - Q\right]x(j) \tag{8.15}$$

η λύση κλειστού βρόχου βρίσκεται από την (8.8) για λ(j+1)=P(j+1)x(j+1) και είναι :

$$\boxed{u(j) = -R^{-1}G^T F^{-T}\left[P(j) - Q\right]x(j)} \tag{8.16}$$

δηλαδή ο βρόχος ανάδρασης κατάστασης έχει κέρδος :

$$\boxed{K(j) = -R^{-1}G^T F^{-1}\left[P(j) - Q\right]} \tag{8.17}$$



Σχ. 8.1. Το κλειστό βέλτιστο σύστημα διακριτού χρόνου

Βασική παρατήρηση

Όπως αμέσως φαίνεται από τις σχέσεις (8.13) ως (8.17) η μήτρα ανάδρασης K(j) είναι ανεξάρτητη του x(j). Αυτό αποτελεί σπουδαίο πλεονέκτημα αφού δίνει τη δυνατότητα στην εξίσωση Riccati να μπορεί να λυθεί εκ των προτέρων (όχι on-line) ,αρχίζοντας από την τελική τιμή P(N) και πηγαίνοντας προς την αρχή ,έτσι ώστε τα K(j) να προαποθηκεύουν στην μνήμη ενός υπολογιστή και να χρησιμοποιηθούν στη συνέχεια κατά τη λειτουργία του συστήματος.

9. ΑΡΧΗ ΕΛΑΧΙΣΤΟΥ ΤΟΥ PONTRYAGIN

Στα προηγούμενα κεφάλαια εξετάσθηκαν περιπτώσεις συστημάτων στα οποία ούτε ο έλεγχος ούτε η κατάσταση όφειλαν να πληρούν άλλους περιορισμούς πέραν αυτών που ορίζονταν από το κριτήριο κόστους. Όμως η ύπαρξη περιορισμών σε πραγματικά συστήματα είναι πολύ συνηθισμένη, καθώς φυσικά πραγματοποιήσιμοι έλεγχοι μπορούν να πάρουν τιμές μόνο μέσα σε κάποια συγκεκριμένα όρια. Επίσης λόγοι ασφαλείας ή δομικοί περιορισμοί στο σύστημα θέτουν όρια στις τιμές που είναι δυνατόν να λάβει και το διάνυσμα κατάστασης του συστήματος.

Όπως διεξοδικά αναλύθηκε στα προηγούμενα κεφάλαια ο βέλτιστος νόμος ελέγχου για κάποιο σύστημα της μορφής της εξίσωσης (3.1) ¨

$$\dot{x} = F\left[x(t), u(t)\right]$$

που ελαχιστοποιεί κάποιο κριτήριο κόστους της γενικής μορφής της εξίσωσης (4.1):

$$J = \int_{t_0}^{t_f} L(x,u,t)dt + \Phi\left[x(t_f), t_f\right]$$

προκύπτει από την ελαχιστοποίηση της Hamiltonian του συστήματος ως προς u ,δηλ. από τη Συνθήκη Βελτιστοποίησης.

Όταν όμως θέσουμε επιπλέον περιορισμούς στα στοιχεία του διανύσματος ελέγχου :

$$a_i \leq u_i \leq b_i \qquad (9.1)$$

είναι δυνατό, ο νόμος βέλτιστου ελέγχου που προκύπτει από τη Συνθήκη Βελτιστοποίησης να είναι εκτός των επιτρεπτών ορίων. Τότε η λύση του προβλήματος βέλτιστου ελέγχου στηρίζεται στην Αρχή Ελαχίστου του Pontryagin σύμφωνα με την οποία :

> Αναγκαία συνθήκη ώστε το u^* να ελαχιστοποιεί τη συναρτησοειδή J για κάθε $t \in \lfloor t_0, t_f \rfloor$ είναι ότι η Hamiltonian πρέπει να είναι ελάχιστη δυνατή για όλα τα επιτρεπτά σχήματα ελέγχου. Πρέπει δηλαδή για το βέλτιστο u^* να ισχύει ως προς οποιοδήποτε άλλο δυνατό έλεγχο u :
>
> $$H\left(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), t\right) \leq H\left(x^*(t), u(t), \lambda^*(t), t\right) \qquad (9.2)$$

Έτσι για τη λύση προβλημάτων βέλτιστου ελέγχου για τα οποία έχουμε την επιπρόσθετη συνθήκη περιορισμών (9.1) των εισόδων, ακολουθούμε την παρακάτω διαδικασία :

α) Χρησιμοποιούμε μαζί με την εξίσωση (3.1) που περιγράφει τη δυναμική συμπεριφορά του συστήματος , τις σχέσεις (4.15) των συμπληρωματικών καταστατικών εξισώσεων και τις (4.16) της Συνθήκης Βελτιστοποίησης εφόσον οι προκύπτοντες απ' αυτήν νόμοι ελέγχου βρίσκονται μέσα στα όρια του περιορισμού (9.1). (Ουσιαστικά η Αρχή Ελάχίστου του Pontryagin εκφράζεται με τη Συνθήκη Βελτιστοποίησης).

β) Όταν τα προκύπτοντα βέλτιστα u από την περίπτωση α) παραβιάζουν τη συνθήκη (9.1) ,η Συνθήκη Βελτιστοποίησης δεν μπορεί να εκφράσει την Αρχή Ελαχίστου του Pontryagin. Σ' αυτήν την περίπτωση ο βέλτιστος νόμος ελέγχου βρίσκεται με απευθείας χρήση της Αρχής του Ελαχίστου μέσω της σχέσης (9.2). Ψάχνουμε, δηλαδή, στη Hamiltonian για το u(t) εκείνο [που δίνει την τη ελάχιστη δυνατή τιμή της και που δεν παραβιάζει τη συνθήκη περιορισμών (9.1). Η ακραία αυτή τιμή τις u(t) δεν μπορεί παρά να είναι μια από τις δύο τιμές των περιορισμών για κάθε $u_i(t)$ δηλ. είτε η a_i είτε η b_i. Η τιμή αυτή αντικαθιστά τότε το νόμο ελέγχου που θα προέκυπτε από τη Συνθήκη Βελτιστοποίησης.

Ο αλγόριθμος που χρησιμοποιείται σ' αυτές τις περιπτώσεις είναι ο ακόλουθος:

Σχηματίζουμε τη Hamiltonian και την εκφράζουμε σαν άθροισμα δυο επιμέρους συναρτήσεων, H_1 και H_2 ,της πρώτης με όλους εκείνους τους όρους που περιέχουν την είσοδο και της δεύτερης με όρους ανεξάρτητους της u(t) :

$$H(x, u, \lambda, t) = H_1(x, u, \lambda, t) + H_2(x, \lambda, t) \qquad (9.3)$$

Τότε η ελαχιστοποίηση της Hamiltonian ως προς είναι ισοδύναμη με την ελαχιστοποίηση μόνο της H_1 :

$$\min_u H = \min_u H_1 \qquad (9.4)$$

Τα παραπάνω όμως θα γίνουν σαφέστερα με το ακόλουθο παράδειγμα.

Παράδειγμα (Kirk 1970)

Ας θεωρήσουμε το σύστημα που περιγράφεται από τις καταστατικές εξισώσεις:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -x_2(t) + u(t) \end{aligned} \tag{9.5}$$

με αρχικές συνθήκες $x(t_0)=x_0$,και κριτήριο κόστους

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} \left[x_1^2(t) + u^2(t)\right]dt \tag{9.6}$$

όπου η είσοδος οφείλει να βρίσκεται στα όρια :

$$-a \leq u(t) \leq a, \qquad a \rangle 0 \tag{9.7}$$

Ορίζουμε την Hamiltonian η οποία είναι :

$$H = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}u^2 + \lambda_1 x_2 - \lambda_2 x_2 + \lambda_2 u \tag{9.8}$$

Οι εξισώσεις των συμπληρωματικών καταστάσεων είναι :

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1(t) &= \frac{\partial H}{\partial x_1} = -x_1(t) \\ \dot{\lambda}_2(t) &= \frac{\partial H}{\partial x_2} = -\lambda_1(t) + \lambda_2(t) \end{aligned} \tag{9.9}$$

με οριακή συνθήκη :

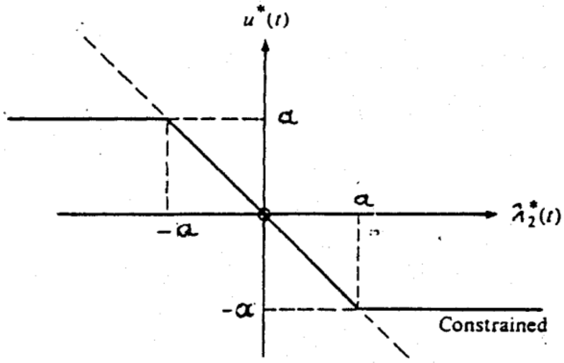
$$\lambda(t_f) = 0 \tag{9.10}$$

Η Συνθήκη Βελτιστοποίησης δίνει:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = u(t) + \lambda_2(t) = 0 \tag{9.11}$$

από την οποία προκύπτει ο βέλτιστος νόμος ελέγχου :

$$u(t) = -\lambda_2(t) \tag{9.12}$$



Σχ. 9.1. Ο βέλτιστος νόμος ελέγχου συναρτήσει του λ_2

Έτσι εφόσον η λ_2 η οποία προκύπτει από τη λύση των εξισώσεων κατάστασης του συστήματος (9.5) μαζί με τις εξισώσεις συμπληρωματικών καταστάσεων (9.9) κείται στο διάστημα :

$$-a \le \lambda_2(t) \le a \qquad (9.13)$$

ώστε σύμφωνα με το νόμο ελέγχου (9.12) να ικανοποιείται η συνθήκη (9.7) για την είσοδο ,η βέλτιστη λύση θα δίνεται από την (9.12) και θα προκύπτει από τη λύση των εξισώσεων (9.5) και (9.9).

Στη περίπτωση που για το $\lambda_2(t)$ ισχύει :

$$\lambda_2(t) \rangle a$$

ή (9.14)

$$\lambda_2(t) \langle -a$$

οι εξισώσεις κατάστασης και συμπληρωματικών καταστάσεων όπως και η Hamiltonian, παραμένουν όπως δίνονται από τις σχέσεις (9.5), (9.9) και (9.8). Ο βέλτιστος έλεγχος που ελαχιστοποιεί την H ,χωρίς να παραβιάζει το περιορισμό (9.7), προκύπτει με απευθείας χρήση της Αρχής Ελαχίστου του Pontryagin, δηλ. από την ελαχιστοποίηση του μέρους της H που εξαρτάται από την u :

$$H_1 = \frac{1}{2}u^2 + \lambda_2 u \qquad (9.15)$$

αλλά η H_1 ελαχιστοποιείται για τιμές του u στα όρια του επιτρεπτού διαστήματος, δηλαδή :

$$u(t)=\begin{cases}-a, & \gamma\iota\alpha \quad \lambda_2(t)\rangle a\\ a, & \gamma\iota\alpha \quad \lambda_2(t)\langle -a\end{cases} \tag{9.16}$$

Τελικά, συνοψίζοντας, η λύση στο πρόβλημα του βέλτιστου ελέγχου με τους περιορισμούς (9.7) δίνεται από τις σχέσεις :

$$u(t)=\begin{cases}-a, & \gamma\iota\alpha \quad \lambda_2(t)\rangle a\\ -\lambda_2(t), & \gamma\iota\alpha \quad -a\le\lambda_2(t)\le a\\ a, & \gamma\iota\alpha \quad \lambda_2(t)\langle -a\end{cases} \tag{9.17}$$

<u>10. ΒΕΛΤΙΣΤΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ ΑΠΟ ΟΡΙΟ ΣΕ ΟΡΙΟ (BANG-BANG CONTROL)</u>

Ας θεωρήσουμε το σύστημα που περιγράφεται από τις μη γραμμικές καταστατικές εξισώσεις :

$$\dot{x}=F[x(t),t]+G[x(t),t]u(t) \tag{10.1}$$

με αρχική συνθήκη :

$$x(t_0)=x_0$$

τους περιορισμούς στις εισόδους :

$$a_i\le u_i\le b_i \tag{10.2}$$

και το κριτήριο κόστους προς ελαχιστοποίηση :

$$J=\Phi[x(t_f),t_f]+\int_{t_0}^{t_f}\{g[x(t),t]+h^T[x(t),t]u(t)\}dt \tag{10.3}$$

Παρατηρούμε ότι τόσο οι εξισώσεις του συστήματος όσο και το κριτήριο κόστους είναι <u>γραμμικά ως προς την είσοδο u.</u> Το ίδιο ισχύει και για την Hamiltonian συνάρτηση :

$$H=g[x(t),t]+h^T[x(t),t]+\lambda^T(t)\{F[x(t),t]+G[x(t),t]u(t)\} \tag{10.4}$$

Αφού η Hamiltonian είναι γραμμική ως προς την είσοδο u, η χρήση της Συνθήκης Βελτιστοποίησης είναι αδύνατη για την εύρεση του βέλτιστου νόμου ελέγχου. Σύμφωνα όμως με την Αρχή Ελαχίστου του Pontryagin έχουμε :

$$\min_u H = \min_u H_1 = \min_u \{H_3 u(t)\} \tag{10.5}$$

όπου

$$H_3 = h^T[x(t),t] + \lambda^T(t)G[x(t),t] \tag{10.6}$$

Επειδή η $H_1(x,u,\lambda,t)$ μπορεί να γραφεί σαν γινόμενο της εισόδου με κάποιο όρο H_3 ανεξάρτητο της u(t) έχουμε την εξής λύση:

i) Αν τα όρια <u>a_i και b_i είναι ομόσημοι αριθμοί</u>, από την (10.5) προκύπτει ότι αν επιπλέον η H_3 είναι ομόσημη προς τα a_i και b_i, αυτή ελαχιστοποιείται για τη μικρότερη επιτρεπτή απόλυτη τιμή της u(t), και το αντίστροφο.

ii) Αν τα όρια <u>a_i και b_i είναι ετερόσημα</u> (οπότε προφανώς a_i θα είναι αρνητικό και b_i θετικό) τότε η H ελαχιστοποιείται όταν :

$$sign u = -sign H_3(x,\lambda,t) \tag{10.7}$$

δηλαδή :

$$u_i = \begin{cases} a_i & \alpha\nu \quad H_3 > 0 \\ b_i & \alpha\nu \quad H_3 < 0 \end{cases} \tag{10.8}$$

Για τον προκύπτοντα βέλτιστο έλεγχο που όπως παρατηρούμε παίρνει τιμές μόνο στα όρια του επιτρεπτού διαστήματος (bang-bang control) ,οι δυναμικές εξισώσεις του συστήματος και συμπληρωματικών καταστάσεων θα είναι αντίστοιχα :

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = F[x(t),t] + G[x(t),t]u(t) \tag{10.9}$$

$$\begin{aligned} \dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial g[x(t),t]}{\partial x} + \frac{\partial h^T[x(t),t]}{\partial x}u(t) + \frac{\partial F^T[x(t),t]}{\partial x}\lambda(t) + \\ + \frac{\partial \{G[x(t),t]u(t)\}^T}{\partial x}\lambda(t) \end{aligned} \tag{10.10}$$

Στο παράδειγμα που ακολουθεί , και όπου εξετάζεται το <u>πρόβλημα ελαχίστου χρόνου</u> για γραμμικά χρονικά αμετάβλητα συστήματα μιας εισόδου, προκύπτει έλεγχος αυτής της μορφής.

<u>Παράδειγμα (Sage-White 1977)</u>

Ας θεωρήσουμε το γραμμικό σύστημα μιας εισόδου που περιγράφεται από τις καταστατικές εξισώσεις :

$$\dot{x} = Ax + bu \qquad\qquad x(t_0) = x_0$$

και το γνωστό κριτήριο ελαχίστου χρόνου :

$$J = \int_{t_0}^{t_f} dt = t_f - t_0$$

μα περιορισμό στην είσοδο :

$$-a \leq u \leq a \tag{10.11}$$

Η Hamiltonian για το συγκεκριμένο πρόβλημα είναι :

$$H = 1 + \lambda^T Ax + \lambda^T bu \tag{10.12}$$

Τότε :

$$\min_u H = \min_u H_1 = \min_u \{H_3 u\} \tag{10.13}$$

όπου

$$H_3 = \lambda^T b \tag{10.14}$$

και ο βέλτιστος νόμος ελέγχου προκύπτει ότι είναι :

$$u = \begin{cases} -a & \alpha\nu \;\; \lambda^T(t)b \rangle 0 \\ a & \alpha\nu \;\; \lambda^T(t)b \langle 0 \end{cases} \tag{10.15}$$

Αντίστοιχα , η εξίσωση των συμπληρωματικών καταστάσεων είναι :

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -A^T \lambda(t) \tag{10.16}$$

Τότε η βέλτιστη λύση του προβλήματος αυτού δίνεται από το νόμο ελέγχου (10.15), όπου τώρα η λ(t) ορίζεται από τη μη <u>τετριμμένη λύση </u>της εξίσωσης (10.16) που προκύπτει από την:

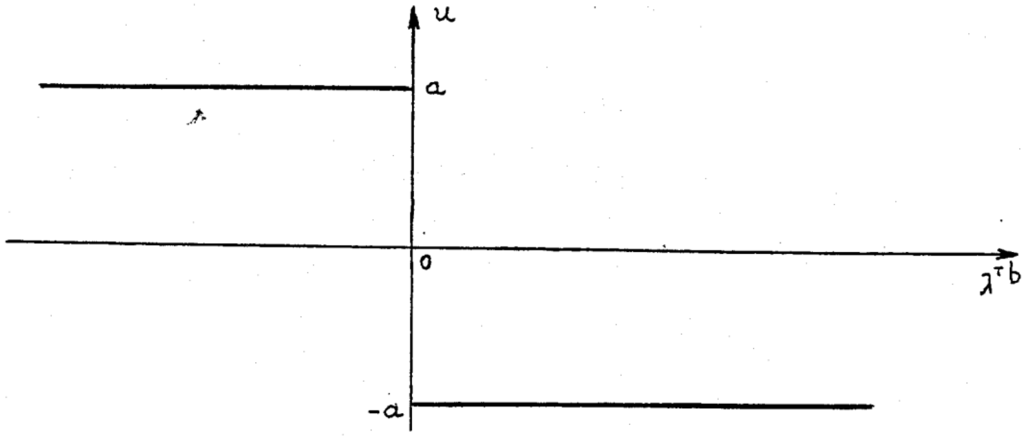
$$\lambda(t) = e^{-A^T(t-t_f)} \lambda(t_f) \tag{10.17}$$

για $\lambda(t_f) \neq 0$.

Όπως όμως προκύπτει (Sage-White 1977, p.p. 105-106), 11 $\lambda(t_f)$ πράγματι οφείλει να είναι διάφορη του μηδενός.

Σε τυχόν απομονωμένα σημεία που η λ(t) γίνεται μηδέν έχουμε τα σημεία μεταβολής της βέλτιστης εισόδου από το ένα όριο στο άλλο (switching points) .

Για το συγκεκριμένο γραμμικό πρόβλημα ελάχιστου χρόνου είναι δυνατό να δειχθεί ότι αν όλες οι ιδιοτιμές της n τάξης μήτρας A είναι πραγματικές τότε θα υπάρχουν το πολύ n-1 σημεία μεταβολής της εισόδου από το ένα όριο στο άλλο.



Σχ. 10.1 Βέλτιστος έλεγχος από όριο σε όριο

11. ΙΔΙΑΖΟΥΣΕΣ ΛΥΣΕΙΣ (SINGULAR SOLUTIONS)

Η μέθοδος που ακολουθήθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο δεν μπορεί να δώσει αποτέλεσμα στην περίπτωση κατά την οποία το μέρος της Hamiltonian H_1 που εξαρτάται από την είσοδο μηδενίζεται όχι μόνο σε απομονωμένα σημεία, δηλ. όταν ο συντελεστής:

$$H_3 = h^T[x(t),t] + \lambda^T(t)G[x(t),t] = 0 \tag{11.1}$$

για μη μεμονωμένες τιμές του λ.

Τότε η H δεν είναι συνάρτηση της εισόδου και δεν μπορεί κατά συνέπεια να ελαχιστοποιηθεί ως προς u. Όταν ο συντελεστής του u μηδενίζεται, δηλ. όταν ισχύει η (11.1), λέμε ότι το πρόβλημα της βελτιστοποίησης έχει ιδιάζουσα λύση. Το πρόβλημα των ιδιαζουσών λύσεων γίνεται πιο σαφές με το ακόλουθο παράδειγμα.

Παράδειγμα (Sage-White 1977)

Για το πρώτης τάξεως σύστημα :

$$\dot{x} = u \tag{11.2}$$

με αρχική συνθήκη

$$x(0)=1 \tag{11.3}$$

κριτήριο κόστους

$$J = \int_0^2 x^2 dt \tag{11.4}$$

και περιορισμό στον έλεγχο ¨

$$-1 \leq u(t) \leq 1 \tag{11.5}$$

Η Hamiltonian είναι :

$$H = \frac{1}{2}x^2 + \lambda u \tag{11.6}$$

Είναι φανερό ότι για μη μηδενικά λ ο βέλτιστος έλεγχος θα βρίσκεται στα όρια, δηλ. θα είναι:

$$u = \begin{cases} -1 & \alpha\nu \quad \lambda^T(t) \rangle 0 \\ 1 & \alpha\nu \quad \lambda^T(t) \langle 0 \end{cases} \tag{11.7}$$

Μια πιθανή λύση είναι η λ=0, για την οποία η Hamiltonian δεν εξαρτάται πλέον από την είσοδο u και δεν μπορεί να ελαχιστοποιηθεί ως προς u. Τότε έχουμε <u>ιδιάζουσα λύση</u> η οποία προκύπτει στη συνέχεια.

Από την καταστατική εξίσωση του συστήματος (11.2) , από την εξίσωση της συμπληρωματικής κατάστασης:

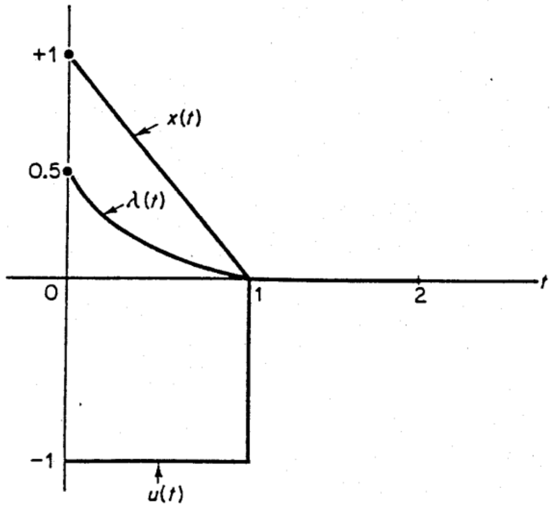
$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = x(t) \tag{11.8}$$

αν υποθέσουμε ότι το λ(t) είναι αρχικά θετικό, u(t) = -sign λ(t) = -1, προκύπτουν οι λύσεις :

$$x(t) = 1 - t \tag{11.9}$$

$$\lambda(t) = \lambda(0) - t + \frac{t^2}{2} \tag{11.10}$$

Για την ιδιάζουσα λύση πρέπει γεγονός απαιτεί ότι και η πρώτη παράγωγος της λ καθώς και το X(t) πρέπει να είναι μηδέν. Από τα προηγούμενα βλέπουμε ότι το x(t) είναι μηδέν στο σημείο t=1, και όλες οι απαιτήσεις για να υπάρχει ιδιάζουσα λύση στο διάστημα t Ε [1,2] ικανοποιούνται αν n αρχική συν8ήκη για τη συμπληρωματική κατάσταση $\lambda(t_0)$ γίνει 0.5. Η λύση αυτή ικανοποιεί και την οριακή συνθήκη $\lambda(2)=0$. Το σχήμα 11.1 δείχνει το νόμο ελέγχου, την κατάσταση και τη συμπληρωματική κατάσταση για την ιδιάζουσα λύση για t από 0 έως 2.



Σχ. 11.1. Οι μεταβλητές κατάστασης και ελέγχου για την ιδιάζουσα λύση

12. ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ -ΘΕΩΡΙΑ HAMILTON JACOBI

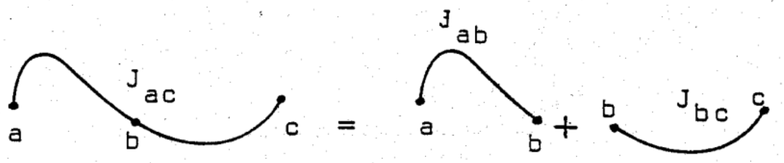
Αν θεωρήσουμε μια διαδικασία βελτιστοποίησης πολλών βημάτων τότε ο συνολικός βέλτιστος δρόμος είναι αυτός που προκύπτει από το άθροισμα των επιμέρους βέλτιστων βημάτων. Έστω, δηλαδή, ότι έχουμε μια διαδικασία βελτιστοποίησης από το a στο c, όπως δείχνεται στο Σχ. 12.1, η οποία ενδιαμέσως περνά από το σημείο b. Τότε αν το ολικό βέλτιστο κόστος από το a στο c είναι J_{ac} αυτό θα είναι ακριβώς το άθροισμα του βέλτιστου κόστους των επιμέρους βημάτων J_{ab} και J_{ac} .

$$J_{ac} = J_{ab} + J_{bc} \qquad (12.1)$$

Η χαρακτηριστική αυτή ιδιότητα της εύρεσης του βέλτιστου δρόμου ονομάστηκε από τον Bellman <u>Αρχή της Βελτιστοποίησης</u> και διατυπώθηκε με την ακόλουθη πρόταση:

> Μια πολιτική βελτιστοποίησης έχει την ιδιότητα ότι <u>οποιαδήποτε και αν είναι η αρχική κατάσταση και η αρχική απόφαση, οι ακολουθούσες αποφάσεις πρέπει να είναι βέλτιστες</u> σε σχέση με την κατάσταση που προέκυψε από την αρχική απόφαση.

Στα προηγούμενα κεφάλαια εξετάσαμε διάφορους τρόπους εύρεσης των βέλτιστων αποφάσεων και προκειμένου περί δυναμικών συστημάτων των βέλτιστων ελέγχων κάθε χρονική



Σχ. 12.1. Διαδικασία βελτιστοποίησης πολλών βημάτων

στιγμή. Για τα γραμμικά δυναμικά συστήματα μάλιστα, διατυπώσαμε την πολιτική αυτή του βέλτιστου ελέγχου κατευθείαν σε σχέση με την κατάσταση κάθε φορά του συστήματος (λύσεις κλειστού βρόχου) .Μια χαρακτηριστική παρατήρηση σε όλες αυτές τις περιπτώσεις που εξετάσαμε ήταν ότι ο προκύπτον Βέλτιστος νόμος ελέγχου υπολογιζόταν από το τελικό όριο προς το αρχικό.

Χρησιμοποιώντας την Αρχή της Βελτιστοποίησης για συστήματα συνεχούς χρόνου θα μπορούσαμε να την αξιοποιήσουμε για να βρούμε το βέλτιστο νόμο ελέγχου αν διατυπώναμε έναν αλγόριθμο που θα έδινε τη Βέλτιστη πολιτική ελέγχου γενικά σαν συνάρτηση της κατάστασης στην οποία βρίσκεται το σύστημα.

Έστω λοιπόν η γενικευμένη περίπτωση όπου το δυναμικό σύστημα περιγράφεται στο χώρο κατάστασης από την εξίσωση (3.1) :

$$\dot{x} = F(x,u,t), \qquad x(t_0) = x_0$$

και το κριτήριο κόστους από τη σχέση (4.1) :

$$J = \int_{t_0}^{t_f} L(x,u,t)dt + \Phi\left[x(t_f), t_f\right]$$

Τότε σύμφωνα με την αρχή της βελτιστοποίησης θα πρέπει για οποιαδήποτε χρονική στιγμή t και οποιαδήποτε κατάσταση x(t) η πολιτική ελέγχου από εκεί και πέρα να είναι βέλτιστη. Επομένως με βάση το κριτήριο κόστους J μπορούμε να ορίσουμε για κάθε x(t) και t την πολιτική βελτιστοποίησης με τη μαθηματική έκφραση:

$$V\left[x,t\right] = \min_u \left\{ \int_{t}^{t_f} L(x,u,t)dt + \Phi\left[x(t_f), t_f\right] \right\} \tag{12.2}$$

Αλλά σύμφωνα πάλι με την αρχή της βελτιστοποίησης όπως εκφράζεται από τη σχέση (12.1) είναι :

$$V\left[x,t\right] = \min_u \left\{ \int_{t}^{t+\Delta t} L(x,u,t)dt + \int_{t+\Delta t}^{t_f} L(x,u,t)dt + \Phi\left[x(t_f), t_f\right] \right\} \tag{12.3}$$

όπου όμως :

$$\int_{t+\Delta t}^{t_f} L(x,u,t)dt + \Phi\left[x(t_f),t_f\right] = V\left[x+\Delta x, t+\Delta t\right] \tag{12.4}$$

Θεωρώντας επιπλέον Δt αρκετά μικρό, ισχύει :

$$\int_{t}^{t+\Delta t} L(x,u,t)dt \cong L(x,u,t)\Delta t \tag{12.5}$$

Έτσι η σχέση (12.2) γίνεται :

$$V\left[x,t\right] = \min_u \left\{V\left[x+\Delta x, t+\Delta t\right] + L(x,u,t)\Delta t\right\} \tag{12.6}$$

Παρατηρούμε ότι η σχέση (12.6) αποτελεί έναν <u>επαναληπτικό αλγόριθμο</u> βελτιστοποίησης. Κάνοντας εξάλλου χρήση της επέκτασης Taylor για την V[x+Δx,t+Δt] παίρνουμε:

$$V\left[x+\Delta x, t+\Delta t\right] = V\left[x,t\right] + \left[\frac{\partial V}{\partial x}\right]^T \Delta x + \frac{\partial V}{\partial t}\Delta t \tag{12.7}$$

όπου βεβαίως έχουν παραληφθεί οι όροι υψηλότερης τάξης. Αντικαθιστώντας την (12.7) στην (12.6) και θεωρώντας $\Delta t \to 0$ τότε η V[x,t] πρέπει να ικανοποιεί την <u>εξίσωση Hamilton-Jacobi</u>:

$$\min_u \left\{\left[\frac{\partial V}{\partial x}\right]^T \dot{x} + \frac{\partial V}{\partial t} + L(x,u,t)\right\} = 0 \tag{12.8}$$

ή χρησιμοποιώντας την (3.1) :

$$\boxed{\min_u \left\{\left[\frac{\partial V}{\partial x}\right]^T F(x,u,t) + \frac{\partial V}{\partial t} + L(x,u,t)\right\} = 0} \tag{12.9}$$

με τελική τιμή στο t_f όπως προκύπτει από την (12.2) :

$$\boxed{V\left[x(t_f),t_f\right] = \Phi\left[x(t_f),t_f\right]} \tag{12.10}$$

Ο νόμος του βέλτιστου ελέγχου που θα ικανοποιεί την (12.9) προκύπτει τότε από την ελαχιστοποίηση της εξ. H-J ως προς u:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left\{\left[\frac{\partial V}{\partial x}\right]^T F(x,u,t) + \frac{\partial V}{\partial t} + L(x,u,t)\right\} = 0 \qquad (12.11)$$

Την εφαρμογή της μεθόδου της Αρχής της Βελτιστοποίησης θα δούμε με ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα, τη λύση του γραμμικού, τετραγωνικού προβλήματος ρύθμισης.

<u>Το γραμμικό τετραγωνικό πρόβλημα ρύθμισης με τη μέθοδο Hamilton-Jacobi</u>.

Ας θεωρήσουμε τη γνωστή γραμμική δυναμική εξίσωση :

$$\dot{x} = Ax + bu \qquad\qquad x(t_0) = x_0$$

με το τετραγωνικό κριτήριο κόστους :

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}\left(x^T Qx + u^T Ru\right)dt + \frac{1}{2}x^T(t_f)Sx(t_f)$$

Τότε η συνάρτηση κόστους από t έως t_f σύμφωνα με τη θεωρία Hamilton-Jacobi είναι:

$$V[x(t),t] = \min_u\left\{\frac{1}{2}\int_{t}^{t_f}\left(x^T Qx + u^T Ru\right)dt + \frac{1}{2}x^T(t_f)Sx(t_f)\right\} \qquad (12.12)$$

Αντίστοιχα η εξίσωση Hamilton-Jacobi είναι :

$$\min_u\left\{\frac{\partial V}{\partial t} + \left[\frac{\partial V}{\partial t}\right]^T\left(Ax + Bu\right) + \frac{1}{2}\left(x^T Qx + u^T Ru\right)\right\} = 0 \qquad (12.13)$$

και ο νόμος βέλτιστου ελέγχου θα προκύπτει αντίστοιχα από την :

$$\frac{\partial}{\partial u}\left\{\frac{\partial V}{\partial t} + \left[\frac{\partial V}{\partial t}\right]^T\left(Ax + Bu\right) + \frac{1}{2}\left(x^T Qx + u^T Ru\right)\right\} = 0 \qquad (12.14)$$

η οποία μετά τις πράξεις δίνει :

$$u = -R^{-1}B^T \frac{\partial V}{\partial x} \tag{12.15}$$

Αντικαθιστώντας τώρα το νόμο ελέγχου (12.15) στην εξίσωση Hamilton-Jacobi (12.13) παίρνουμε :

$$\frac{\partial V}{\partial x} + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T Ax - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T BR^{-1}B^T\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) + \frac{1}{2}x^T Qx = 0 \tag{12.16}$$

Με σκοπό να φθάσουμε σε μια κλειστού βρόχου λύση θεωρούμε

$$V[x,t] = \frac{1}{2}x^T P(t)x \tag{12.17}$$

έτσι ώστε ο νόμος ελέγχου (12.15) που εξαρτάται από την $\frac{\partial V}{\partial x}$ να είναι ανάλογος του x, αφού :

$$\frac{\partial V[x,t]}{\partial x} = P(t)x \tag{12.18}$$

επίσης η μερική παράγωγος της V[x,t] ως προς t θα είναι :

$$\frac{\partial V[x,t]}{\partial t} = \frac{1}{2}x^T \dot{P}(t)x \tag{12.19}$$

Αντικαθιστώντας τις μερικές παραγώγους, σύμφωνα με τις σχέσεις (12.18) και (12.19) στην (12.16), έχουμε :

$$\frac{1}{2}x^T \dot{P}x + x^T PAx - \frac{1}{2}x^T PBR^{-1}B^T Px + \frac{1}{2}x^T Qx = 0 \tag{12.20}$$

Όπως εύκολα αποδεικνύεται ,είναι :

$$x^T PAx = x^T\left[\frac{1}{2}PA + \frac{1}{2}A^T P\right]x = 0 \tag{12.21}$$

οπότε η (12.20) καταλήγει στην :

$$\frac{1}{2}x^T\left[\dot{P}+PA+A^TP-PBR^{-1}B^TP+Q\right]x=0 \qquad (12.22)$$

Η τελευταία σχέση οφείλει να ισχύει για κάθε x ≠ 0 γεγονός που οδηγεί στη διαφορική εξίσωση Riccati :

$$\boxed{\dot{P}=-PA-A^TP+PBR^{-1}B^TP-Q} \qquad (12.23)$$

με οριακή συνθήκη που προκύπτει στο τελικό όριο από την :

$$V\left[x(t_f),t_f\right]=\frac{1}{2}x^T(t_f)Sx(t_f) \qquad (12.24)$$

και είναι σε συνδυασμό με την (12.17) :

$$\boxed{P(t_f)=S} \qquad (12.25)$$

ενώ ο νόμος βέλτιστου ελέγχου θα είναι :

$$\boxed{u=-R^{-1}B^TPx} \qquad (12.26)$$

Όπως παρατηρούμε η μέθοδος Hamilton-Jacobi κατάληξε στις ίδιες ακριβώς σχέσεις βελτιστοποίησης όπως αυτές έχουν προκύψει με διαφορετικό τρόπο σε προηγούμενα κεφάλαια.

13. ΔΥΝΑΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

Στο Κεφ. 12 διατυπώσαμε την Αρχή της Βελτιστοποίησης και στη συνέχεια την εφαρμόσαμε στο γενικό πρόβλημα του βέλτιστου ελέγχου για συστήματα συνεχούς χρόνου καταλήγοντας στην εξίσωση Hamilton-Jacobi. Στο παρόν κεφάλαιο θα επιχειρήσουμε την ανάλογη εφαρμογή της Αρχής αυτής για συστήματα διακριτού χρόνου. Θα αξιοποιήσουμε την Αρχή της Βελτιστοποίησης έτσι ώστε να διατυπώσουμε έναν επαναληπτικό αλγόριθμο που σε κάθε βήμα θα μας δίνει τη βέλτιστη πολιτική ελέγχου σαν συνάρτηση της κατάστασης του συστήματος στο βήμα αυτό.

Ας θεωρήσουμε το σύστημα διακριτού χρόνου (εν γένει πολλών εισόδων-πολλών εξόδων) που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών (7.1) :

$$x(j+1) = F[x(j), u(j)] \qquad\qquad x(0) = x_0$$

και το κριτήριο κόστους όπως δίνεται από τη σχέση :

$$J = \sum_{j=0}^{N-1} L_j [x(j), u(j)] + \Phi[x(N)]$$

Τότε σύμφωνα με την αρχή της βελτιστοποίησης θα πρέπει για οποιαδήποτε χρονική στιγμή j=1 και οποιαδήποτε κατάσταση x(i) η πολιτική ελέγχου από εκεί και πέρα να είναι βέλτιστη. Επομένως με βάση το κριτήριο κόστους J ορίζουμε για κάθε x(i) και i τη πολιτική βελτιστοποίησης με τη μαθηματική έκφραση :

$$V_i[x(i)] = \min_{u\langle i\rangle} \left\{ \sum_{j=i}^{N-1} L_j [x(j), u(j)] + \Phi[x(N)] \right\} \tag{13.1}$$

Σύμφωνα πάλι με την Αρχή της Βελτιστοποίησης όπως αυτή διατυπώνεται από τη σχέση (12.1) έχουμε :

$$V_i[x(i)] = \min_{u\langle i\rangle} \left\{ L_i [x(i), u(i)] + \sum_{j=i+1}^{N-1} L_j [x(j), u(j)] + \Phi[x(N)] \right\} \tag{13.2}$$

επειδή όμως προφανώς ισχύει :

$$V_{i+1}[x(i+1)] = \sum_{j=i+1}^{N-1} L_j [x(j), u(j)] + \Phi[x(N)] \tag{13.3}$$

η σχέση (13.1) καταλήγει στην :

$$\boxed{V_i[x(i)] = \min_{u\langle i\rangle} \{ L_i [x(i).u(i)] + V_{i+1}[x(i+1)] \}} \tag{13.4}$$

με τελική τιμή στο όριο i=N :

$$\boxed{V_N[x(N)] = \Phi[x(N)]} \tag{13.5}$$

Η εξίσωση (13.4) ονομάζεται <u>εξίσωση Hamilton-Jacobi-Bellman</u> και αποτελεί έναν επαναληπτικό αλγόριθμο που ξεκινάει από το όριο i=N ,με τιμή που αυτή ορίζεται από τη σχέση (13.5), και δίνει το βέλτιστο νόμο ελέγχου για συστήματα διακριτού χρόνου, σε κάθε βήμα, συναρτήσει του διανύσματος κατάστασης στο σημείο ελαχίστου της, δηλαδή εκεί όπου :

$$\frac{\partial}{\partial u(i)} \{ L_i [x(i), u(i)] + V_{i+1}[x(i+1)] \} = 0 \tag{13.6}$$

Η διαδικασία αυτή εύρεσης του βέλτιστου ελέγχου σε κάθε βήμα για συστήματα διακριτού χρόνου με χρήση της εξίσωσης Hamilton-Jacobi-Bellman είναι ευρέως διαδεδομένη με την ονομασία Δυναμικός Προγραμματισμός. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα εφαρμογής της θα δούμε στη συνέχεια.

Το γραμμικό τετραγωνικό πρόβλημα ρύθμισης για συστήματα διακριτού χρόνου με τη μέθοδο του Δυναμικού Προγραμματισμού

Ας θεωρήσουμε το γραμμικό σύστημα διακριτού χρόνου :

$$x(j+1) = Fx(j) + Gu(j) \tag{13.7}$$

με κριτήριο κόστους :

$$J = \sum_{j=0}^{N-1} \left[x^T(j+1) Q x(j+1) + \lambda u^2(j) \right] \tag{13.8}$$

Τότε σύμφωνα με τα προηγούμενα η εξίσωση H-J-B θα είναι :

$$\begin{aligned} V_i[x(i)] &= \min_{u\langle i \rangle} \left\{ V_{i+1}[x(i+1)] + x^T(i+1) Q x(i+1) + \lambda u^2(i) \right\} \\ &= \min_{u\langle i \rangle} \left\{ V_{i+1}[x(i+1)] + [Fx(i) + Gu(i)]^T Q [Fx(i) + Gu(i)] + \lambda u^2(i) \right\} \end{aligned} \tag{13.9}$$

Ξεκινώντας από το τελευταίο βήμα, για i=N-1 έχουμε τη ακόλουθη έκφραση για την εξίσωση H-J-B :

$$\begin{aligned} & V_{N-1}[x(N-1)] = \\ & = \min_{u\langle N-1 \rangle} \left\{ V_N[x(N)] + [Fx(N-1) + Gu(N-1)]^T Q [Fx(N-1) + Gu(N-1)] + \lambda u^2(N-1) \right\} \end{aligned} \tag{13.10}$$

όπου

$$V_N[x(N)] = 0 \tag{13.11}$$

Ο δε νόμος ελέγχου όπως προκύπτει από την εφαρμογή της σχέσης (13.6) για i=N-1 είναι :

$$\boxed{u(N-1) = -\frac{G^T Q F}{G^T Q G + \lambda} x(N-1)} \tag{13.12}$$

Αν ονομάσουμε το συντελεστή ανάδρασης στο βήμα i=N-1 σαν H(N-1) :

$$H(N-1) = -\frac{G^T Q F}{G^T Q G + \lambda} \tag{13.13}$$

και αντικαταστήσουμε το u στην αναδρομική σχέση (13.10) παίρνουμε :

$$V_{N-1}\left[x(N-1)\right] = x^T(N-1)P(N-1)x(N-1) \qquad (13.14)$$

όπου :

$$P(N-1) = \left[F + GH(N-1)\right]^T Q\left[F + GH(N-1)\right] + \lambda H^T(N-1)H(N-1) \qquad (13.15)$$

Πηγαίνοντας στο προηγούμενο βήμα, για <u>i=N-2</u> , αντίστοιχα έχουμε :

$$V_{N-2}\left[x(N-2)\right] =$$
$$= \min_{u\langle N-2\rangle}\left\{V_{N-1}\left[x(N-1)\right] + \left[Fx(N-2) + Gu(N-2)\right]^T Q\left[Fx(N-2) + Gu(N-2)\right] + \lambda u^2(N-2)\right\}$$

(13.16)

όπου το $V_{N-1}[x(N-1)]$ είναι αυτό που ορίστηκε στο βήμα N-1 από την (13.14). Ο δε νόμος ελέγχου προκύπτει σ' αυτήν την περίπτωση, από την (13.16) για i=n-2, ότι είναι :

$$\boxed{u(N-2) = -\frac{G^T[Q + P(N-1)]F}{G^T[Q + P(N-1)]G + \lambda}x(N-2)} \qquad (13.17)$$

όπου τώρα ο συντελεστής ανάδρασης είναι :

$$H(N-2) = -\frac{G^T[Q + P(N-1)]F}{G^T[Q + P(N-1)]G + \lambda} \qquad (13.18)$$

και η τιμή στην αναδρομική συνάρτηση κόστους προκύπτει :

$$V_{N-2} = x^T(N-2)P(N-2)x(N-2) \qquad (13.19)$$

με :

$$P(N-2) = \left[F + GH(N-2)\right]^T [P(N-1) + Q]\left[F + GH(N-2)\right] + \lambda H^T(N-2)H(N-2)$$

(13.20)

Αν θεωρήσουμε τώρα το γενικό <u>βήμα i=j</u> ($0 \le j \le N-1$) και υποθέσουμε σύμφωνα με τα προηγούμενα ότι :

$$V_{j+1}\left[x(j+1)\right] = x^T(j+1)P(j+1)x(j+1) \qquad (13.21)$$

τότε η $V_j[x(j)]$ θα είναι σύμφωνα με τη σχέση (13.6) δίνει το νόμο ελέγχου στο βήμα j:

$$V_j\left[x(j)\right]=$$
$$=\min_{u\langle j\rangle}\left\{x^T(j+1)P(j+1)x(j+1)+\left[Fx(j)+Gu(j)\right]^T Q\left[Fx(j)+Gu(j)\right]+\lambda u^2(j)\right\}$$

(13.22)

η ελαχιστοποίηση της οποίας σύμφωνα με τη σχέση (13.6) δίνει το νόμο ελέγχου στο βήμα j :

$$\boxed{u(j)=H(j)x(j)} \tag{13.23}$$

όπου

$$\boxed{H(j)=-\frac{G^T[Q+P(j+1)]F}{G^T[Q+P(j+1)]G+\lambda}} \tag{13.24}$$

Αντικαθιστώντας τώρα τις (13.23) και (13.24) στην (13.22) προκύπτει για την V_j :

$$V_j\left[x(j)\right]=x^T(j)P(j)x(j) \tag{13.25}$$

με

$$\boxed{P(j)=\left[F+GH(j)\right]^T\left[P(j+1)+Q\right]\left[F+GH(j)\right]+\lambda H^T(j)H(j)} \tag{13.26}$$

με αρχική τιμή στο τελικό όριο N :

$$\boxed{P(N)=0} \tag{13.27}$$

Με τη μέθοδο του δυναμικού προγραμματισμού στο πρόβλημα της γραμμικής τετραγωνικής ρύθμισης είδαμε ότι καταλήξαμε στις αναδρομικές σχέσεις (13.23), (13.24) και (13.26) που ισχύουν για κάθε j : $0 \le j \le N-1$ με αρχική συνθήκη στο τελικό όριο j=N αυτή που δίνεται από τη σχέση (13.27).

Στο σημείο αυτό αξίζει να γίνουν ,μερικές γενικές παρατηρήσεις για τη θεωρία Hamilton-Jacobi-Bellman είτε αφορά συστήματα συνεχούς χρόνου, είτε αντίστοιχα διακριτού χρόνου.

1) Στα συστήματα συνεχούς χρόνου η εφαρμογή της θεωρίας αυτής μάλλον <u>περιπλέκει</u> τα πράγματα στη λύση μερικών διαφορικών εξισώσεων σε σχέση με την αρχικά αναλυθείσα ,μέθοδο της Αρχής του Ελαχίστου με χρήση της Hamiltonian.

2) Στα συστήματα διακριτού χρόνου η εφαρμογή του δυναμικού προγραμματισμού <u>απλοποιεί</u> τα πράγματα αφού καταλήγει σε απλούς σχετικά αναδρομικούς τύπους (π.χ. στο προηγούμενο παράδειγμα είδαμε ότι μας απαλλάσσει από την ανάγκη λύσης της εξίσωσης Riccati) που δίνουν απευθείας το βέλτιστο νόμο ελέγχου.

3) Και στις δύο προαναφερθείσες περιπτώσεις η λύση που προκύπτει από την εφαρμογή της θεωρίας Hamilton-Jacobi-Bellman καταλήγει σε ελέγχους <u>πάντοτε κλειστού βρόχου.</u>

β. Ας θεωρήσουμε το γραμμικό σύστημα διακριτού χρόνου που περιγράφεται από την αναδρομική σχέση (8.1)

$$x(j+1) = F(j)x(j) + G(j)u(j)\,, \qquad 0 \le j \le N$$
με δεδομένη την τιμή του x για j=0 :

$$x(0)=x_0$$

Κατ' αναλογία προς το αντίστοιχο πρόβλημα για συστήματα συνεχούς χρόνου, ζητάμε να βρούμε σε κάθε j από μηδέν μέχρι N-1, τη βέλτιστη είσοδο u(j) έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται κάποιο <u>τετραγωνικό</u> κριτήριο κόστους της μορφής της εξ. (8.3) αντί της (13.8)

$$J = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{N-1}\left[x^T(j)Qx(j) + u^T(j)Ru(j)\right] + \frac{1}{2}x^T(N)Sx(N)$$

Για τις <u>μήτρες βάρους</u> Q,R,και S έχουμε ότι πρέπει να είναι συμμετρικές τετραγωνικές και επιπλέον η μήτρα R πρέπει να είναι <u>θετικά ορισμένη</u> και οι Q και S <u>θετικά ημιορισμένες</u> έτσι ώστε να ικανοποιείται η Συνθήκης 3 του Κεφ. 2.

Η εξίσωση H-J-B θα είναι :

$$\begin{aligned} V_i\left[x(i)\right] &= \min_{u(i)}\left\{V_{i+1}\left[x(i+1)\right] + L_i\left[x(i),u(i)\right]\right\} = \\ &= \min_{u(i)}\left\{V_{i+1}\left[x(i+1)\right] + \frac{1}{2}\left[x^T(i)Qx(i) + u^T(i)Ru(i)\right]\right\} \end{aligned} \tag{13.28}$$

Ξεκινώντας από το τελευταίο βήμα για <u>i=N-1</u> έχουμε :

$$V_{N-1}\left[x(N-1)\right] = \min_{u(N-1)}\left\{V_N\left[x(N)\right] + \frac{1}{2}\left[x^T(N-1)Qx(N-1) + u^T(N-1)Ru(N-1)\right]\right\}$$

με

$$V_N\left[x(N)\right] = \frac{1}{2}x^T(N)Sx(N) = \frac{1}{2}\left[Fx(N-1) + Gu(N-1)\right]^T S\left[Fx(N-1) + Gu(N-1)\right]$$

Άρα

$$\begin{aligned} V_{N-1}\left[x(N-1)\right] = \min_{u(N-1)}\Big\{&\frac{1}{2}\left[Fx(N-1) + Gu(N-1)\right]^T S\left[Fx(N-1) + Gu(N-1)\right] + \\ &+ \frac{1}{2}\left[x^T(N-1)Qx(N-1) + u^T(N-1)Ru(N-1)\right]\Big\} \end{aligned} \tag{13.29}$$

Εφαρμόζοντας τη σχέση (13.6) παίρνω τον εξής νόμο ελέγχου :

$$\boxed{u(N-1) = -\frac{G^T SF}{G^T SG + R}x(N-1)} \tag{13.30}$$

Οπότε και ο συντελεστής ανάδρασης στο βήμα i=N-1 γίνεται :

$$H(N-1) = -\frac{G^T SF}{G^T SG + R}$$

Αντικαθιστώ το u στη σχέση (13.10) και παίρνω :

$$V_{N-1}\left[x(N-1)\right] = \frac{1}{2}x^T(N-1)P(N-1)x(N-1)$$

όπου

$$P(N-1) = \left[F + GH(N-1)\right]^T S\left[F + GH(N-1)\right] + Q + H^T(N-1)RH(N-1)$$

Για <u>i=N-2</u> έχω :

$$V_{N-2}\left[x(N-2)\right] = \min_{u(N-2)}\left\{V_{N-1}\left[x(N-1)\right] + \frac{1}{2}\left[x^T(N-2)Qx(N-2) + u^T(N-2)Ru(N-2)\right]\right\} =$$

$$= \min_{u(N-2)}\left\{\frac{1}{2}\left[x^T(N-1)P(N-1)x(N-1) + x^T(N-2)Qx(N-2) + u^T(N-2)Ru(N-2)\right]\right\} =$$

$$= \min_{u(N-2)}\left\{\frac{1}{2}\left[\left(Fx(N-2) + Gu(N-2)\right)^T P(N-1)\left(Fx(N-2) + Gu(N-2)\right) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + x^T(N-2)Qx(N-2) + u^T(N-2)Ru(N-2)\ \right]\right\}$$

Εφαρμόζοντας τη σχέση (13.6) παίρνω :

$$u(N-2) = -\frac{G^T P(N-1)F}{G^T P(N-1)G + R}x(N-2) \qquad (13.31)$$

Ο συντελεστής ανάδρασης είναι :

$$\boxed{H(N-2) = -\frac{G^T P(N-1)F}{G^T P(N-1)G + R}} \qquad (13.32)$$

και το V_{N-2} γίνεται :

$$V_{N-2} = \frac{1}{2}x^T(N-2)P(N-2)x(N-2)$$

με

$$P(N-2) = \left[F + GH(N-2)\right]^T\left[P(N-1)\right]\left[F + GH(N-2)\right] +$$
$$+ Q + H^T(N-2)RH(N-2)$$

Για το γενικό βήμα i=j (0 ≤ j ≤ N-1) έχω :

$$V_{j+1}\left[x(j+1)\right] = \frac{1}{2} x^T(j+1)P(j+1)x(j+1)$$

Τότε η

$$V_j\left[x(j)\right] = \min_{u(j)}\left\{\frac{1}{2}\left[x^T(j+1)P(j+1)x(j+1) + x^T(j)Qx(j) + u^T(j)Ru(j)\right]\right\} \quad (13.33)$$

και η ελαχιστοποίηση μου δίνει το νόμο ελέγχου στο βήμα i :

$$\boxed{u(j) = H(j)x(j)} \quad (13.34)$$

όπου

$$\boxed{H(j) = -\frac{G^T P(j+1)F}{G^T P(j+1)G + R}} \quad (13.35)$$

Αντικαθιστώντας τώρα τις (13.23) και (13.24) στην (13.22) προκύπτει για την V_j :

$$V_j\left[x(j)\right] = \frac{1}{2} x^T(j)P(j)x(j)$$

με

$$\boxed{P(j) = \left[F + GH(j)\right]^T\left[P(j+1)\right]\left[F + GH(j)\right] + Q + H^T(j)RH(j)} \quad (13.36)$$

με αρχική τιμή στο τελικό όριο N :

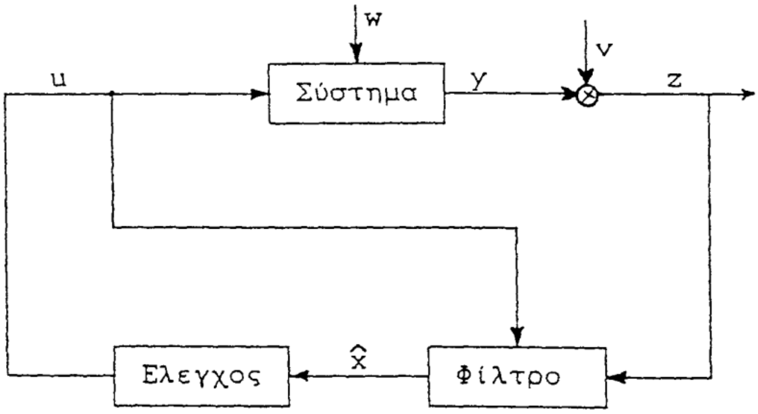
$$P(N) = S \quad (13.37)$$

<u>14. ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΟΣ ΒΕΛΤΙΣΤΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΩΝ ΚΡΙΤΗΡΙΩΝ (LQG PROBLEM)</u>

Ο στοχαστικός βέλτιστος έλεγχος αφορά συστήματα συνεχούς ή διακριτού χρόνου στα οποία επιδρούν ανεπιθύμητοι θόρυβοι τόσο στο ίδιο το σύστημα όσο και στις μετρούμενες εξόδους.

Στις περιπτώσεις αυτές το πρόβλημα της βελτιστοποίησης ανάγεται στα εξής επιμέρους προβλήματα. Πρώτον, στο <u>φιλτράρισμα</u> των εξόδων και στην όσο το δυνατόν καλύτερη προσέγγιση των πραγματικών καταστάσεων από το μετρούμενο διάνυσμα εξόδου. Δεύτερο, στον υπολογισμό του <u>βέλτιστου νόμου ελέγχου</u>.

Σχεδιάζουμε δηλαδή ένα βέλτιστο στοχαστικό παρατηρητή και ένα βέλτιστο βρόχο ελέγχου, όπως δείχνεται στο σχ. 14.1



Σχ. 14.1. Στοχαστικός βέλτιστος έλεγχος συστημάτων

<u>Συστήματα συνεχούς χρόνου</u>

Ας θεωρήσουμε το δυναμικό, γραμμικό σύστημα συνεχούς χρόνου :

$$\dot{x} = Ax + Bu + Dw \tag{14.1}$$

όπου u η είσοδος και w τυχαία διαταραχή, με μετρούμενη έξοδο :

$$z=Cx+v \tag{14.2}$$

όπου v παριστά την αβεβαιότητα στη μέτρηση. Επίσης θεωρούμε ότι η αρχική τιμή του διανύσματος κατάστασης $x(t_0)$ παρουσιάζει αβεβαιότητα.

Για τα τυχαία σήματα w,v και $x(t_0)$, θεωρούμε ότι ισχύουν τα παρακάτω στοχαστικά δεδομένα :

Για το θόρυβο w στο σύστημα :

$$E\{w(t)\} = 0 \tag{14.3}$$

$$E\{w(t)w^T(\tau)\} = \hat{Q}\,\delta(t-\tau) \tag{14.4}$$

Για το θόρυβο v στο σύστημα :

$$E\{v(t)\} = 0 \tag{14.5}$$

$$E\{v(t)v^T(\tau)\} = \hat{R}\,\delta(t-\tau) \tag{14.6}$$

όπου δ(t-τ) η συνάρτηση Kronecker :

$$\delta(t-\tau) = \begin{cases} 1 & \acute{o}\tau\alpha\nu \quad t=\tau \\ 0 & \acute{o}\tau\alpha\nu \quad t\neq\tau \end{cases} \tag{14.7}$$

ενώ για ην αρχική τιμή της κατάστασης :

$$E\{x(t_0)\} = \bar{x}_0 \tag{14.8}$$

$$E\{[x(t_0) - \bar{x}_0][x(t_0) - \bar{x}_0]^T\} = \hat{P}_0 \tag{14.9}$$

Για τα διαφορετικά σήματα θορύβου θεωρούμε ότι δεν υπάρχει μεταξύ τους ετεροσυσχέτιση :

$$E[w(t)v^T(\tau)] = E[w(t)x^T(\tau)] = E[v(t)x^T(\tau)] = 0 \tag{14.10}$$

Για το πρόβλημα αυτό θεωρούμε το παρακάτω κριτήριο κόστους :

$$J = E\left\{\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}\left(x^T Qx + u^T Ru\right)dt + \frac{1}{2}x^T(t_f)Sx(t_f)\right\} \tag{14.11}$$

το οποίο αναφέρεται στη μέση τιμή E επειδή αφορά στοχαστικές διαδικασίες όπου οι μήτρες Q και S είναι πραγματικές, συμμετρικές και τουλάχιστον θετικά ημιορισμένες, ενώ η R είναι πραγματική συμμετρική και θετικά ορισμένη.

Από τη σχέση (14.11) παρατηρούμε ότι το κριτήριο κόστους αναφέρεται στο ακριβές διάνυσμα κατάστασης του συστήματος (δεν θα μπορούσε να είναι κι αλλιώς), ενώ όπως είναι προφανές, ο σχεδιασμός του βέλτιστου βρόχου ελέγχου βασίζεται στο εκτιμούμενο διάνυσμα κατάστασης μέσω κάποιου κατάλληλου φίλτρου.

Εισάγοντας λοιπόν τη διαφορά e μεταξύ του πραγματικού και του εκτιμούμενου διανύσματος κατάστασης :

$$e = x - \hat{x} \tag{14.12}$$

και αντικαθιστώντας το διάνυσμα κατάστασης x στην (14.11) μέσω της (14.12) καταλήγουμε στο ακόλουθο κριτήριο κόστους:

$$\boxed{J = J_1 + J_2} \tag{14.13}$$

όπου το J_1 είναι :

$$J_1 = E\left\{\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}\left[\hat{x}^T Q\hat{x} + u^T Ru\right]dt + \frac{1}{2}\hat{x}^T(t_f)S\hat{x}(t_f)\right\} \tag{14.14}$$

και το J_2 είναι :

$$J_2 = E\left\{\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} e^T Qedt + \frac{1}{2}e^T(t_f)Se(t_f)\right\} \tag{14.15}$$

Παρατηρούμε ότι το αρχικό κριτήριο κόστους εκφράστηκε σαν άθροισμα <u>δύο ανεξάρτητων κριτηρίων</u> J_1 και J_2 .Το πρώτο κριτήριο, σύμφωνα με τη σχέση (14.14). αναφέρεται στον ανεξάρτητο σχεδιασμό του βέλτιστου ελέγχου έχοντας σαν δεδομένο την εκτίμηση του διανύσματος κατάστασης $\hat{x}$. Τότε, ο βέλτιστος νόμος ελέγχου θα δίνεται κατά τα γνωστά από τη σχέση :

$$u = K\hat{x} \tag{14.16}$$

όπου :

$$K = -R^{-1}B^T P \tag{14.17}$$

και P είναι η λύση της εξίσωσης Riccati :

$$\dot{P} = -PA - A^T P + PBR^{-1}B^T P - Q \tag{14.18}$$

με αρχική τιμή στο όριο t_f :

$$P(t_f)=S \tag{14.19}$$

Το δεύτερο κριτήριο J_2, σύμφωνα με τη σχέση (14.15) σχετίζεται μόνο προς το σφάλμα εκτίμησης e του φίλτρου-εκτιμητή και αποτελεί το κριτήριο βέλτιστου σχεδιασμού ενός τέτοιου φίλτρου. Ένα τέτοιο φίλτρο πλήρους τάξης –φίλτρο Kalman-Bucy- μπορεί να σχεδιαστεί σύμφωνα με τις παρακάτω σχέσεις :

$$\dot{\hat{x}} = (A - K_e C)\hat{x} + Bu + K_e z \tag{14.20}$$

με

$$\hat{x}(t_0) = x_0 \tag{14.21}$$

όπου το κέρδος K_e του φίλτρου δίνεται από τη σχέση :

$$K_e = \hat{P} C^T \hat{R}^{-1} \tag{14.22}$$

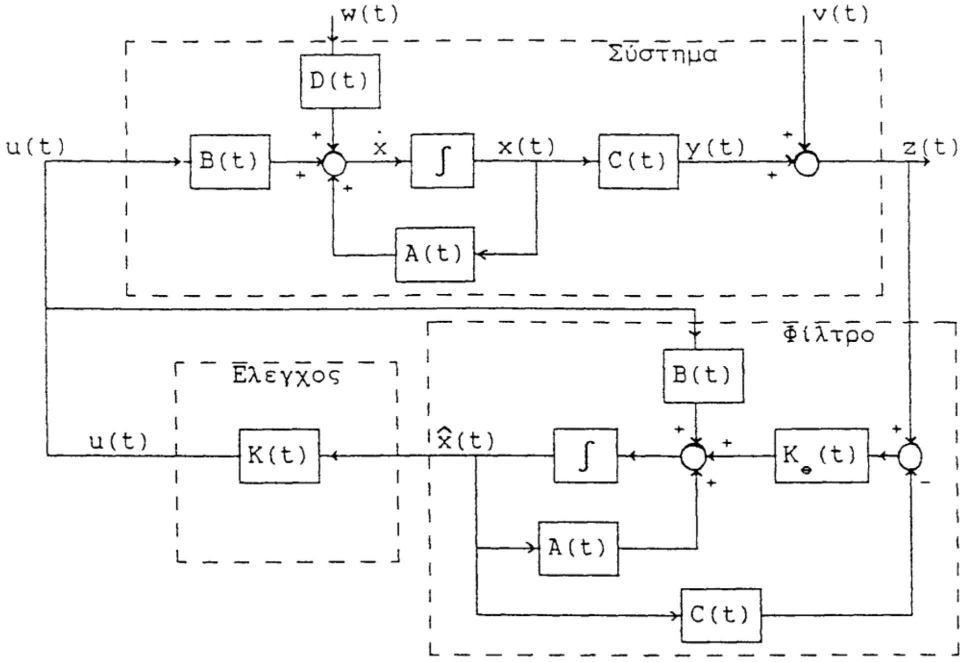
με $\hat{P}$ τη λύση της ακόλουθης εξίσωσης Riccati :

$$\dot{\hat{P}} = A\hat{P} + \hat{P}A^T - \hat{P}C^T \hat{R}^{-1} C\hat{P} + D^T \hat{Q} D \tag{14.23}$$

με αρχική τιμή :

$$\hat{P}(t_0) = \hat{P}_0 \tag{14.24}$$

Από την προηγηθείσα ανάλυση αποδείχθηκε ότι ο σχεδιασμός του βέλτιστου ελέγχου για γραμμικά στοχαστικά συστήματα γίνεται ανεξάρτητα για το βρόχο ελέγχου και ανεξάρτητα για το βέλτιστο εκτιμητή. Η βασική αυτή ιδιότητα αναφέρεται στη βιβλιογραφία σαν Αρχή του ανεξάρτητου σχεδιασμού μεταξύ του νόμου ελέγχου και του παρατηρητή. Το δε πρόβλημα που αναλύσαμε, του στοχαστικού βέλτιστου ελέγχου αναφέρεται σαν γραμμικό, τετραγωνικό, Gaussian πρόβλημα (Linear Quadratic Gaussian) επειδή αναφέρεται σε γραμμικό σύστημα, χρησιμοποιεί τετραγωνικό κριτήριο και περιέχει στοχαστικές συνιστώσες με Gaussian κατανομές. Το σχήμα 14.2 δείχνει την παράσταση ενός τέτοιου συστήματος ελέγχου.



Σχ. 14.2. Βέλτιστος στοχαστικός έλεγχος γραμμικού συστήματος συνεχούς χρόνου

<u>Συστήματα διακριτού χρόνου</u>

Ας θεωρήσουμε τώρα το αντίστοιχο πρόβλημα για συστήματα διακριτού χρόνου :

$$x(j+1) = F(j)x(j) + G(j)u(j) + D(j)w(j) \tag{14.25}$$

με μετρούμενη έξοδο :

$$z(j) = C(j)x(j) + v(j) \tag{14.26}$$

όπου w ο θόρυβος στο σύστημα και v η αβεβαιότητα στη μέτρηση. Επίσης θεωρούμε ότι η αρχική τιμή του διανύσματος κατάστασης x(0) παρουσιάζει αβεβαιότητα.

Για τα τυχαία σήματα w, v και x(0), θεωρούμε ότι ισχύουν τα παρακάτω στοχαστικά δεδομένα:

Για το θόρυβο w στο σύστημα :

$$E\{w(j)\} = 0 \tag{14.27}$$

$$E\{w(j)w^T(j)\} = \hat{Q}\delta(j-i) \tag{14.28}$$

Για το θόρυβο v στη μέτρηση:

$$E\{v(j)\} = 0 \tag{14.29}$$

$$E\{v(j)v^T(j)\} = \hat{R}\,\delta(j-i) \tag{14.30}$$

όπου δ(j-i) η συνάρτηση Kronecker :

$$\delta(j-i) = \begin{cases} 1 & \acute{o}\tau\alpha\nu \quad j = i \\ 0 & \acute{o}\tau\alpha\nu \quad j \neq i \end{cases} \tag{14.31}$$

ενώ για ην αρχική τιμή της κατάστασης :

$$E\{x(0)\} = \bar{x}_0 \tag{14.32}$$

$$E\{[x(0) - \bar{x}_0][x(0) - \bar{x}_0]^T\} = \hat{P}_{e0} \tag{14.33}$$

Για τα διαφορετικά σήματα θορύβου θεωρούμε ότι δεν υπάρχει μεταξύ τους ετεροσυσχέτιση :

$$E[w(j)v^T(j)] = E[w(j)x^T(j)] = E[v(j)x^T(j)] = 0 \tag{14.34}$$

Για το πρόβλημα αυτό θεωρούμε το παρακάτω κριτήριο κόστους :

$$J = E\left\{\sum_{j=0}^{N-1}\left[x^T(j)Q(j)x(j) + u^T(j)R(j)u(j)\right] + x^T(N)Sx(N)\right\} \tag{14.35}$$

το οποίο αναφέρεται στη μέση τιμή E επειδή αφορά στοχαστικές διαδικασίες. Οι μήτρες Q και S είναι πραγματικές, συμμετρικές και τουλάχιστον θετικά ημιορισμένες, ενώ η R είναι πραγματική, συμμετρική και θετικά ορισμένη.

Παρατηρούμε και εδώ ότι το κριτήριο κόστους αναφέρεται στο ακριβές διάνυσμα κατάστασης του συστήματος ενώ ο σχεδιασμός του βέλτιστου βρόχου ελέγχου βασίζεται στο εκτιμούμενο διάνυσμα κατάστασης μέσω κάποιου κατάλληλου φίλτρου.

Εισάγοντας λοιπόν τη διαφορά e μεταξύ του πραγματικού και του εκτιμούμενου διανύσματος κατάστασης :

$$e = x - \hat{x} \tag{14.36}$$

και αντικαθιστώντας το διάνυσμα κατάστασης x στη (14.35) μέσω της (14.36) μετασχηματίζουμε το αρχικό κριτήριο κόστους στο άθροισμα των επιμέρους κριτηρίων :

$$\boxed{J = J_1 + J_2} \tag{14.37}$$

όπου το J_1 είναι :

$$J_1 = E\left\{\sum_{j=0}^{N-1}\left[\hat{x}^T(j)Q(j)\hat{x}(j) + u^T(j)R(j)u(j)\right] + \hat{x}^Y(N)S\hat{x}(N)\right\} \qquad (14.38)$$

και το J_2 είναι :

$$J_2 = E\left\{\sum_{j=0}^{N-1} e^T(j)Q(j)e(j) + e^T(N)Se(N)\right\} \qquad (14.39)$$

Το πρώτο κριτήριο αναφέρεται στον ανεξάρτητο σχεδιασμό του βέλτιστου ελέγχου έχοντας σαν δεδομένο την εκτίμηση του διανύσματος κατάστασης $\hat{x}$. Τότε ο βέλτιστος νόμος ελέγχου θα δίνεται κατά τα γνωστά από τη σχέση :

$$u(j) = K(j)\hat{x}(j) \qquad (14.40)$$

όπου

$$K(j) = -R^{-1}G^T F^{-T}\left[P(j) - Q\right] \qquad (14.41)$$

και P(j) είναι η λύση της εξίσωσης Riccati :

$$P(j) = F^T P(j+1)\left[I + GR^{-1}G^T P(j+1)\right]^{-1} F + Q \qquad (14.42)$$

με αρχική τιμή στο όριο N :

$$P(N) = S \qquad (14.43)$$

Το δεύτερο κριτήριο J_2 σχετίζεται <u>μόνο</u> προς το σφάλμα εκτίμησης e του φίλτρου και αποτελεί το κριτήριο βέλτιστου σχεδιασμού ενός τέτοιου φίλτρου. Ένα τέτοιο φίλτρο –φίλτρο Kalman διακριτού χρόνου- μπορεί να σχεδιαστεί σύμφωνα με τις παρακάτω σχέσεις :

$$\hat{x}(j+1) = \hat{x}(j+1|j) + K_e(j+1)\left[z(j+1) - C\hat{x}(j+1|j)\right] \qquad (14.44)$$

με αρχική συνθήκη :

$$\hat{x}(0) = \bar{x}_0 \qquad (14.45)$$

όπου

$$\hat{x}(j+1|j) = F\hat{x}(j) + Gu(j) \qquad (14.46)$$

$$K_e(j+1) = P_e(j+1|j)C^T\left[CP_e(j+1|j)C^T + \hat{R}\right]^{-1} \tag{14.47}$$

και

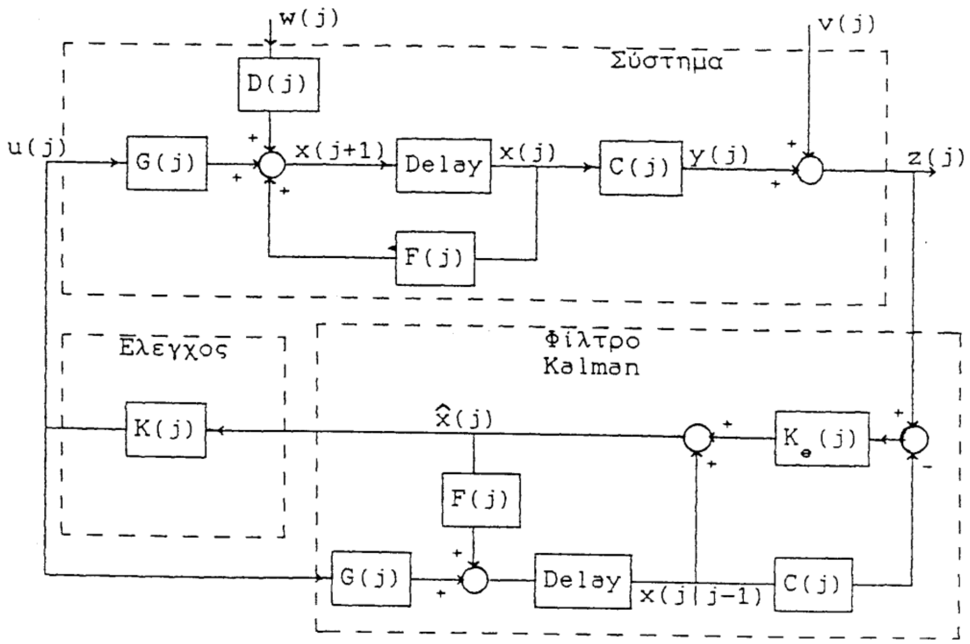
$$P_e(j+1|j) = FP_e(j)F^T + D\hat{Q}D^T \tag{14.48}$$

με αρχική συνθήκη :

$$P_e(0) = P_{e0} \tag{14.49}$$

όπου

$$P_e(j) = [I - K_e(j)C]P_e(j|j-1) \tag{14.50}$$



Σχ. 14.3. Βέλτιστος στοχαστικός έλεγχος γραμμικού συστήματος διακριτού χρόνου

15. ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΟΕΙΔΩΝ

Έστω *f(x,y,y')* μια συνάρτηση με συνεχείς μερικές παραγώγους μέχρι και δευτέρας τάξεως ως προς x,y,y'. Θεωρούμε το ολοκλήρωμα:

$$J(y) = \int_{x_0}^{x_f} f(x, y, y')dx, \qquad \text{όπου } y(x_0) = y_0 \text{ και } \quad y(x_f) = y_f$$

Η J(y) ονομάζεται συναρτησοειδής.

Για την εύρεση των συνθηκών έτσι ώστε η παραπάνω συναρτησοειδής να έχει ακρότατο θα χρησιμοποιήσουμε μεθόδους από την Άλγεβρα των μικρών μεταβολών (Calculus of Variations). Προς τον σκοπό αυτό παραθέτουμε αρχικά κάποια χρήσιμα για τη συνέχεια θεωρήματα και κανόνες.

1. ΜΕΡΙΚΗ ΚΑΙ ΟΛΙΚΗ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ

α) Εάν u=f(x,y,…,z), x=x(r,s,…,t), y=y(r,s,…,t) και z=z(r,s,…,t), τότε

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + ... + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r} \tag{15.1}$$

όπου το r μπορεί να αντικατασταθεί από s,….,t.

β) Εάν u=f(x,y,…,z), x=x(t), y=y(t) και z=z(t), τότε

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + ... + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r} \tag{15.2}$$

γ) Η ποσότητα p(x,y)+q(x,y)y' –όπου ο τόνος υποδεικνύει διαφόριση ως προς x- είναι η παράγωγος (dg/dx) κάποιας συνάρτησης g(x,y) αν και μόνο αν $(\partial p/\partial y) = (\partial q/\partial x)$. Σε αυτήν την περίπτωση $p = (\partial g/\partial x), q = (\partial g/\partial y)$.

2. ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ

α) Εάν

$$J = J(\varepsilon) = \int_{x_0(\varepsilon)}^{x_f(\varepsilon)} f(x, \varepsilon)dx$$

τότε

$$\frac{dJ}{d\varepsilon} = J'(\varepsilon) = f(x_f, \varepsilon)\frac{dx_f}{d\varepsilon} - f(x_0, \varepsilon)\frac{dx_0}{d\varepsilon} + \int_{x_0(\varepsilon)}^{x_f(\varepsilon)} \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} dx \tag{15.3}$$

όπου $(\partial f/\partial \varepsilon)$ είναι μια συνεχής συνάρτηση του ε και του χ στο διάστημα $x_0 \le x \le x_f$. Στην περίπτωση που τα x_0 και x_f είναι σταθερά (ανεξάρτητα από το ε), από το δεξιό μέλος της (15.3) παραμένει μόνο ο τελευταίος όρος.

β) Εάν η ολοκληρώσιμη συνάρτησηf ενός πολλαπλού ολοκληρώματος J είναι συνάρτηση μιας παραμέτρου ε, όπως και οι μεταβλητές της ολοκλήρωσης, η παράγωγος $(dJ/d\varepsilon)$υπολογίζεται με το να αντικαταστήσουμε την f με τη $(df/d\varepsilon)$ως ολοκληρώσιμη
συνάρτηση, θεωρείται ότι η περιοχή της ολοκληρώσεως είναι σταθερή (ανεξάρτητη του ε) και ότι $(df/d\varepsilon)$είναι μια συνεχής συνάρτηση του ε και των μεταβλητών της
ολοκλήρωσης.

3. ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΚΑΤΑ ΠΑΡΑΓΟΝΤΕΣ

Πολύ συχνά χρησιμοποιούμε τον κανόνα για ολοκλήρωση κατά παράγοντες

$$\int_{x_0}^{x_f} g\frac{df}{dx}dx = gf\Big]_{x_0}^{x_f} - \int_{x_0}^{x_f} f\frac{dg}{dx}dx \tag{15.4}$$

Οι f και g απαιτείται να είναι παντού συνεχείς και απλά μερικώς παραγωγίσιμες στο διάστημα $x_0 \le x \le x_f$.

4. ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ EULER ΓΙΑ ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Μια συνάρτηση F(x,y,…,z,u,υ,…,ω) λέγεται ομογενής, βαθμού n ως προς τις μεταβλητές u,υ,…,ω, εάν για τυχαίο h ,

$$F(x,y,...,z,hu,h\upsilon,...,h\omega) = h^n F(x,y,...,u,\upsilon,...,\omega) \tag{15.5}$$

Κάθε συνάρτηση για την οποία ισχύει η (15.5), ικανοποιεί το θεώρημα του Euler:

$$u\frac{\partial F}{\partial u} + \upsilon\frac{\partial F}{\partial \upsilon} + ... + \omega\frac{\partial F}{\partial \omega} = nF(x,y,...,z,u,\upsilon,...,\omega) \tag{15.6}$$

5. ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΑΠΡΟΣΔΙΟΡ1ΣΤΩΝ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΤΩΝ LAGRANGE

Μια συνθήκη αναγκαία για την ύπαρξη ελαχίστου (ή μεγίστου) της συνάρτησης F(x,y,…,z) ως προς τις μεταβλητές x,y,…,z που ικανοποιούν την συνθήκη

$$G_i(x,y,...,z) = C_i \qquad \text{(i=1,2,…,N)} \tag{15.7}$$

όπου C_i είναι δεδομένες σταθερές, είναι:

$$\frac{\partial F^*}{\partial x} = \frac{\partial F^*}{\partial y} = ... = \frac{\partial F^*}{\partial z} = 0 \qquad (15.8)$$

όπου $F^* = F + \sum_{i=1}^{N} \lambda_i G_i$.Οι σταθερές λ1, λ2, λ3,…, λ_N ονομάζονται πολλαπλασιαστές Lagrange και υπολογίζονται μαζί με τις τιμές των x, y,…, z που ελαχιστοποιούν (ή μεγιστοποιούν) την F(x,y,…,z) μέσω του συνόλου των εξισώσεων που συνιστούν οι (15.7) και (15.8).

6. ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ GREEN

Θεωρούμε μια περιοχή *D* του επιπέδου *χγ* , η οποία περιορίζεται από μια κλειστή καμπύλη C που αποτελείται από έναν καθορισμένο αριθμό ομαλών τόξων. Τα ολοκληρώματα που εμφανίζονται, υπολογίζονται κατά μήκος της C και μάλιστα με φορά τέτοια, ώστε ένας παρατηρητής που περπατά κατά μήκος της C να έχει την περιοχή D πάντα στα αριστερά του.

α) Εάν οι *P(x,y)* και *Q(x,y)* είναι παντού συνεχείς στην περιοχή D, κατά τμήματα συνεχείς κατά μήκος της C και επιπλέον εάν η D μπορεί να υποδιαιρεθεί σε ένα καθορισμένο αριθμό τμημάτων, στο καθένα από τα οποία οι πρώτες μερικοί παράγωγοι των P και. Q είναι συνεχείς, τότε:

$$\iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dxdy = \int_C (Pdy - Qdx) \qquad (15.9)$$

β) Γράφοντας P=nG, Q=nF στην (15.9), καταλήγουμε στο ανάλογο της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες σης δύο διαστάσεις

$$\iint_D \left(G\frac{\partial n}{\partial x} + F\frac{\partial n}{\partial y} \right) dxdy = -\iint_D n\left(\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \right) dxdy + \int_C n(Gdy - Fdx) \qquad (15.10)$$

γ) Γράφοντας $n = \psi, G = \partial\varphi/\partial x, F = \partial\varphi/\partial y$ στην (15.10), φθάνουμε με τη βοήθεια της

$$\frac{\partial \omega}{\partial n} = \frac{\partial \omega}{\partial x}\frac{dy}{ds} - \frac{\partial \omega}{\partial y}\frac{dx}{ds}, \qquad \omega = \omega(x,y)$$

στην

$$\iint_D \psi \nabla^2 \phi dxdy = -\iint_D \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) dxdy + \int_C \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds \qquad (15.11)$$

όπου $\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$ η Λαπλασιανή στις δύο διαστάσεις.

Μια σημαντική ειδική περίπτωση της (15.11) επιτυγχάνεται αν θέσουμε ψ = φ δ) Εναλλάσσοντας τα φ και ψ στην (15.11) και αφαιρώντας το αποτέλεσμα από την (15.11) αποκτούμε τη διατύπωση

$$\iint_D \left(\psi\nabla^2\phi - \varphi\nabla^2\psi\right)dxdy = \int_C \left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)ds \tag{15.12}$$

ε) θέτοντας $Q=0$ και $P=\left[G\left(\frac{\partial n}{\partial x}\right)-n\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)\right]$ στην (15.9), έχουμε

$$\iint_D G\frac{\partial^2 n}{\partial x^2}dxdy = \iint_D n\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}dxdy + \int_C \left(G\frac{\partial n}{\partial x} - n\frac{\partial G}{\partial x}\right)dy \tag{15.13}$$

Επιπλέον, θέτοντας $P=0$ και $Q=\left[G\left(\frac{\partial n}{\partial y}\right)-n\left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)\right]$ στην (15.9) έχουμε:

$$\iint_D G\frac{\partial^2 n}{\partial y^2}dxdy = \iint_D n\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}dxdy + \int_C \left(G\frac{\partial n}{\partial y} - n\frac{\partial G}{\partial y}\right)dx \tag{15.14}$$

7. ΒΑΣΙΚΟ ΛΗΜΜΑ

Εάν x_0 και x_f ($>x_0$) είναι σταθερές και *φ(χ)* είναι συνεχής συνάρτηση στο (x_0,x_f) και εάν

$$\int_{x_0}^{x_f} n(x)\varphi(x)dx = 0 \tag{15.15}$$

τότε για κάθε συνάρτηση $n(x)\in C(x_0,x_f)$ για την οποία

$$n(x_0)=n(x_f)=0 \tag{15.16}$$

συμπεραίνουμε ότι:

$$\varphi(x)=0\forall x\in\left(x_0,x_f\right) \tag{15.17}$$

Απόδειξη:

Υποθέτουμε ότι για κάποιο x_k έχουμε $\varphi(x_k)\neq 0$ και μάλιστα $\varphi(x_k)\rangle 0$. Τότε υπάρχει ένα διάστημα $(a,b)\subset\left(x_0,x_f\right)$ τέτοιο ώστε για κάθε $x\in(a,b)$ είναι $\varphi(x)\rangle 0$. Εκλέγοντας ως n(x) τη συνάρτηση

$$n(x)=\begin{cases}(x-a)(b-x) & \gamma\iota\alpha \quad x\in(a,b)\\ 0 & o\pi o\upsilon\delta\acute{\eta}\pi o\tau\varepsilon \quad \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon}\end{cases}$$

παίρνουμε

$$\int_{x_0}^{x_f} n(x)\varphi(x)dx = \int_a^b \varphi(x)(x-a)(b-x)dx \rangle 0$$

διότι για κάθε $x \in (a,b)$ είναι $\varphi(x_k)(x-a)(b-x)\rangle 0$.

Επειδή αυτό έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεση του λήμματος, συνάγεται ότι $\varphi(x)\rangle 0$ για όλα τα x.

8. ΕΛΑΧΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΟΕΙΔΩΝ - ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ EULER-LAGRANGE

Έστω $f(x,y,y')$ μια συνάρτηση με συνεχείς μερικές παραγώγους μέχρι και δευτέρας τάξεως ως προς x, y, y' . Θεωρούμε τη συναρτησοειδή:

$$J(y) = \int_{x_0}^{x_f} f(x,y,y')dx \qquad \text{όπου } y(x_0)=y_0 \text{ και } y(x_f)=y_f \qquad (15.18)$$

Έστω ότι υπάρχει μια συνεχής, διπλά διαφορίσιμη συνάρτηση y=y(x) που ικανοποιεί τις οριακές συνθήκες $y(x_0)=y_0$ και $y(x_f)=y_f$ και η οποία ελαχιστοποιεί το ολοκλήρωμα (15.18). Το ερώτημα που θέτουμε είναι το εξής: Ποια είναι η συνθήκη που πρέπει να ικανοποιεί η y(x) ώστε η συναρτησοειδής J(y) να ελαχιστοποιείται; Και επειδή πρόκειται για τον καθορισμό συνάρτησης y(x) η συνθήκη αυτή που θα δίνει και την βέλτιστη y(x), αναμένεται να είναι μια διαφορική εξίσωση.

Συμβολίζουμε τη βέλτιστη συνάρτηση η οποία ελαχιστοποιεί την (15.18) με $\bar{y}(x)$ και προχωρούμε στο σχηματισμό της μονο-μεταβλητής οικογένειας των επιτρεπτών συναρτήσεων y(x) στη γειτονιά της βέλτιστης συνάρτησης. Οι συναρτήσεις y(x) αποτελούν ένα σύνολο συναρτήσεων που κινούνται γύρω από την $\bar{y}(x)$ και οι οποίες ξεκινούν από το y_0 καταλήγοντας στο y_f .

$$y(x) = \bar{y}(x) + \varepsilon n(x), \qquad 0 \le \varepsilon \le 1 \qquad (15.19)$$

όπου n(x) είναι μια αυθαίρετη, διαφορίσιμη , παραμετρική συνάρτηση για την οποία:

$$n(x_0) = n(x_f) = 0 \qquad (15.20)$$

και ε είναι η μεταβλητή της οικογένειας που σαρώνει όλη την περιοχή στη γειτονιά της $\bar{y}(x)$ από την βέλτιστη συνάρτηση για ε=0 έως τα όρια της γειτονιάς για $\varepsilon = 1$. Έτσι για κάθε συνάρτηση n(x), έχουμε μια μοναδική μονο-μεταβλητή οικογένεια της μορφής (15.19). Με δεδομένη την n(x), κάθε τιμή της ε ορίζει ένα μόνο μέλος αυτής της μονο-μεταβλητής οικογένειας. Η συνθήκη (15.20) εξασφαλίζει ότι $y(x_0) = \bar{y}(x_0) = y_0$ και $y(x_f) = \bar{y}(x_f) = y_f$. Δηλαδή όλες οι συγκρίσιμες συναρτήσεις ικανοποιούν τις οριακές τιμές των συναρτήσεων ως προς τις οποίες η ελαχιστοποίηση εκτελείται. Με κατάλληλη επιλογή των n(x) και ε είναι δυνατό να παριστάνουμε κάθε διαφορίσιμη συνάρτηση, η οποία έχει τις απαιτούμενες τιμές στα άκρα, με μια έκφραση της μορφής (15.19). Η ουσιαστική σημασία της μορφής (15.19) έγκειται στο γεγονός ότι χωρίς να μας ενδιαφέρει το με ποια οικογένεια y(x) τυχαίνει να ασχολούμαστε, η συνάρτηση $\bar{y}(x)$ είναι μέλος αυτής της οικογένειας για επιλογή της παραμέτρου ε με τιμή ε = Ο. Γεωμετρικά ασχολούμαστε με μονο-μεταβλητές οικογένειες των καμπυλών y=y(x) που συνδέουν τα σημεία (x_0,y_0) και (x_f,y_f). Η βέλτιστη $\bar{y} = \bar{y}(x)$ είναι μέλος κάθε οικογένειας για ε=0. Η απόκλιση κάθε καμπύλης y=y(x) από τη βέλτιστη συνάρτηση $\bar{y}(x)$ δίνεται από το εn(x). Σημειώνουμε ότι γενικά για κάθε επιτρεπτή επιλογή του n(x) είναι εφικτό να διαλέξουμε μια περιοχή από τις τιμές της ε -όπως $-\varepsilon_0<\varepsilon<\varepsilon_0$ αντί της $0 \leq \varepsilon \leq 1$- η οποία κάνει το εn(x) αυθαίρετα μικρό για όλα τα x μεταξύ του x_0 και x_f. Η περιοχή της επιφάνειας που καλύπτεται από τις καμπύλες y=y(x) για τις οποίες $\left|\bar{y}(x) - y(x)\right|$ είναι κάτω από κάθε ορισμένο θετικό αριθμό, λέγεται ότι αποτελεί μια γειτονιά του ελαχίστου τόξου y=y(x).

Επειδή ενδιαφερόμαστε να μάθουμε ως προς τι είναι καλύτερη η $\bar{y}$ σε σχέση με οποιαδήποτε επιτρεπτή y, αντικαθιστούμε στην (15.18) τα y και y' με συναρτήσεις στην περιοχή της βέλτιστης $\bar{y}$, δηλαδή στη γειτονιά της $\bar{y}$. Έτσι μετασχηματίζουμε τη συναρτησοειδή (15.18) σε μια απλή συνάρτηση μιας μόνο μεταβλητής της ε :

$$J(\varepsilon) = \int_{x_0}^{x_f} f(x, y(x), y'(x))dx \qquad (15.21)$$

όπου η n(x) θεωρείται παράμετρος δεδομένη κάθε φορά. Η έκφραση $y'(x)$ δίνεται μέσω της (15.19) από την:

$$y' = y'(x) = \bar{y}'(x) + \varepsilon n(x) \qquad (15.22)$$

Έτσι βλέπουμε με τη βοήθεια της (15.19), ότι ο καθορισμός του ε ίσο με μηδέν είναι ισοδύναμο με το να αντικαταστήσουμε τα y και y' αντίστοιχα με τα $\bar{y}$ και $\bar{y}'$. Έτσι το ολοκλήρωμα (15.21) είναι ελάχιστο ως προς το ε για την τιμή ε=0, σύμφωνα με το χαρακτηρισμό ότι η $\bar{y}(x)$ είναι η συνάρτηση που ελαχιστοποιεί το ολοκλήρωμα (15.19). Τα $\bar{y}$ και $\bar{y}'$ θεωρούνται γνωστά, σταθερά, ενώ η n(x) θεωρούμε ότι είναι παράμετρος που μπορεί να πάρει οποιαδήποτε αυθαίρετη τιμή. Η J ελαχιστοποιείται για κάθε n(x).

Γνωρίζουμε ότι η αναγκαία συνθήκη για να υπάρχει ελάχιστο μιας συνάρτησης είναι να μηδενίζεται η πρώτη παράγωγος ως προς τη μεταβλητή της συνάρτησης. Στην προκειμένη περίπτωση που έχουμε την J συνάρτηση με μεταβλητή το ε, πρέπει να ισχύει για ε=0,

$$\left(\frac{dJ(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = 0 \qquad \text{ή} \qquad J'(0) = 0 \qquad (15.23)$$

Ισχύει ότι εάν $J = J(\varepsilon) = \int_{x_1(\varepsilon)}^{x_2(\varepsilon)} f(x,\varepsilon)dx$, τότε

$$\frac{dJ}{d\varepsilon}=J'(\varepsilon)=f(x_2,\varepsilon)\frac{dx_2}{d\varepsilon}-f(x_1,\varepsilon)\frac{dx_1}{d\varepsilon}+\int_{x_1(\varepsilon)}^{x_2(\varepsilon)}\frac{\partial f}{\partial\varepsilon}dx \tag{15.24}$$

(Αναλυτικότερα στην § 2 του Παραρτήματος)

Χρησιμοποιώντας αυτό τον κανόνα για την παράγωγο ενός ολοκληρώματος ως προς την παράμετρο του έχουμε:

$$\frac{dJ}{d\varepsilon}=J'(\varepsilon)=\int_{x_0}^{x_f}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\varepsilon}+\frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial\varepsilon}\right)dx=\int_{x_0}^{x_f}\left(\frac{\partial f}{\partial y}n+\frac{\partial f}{\partial y'}n'\right)dx \tag{15.25}$$

όπως προκύπτει από την (15.21) με τη βοήθεια της (15.19) και της (15.22). Από τότε που ορίσαμε το ε ίσο με μηδέν, είναι ισοδύναμο να αντικαταστήσουμε τα (y, y')με $(\bar{y},\bar{y}')$

και έχουμε σύμφωνα με την (15.23) και την (15.25):

$$J'(0)=\int_{x_0}^{x_f}\left(\frac{\partial f}{\partial\bar{y}}n+\frac{\partial f}{\partial\bar{y}'}n'\right)dx=0$$

Ολοκληρώνοντας κατά μέρη το δεύτερο όρο αυτού του ολοκληρώματος, έχουμε:

$$J'(0)=\frac{\partial f}{\partial\bar{y}'}n\Big]_{x_0}^{x_f}+\int_{x}^{x_f}\left[\frac{\partial f}{\partial\bar{y}}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial\bar{y}'}\right)\right]ndx\Rightarrow$$

$$J'(0)=\int_{x}^{x_f}\left[\frac{\partial f}{\partial\bar{y}}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial\bar{y}'}\right)\right]ndx=0, \text{ διότι } n(x_0)=n(x_f)=0 \tag{15.26}$$

Χρησιμοποιώντας το βασικό λήμμα (βλέπε § 7 Παραρτήματος) συμπεραίνουμε ότι πρέπει να ισχύει

$$\frac{\partial f}{\partial\bar{y}}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial\bar{y}'}\right)=0 \tag{15.27}$$

Αυτή η εξίσωση ονομάζεται Euler-Lagrange εξίσωση και είναι γενικά δευτέρας τάξεως. Η εξίσωση (15.27) είναι ισοδύναμη προς την

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\bar{y}'^2}y''+\frac{\partial^2 f}{\partial\bar{y}\partial\bar{y}'}\bar{y}'+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial\bar{y}'}-\frac{\partial f}{\partial y}=0 \tag{15.28}$$

Με την επίλυση της θα έχουμε στη διάθεση μας δύο σταθερές, οι οποίες θα προσδιοριστούν από την απαίτηση για ικανοποίηση των οριακών συνθηκών $\bar{y}(x_0)=\bar{y}_0$και $\bar{y}(x_f)=\bar{y}_f$ Η συνθήκη (15.23) είναι αναγκαία συνθήκη ακρότατου. Είναι δυνατόν η $\bar{y}(x)$, λύση της (15.27), να αντιστοιχεί και σε σημείο καμπής της

J=J(ε) στο ε=0. Για το λόγο αυτό η λύση $\bar{y}(x)$ της εξισώσεως Euler-Lagrange που ικανοποιεί και τις οριακές συνθήκες, λέμε ότι καθιστά το ολοκλήρωμα (15.18) στατικό ή στάσιμο.

Η απάντηση λοιπόν στο αρχικό μας ερώτημα είναι η εξής:

Η συνάρτηση $\bar{y}(x)$ η οποία ικανοποιεί την Euler-Lagrange εξίσωση (15.27) μαζί με τις οριακές συνθήκες είναι εξ' ορισμού η συνάρτηση που δίνει ακρότατο στη συναρτησοειδή $J[\bar{y}(x)]$.

Το είδος του ακρότατου συνήθως ευρίσκεται από τη φύση του προβλήματος, αποφεύγοντας την εύρεση του πρόσημου των ανωτέρας τάξεως παραγώγων της J(ε), εργασία συνήθως επίπονη. Δηλαδή τον έλεγχο της $J''(\varepsilon)\big|_{\varepsilon\to 0}\langle 0$ ή $J''(\varepsilon)\big|_{\varepsilon\to 0}\rangle 0$.

Ειδικές περιπτώσεις:

Για τη συνάρτηση $f = f(x, y(x), y'(x))$ έχουμε:

$$
\begin{aligned}
\frac{df}{dx} &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial y'} y'' \\
&= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{d}{dx}\left(y' \frac{\partial f}{\partial y'} \right) - y' \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x} + \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] y' + \frac{d}{dx}\left(y' \frac{\partial f}{\partial y'} \right)
\end{aligned}
$$

ή

$$
\frac{d}{dx}\left(f - y' \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = \frac{\partial f}{\partial x} + \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] y' \tag{15.29}
$$

Εάν η y(x) ικανοποιεί την εξίσωση Euler-Lagrange, η (15.29) καταλήγει στην

$$
\frac{d}{dx}\left(f - y' \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = \frac{\partial f}{\partial x} \tag{15.30}
$$

- Εάν η f δεν περιέχει εκπεφρασμένα την ανεξάρτητη μεταβλητή x, δηλαδή εάν

$\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, τότε από τη (15.30) προκύπτει:

$$
\frac{d}{dx}\left(f - y' \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0 \quad \text{ή} \quad f - y' \frac{\partial f}{\partial y'} = c_1 \tag{15.31}
$$

όπου c_1 μια σταθερά. Έτσι η y(x) θα βρεθεί ως λύση μιας πρώτης τάξεως διαφορικής εξίσωσης που περιέχει μόνο τα y και y' .

- Επίσης από την (15.27) προκύπτει ότι εάν η $\frac{\partial f}{\partial y}=0$, τότε

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)=0 \quad \text{ή} \qquad \frac{\partial f}{\partial y'}=c_2$$

όπου c_2 μια τυχαία σταθερά. Έτσι η αναζήτηση της συνάρτησης η οποία δίνει ακρότατο στην (15.18) περιορίζεται στη λύση μιας εξίσωσης που περιέχει μόνο τα y' και x.

- Εάν επιπλέον, η f είναι ανεξάρτητη από τη μεταβλητή x, όπως επίσης και από την εξαρτημένη μεταβλητή y, τότε η μερική παράγωγος $\frac{\partial f}{\partial y'}$ είναι συνάρτηση μόνο του y' ώστε η λύση (15.32) είναι απλώς $y'=c_3$, όπου η σταθερά c_3 είναι κάποια συνάρτηση της c_2 , αφού κατά σειρά ισχύει

$$\frac{\partial f}{\partial y'}=c_2 \text{ ή } \frac{df}{dx}=c_2\frac{dy'}{dx} \text{ ή } 0=c_2 y'' \qquad (15.33)$$

Έτσι οι συναρτήσεις που δίνουν την ακρότατη τιμή για περιπτώσεις που η f εξαρτάται αποκλειστικά από το y', είναι απαραίτητα γραμμικές εξισώσεις του x.
Οι εξισώσεις (15.31) και (15.32) είναι διαφορικές πρώτης τάξεως ως προς y(x), δηλαδή πρώτα ολοκληρώματα της εξίσωσης Euler-Lagrange

9. ΣΥΝΑΡΤΗΣΟΕΙΔΕΙΣ ΠΟΛΛΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΜΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

Προχωρούμε τώρα ώστε να βρούμε τις διαφορικές εξισώσεις που ικανοποιούν οι διπλά διαφορίσιμες συναρτήσεις $y_1(x)$, $y_2(x)$,…,$y_n(x)$ οι οποίες δίνουν ακρότατο στη συναρτησοειδή

$$J=\int_{x_0}^{x_f} f(y_1,y_2,...,y_n,y_1',y_2',...,y_n',x)dx \qquad (15.34)$$

ως προς αυτές τις συναρτήσεις $y_1(x)$, $y_2(x)$,…,$y_n(x)$, οι οποίες έχουν προκαθορισμένες τιμές στα σταθερά όρια της ολοκλήρωσης x_0 και x_f ,, όπου $x_0 < x_f$.

Σχηματίζουμε τις μονο-μεταβλητές οικογένειες των επιτρεπτών συναρτήσεων

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \bar{y}_1(x)+\varepsilon_1 n_1(x) \\ y_2(x) &= \bar{y}_2(x)+\varepsilon_2 n_2(x) \\ &\dots \\ y_n(x) &= \bar{y}_n(x)+\varepsilon_n n_n(x) \end{aligned} \qquad (15.35)$$

όπου n_1, n_2,…, n_n είναι αυθαίρετες διαφορίσιμες συναρτήσεις για τις οποίες:

$$n_1(x_0)=n_1(x_f)=n_2(x_0)=n_2(x_f)=...=n_n(x_0)=n_n(x_f)=0 \qquad (15.36)$$

και ε_i είναι η παράμετρος της κάθε οικογένειας. Η συνθήκη (15.36) μας διαβεβαιώνει ότι κάθε μέλος κάθε οικογένειας ικανοποιεί τις απαιτούμενες προκαθορισμένες οριακές συνθήκες. Επίσης βλέπουμε ότι άσχετα με την επιλογή των $n_1, n_2, \ldots, n_n$ το σύνολο των συναρτήσεων $\bar{y}_1(x), \bar{y}_2(x), ..., \bar{y}_n(x)$, που δίνουν ακραία τιμή στο παραπάνω ολοκλήρωμα (15.16) είναι μέλος κάθε οικογένειας, για τιμή της παραμέτρου ε ίση με μηδέν (ε=0).

Αντικαθιστούμε λοιπόν τα $y_1, y_2, \ldots, y_n$, στη (15.34) με συναρτήσεις στην περιοχή των βέλτιστων $\bar{y}_1(x), \bar{y}_2(x), ..., \bar{y}_n(x)$ και έτσι σχηματίζουμε το ολοκλήρωμα:

$$J(\varepsilon)=\int_{x_0}^{x_f} f(\bar{y}_1, ..., \bar{y}_n, n_1, ..., n_n, \varepsilon_1, ..., \varepsilon_n, x)dx \qquad (15.37)$$

για το οποίο πρέπει να ισχύει: $\frac{\partial J}{\partial \varepsilon_1}=0,\ \frac{\partial J}{\partial \varepsilon_2}=0,\ ...\frac{\partial J}{\partial \varepsilon_n}=0,$ ή γενικά

$$\frac{\partial J}{\partial \varepsilon_i}=0 \qquad i=1, 2, \ldots, n$$

Επομένως το ακρότατο που ψάχνουμε είναι το J(0). Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι

$$J'(0)=0 \qquad (15.38)$$

Από τη σχέση (15.35) συνεπάγεται ότι:

$$\begin{aligned} y_1' &= \bar{y}_1' + \varepsilon_1 n_1' \\ y_2' &= \bar{y}_2' + \varepsilon_2 n_2' \\ &\cdots \\ y_n' &= \bar{y}_n' + \varepsilon_n n_n' \end{aligned} \qquad (15.39)$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (15.24) της προηγούμενης παραγράφου έχουμε ότι:

$$J'(\varepsilon_1)=\int_{x_0}^{x_f}\left(\frac{\partial f}{\partial y_i} n_i + \frac{\partial f}{\partial y_i'} n_i'\right)dx \qquad (15.40)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τις σχέσεις (15.35) και (15.39) για να παράγουμε τις σχέσεις $\left(\frac{\partial y_i}{\partial \varepsilon_i}\right)=n_i$, και $\left(\frac{\partial y_i'}{\partial \varepsilon_i}\right)=n_i'$ τις οποίες και έχουμε αντικαταστήσει στο παραπάνω ολοκλήρωμα. Επίσης από την (15.35) και (15.39) συμπεραίνουμε ότι εάν θέσουμε ε=0, τότε είναι ισοδύναμο να αντικαταστήσουμε $y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n'$ με τα $\bar{y}_1, \bar{y}_2, ..., \bar{y}_n, \bar{y}_1', \bar{y}_2', ..., \bar{y}_n'$ αντίστοιχα.

Από την (15.40) λόγω της (15.38), θέτοντας ε_i =0, παίρνουμε:

$$J'(\varepsilon_1)\big|_{\varepsilon_i=0} = \int_{x_0}^{x_f}\left(\frac{\partial f}{\partial \overline{y}_i} n_i + \frac{\partial f}{\partial \overline{y}_i'}\overline{n_i'}\right)dx \tag{15.41}$$

Αυτή η σχέση πρέπει να ισχύει για κάθε επιλογή των συναρτήσεων $n_i(x)$. Κάνοντας ολοκλήρωση κατά παράγοντες (βλέπε § 4 Παραρτήματος) του δεύτερου όρου, του δεύτερου μέλους της (15.41) προκύπτει ότι:

$$J'(\varepsilon_i)\big|_{\varepsilon_i=0} = \int_{x_0}^{x_f}\left[\frac{\partial f}{\partial \overline{y}_i} n_i - n_i\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \overline{y}_i'}\right)\right]dx + \left[n_i\frac{\partial f}{\partial \overline{y}'}\right]_{x_0}^{x_f} = 0$$

Επειδή όμως $n(x_0)=n(x_f)=0$ έχουμε:

$$J'(\varepsilon_i)\big|_{\varepsilon_i=0} = \int_{x_0}^{x_f}\left[\frac{\partial f}{\partial \overline{y}_i} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \overline{y}_i'}\right)\right]n_i dx = 0 \tag{15.42}$$

Εφόσον η (15.42) ισχύει για κάθε i=1, 2,...,n, χρησιμοποιώντας το βασικό λήμμα που αναφέραμε στην προηγούμενη παράγραφο, παίρνουμε το σύστημα των εξισώσεων:

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{y}_i} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \overline{y}_i'}\right) = 0 \quad \text{i=1, 2,...,n} \tag{15.43}$$

που είναι γνωστές ως διαφορικές εξισώσεις Euler-Lagrange. Η λύση τους παρέχει τις συναρτήσεις $y_1(t)$, $y_2(t)$,…,$y_n(t)$, οι οποίες δίνουν ακρότατο στο ολοκλήρωμα (15.34).

10. ΠΡΟΫΠΟΘΕΣΕΙΣ ΓΙΑ ΝΑ ΙΚΑΝΟΠΟΙΕΙΤΑΙ Η ΕΞΙΣΩΣΗ EULER-LAGRANGE

Εάν η ολοκληρωτέα συνάρτηση f του ολοκληρώματος

$$J = \int_{x_0}^{x_f} f(x, y, y')dx$$

είναι ρητώς η ολική παράγωγος ως προς x, κάποιας συνάρτησης του x και y, τότε το ολοκλήρωμα J είναι σίγουρα ανεξάρτητο από τη συγκεκριμένη επιλογή της συνάρτησης y(x), όσο οι οριακές συνθήκες $y(x_0)=y_0$ και $y(x_f)=y_f$ ισχύουν. Εφόσον λοιπόν f=(dg/dx) το J είναι ίσο με τη διαφορά των προκαθορισμένων τιμών της g(x,y) στα οριακά σημεία – δηλαδή $[g(x_f,y_f)-g(x_0,y_0)]$.

Σε αυτή τη περίπτωση έχουμε:

$$f = \frac{dg}{dx} = \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}y',$$

έτσι ώστε η εξίσωση Euler-Lagrange $\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)=0$ γίνεται:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}y'-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)=0$$

Αλλά ο υπολογισμός της ολικής παραγώγου του $\frac{\partial g}{\partial x}$ ως προς x δείχνει ότι η τελευταία εξίσωση ικανοποιείται εφόσον:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}=\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}.$$

Αυτό το αποτέλεσμα μας υποδεικνύει την εξής ερώτηση: Ποια είναι η πιο γενική περίπτωση για την οποία η εξίσωση Euler-Lagrange ικανοποιείται; Για να βρούμε την απάντηση, γράφουμε την Euler-Lagrange ως εξής:

$$\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y'}+\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'}y'-\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}y''=0$$

Εφόσον οι τρεις πρώτοι όροι από τα αριστερά περιέχουν μέχρι και την πρώτη παράγωγο του y, η ικανοποίηση της Euler-Lagrange απαιτεί ο συντελεστής $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}\right)$ του y'' να μηδενίζεται. Αλλά αυτό είναι ισοδύναμο με το να πούμε ότι η f πρέπει να είναι γραμμική συνάρτηση του y'. Δηλαδή:

$$f=p(x,y)+q(x,y)y' \tag{15.44}$$

Γράφοντας την εξίσωση Euler-Lagrange για τη συγκεκριμένη f, παίρνουμε:

$$\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial q}{\partial y}y'-\frac{dq}{dx}=\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{\partial q}{\partial x}=0 \tag{15.45}$$

για όλα τα x και y. Αλλά αυτό σύμφωνα με την §1γ, είναι ακριβώς η συνθήκη που η (15.45) είναι η ολική παράγωγος (dg/dx) κάποιας συνάρτησης g(x,y).

Επομένως έχουμε ότι αναγκαία και ικανή συνθήκη για να ικανοποιείται η εξίσωση Euler-Lagrange είναι η ολοκληρωτέα συνάρτηση να είναι ρητώς η παράγωγος(dg/dx) κάποιας συνάρτησης g(x,y). Πάνω σε αυτό το συμπέρασμα στηρίζεται και η εξής πρόταση: Ικανή και αναγκαία συνθήκη, ώστε η πρόσθεση ενός όρου στην ολοκληρωτέα παράσταση ενός δεδομένου ολοκληρώματος να αφήνει αναλλοίωτη την αντίστοιχη εξίσωση Euler-Lagrange, είναι αυτός ο πρόσθετος όρος να είναι η παράγωγος (dg/dx)κάποιας συνάρτησης g(x,y). Αυτό συνάγεται από το πρώτο αποτέλεσμα, εξαιτίας της γραμμικότητας της εξίσωσης Euler-Lagrange ως προς την ολοκληρώσιμη συνάρτηση f.

11. ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ ΠΟΥ ΕΠΙΒΑΛΛΟΝΤΑΙ ΜΕΣΩ ΚΑΘΟΡΙΣΜΕΝΩΝ ΣΥΝΘΗΚΩΝ Ή ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

α) θεωρούμε το ολοκλήρωμα

$$J = \int_{x_0}^{x_f} f(y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n', x)dx$$

Έστω ότι οι συναρτήσεις που δίνουν ακρότατο στο παραπάνω ολοκλήρωμα υπόκεινται σε ένα σύνολο περιορισμών. Αυτοί οι περιορισμοί αποτελούνται από ένα σύνολο καθορισμένων ή διαφορικών εξισώσεων ή ένα συνδυασμό και των δύο, με τον ολικό αριθμό των εξισώσεων μικρότερο από τον αριθμό των ολοκληρώσιμων συναρτήσεων.
Συγκεκριμένα λοιπόν προχωρούμε να παράγουμε το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων, τις οποίες πρέπει να ικανοποιεί το σύνολο των συναρτήσεων που δίνει ακρότατο στο ολοκλήρωμα (15.46), ως προς τις η συνεχείς διαφορικές συναρτήσεις $y_1(x)$, $y_2(x)$,…,$y_n(x)$. Οι συναρτήσεις αυτές αποκτούν προκαθορισμένες τιμές στα $x=x_0$ και $x=x_f$ και ικανοποιούν τις *κ* δεδομένες (σταθερές και ανεξάρτητες) εξισώσεις.

$$G_j(y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n', x) = 0 \qquad (j=1,2,\dots,\kappa < n) \qquad (15.47)$$

(Εάν μια δεδομένη εξίσωση G_j είναι ρητά ανεξάρτητη από τις παραγώγους $y_n, y_1', y_2', ..., y_n'$ τότε η αντίστοιχη εξίσωση $G_j=0$ είναι μια καθορισμένη εξίσωση παρά μια διαφορική εξίσωση.)

Συμβολίζουμε τις βέλτιστες συναρτήσεις οι οποίες δίνουν ακρότατο στο ολοκλήρωμα (15.46) με $\bar{y}_1(x), \bar{y}_2(x), ..., \bar{y}_n(x)$ και προχωρούμε στο σχηματισμό των μονο-μεταβλητών οικογενειών των επιτρεπτών συναρτήσεων $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \bar{y}_1(x) + \varepsilon_1 n_1(x) \\ y_2(x) &= \bar{y}_2(x) + \varepsilon_2 n_2(x) \\ &\dots \\ y_n(x) &= \bar{y}_n(x) + \varepsilon_n n_n(x) \end{aligned} \qquad (15.48)$$

όπου n_1, n_2,…, n_n είναι αυθαίρετες διαφορίσιμες συναρτήσεις, συνεπείς με το σύνολο των περιορισμών, για τις οποίες ισχύει

$$n_1(x_0) = n_1(x_f) = n_2(x_0) = n_2(x_f) = ... = n_n(x_0) = n_n(x_f) = 0 \qquad (15.49)$$

και ε_i είναι η παράμετρος της κάθε οικογένειας. Η συνθήκη (15.49) μας βεβαιώνει ότι οποιοδήποτε μέλος κάθε οικογένειας ικανοποιεί τις απαιτούμενες προκαθορισμένες οριακές συνθήκες.

Στην (15.47) αντικαθιστούμε τα $y_1, y_2, ..., y_n$ με αυτά που δίνονται από τη σχέση (15.48) και έτσι παίρνουμε:

$$G_j(\bar{y}_1, \bar{y}_2, ..., \bar{y}_n, n_1, n_2, ..., n_n, \varepsilon_1, ..., \varepsilon_n, x) = 0 \qquad j=(1,2,\dots\kappa < n) \qquad (15.50)$$

Επιπλέον αντικαθιστούμε τα $y_1, y_2, ..., y_n$ στη (15.46) με τα $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ αντίστοιχα, που δίνονται από τη σχέση (15.48) και έτσι σχηματίζουμε το ολοκλήρωμα:

$$J(\varepsilon_i) = \int_{x_0}^{x_f} f(\bar{y}_1, \bar{y}_2, ..., \bar{y}_n, n_1, n_2, ..., n_n, \varepsilon_1, ..., \varepsilon_n, x)dx \qquad (15.51)$$

Εξαιτίας του χαρακτηρισμού των $\bar{y}_1(x), \bar{y}_2(x), ..., \bar{y}_n(x)$ ως τις βέλτιστες συναρτήσεις για την επίτευξη ακρότατου, συνεπάγεται από την (15.48) ότι το $J(\varepsilon_i)$ είναι ακρότατο για τιμή του ε_i ίση με το μηδέν ($\varepsilon_i = 0$) Επομένως συμπεραίνουμε ότι:

$$J'(0) = 0 \qquad (15.52)$$

για κάθε επιτρεπόμενη επιλογή των $n_1, n_2, \ldots, n_n$ ..

Από τη σχέση (15.48) συνεπάγεται ότι:

$$\begin{aligned} y_1' &= \bar{y}_1' + \varepsilon_1 n_1' \\ y_2' &= \bar{y}_2' + \varepsilon_2 n_2' \\ &\ldots \\ y_n' &= \bar{y}_n' + \varepsilon_n n_n' \end{aligned} \qquad (15.53)$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (15.48) του παραρτήματος, έχουμε ότι:

$$J'(\varepsilon_i) = \int_{x_0}^{x_f} \left(\frac{\partial f}{\partial y_i} n_i + \frac{\partial f}{\partial y_i'} n_i' \right) dx \qquad (15.54)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τις σχέσεις (15.48) και (15.53} για να παράγουμε τις σχέσεις $\left(\frac{\partial y_1}{\partial \varepsilon_i} \right) = n_i$ και $\left(\frac{\partial y_1'}{\partial \varepsilon_i} \right) = n_i'$ τις οποίες και έχουμε αντικαταστήσει στο παραπάνω ολοκλήρωμα. Επίσης από την (15.48) και την (15.53) συμπεραίνουμε ότι εάν θέσουμε ε=0, τότε είναι ισοδύναμο να αντικαταστήσουμε τα $y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n'$ με τα $\bar{y}_1, \bar{y}_2, ..., \bar{y}_n, \overline{y_1'}, \overline{y_2'}, ..., \overline{y_n'}$ αντίστοιχα.

Από την (15.54) λόγω της (15.52), θέτοντας $\varepsilon_i = 0$, παίρνουμε:

$$J'(\varepsilon_i)\big|_{\varepsilon_i = 0} = \int_{x_0}^{x_f} \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{y}_i} n_i + \frac{\partial f}{\partial \bar{y}_i'} n_i' \right) dx = 0 \qquad (15.55)$$

Επειδή υπάρχει αμοιβαία εξάρτηση των συναρτήσεων $n_1, n_2, \ldots, n_n$ όπως φαίνεται από την (15.50), για να αποκτήσουμε μια ακριβή έκφραση αυτής της εξάρτησης, σημειώνουμε ότι οι κ εξισώσεις (15.50) ικανοποιούνται ταυτόσημα για όλα τα ε, έτσι ώστε να μπορούμε να τις παραγωγίσουμε ως προς ε_i, ως εξής:

$$\frac{\partial G_j}{\partial y_i} n_i - \frac{\partial G_j}{\partial y_i'} n_i' = 0 \qquad (j=1,2,\ldots,\kappa)$$

Συγκεκριμένα για $\varepsilon_i = 0$, έχουμε:

$$\frac{\partial G_j}{\partial \bar{y}_i} n_i - \frac{\partial G_j}{\partial \bar{y}_i'} n_i' = 0 \qquad \text{(j=1,2,…,κ)} \tag{15.56}$$

εφόσον θέτοντας $\varepsilon_i = 0$ σημαίνει ότι αντικαθιστούμε τα $y_1, y_2, ..., y_n$ με τα $\bar{y}_1, \bar{y}_2, ..., \bar{y}_n$ σύμφωνα με τη σχέση (15.48).

Πολλαπλασιάζοντας την j-οστή εξίσωση του συστήματος (15.56) με την απροσδιόριστη συνάρτηση $\mu_j(x)$, για όλα τα j = 1,2,...κ, προσθέτουμε τα αριστερά μέλη (όλα ίσα με μηδέν για κάθε επιλογή των μ_j) στο ολοκλήρωμα (15.55) και φθάνουμε:

$$\int_{x_0}^{x_f} \left\{ \left[\frac{\partial f}{\partial \bar{y}_i} + \sum_{j=1}^{\kappa} \mu_j \frac{\partial G_i}{\partial \bar{y}_i} \right] n_i + \left[\frac{\partial f}{\partial \bar{y}_i'} + \sum_{j=1}^{\kappa} \mu_j \frac{\partial G_i}{\partial \bar{y}_i'} \right] n_i' \right\} dx = 0 \Rightarrow$$

$$\int_{x_0}^{x_f} \left\{ \frac{\partial F}{\partial \bar{y}_i} n_i + \frac{\partial F}{\partial \bar{y}_i'} \right\} dx = 0 \tag{15.57}$$

όπου ορίζουμε ως

$$F = f + \sum_{j=1}^{\kappa} \mu_j(x) G_j \tag{15.58}$$

Ολοκληρώνοντας κατά παράγοντες την (15.57), παίρνουμε με τη βοήθεια της (15.49),

$$\int_{x_0}^{x_f} \left\{ \left[\frac{\partial F}{\partial \bar{y}_i} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial \bar{y}_i'} \right) \right] n_i \right\} dx \tag{15.59}$$

Εξαιτίας του συνόλου (15.56) των κ εξισώσεων, δεν μπορούμε να θεωρήσουμε ότι οι n εξισώσεις n_1, n_2,…, n_n μπορούν να είναι τυχαίες. Μάλιστα υπάρχει κάποιο υποσύνολο από κ(<n) τέτοιες συναρτήσεις, των οποίων ο προσδιορισμός περιορίζεται από τον προσδιορισμό των υπολοίπων (n-κ). Χάριν σαφήνειας, υποθέτουμε ότι n_1, n_2,…, n_n είναι οι συναρτήσεις του συνόλου του οποίου η εξάρτηση από την επιλογή των τυχαίων $n_{\kappa+1}$, $n_{\kappa+2}$,…, n_n προσδιορίζεται από την (15.56). Σε αυτό το σημείο καθορίζουμε τις απροσδιόριστες συναρτήσεις μ_1 (x),μ_2(x),...,μ_κ(x), να είναι οποιοδήποτε σύνολο από κ συναρτήσεις, οι οποίες μηδενίζουν (για όλα τα x μεταξύ x_o και x_f) τους συντελεστές των n_1, n_2,…, n_n στο ολοκλήρωμα (15.59). Δηλαδή αν οι u_1,u_2,..,u_k. συμβολίζουν τις πρώτες κ εξισώσεις από τις y_1,y_2,…,y_n οι συναρτήσεις μ_j(x) επιλέγονται έτσι ώστε να ικανοποιούν

$$\frac{\partial F}{\partial u_i} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial u_i'} \right) = 0 \quad \text{(j=1,2,…,κ)} \tag{15.60}$$

Με την επιλογή όλων των μ_j σταθερών, η (15.59) γίνεται :

$$\int_{x_0}^{x_f}\left\{\left[\frac{\partial F}{\partial u_{k+1}}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial u'_{k+1}}\right)\right]n_{k+1}+,...,+\left[\frac{\partial F}{\partial u_n}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial u'_n}\right)\right]n_n\right\}dx=0 \qquad (15.61)$$

όπου $u_{κ+1}$, $u_{κ+2}$,…, u_n συμβολίζουν τις τελικές (n-κ) συναρτήσεις από τις y_1,y_2,…,y_n. Εφόσον οι συναρτήσεις $n_{κ+1}$, $n_{κ+2}$,…, n_n είναι, εντός των ορίων της (15.49), εντελώς τυχαίες, πρέπει καθένας από τους συντελεστές των $n_{κ+1}$, $n_{κ+2}$,…, n_n στο ολοκλήρωμα (15.36) να μηδενίζεται. Έχουμε λοιπόν:

$$\frac{\partial F}{\partial u_i}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial u'_i}\right)=0 \quad (ι= κ+1, κ+2,…,n) \qquad (15.62)$$

Έτσι, συνδυάζοντας την (15.62) με την (15.60) και σημειώνοντας ότι οι u_1, u_2,…, u_k αποτελούν τη συνολική λίστα y_1,y_2,…,y_n ,φτάνουμε στο συμπέρασμα ότι οι η συναρτήσεις $\bar{y}_1(x),\bar{y}_2(x),...,\bar{y}_n(x)$ που δίνουν ακρότατο, ικανοποιούν το σύστημα των η διαφορικών εξισώσεων Euler-Lagrange

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{y}_i}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial \bar{y}'_i}\right)=0 \qquad (15.63)$$

όπου η *F* δίνεται από την (15.58).

Στην πραγματικότητα πρέπει να θεωρήσουμε ότι το σύστημα των (n+κ) εξισώσεων, μαζί με το συνδυασμό των (15.47) και (15.63), απαιτείται για τον καθορισμό των (n+κ) αγνώστων συναρτήσεων y_1,y_2,…,y_n , $μ_1$,$μ_2$,…,$μ_κ$.

ΤΟ ΙΣΟΠΕΡΙΜΕΤΡΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Στην περίπτωση αυτή το πρόβλημα της βελτιστοποίησης συνίσταται στην εύρεση μιας συνεχούς και διαφορίσιμης συνάρτησης $\bar{y}=\bar{y}(x)$ στο διάστημα [x_0 ,x_f] για την οποία η :

$$J[y]=\int_{x_0}^{x_f} f(x,y,y')dx$$

έχει ένα σχετικό ελάχιστο και ταυτόχρονα ικανοποιεί την περιοριστική συνθήκη :

$$I[y]=\int_{x_0}^{x_f} g(x,y,y')dx=k \qquad \text{(όπου κ: σταθερά)}$$

Επίσης θεωρείται ότι τα ολοκληρώματα των f και g έχουν συνεχείς πρώτες και δεύτερες μερικές παραγώγους ως προς όλες τις εμφανιζόμενες μεταβλητές. Τα σημεία x_0 και x_f είναι καθορισμένα καθώς και τα οριακά σημεία της y(x) ,δηλαδή :

$y(x_0)=y_0$
$y(x_f)=y_f$ δεδομένα

Ακολουθώντας τη μέθοδο των προηγούμενων κεφαλαίων –direct nal method- μια οικογένεια επιτρεπτών συναρτήσεων γύρω από τη βέλτιστη λύση $\bar{y}(x)$ θα ορίζεται έτσι ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη περιορισμού και να πληρούνται οι οριακές συνθήκες. Ορίζουμε λοιπόν σαν :

$$y = \bar{y}(x) + \varepsilon_1 n_1(x) + \varepsilon_2 n_2(x)$$

με $\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 \end{bmatrix}^T$ διάνυσμα βαθμωτών μεγεθών τέτοιων ώστε :

$$0 \le \varepsilon_1, \varepsilon_2 \le 1$$

Η y(x) αποτελεί τότε μια οικογένεια επιτρεπτών συναρτήσεων <u>δύο</u> παραμέτρων (ε_1 και ε_2) έτσι ώστε να εξασφαλίζεται πάντοτε ότι $I[y] = k$ (αυτό συνακόλουθα σημαίνει ότι οι παράμετροι ε_1 και ε_2 δεν είναι ανεξάρτητες) και με τις $n_1(x)$ και $n_2(x)$ αυθαίρετες συναρτήσεις που ικανοποιούν όμως τις οριακές συνθήκες για την y(x), δηλαδή :

$$n_1(x_0) = n_2(x_0) = 0$$

$$n_1(x_f) = n_2(x_f) = 0$$

Έτσι μετασχηματίζουμε την συναρτησοειδή $I[y]$, στη γειτονιά της βέλτιστης λύσης ,σε μια συνάρτηση δυο μεταβλητών

$$h(\varepsilon) = h(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = J[\bar{y} + \varepsilon_1 n_1 + \varepsilon_2 n_2]$$

καθώς επίσης και την περιοριστική συνθήκη $I[y]$ σε μια συνάρτηση δυο βαθμωτών μεταβλητών :

$$q(\varepsilon) = q(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = J[\bar{y} + \varepsilon_1 n_1 + \varepsilon_2 n_2] = k$$

για αυθαίρετα $n_1(x)$ και $n_2(x)$.

Τότε το ελάχιστο της συνάρτησης h(ε) υπό την περιοριστική συνθήκη ισότητας q(ε)=k δίνεται κατά τα γνωστά από τη σχέση :

$$\nabla_\varepsilon^T h + \lambda^T \nabla_\varepsilon^T q = 0 \qquad \text{ή} \qquad \nabla_\varepsilon^T L = 0$$

όπου $\varepsilon \to 0$

και $L = h + \lambda^T q$

Ορίζοντας $l = f + \lambda g$ τότε ισχύουν:

$$\nabla_\varepsilon^T L = \frac{\partial L}{\partial \varepsilon_i} \qquad \text{για} \qquad i=1,2$$

οπότε σύμφωνα με τις μεθόδους προηγουμένου κεφαλαίου θα είναι :

$$\frac{\partial L}{\partial \varepsilon_i} = \int_{x_0}^{x_f} \left[\frac{\partial l}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varepsilon_i} + \frac{\partial l}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varepsilon_i} + \frac{\partial l}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial \varepsilon_i} \right] dx$$

και

$$\left.\frac{\partial l}{\partial \varepsilon_i}\right|_{\varepsilon_i=0} = \int_{x_0}^{x_f} \left[l_y n_i - l_{y'} n_i' \right] dx = 0$$

από την οποία προκύπτει :

$$l_y - \frac{d}{dx} l_{y'} = 0$$

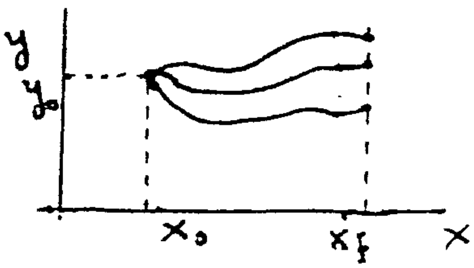
Η τελευταία συνθήκη (Euler-Lagrange equation) μαζί με την $I[y] = k$ δίνουν την 1η αναγκαία συνθήκη για τη βέλτιστη λύση του προβλήματος. (διατυπώστε τη 2η συνθήκη).

ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΜΗ ΚΑΘΟΡΙΣΜΕΝΩΝ ΟΡΙΑΚΩΝ ΣΥΝΘΗΚΩΝ

Α. Περίπτωση ελεύθερου τελικού ορίου

$\min\limits_{y, y_f} J[y]$ με $y(x_0)=y_0$

$y(x_f)$=ελεύθερο



Χρησιμοποιώντας την directional method, όπως προηγούμενα, καταλήγουμε:

$$g'(0) = \int_{x_0}^{x_f} \left[f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} \right] n dx + f_{y'} n \Big|_{x_0}^{x_f} = 0$$

που συνεπάγεται:

$$f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} = 0 \qquad \text{Εξίσωση Euler-Lagrange}$$

&

$$f_{y'}(x_f, y(x_f), y'(x_f)) = 0$$

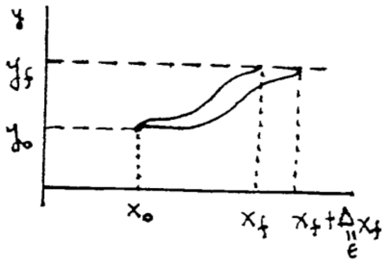
(αφού $n(x_0)=0$ αλλά $n(x_f) \neq 0$ εν γένει, αφού $y(x_f)$ ελεύθερο)

Β. ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΚΑΘΟΡΙΣΜΕΝΟΥ ΤΕΛΙΚΟΥ ΟΡΙΟΥ ΜΕ ΕΛΕΥΘΕΡΟ ΤΕΛΙΚΟ ΧΡΟΝΟ

$\min\limits_{y,y_f} J[y]$ με $y(x_0)=y_0$

$y(x_f)=y_f$

x_f :ελεύθερο



Έστω ότι $\bar{y}, \bar{x}_f$ είναι μια βέλτιστη λύση του προβλήματος. Εάν μεταβάλλουμε <u>μόνο</u> το y γύρω από τη βέλτιστη τιμή $\bar{y}$ είναι προφανές ότι θα βγει σαν αναγκαία συνθήκη ότι η $\bar{y}$ θα είναι μια λύση της εξίσωσης Euler-Lagrange.

Μεταβάλλοντας το x_f το τελικό όριο του προβλήματος μετακινείται. Έστω $y = y(x,\varepsilon)$ αποτελεί τη βέλτιστη λύση του προβλήματος μεταβολής στο πεδίο $\lfloor x_0, x_f + \varepsilon \rfloor$

Με τον προηγούμενο συμβολισμό προφανώς $y(x,0) = \bar{y}(x)$. Χρησιμοποιώντας την directional method :

$$g(\varepsilon) = \int_{x_0}^{x_f+\varepsilon} f[x, y(x,\varepsilon), y_x(x,\varepsilon)]dx =$$

$$= \int_{x}^{x_f} f[x, y(x,\varepsilon), y_x(x,\varepsilon)]dx + \int_{x_f}^{x_f+\varepsilon} f\left(\quad \right)dx$$

Το δεύτερο ολοκλήρωμα μπορεί να γραφεί:

$$\int_{x_0}^{x_f+\varepsilon} f[x, y(x,\varepsilon), y_x(x,\varepsilon)]dx \approx \varepsilon f\left[\bar{x}_f, y(\bar{x}_f,\varepsilon), y_x(\bar{x}_f,\varepsilon)\right]$$

και παίρνοντας την πρώτη παράγωγο της g(ε)

$$g'(\varepsilon) = \int_{x_0}^{x_f} \left[f_y \cdot y_\varepsilon(x,\varepsilon) + f_{y'} \cdot y_{x\varepsilon}(x,\varepsilon) \right] dx +$$

$$+ \varepsilon \frac{d}{d\varepsilon} \left[f\left(\bar{x}_f, y(\bar{x}_f,\varepsilon), y_x(\bar{x}_f,\varepsilon)\right)\right] +$$

$$+ 1 \cdot \left\lfloor f\left(\bar{x}_f, y(\bar{x}_f,\varepsilon), y_x(\bar{x}_f,\varepsilon)\right)\right\rfloor$$

Καθώς ε → 0, έχουμε:

$$g'(0)=\int_{x_0}^{\bar{x}_f}\left[f_y\left(x,\bar{y}(x),\bar{y}'(x)\right)y_\varepsilon(x,0)+f_{y'}\left(x,\bar{y}(x),\bar{y}'(x)\right)y_{x\varepsilon}(x,0)\right]dx+$$
$$+f\left[\bar{x}_f,\bar{y}\left(\bar{x}_f\right),\bar{y}'\left(x_f\right)\right]$$

Υποθέτοντας ότι:

$$y_{x\varepsilon}(x,0)=y_{\varepsilon x}(x,0)=\frac{d}{dx}y_\varepsilon(x,0)$$

έχουμε:

$$g'(0)=\int_{x_0}^{\bar{x}_f}\left[f_y\left(x,\bar{y}(x),\bar{y}'(x)\right)y_\varepsilon+f_{y'}\left(x,\bar{y}(x),\bar{y}'(x)\right)\frac{d}{dx}y_\varepsilon\right]dx+$$
$$+f\left[\bar{x}_f,\bar{y}\left(\bar{x}_f\right),\bar{y}'\left(x_f\right)\right]$$

ολοκληρώνοντας κατά μέρη :

$$g'(0)=\int_{x_0}^{\bar{x}_f}\left[f_y-\frac{d}{dx}f_{y'}\right]y_\varepsilon(x,0)dx+y_\varepsilon(x,0)f_{y'}(\_\_)\Big|_{x_0}^{\bar{x}_f}+$$
$$+f\left[\bar{x}_f,\bar{y}\left(\bar{x}_f\right),\bar{y}'\left(x_f\right)\right]$$

Καθώς η $\bar{y}$ ικανοποιεί την εξίσωση Euler-Lagrange και

$$y_\varepsilon(x_0,0)=0$$

έπεται:

$$g'(0)=y_\varepsilon\left(\bar{x}_f,0\right)f_{y'}\left(\bar{x}_f,\bar{y}\left(\bar{x}_f\right),\bar{y}'\left(\bar{x}_f\right)\right)+f\left[\bar{x}_f,\bar{y}\left(\bar{x}_f\right),\bar{y}'\left(x_f\right)\right]$$

Επειδή :

$$y\left(\bar{x}_f+\varepsilon,\varepsilon\right)=y_f=const$$

έπεται:

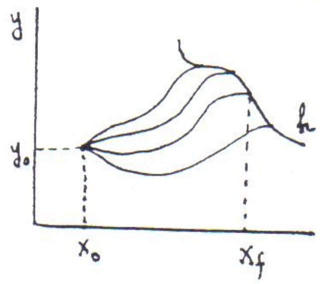
$$\frac{d}{d\varepsilon}\left[y\left(\bar{x}_f+\varepsilon,\varepsilon\right)\right]=0$$
$$\Rightarrow y_x(\bar{x}_f+\varepsilon,\varepsilon)\cdot 1+y_\varepsilon(\bar{x}_f+\varepsilon,\varepsilon)=0$$
$$\Rightarrow y_x(\bar{x}_f,0)\cdot 1+y_\varepsilon(\bar{x}_f,0)=0$$
$$\Rightarrow y_x(\bar{x}_f,0)\cdot 1=-\bar{y}'\left(x_f\right)$$

Οπότε η συνθήκη $g'(0)=0$ δίνει :

$$\left(f-y'f_{y'}\right)_{x=\bar{x}_f}=0$$

Η συνθήκη αυτή αποτελεί την επιπρόσθετη συνθήκη στο όριο x_f. (transversality condition)

Γ. ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΤΕΛΙΚΟΥ ΟΡΙΟΥ ΠΟΥ ΑΚΟΛΟΥΘΕΙ ΚΑΠΟΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ



$\min\limits_{y,y_f} J[y]$ με $y(x_0)=y_0$

$y(x_f)=h(x_f)$

x_f :ελεύθερο

Χρησιμοποιώντας την directional method, όπως στην περίπτωση Β, καταλήγουμε στην ίδια όπως προηγούμενα έκφραση για την $g'(\varepsilon)$ και $g'(0)$. Συνεχίζοντας από το σημείο αυτό έχουμε:

$$g'(0)=y_\varepsilon(\bar{x}_f,0)f_{y'}(\bar{x}_f,\bar{y}(\bar{x}_f),\bar{y}'(\bar{x}_f))+f[\bar{x}_f,\bar{y}(\bar{x}_f),\bar{y}'(x_f)]=0$$

σ 'αυτήν όμως την περίπτωση έχουμε:

$$y(\bar{x}_f+\varepsilon,\varepsilon)=h(x_f)$$

και έτσι:

$$\frac{d}{d\varepsilon}[y(\bar{x}_f+\varepsilon,\varepsilon)]=\frac{d}{d\varepsilon}[h(\bar{x}_f+\varepsilon)]$$
$$\Rightarrow\frac{d}{d\varepsilon}[y(\bar{x}_f+\varepsilon,\varepsilon)-h(\bar{x}_f+\varepsilon)]=0$$
$$\Rightarrow y_x(\bar{x}_f+\varepsilon,\varepsilon)\cdot 1+y_\varepsilon(\bar{x}_f+\varepsilon,\varepsilon)-h_x(\bar{x}_f+\varepsilon)=0$$

Καθώς το $\varepsilon\to 0$

$$y_x(\bar{x}_f,0)+y_\varepsilon(\bar{x}_f,0)-h_x(\bar{x}_f)=0$$
$$\Rightarrow y_x(\bar{x}_f,0)=-y_\varepsilon(\bar{x}_f,0)+h_x(\bar{x}_f)$$
$$\Rightarrow y_x(\bar{x}_f,0)=-y'(\bar{x}_f)+h'(\bar{x}_f)$$

Έτσι η $g'(0)=0$ δίνει :

$$\left\lfloor f+(h'-y')f_{y'}\right\rfloor_{x=\bar{x}_f}=0$$

Η συνθήκη αυτή αποτελεί την αναγκαία επιπρόσθετη συνθήκη στο τελικό όριο.

ΕΛΑΧΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΟΕΙΔΩΝ ΠΟΥ ΠΕΡΙΕΧΟΥΝ ΥΨΗΛΟΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ

Το πρόβλημα στην περίπτωση αυτή διατυπώνεται ως εξής:

Έστω y(x) συνάρτηση η οποία έχει συνεχή πρώτη και δεύτερη παράγωγο στο διάστημα $[x_0, x_f]$. Ζητείται να βρεθεί η συνάρτηση $\bar{y}$ για την οποία η συναρτησοειδής:

$$J[y]=\int_{x_0}^{x_f} f[y(x),\dot{y}(x),\ddot{y}(x),x]dx$$

έχει ένα σχετικό ελάχιστο.

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των προηγούμενων κεφαλαίων- την directional method- ορίζουμε μια συνάρτηση n(x) όπως προηγούμενα και θεωρούμε μια μικρή μεταβολή της J γύρω από τη βέλτιστη λύση $\bar{y}(x)$. Τότε μεταφέρουμε τη συνάρτηση J σε μια νέα συνάρτηση στη γειτονιά του βέλτιστου:

$$g(\varepsilon)=J[\bar{y}+\varepsilon n]=\int_{x_0}^{x_f} f[\bar{y}+\varepsilon n, y'+\varepsilon n', y''+\varepsilon n'', x]dx$$

Κατά τα γνωστά λοιπόν το ελάχιστο θα πρέπει να ικανοποιεί τις συνθήκες:

$$g'(\varepsilon)\big|_{\varepsilon\to 0}=0$$

$$g''(\varepsilon)\big|_{\varepsilon\to 0}\geq 0$$

Έτσι έχουμε:

$$g'(\varepsilon)=\int_{x_0}^{x_f}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varepsilon}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varepsilon}+\frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial \varepsilon}+\frac{\partial f}{\partial y''}\frac{\partial y''}{\partial \varepsilon}\right]dx$$

$$=\int_{x_0}^{x_f}\left(f_y n+f_{y'}n'+f_{y''}n''\right)dx$$

Αλλά ισχύει :

α) $\displaystyle\int_{x_0}^{x_f} f_{y'}n'dx = f_{y'}n\Big|_{x_0}^{x_f} - \int_{x_0}^{x_f}\frac{d}{dx}f_{y'}ndx = -\int_{x_0}^{x_f}\frac{d}{dx}f_{y'}ndx$

β) $\int_{x_0}^{x_f} f_{y''} n'' dx = f_{y''} n' \Big|_{x_0}^{x_f} - \int_{x_0}^{x_f} \frac{d}{dx} f_{y''} n' dx = -\int_{x_0}^{x_f} \frac{d}{dx} f_{y''} n' dx$

υπό την προϋπόθεση ότι ισχύει $\underline{n'(x_0) = n'(x_f) = 0}$ επιπλέον από τη συνθήκη $n(x_0) = n(x_f) = 0$. Έτσι :

$$\int_{x_0}^{x_f} f_{y''} n'' dx = -\frac{d}{dx} f_{y''} n \Big|_{x_0}^{x_f} + \int_{x_0}^{x_f} \frac{d^2}{dx^2} f_{y''} n dx = \int_{x_0}^{x_f} \frac{d^2}{dx^2} f_{y''} n dx$$

και συνεπώς:

$$g'(0) = \int_{x_0}^{x_f} \left[f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} f_{y''} \right] n dx = 0$$

Έτσι η πρώτη αναγκαία συνθήκη διαμορφώνεται στη νέα εξίσωση Euler-Lagrange:

$$f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} f_{y''} = 0$$

Για τη δεύτερη αναγκαία συνθήκη εξετάζουμε τη δεύτερη παράγωγο της g(ε):

$$g''(\varepsilon) = \frac{d}{d\varepsilon} g'(\varepsilon)$$

$$= \frac{d}{d\varepsilon} \int_{x_0}^{x_f} \left[f_y n + f_{y'} n' + f_{y''} n'' \right] dx$$

$$= \int_{x_0}^{x_f} \left[f_{yy} n^2 + 2 f_{yy'} n n' + 2 f_{yy''} n n'' + f_{y'y'} (n')^2 + 2 f_{y'y''} n' n'' + f_{y''y''} (n'')^2 \right] dx$$

Για ε → 0 και χρησιμοποιώντας τον κανόνα της ολοκλήρωσης κατά μέρη:

$$g''(0) = \int_{x_0}^{x_f} \left[P(x) n^2(x) + Q(x) n'(x)^2 + R(x) n''(x)^2 \right] dx \geq 0$$

όπου σύμφωνα με τη συνθήκη Legendre (τροποποιημένη) πρέπει $R(x) \geq 0$ που σημαίνει:

$$f_{y''y''} \geq 0$$

ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ

Οι αναγκαίες συνθήκες για την ελαχιστοποίηση συναρτησοειδών που περιέχει n τάξης παραγώγους:

$$J[y]=\int_{x_0}^{x_f} f\left[x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x)\right]dx$$

δίνονται χωρίς απόδειξη, από τις σχέσεις:

α) $f_y+\sum_{i=1}^{n}(-1)^i \dfrac{d^i}{dx^i} f_{y^{(i)}}=0$

που αποτελεί την πρώτη αναγκαία συνθήκη- γενικευμένη Euler-Lagrange- εξίσωση

β) $f_{y^{(m)}y^{(m)}} \geq 0$

που αντίστοιχα αποτελεί τη δεύτερη αναγκαία συνθήκη.

ΕΛΑΧΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΟΕΙΔΩΝ ΜΕ ΔΥΟ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ

Το πρόβλημα βελτιστοποίησης συνίσταται, στην περίπτωση αυτή, στην ελαχιστοποίηση μιας συναρτηοειδούς που δίνεται από το διπλό ολοκλήρωμα :

$$J[\omega]=\iint_{\Omega} f\left[x, y, \omega(x, y), \omega_x(x, y), \omega_y(x, y)\right]dxdy$$

σε ένα δεδομένο πεδίο Ω του επιπέδου x-y.

Ψάχνουμε δηλαδή για την κατάλληλη συνάρτηση δύο μεταβλητών ω(x,y), η οποία να έχει συνεχείς παραγώγους στο πεδίο Ω και να ικανοποιεί την οριακή συνθήκη πάνω στην καμπύλη β(Ω) που ορίζει την επιφάνεια Ω:

$\omega(x,y)=\omega_0(x,y)$ πάνω στην β(Ω)

Επίσης θεωρούμε ότι η συνάρτηση f έχει συνεχείς πρώτες και δεύτερες παράγωγους ως προς όλες τις εμφανιζόμενες μεταβλητές.

Για να διερευνήσουμε τις συνθήκες για τη βελτιστοποίηση της J[ω], χρησιμοποιούμε τη μέθοδο των προηγούμενων κεφαλαίων. Έστω λοιπόν $\overline{\omega}(x, y)$ συνάρτηση για την οποία η $J[\overline{\omega}]$ έχει ένα σχετικό ελάχιστο. Ας θεωρήσουμε τώρα μια μικρή μεταβολή της $J[\overline{\omega}]$ από τη βέλτιστη τιμή σε κάποιες γειτονικές τιμές. Τότε έστω ότι και η λύση θα δίνεται από τη σχέση:

$$\omega(x, y)=\overline{\omega}(x, y)+\varepsilon n(x, y)$$

όπου ε: $0 \le \varepsilon \le 1$ και $n(x,y)$ κάποια αυθαίρετη συνάρτηση δύο μεταβλητών με συνεχή παράγωγο στο Ω για την οποία επίσης ισχύει:

$n(x,y)=0$ πάνω στη β(Ω)

έτσι ώστε να μην παραβιάζεται η οριακή συνθήκη για την ω.

Έτσι η συναρτησοειδής μας μετασχηματίσθηκε στην περιοχή γύρω από τη βέλτιστη λύση, σε μια απλή συνάρτηση ως προς ε.

$$g(\varepsilon)=J[\overline{\omega}+\varepsilon n]=\iint_{\Omega} f\big[x,y,\overline{\omega}(x,y)+\varepsilon n(x,y),\overline{\omega}_x(x,y)+\varepsilon n_x(x,y),$$
$$,\overline{\omega}_y(x,y)+\varepsilon n_y(x,y)\big]dxdy$$

Το σχετικό ελάχιστο της $J[\omega]$ θα πρέπει τότε να ικανοποιεί τις συνθήκες:

$g'(\varepsilon)=0,$ για $\varepsilon \to 0$

$g''(\varepsilon)\ge 0,$ για $\varepsilon \to 0$

Ας ξεκινήσουμε με την πρώτη συνθήκη. Η παράγωγος της g(ε) θα είναι:

$$g'(\varepsilon)=\iint_{\Omega}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varepsilon}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varepsilon}+\frac{\partial f}{\partial \omega}\frac{\partial \omega}{\partial \varepsilon}+\frac{\partial f}{\partial \omega_x}\frac{\partial \omega_x}{\partial \varepsilon}+\frac{\partial f}{\partial \omega_y}\frac{\partial \omega_y}{\partial \varepsilon}\right]dxdy$$

Αλλά ισχύουν προφανώς:

$$\frac{\partial x}{\partial \varepsilon}=0 \qquad \text{και} \qquad \frac{\partial y}{\partial \varepsilon}=0$$

και

$$\frac{\partial \omega}{\partial \varepsilon}=n, \qquad \frac{\partial \omega_x}{\partial \varepsilon}=n_x \qquad \text{και} \qquad \frac{\partial \omega_y}{\partial \varepsilon}=n_y$$

οπότε αντίστοιχα η πρώτη αναγκαία συνθήκη θα δίνει:

$$g'(\varepsilon)\big|_{\varepsilon=0}=\iint_{\Omega}\left[f_w n+f_{w_x}n_x+f_{w_y}n_y\right]dxdy=0$$

Στο σημείο αυτό θα κάνουμε χρήση του θεωρήματος Green σύμφωνα με το οποίο:

Εάν οι συναρτήσεις P(x,y) και Q(x,y) είναι συνεχείς οπουδήποτε στο Ω και κατά τμήματα συνεχείς πάνω στο όριο της καμπύλης β(Ω) και εάν το Ω μπορεί να χωρισθεί σε ένα πεπερασμένο αριθμό υποπεδίων σε κάθε ένα από τα οποία οι πρώτες παράγωγοι των P και Q είναι συνεχείς, τότε:

$$\oint_{\beta(\omega)}\left[P(x,y)dy-Q(x,y)dx\right]=\iint_{\Omega}\left[P_x(x,y)+Q_y(x,y)\right]dxdy$$

Θεωρώντας:

$$P = f_{\omega_x} n \qquad \text{και} \qquad Q = f_{\omega_y} n$$

Τότε:

$$P_x = f_{\omega_x} n_x + \left(f_{\omega_x}\right)_x n$$

και

$$P_y = f_{\omega_y} n_y + \left(f_{\omega_y}\right)_y n$$

από τις οποίες προκύπτει, με εφαρμογή του θεωρήματος του Green, ότι :

$$\iint_{\Omega} \left[f_{\omega_x} n_x + f_{\omega_y} n_y\right] dxdy = \oint_{\beta(\omega)} \left[f_{\omega_x} ndy - f_{\omega_y} ndx\right] - \iint_{\Omega} \left[\left(f_{\omega_x}\right)_x n + \left(f_{\omega_y}\right)_y n\right] dxdy$$

όπου όμως επειδή η n(x,y)=0 πάνω στο όριο β(Ω), έπεται ότι:

$$\oint_{\beta(\omega)} n\left[f_{\omega_x} dy - f_{\omega_y} dx\right] = 0$$

Έτσι τελικά από την $g'(\varepsilon)\big|_{\varepsilon=0}$ έχουμε:

$$\iint_{\Omega} n\left[f_w - \frac{\partial}{\partial x} f_{wx} - \frac{\partial}{\partial y} f_{wy}\right] dxdy = 0$$

από την οποία προκύπτει η πρώτη αναγκαία συνθήκη για την $\overline{\omega}(x,y)$ που βελτιστοποιεί την J[ω]:

$$\boxed{f_w - \frac{\partial}{\partial x} f_{w_x} - \frac{\partial}{\partial y} f_{w_y} = 0} \qquad \text{Εξ. Euler-Lagrange}$$

Σύμφωνα με την προηγούμενη ανάλυση εύκολα μπορούμε να ορίσουμε την επιπλέον συνθήκη που πρέπει να ικανοποιείται όταν η ω(x,y) είναι ελεύθερη να πάρει οποιαδήποτε τιμή πάνω στην β(Ω) ,δηλαδή όταν ω_0(x,y) ελεύθερο:

$$f_{w_x} dy - f_{w_y} dx = 0 \qquad \text{πάνω στην β(Ω).}$$

ΤΟ ΙΣΟΠΕΡΙΜΕΤΡΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΣΤΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΤΩΝ ΔΥΟ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Στην περίπτωση αυτή ζητάμε να βρούμε τη συνάρτηση ω(x,y) που βελτιστοποιεί την J[ω], με τις συνθήκες ακριβώς που ορίσθηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο, όταν επιπρόσθετα ικανοποιείται η συνθήκη:

$$I = \iint_{\Omega} g(x, y, \omega, \omega_x, \omega_y) dxdy = k$$

όπου κ σταθερά, και με τη συνάρτηση g να έχει συνεχείς πρώτες και δεύτερες παραγώγους ως προς όλες τις εμφανιζόμενες μεταβλητές.

Τότε ακολουθώντας τη διαδικασία του αντίστοιχου κεφαλαίου για την περίπτωση συναρτησοειδών μιας ανεξάρτητης μεταβλητής καταλήγουμε στην ακόλουθη μορφή της Euler-Lagrange εξίσωσης:

$$l_w - \frac{\partial}{\partial x} l_{w_x} - \frac{\partial}{\partial y} l_{w_y} = 0$$

όπου τώρα:

$$l = f + \lambda g$$

με λ τον παράγοντα Lagrange.

16. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΣΤΟΝ ΒΕΛΤΙΣΤΟ ΕΛΕΓΧΟ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Παράδειγμα Π1 : . Έστω το βαθμωτό σύστημα

$$\dot{x}(t) = u(t), \qquad x(0)=1$$

με κριτήριο κόστους

$$J = \int_0^{\infty} \left[x^2(t) + u^2(t) \right] dt$$

Δηλαδή εδώ έχουμε S=0, Q(t)=2 και R(t)=2. Να βρεθούν τα βέλτιστα u(t) και x(t), τόσο υπό μορφή ανοικτού όσο και υπό μορφή κλειστού συστήματος.

Λύση. Θα μελετήσουμε πρώτα την περίπτωση του ανοικτού συστήματος

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\lambda}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0.5 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix}, \quad x(0)=1 \text{ και } \lambda(\infty) = Sx(\infty) = 0$$

Από το πιο πάνω σύστημα έχουμε $\dot{x} = -0.5\lambda$ και $\dot{\lambda} = -2x$. Άρα $x^{(2)}$=x, όπου $x^{(2)}$ είναι η δεύτερη παράγωγος του x(t) ως προς t. Η λύση της τελευταίας διαφορικής εξίσωσης είναι $x(t)=Ae^{-t}+Be^{t}$ και επομένως $\lambda(t)=2Ae^{-t}-2Be^{t}$. Από τις οριακές συνθήκες x(0)=1 και λ(∞)=0. έχουμε A=1 και B=0. Άρα $\lambda(t)=2e^{-t}$ και επομένως τα βέλτιστα u(t) και x(t) θα είναι

$$u(t)=-e^{-t} \qquad \text{και} \qquad x(t)=e^{-t}$$

Για να είναι επομένως το κριτήριο κόστους ελάχιστο 8α πρέπει να διεγείρουμε το σύστημα με τη διέγερση $u(t)=-e^{-t}$ που βρήκαμε παραπάνω, η οποία μπορεί να παράγεται π.χ. από μία γεννήτρια κυματομορφών. Σε αυτή την περίπτωση βέβαια, έχουμε ανοικτό σύστημα.
Για την περίπτωση του κλειστού συστήματος λύνουμε την αλγεβρική εξίσωση Riccati, που για το παρόν παράδειγμα είναι $-0.5p^2=-2$. Επομένως $p=\pm 2$.
Επειδή το p πρέπει να είναι θετικά ορισμένο κρατάμε μόνο το p=2. Τα βέλτιστα u(t) και x(t) επομένως θα είναι

$$u(t)=-x(t) \qquad \text{και} \qquad x(t)=e^{-t}$$

Παρατηρούμε ότι το βέλτιστο x(t) είναι, όπως εξάλλου αναμενόταν, το ίδιο με εκείνο του ανοικτού συστήματος . Παρατηρούμε επίσης ότι το βέλτιστο u(t) δεν είναι εδώ μια συγκεκριμένη κυματομορφή , όπως στην περίπτωση του ανοικτού συστήματος, αλλά είναι συνάρτηση του x(t).

<u>Παράδειγμα Π2:</u> Έστω το δίκτυο του σχήματος 1. Ο πυκνωτής είναι φορτισμένος σε τάση x_0 , πριν κλείσουν οι διακόπτες Δ_1 και Δ_2 . Οι διακόπτες κλείνουν στο t=0. Να βρεθεί η βέλτιστη διέγερση u(t) έτσι ώστε το κριτήριο κόστους

$$J=\int_0^1\left[x^2(t)+\frac{1}{5}u^2(t)\right]dt$$

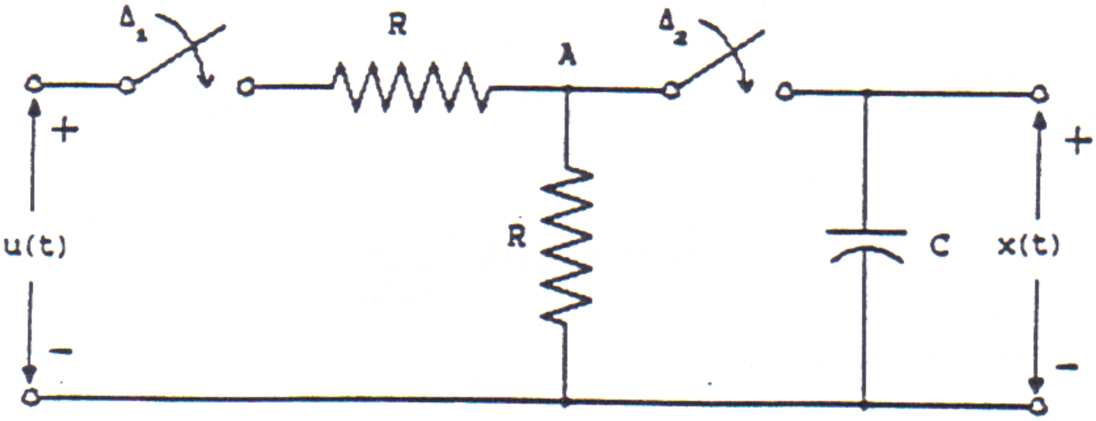
να είναι ελάχιστο. Για απλούστευση θεωρήστε CR=1. Να μελετηθεί το πρόβλημα τόσο υπό μορφή ανοικτού συστήματος όσο και υπό μορφή κλειστού συστήματος.

<u>Λύση.</u> Πρώτα προσδιορίζουμε την διαφορική εξίσωση που περιγράφει το δίκτυο. Η εξίσωση ρευμάτων Kirchoff στο σημείο Α είναι

$$C\frac{dx(t)}{dt}+\frac{2}{R}x(t)=\frac{u(t)}{R} \quad \text{ή} \quad \dot{x}(t)=-2x(t)+u(t), \qquad x(0)=x_0$$

Με βάση τη γενική έκφραση του κριτηρίου κόστους έχουμε ότι S=0, Q(t)=2 και R(t)=2/5. Θα μελετήσουμε πρώτα την περίπτωση του ανοικτού συστήματος:

Error!



Σχήμα 1 : Δίκτυο RC του παραδείγματος 3.2.1.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\lambda}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2.5 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix}, \quad x(0) = x_0 \text{ και } \lambda(1) = 0$$

Αν λύσουμε την πιο πάνω διανυσματική διαφορική εξίσωση θα πάρουμε

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{6}e^{-3t} + \frac{1}{6}e^{3t} & \frac{5}{12}e^{-3t} - \frac{5}{12}e^{3t} \\ \frac{1}{3}e^{-3t} - \frac{1}{3}e^{3t} & \frac{1}{6}e^{-3t} + \frac{5}{6}e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ \lambda(0) \end{bmatrix}$$

Αν στην πιο πάνω σχέση θέσουμε t=1 και χρησιμοποιήσουμε την σχέση της τελικής τιμής λ(1)=0, θα πάρουμε τις εξισώσεις

$$x(1) = \left[\frac{5}{6}e^{-3} + \frac{1}{6}e^{3}\right]x(0) + \left[\frac{5}{12}e^{-3} - \frac{5}{12}e^{3}\right]\lambda(0)$$

$$\lambda(1) = \left[\frac{1}{3}e^{-3} \frac{1}{3}e^{3}\right]x(0) + \left[\frac{1}{6}e^{-3} + \frac{5}{6}e^{3}\right]\lambda(0)$$

Αν διαιρέσουμε κατά μέλη και λύσουμε ως προς λ(0) θα έχουμε

$$\lambda(0) = \left[\frac{-\frac{1}{3}e^{-3} + \frac{1}{3}e^{3}}{\frac{1}{6}e^{-3} + \frac{5}{6}e^{3}}\right]x_0$$

Επομένως, ο πολλαπλασιαστής Lagrange λ(t) θα είναι

$$\lambda(t)=2\left[\frac{e^{3(1-t)}-e^{-3(1-t)}}{5e^{3}+e^{-3}}\right]x_0$$

Από τη σχέση μπορούμε να υπολογίσουμε το βέλτιστο σήμα ελέγχου.
Έχουμε

$$u(t)=-R^{-1}B^{T}\lambda(t)=-\frac{5}{2}\lambda(t)=-5\left[\frac{e^{3(1-t)}-e^{-3(1-t)}}{5e^{3}+e^{-3}}\right]x_0$$

Το βέλτιστο x(t) θα είναι

$$x(t)=\left[\frac{5e^{3(1-t)}-e^{-3(1-t)}}{5e^{3}+e^{-3}}\right]x_0$$

Άρα, για να είναι το κριτήριο κόστους ελάχιστο θα τρέπει να διεγείρουμε το δίκτυο με την πιο πάνω διέγερση u(t) . Δηλαδή θα πρέπει η διέγερση του δικτύου να είναι μία γεννήτρια κυματομορφών που να παράγει την κυματομορφή u(t). Με μια τέτοια διέγερση, η βέλτιστη τάση στο σημείο Α θα είναι η κυματομορφή x(t) που προσδιορίσαμε πιο πάνω.

Στη συνέχεια θα προσδιορίσουμε το βέλτιστο u(t) ως συνάρτηση του x(t), δηλαδή το τελικό σύστημα θα είναι ένα κλειστό σύστημα. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε την εξίσωση Riccati που για το δίκτυο είναι

$$\dot{p}-4p-\frac{5}{2}p^{2}=-2, \qquad p(1)=0$$

Η εξίσωση αυτή μπορεί να γραφεί ως εξής

$$\frac{dp}{\frac{5}{2}p^{2}+4p-2}=dt$$

Αν ολοκληρώσουμε και τα δύο μέλη από t_1 έως t, προκύπτει

$$t-t_1=\int_{t_1}^{t}\frac{2dp}{5p^2+8p-4}=2\int_{t_1}^{t}\frac{dp}{(p+2)(5p-2)}$$
$$=-\frac{1}{6}\int_{t_1}^{t}\frac{dp}{p+2}+\frac{5}{6}\int_{t_1}^{t}\frac{dp}{5p-2}$$
$$=-\frac{1}{6}\ln\left[\frac{p(t)+2}{p(t_1)+2}\right]+\frac{1}{6}\ln\left[\frac{5p(t)-2}{5p(t_1)-2}\right]$$

Αν θέσουμε $t_1=1$και πάρουμε τους αντιλογάριθμους θα έχουμε

$$p(t)=2\left[\frac{e^{6(1-t)}-1}{5e^{6(1-t)}+1}\right]$$

Τελικά παίρνουμε ότι το βέλτιστο u(t) είναι συνάρτηση του x(t) και έχει τη μορφή

$$u(t)=-R^{-1}B^{T}p(t)x(t)=-\frac{5}{2}p(t)x(t)=-5\left[\frac{e^{6(1-t)}-1}{5e^{6(t-1)}+1}\right]x(t)$$

η δε βέλτιστη τάση x(t) στο σημείο A είναι

$$x(t)=\left[\frac{5e^{3(1-t)}-e^{-3(1-t)}}{5e^{3}+e^{-3}}\right]x_0$$

Παρατηρούμε ότι το βέλτιστο x(t) είναι, όπως εξάλλου το αναμέναμε, το ίδιο με εκείνο του ανοικτού συστήματος.

<u>Παράδειγμα Π3</u>: Έστω το βαθμωτό σύστημα

$$\dot{x}(t)=x(t)+u(t), \qquad x(0)=x_0$$

Να βρεθεί η βέλτιστη διέγερση u(t) που ελαχιστοποιεί το κριτήριο κόστους

$$J=x^2(1)+\int_0^1\left[x^2(t)+\frac{1}{8}u^2(t)\right]dt$$

Να μελετηθεί το πρόβλημα τόσο υπό μορφή ανοικτού συστήματος όσο και υπό μορφή κλειστού συστήματος.

<u>Λύση.</u> Θα εξετάσουμε το πρόβλημα για την περίπτωση του ανοικτού συστήματος και με βάση την εξίσωση Riccati για την περίπτωση του κλειστού συστήματος.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\lambda}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix}, \quad x(0) = x_0 \text{ και } \lambda(1) = 2x(1)$$

Αν λύσουμε την παραπάνω διανυσματική διαφορική εξίσωση θα πάρουμε

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}e^{3t} + \frac{1}{3}e^{-3t} & -\frac{2}{3}e^{3t} + \frac{2}{3}e^{-3t} \\ -\frac{1}{3}e^{3t} + \frac{1}{3}e^{-3t} & \frac{1}{3}e^{3t} + \frac{2}{3}e^{-3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ \lambda(0) \end{bmatrix}$$

Αν στην πιο πάνω σχέση θέσουμε t=1 και χρησιμοποιήσουμε την σχέση της τελικής συνθήκης λ(1)=2x(1) θα έχουμε τις εξισώσεις

$$x(1) = \left[\frac{2}{3}e^{3} + \frac{1}{3}e^{-3}\right]x(0) + \left[-\frac{2}{3}e^{3} + \frac{2}{3}e^{-3}\right]\lambda(0)$$

$$\lambda(1) = 2x(1) = \left[-\frac{1}{3}e^{3} + \frac{1}{3}e^{-3}\right]x(0) + \left[\frac{1}{3}e^{3} + \frac{2}{3}e^{-3}\right]\lambda(0)$$

Αν διαιρέσουμε κατά μέλη και λύσουμε ως προς λ(0) θα έχουμε

$$\lambda(0) = \left[\frac{5e^{6} + 1}{5e^{6} - 2}\right]x_0$$

Επομένως, ο πολλαπλασιαστής Lagrange λ(t) θα είναι

$$\lambda(t) = \left[-\frac{1}{3}e^{3t} + \frac{1}{3}e^{-3t}\right]x_0 + \left[\frac{1}{3}e^{3t} + \frac{2}{3}e^{-3t}\right]\left[\frac{5e^{-6} + 1}{5e^{6} - 2}\right]x_0$$

Από τη σχέση μπορούμε να υπολογίσουμε το βέλτιστο σήμα ελέγχου.
Έχουμε

$$u(t) = -R^{-1}B^{T}\lambda(t) = -4\lambda(t) = -4\left[\frac{e^{3t} + 5e^{6}e^{-3t}}{5e^{6} - 2}\right]x_0$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα δίνει το βέλτιστο σήμα ελέγχου ως συνάρτηση του χρόνου και της αρχικής συνθήκης x_0. Δηλαδή εδώ έχουμε ανοικτό σύστημα ελέγχου (γιατί το u(t) δεν εξαρτάται από το x(t)).

Στη συνέχεια θα προσδιορίσουμε το βέλτιστο u(t) ως συνάρτηση του x(t). Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε την εξίσωση Riccati που για το παρόν πρόβλημα είναι

$$\dot{p} + 2p - 4p^2 = -2, \qquad p(1) = 2$$

Η εξίσωση αυτή μπορεί να γραφεί ως εξής

$$dt = \left(-2 - 2p + 4p^2\right)^{-1} dp$$

Αν ολοκληρώσουμε και τα δυο μέλη από t_1 έως t προκύπτει

$$t - t_1 = \int_{t_1}^{t} \frac{dp}{4p^2 - 2p - 2} = \frac{1}{4}\int_{t_1}^{t} \frac{dp}{(p-1)(p-0.5)}$$

$$= \frac{1}{6}\int_{t_1}^{t} \frac{dp}{p-1} 1 \frac{1}{6}\int_{t_1}^{t} \frac{dp}{p+0.5}$$

$$= \frac{1}{6}\ln\left[\frac{p(t)-1}{p(t_1)-1}\right] - \frac{1}{6}\ln\left[\frac{p(t)+0.5}{p(t_1)+0.5}\right]$$

Αν θέσουμε $t_1=1$ και πάρουμε τους αντιλογάριθμους θα έχουμε

$$p(t) = \frac{5 + e^{6(t-1)}}{5 - 2e^{6(t-1)}}$$

Επομένως το u(t) είναι συνάρτηση του x(t) και έχει τη μορφή

$$u(t) = -R^{-1}B^T p(t)x(t) = -4p(t)x(t) = -4\left[\frac{5 + e^{6(t-1)}}{5 - 2e^{6(t-1)}}\right]x(t)$$

Αν συγκρίνουμε τα δύο αποτελέσματα για t=0 θα έχουμε από μεν την πρώτη μέθοδο

$$u(0) = \frac{-4\left[1 + 5e^6\right]}{5e^6 - 2}x(0)$$

από δε την δεύτερη μέθοδο

$$u(0) = \frac{-4\left[5e^6 + 1\right]}{5 - 2e^6}x(0) = \frac{-4\left[5e^6 + 1\right]}{5e^6 - 2}$$

Παρατηρούμε ότι τα δύο αποτελέσματα συμφωνούν, όπως εξάλλου αναμενόταν, ως προς την αρχική τιμή u(0).

Παράδειγμα Π4: Έστω το σύστημα

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

με κριτήριο κόστους

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \left[[x(t) - n(t)]^T Q [x(t) - n(t)] + u(t) R u(t) \right] dt = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \left[[x_1(t) - n_1(t)]^2 + u^2(t) \right] dt$$

όπου δηλαδή

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad R = 1 \quad \text{και} \quad t_f \to \infty$$

Να βρεθεί το βέλτιστο u(t) ως συνάρτηση του x(t)

Λύση. Η εξίσωση Riccati είναι

$$\dot{P} + PA + A^T P - PBR^{-1} B^T P = -C^T QC$$

ή

$$\begin{bmatrix} \dot{P}_{11} & \dot{P}_{12} \\ \dot{P}_{21} & \dot{P}_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & P_{11} \\ 0 & P_{21} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ P_{11} & P_{12} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P_{12}P_{21} & P_{12}P_{22} \\ P_{21}P_{22} & P_{22}^2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Επειδή ο πίνακας P είναι συμμετρικός, δηλαδή $P_{12}=P_{21}$, τελικά θα έχουμε

$$\dot{P}_{11} - P_{12}^2 = -1$$
$$\dot{P}_{12} + P_{11} - P_{12}P_{22} = 0$$
$$\dot{P}_{22} + 2P_{12} - P_{22}^2 = 0$$

με οριακές συνθήκες

$$P(t_f) = C^T SC = 0, \quad \text{επειδή S=0}$$

Για τη λύση της Riccati θεωρούμε ότι $t_f \to \infty$. Τότε έχουμε το αλγεβρικό σύστημα των μη γραμμικών εξισώσεων

$$P_{12}^2 = 1$$
$$P_{11} - P_{12}P_{22} = 0$$
$$2P_{12} - P_{22}^2 = 0$$

από τις οποίες προκύπτει

$$P_{12} = 1$$
$$P_{22} = \sqrt{2}$$
$$P_{11} = \sqrt{2}$$

και επομένως

$$P = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Στη συνέχεια προσδιορίζουμε το διάνυσμα μ(t). Έχουμε

$$A - BR^{-1}B^{T}P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

οπότε έχουμε

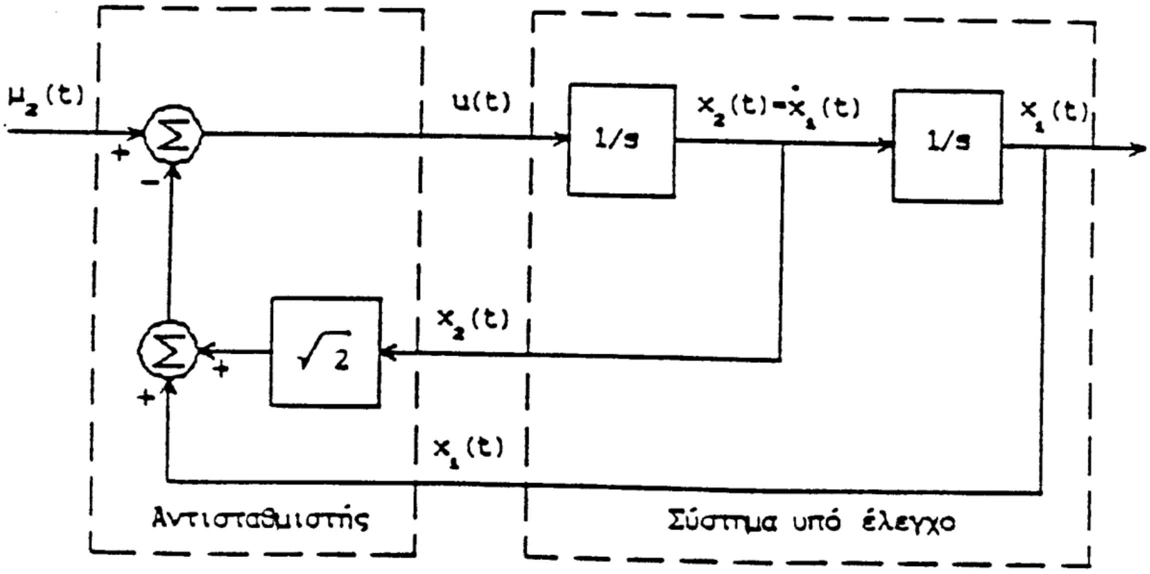
$$\begin{bmatrix} \dot{\mu}_1(t) \\ \dot{\mu}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1(t) \\ \mu_2(t) \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} -n_1(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Όταν το n_1(t)= γ = σταθερά, τότε για $t_f \to \infty$ θεωρούμε ότι και τα $\dot{\mu}_1(t) = \dot{\mu}_2(t) = 0$, οπότε έχουμε μ_2= 0,707μ_1 =γ. Τη λύση αυτή αντικαθιστούμε οπότε έχουμε το βέλτιστο σήμα ελέγχου

$$u = -x_1 - \sqrt{2}x_2 - \mu_2$$

Στο σχήμα 2 δίνεται το διάγραμμα βαθμίδων του κλειστού συστήματος.

Error!



Σχήμα 2 : Το διάγραμμα βαθμίδων του κλειστού συστήματος του παραδείγματος

<u>Παράδειγμα Π5:</u> Ένα γραμμικό χρονικά αμετάβλητο σύστημα περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

$$y^{(2)}(t)+4y^{(1)}(t)+3y(t)=u(t)$$

με μηδενικές αρχικές συνθήκες. Ζητούνται :

(α) Να βρεθεί η βέλτιστη λύση $u(t)=f[y(t),\dot{y}(t),t]$ του προβλήματος του βέλτιστου γραμμικού σερβομηχανισμού ώστε να ελαχιστοποιείται το κριτήριο κόστους

$$J=\int_0^{t_f}\left\{[\dot{y}(t)-2]^2+[y(t)-1]^2+3u^2(t)\right\}dt$$

όπου το t_f θεωρείται γνωστό. Οι διαφορικές εξισώσεις που προκύπτουν να μη λυθούν αλλά να καταστρωθούν στην απλούστερη δυνατή τους μορφή και να βρεθούν οι αναγκαίες για τη λύση τους οριακές συνθήκες.

(β) Στο ερώτημα (α) αν $t_f\to\infty$, να βρεθεί η αναλυτική έκφραση της βέλτιστης εισόδου u(t).

<u>Λύση</u> (α) Ορίζουμε ως μεταβλητές κατάστασης $x_1(y)=y(t)$ και $x_2(t)=\dot{y}(t)=\dot{x}_1(t)$ Επίσης ορίζουμε ως μεταβλητές εξόδου τις συναρτήσεις $y_1(t)=x_1(t)$ και $y_2(t)=x_2(t)$. Τότε έχουμε την ακόλουθη περιγραφή του συστήματος στο χώρο κατάστασης

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -3 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u(t)$$
$$\begin{bmatrix}y_1(t)\\ y_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}$$

Το κριτήριο κόστους μπορεί τώρα να γραφεί ως εξής

$$J=\frac{1}{2}\int_0^{t_f}\left[2[x_2(t)-2]^2+2[x_1(t)-1]^2+6u^2(t)\right]dt$$

ή

$$J=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}\left[e^T(t)Qe(t)+Ru^2(t)\right]dt$$

όπου, για το παρόν πρόβλημα, $e(t)=x(t)-n(t), S=0, R=6$ και

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -3 & -4\end{bmatrix}, b=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}, Q=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}, n=\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}$$

Το βέλτιστο σήμα ελέγχου u(t) δίνεται από τη σχέση

$$u(t)=-R^{-1}b^T\left[P(t)x(t)-\mu(t)\right]$$

Για τον υπολογισμό του P(t) προκύπτουν οι ακόλουθες τρεις διαφορικές εξισώσεις

$$\dot{P}_{11}-6P_{12}-\frac{P_{12}^2}{6}+2=0$$
$$\dot{P}_{12}-4P_{12}+P_{11}-3P_{22}-\frac{P_{12}P_{22}}{6}=0$$
$$\dot{P}_{22}+2P_{12}-8P_{22}-\frac{P_{22}^2}{6}+2=0$$

με οριακές συνθήκες $P(t_f)=S=0$. Επομένως $P_{11}(t_f)=P_{12}(t_f)=P_{22}(t_f)=0$. Οι διαφορικές εξισώσεις για το $\mu(t)$ είναι

$$\dot{\mu}_1(t)+\left[-3-\frac{1}{6}P_{12}\right]\mu_2(t)+2=0$$
$$\dot{\mu}_2(t)+\mu_1(t)+\left[-4-\frac{1}{6}P_{22}\right]\mu_2(t)+4=0$$

με οριακές συνθήκες $\mu_1(t_f)=\mu_2(t_f)=0$.

(β) Όταν $t_f\rightarrow\infty$ και επειδή S=0 και το σύστημα είναι χρονικά αμετάβλητο. τότε τα στοιχεία του πίνακα P είναι η λύση των πιο κάτω αλγεβρικών εξισώσεων

$$-6P_{12}-\frac{P_{12}^2}{6}+2=0$$

$$-4P_{12}+P_{11}-3P_{22}-\frac{P_{12}P_{22}}{6}=0$$

$$2P_{12}-8P_{22}-\frac{P_{22}^2}{6}+2=0$$

Το σύστημα αυτό μας δίνει τον εξής μοναδικό και θετικά ορισμένο πίνακα

$$P=\begin{bmatrix}2.3303 & 0.3303\\ 0.3303 & 0.3303\end{bmatrix}$$

Οι διαφορικές εξισώσεις για το μ(t) γίνονται

$$\dot{\mu}_1(t)-3.05505\mu_2(t)+2=0$$

$$\dot{\mu}_2(t)+\mu_1(t)-4.05505\mu_2(t)+4=0$$

Για $t_f\to\infty$,θεωρούμε ότι και τα $\dot{\mu}_1(t)=\dot{\mu}_2(t)=0$, οπότε έχουμε

$$\mu_1(t)=-1.34535$$

$$\mu_2(t)=0.65465$$

Συνεπώς το βέλτιστο u(t) είναι:

$$u(t)=-0.05505y(t)-0.05505\dot{y}(t)+0.10911$$