Βέλτιστος Έλεγχος Συστημάτων

Ενότητα 12: Αρχή ελαχίστου του Pontryagin

Καθηγητής Αντώνιος Αλεξανδρίδης

Πολυτεχνική Σχολή

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Τεχνολογίας Υπολογιστών

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης creative commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκεινται σε άλλου τύπου άδειες χρήσης, άδεια αναφέρεται ρητώς.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Αρχή ελαχίστου του Pontryagin

Αρχή ελαχίστου του Pontryagin

Στις προηγούμενες ενότητες εξετάσθηκαν περιπτώσεις συστημάτων στα οποία ούτε ο έλεγχος ούτε η κατάσταση όφειλαν να πληρούν άλλους περιορισμούς πέραν αυτών που ορίζονταν στο κριτήριο κόστους. Όμως η ύπαρξη περιορισμών σε πραγματικά συστήματα είναι πολύ συνηθισμένη, καθώς φυσικά πραγματοποιήσιμοι έλεγχοι μπορούν να πάρουν τιμές μόνο μέσα σε κάποια συγκεκριμένα όρια. Επίσης, λόγοι ασφαλείας ή δομικοί περιορισμοί στο σύστημα θέτουν όρια στις τιμές που είναι δυνατόν να λάβει και το διάνυσμα κατάστασης του συστήματος.

Αρχή ελαχίστου του Pontryagin

Όπως έχει αναλυθεί σε προηγούμενες ενότητες, <u>ο βέλτιστος νόμος ελέγχου</u> για κάποιο σύστημα της μορφής:

$$\dot{x} = F\left[x(t), u(t)\right]$$

που ελαχιστοποιεί κάποιο κριτήριο κόστους της γενικής μορφής:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} L(x,u,t)\,dt + \Phi\left[x(t_f), t_f\right]$$

προκύπτει από την <u>ελαχιστοποίηση της Hamiltonian του συστήματος ως προς *u*</u>, δηλ. από τη Συνθήκη Βελτιστοποίησης.

Αρχή ελαχίστου του Pontryagin

Όταν όμως θέσουμε επιπλέον περιορισμούς στα στοιχεία του διανύσματος ελέγχου:

$$a_i \le u_i \le b_i \qquad (12.1)$$

είναι δυνατό, ο νόμος βέλτιστου ελέγχου που προκύπτει από τη Συνθήκη Βελτιστοποίησης να είναι εκτός των επιτρεπτών ορίων. Τότε η λύση του προβλήματος βέλτιστου ελέγχου στηρίζεται στην <u>Αρχή Ελαχίστου του Pontryagin</u> σύμφωνα με την οποία

Αναγκαία συνθήκη ώστε το u^* να ελαχιστοποιεί τη συναρτησοειδή J για κάθε $t \epsilon [t_0\ ,\ t_f]$ είναι ότι η Hamiltonian πρέπει να είναι ελάχιστη δυνατή για όλα τα επιτρεπτά σχήματα ελέγχου. Πρέπει δηλαδή για το βέλτιστο u^* να ισχύει ως προς οποιοδήποτε άλλο δυνατό έλεγχο u:

$$H\left[x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), t\right] \le H\left[x^*(t), u(t), \lambda^*(t), t\right] \qquad (12.2)$$

Αρχή ελαχίστου του Pontryagin

Έτσι, για τη λύση προβλημάτων βέλτιστου ελέγχου για τα οποία έχουμε την επιπρόσθετη συνθήκη περιορισμών (12.1) των εισόδων, ακολουθούμε την παρακάτω διαδικασία:

a) Χρησιμοποιούμε μαζί με την εξίσωση της δυναμικής συμπεριφοράς του συστήματος , τις σχέσεις των συμπληρωματικών καταστάσεων και της Συνθήκης Βελτιστοποίησης εφόσον οι προκύπτοντες απ'αυτήν νόμοι ελέγχου βρίσκονται μέσα στα όρια του περιορισμού (12.1) .

b) Όταν τα προκύπτοντα βέλτιστα *u* από την περίπτωση a) παραβιάζουν τη συνθήκη (12.1), η Συνθήκη Βελτιστοποίησης δεν μπορεί να εκφράσει την Αρχή Ελαχίστου του Pontryagin. Σ'αυτήν την περίπτωση ο βέλτιστος νόμος ελέγχου βρίσκεται με απευθείας χρήση της Αρχής του Ελαχίστου μέσω της σχέση (12.2). Ψάχνουμε, δηλαδή, στη Hamiltonian για το $u(t)$ εκείνο που δίνει την ελάχιστη δυνατή τιμή της και που δεν παραβιάζει τη συνθήκη περιορισμών (12.1). Η ακραία αυτή τιμή της $u(t)$ δεν μπορεί παρά να είναι μια από τις δύο τιμές των περιορισμών για κάθε $u_i(t)$, δηλ. είτε η a_i είτε η b_i . Η τιμή αυτή τότε αντικαθιστά το νόμο ελέγχου που θα προέκυπτε από τη Συνθήκη Βελτιστοποίησης.

Αρχή ελαχίστου του Pontryagin

Ο αλγόριθμος που χρησιμοποιείται σε αυτές τις περιπτώσεις είναι ο ακόλουθος:

– Σχηματίζουμε τη Hamiltonian και την εκφράζουμε σαν άθροισμα δύο επιμέρους συναρτήσεων, H_1 και H_2 , της πρώτης με όλους εκείνους τους όρους πουπεριέχουν την είσοδο και της δεύτερης με όρους ανεξάρτητους της *u(t)*:

$$H\left(x,u,\lambda,t\right)=H_1\left(x,u,\lambda,t\right)+H_2\left(x,\lambda,t\right) \qquad (12.3)$$

– Τότε η ελαχιστοποίηση της Hamiltonian ως προς *u* είναι ισοδύναμη με την ελαχιστοποίηση μόνο της H_1 :

$$\min_u H=\min_u H_1 \qquad (12.4)$$

Αρχή ελαχίστου του Pontryagin

<u>Παράδειγμα</u>

Ας θεωρήσουμε το σύστημα που περιγράφεται από τις καταστατικές εξισώσεις:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -x_2(t) + u(t) \end{aligned} \qquad (12.5)$$

με αρχικές συνθήκες :

$$x(t_0) = x_0$$

και κριτήριο κόστους

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} \left[x_1^2(t) + u^2(t) \right] \qquad (12.6)$$

Αρχή ελαχίστου του Pontryagin

<u>Παράδειγμα</u>

Η είσοδος οφείλει να βρίσκεται στα όρια:

$$-a \le u(t) \le a \quad , \quad a > 0 \tag{12.7}$$

Ορίζουμε τη Hamiltonian, η οποία είναι:

$$H = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}u^2 + \lambda_1 x_2 - \lambda_2 x_2 + \lambda_2 u \tag{12.8}$$

Αρχή ελαχίστου του Pontryagin

Παράδειγμα

Οι εξισώσεις των συμπληρωματικών καταστάσεων είναι:

$$\dot{\lambda}_1(t) = \frac{\partial H}{\partial x_1} = -x_1(t)$$
$$\dot{\lambda}_2(t) = \frac{\partial H}{\partial x_2} = -\lambda_1(t) + \lambda_2(t) \qquad (12.9)$$

με οριακή συνθήκη:

$$\lambda(t_f) = 0 \qquad (12.10)$$

Αρχή ελαχίστου του Pontryagin

Παράδειγμα

Η Συνθήκη Βελτιστοποίησης δίνει:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = u(t) + \lambda_2(t) = 0 \qquad (12.11)$$

από την οποία προκύπτει βέλτιστος νόμος ελέγχου:

$$u(t) = -\lambda_2(t) \qquad (12.12)$$

Αρχή ελαχίστου του Pontryagin

Παράδειγμα

Έτσι, εφόσον η λ_2 η οποία προκύπτει από τη λύση των εξισώσεων κατάστασης του συστήματος (12.5) μαζί με τις εξισώσεις (12.9) κείται στο διάστημα:

$$-a \le \lambda_2 \le a \qquad (12.13)$$

ώστε σύμφωνα με το νόμο ελέγχου (12.12) να ικανοποιείται η συνθήκη (12.7) για την είσοδο , η βέλτιστη λύση θα δίνεται από την (12.12) και θα προκύπτει από τη λύση των εξισώσεων (12.5) και (12.9).

Αρχή ελαχίστου του Pontryagin

<u>Παράδειγμα</u>

Στην περίπτωση που για το $\lambda_2(t)$ ισχύει:

$$\lambda_2(t) > a$$

$$\text{ή} \qquad (12.14)$$

$$\lambda_2(t) < -a$$

οι εξισώσεις κατάστασης και συμπληρωματικών καταστάσεων όπως και η Hamiltonian, παραμένουν όπωε δίνονται από τις σχέσεις (12.5), (12.9) και (12.8). Ο βέλτιστος έλεγχος που ελαχιστοποιεί την H, χωρίς να παραβιάζει τον περιορισμό (12.7), προκύπτει με απευθείας χρήση της Αρχής Ελαχίστου του Pontryagin.

Αρχή ελαχίστου του Pontryagin

<u>Παράδειγμα</u>

Προκύπτει, δηλαδή, από την ελαχιστοποίηση του μέρους της H που εξαρτάται από *u*:

$$H_1 = \frac{1}{2}u^2 + \lambda_2 u \qquad (12.15)$$

αλλά η H_1 ελαχιστοποιείται για τιμές του *u* στα όρια του επιτρεπτού διαστήματος, δηλαδή:

$$u(t) = \begin{cases} -a, & \text{για} \quad \lambda_2(t) > a \\ a, & \text{για} \quad \lambda_2(t) < -a \end{cases} \qquad (12.16)$$

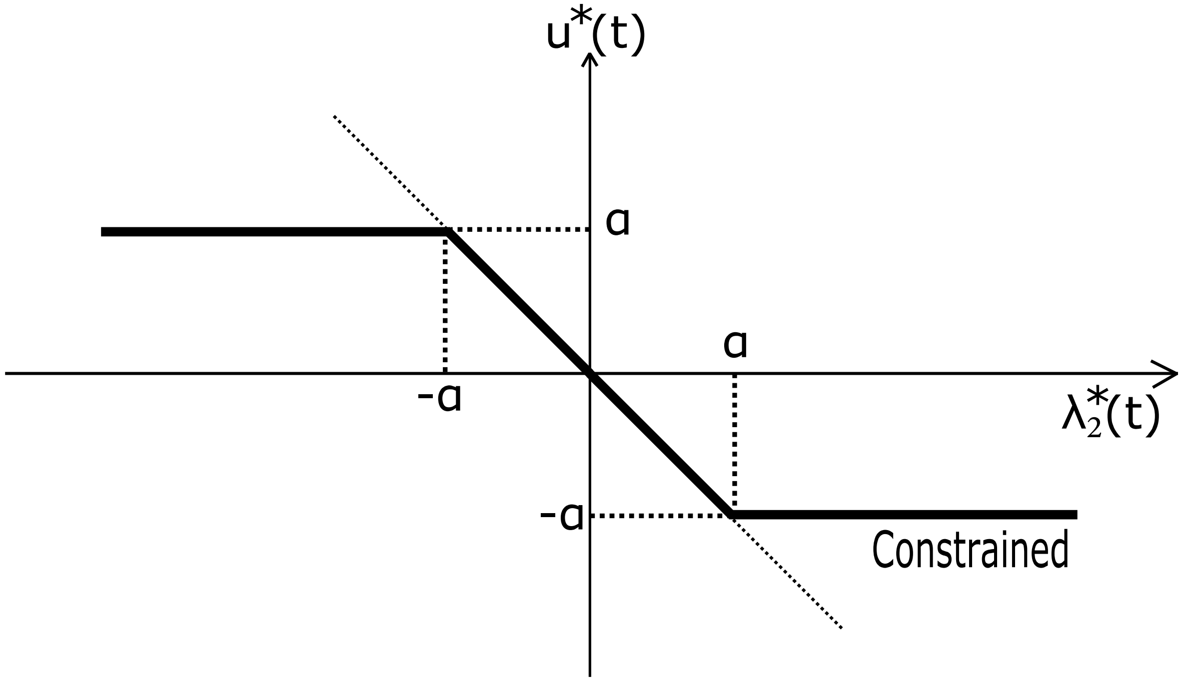
Αρχή ελαχίστου του Pontryagin

Παράδειγμα

Τελικά, συνοψίζοντας, η λύση στο πρόβλημα του βέλτιστου ελέγχου με τους περιορισμούς (12.7) δίνεται από τις σχέσεις:

$$u(t)=\begin{cases} -a, & \text{για} \quad \lambda_2(t)>a \\ -\lambda_2(t), & \text{για} \quad -a\le\lambda_2(t)\le a \\ a, & \text{για} \quad \lambda_2(t)<-a \end{cases} \qquad (12.17)$$

Αρχή ελαχίστου του Pontryagin



<u>Σχήμα 12.1:</u> Ο βέλτιστος νόμος ελέγχου συναρτήσει του λ_2

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Τέλος Ενότητας

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Αλεξανδρίδης Αντώνιος 2015. Αλεξανδρίδης Αντώνιος. «Βέλτιστος Έλεγχος Συστημάτων. Αρχή ελαχίστου του Pontryagin». Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: https://eclass.upatras.gr/courses/EE887/

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

Όλα τα σχήματα, οι εικόνες και τα γραφήματα που παρουσιάστηκαν σε αυτήν την ενότητα είναι από το βιβλίο << Βέλτιστος Έλεγχος Συστημάτων >>, Αντώνης Θ. Αλεξανδρίδης, εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών.