Βέλτιστος Έλεγχος Συστημάτων

Ενότητα 5: Το γραμμικό τετραγωνικό πρόβλημα ρύθμισης (LQ Regulators)

Καθηγητής Αντώνιος Αλεξανδρίδης

Πολυτεχνική Σχολή

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Τεχνολογίας Υπολογιστών

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης creative commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκεινται σε άλλου τύπου άδειες χρήσης, άδεια αναφέρεται ρητώς.

Συστήματα συνεχούς χρόνου

Το γραμμικό τετραγωνικό πρόβλημα ρύθμισης

- Το γραμμικό τετραγωνικό πρόβλημα ρύθμισης αποτελεί ένα χαρακτηριστικό καιευρέως χρησιμοποιούμενο παράδειγμα της εφαρμογής του βέλτιστου ελέγχου σε <u>γραμμικά</u> δυναμικά συστήματα της μορφής:

$$\dot{x} = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

έτσι ώστε να ελαχιστοποιούν κάποιο <u>τετραγωνικό</u> (quadratic) κριτήριο κόστους:

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}\left[x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t)\right]dt + \underbrace{\frac{1}{2}x^T(t_f)Sx(t_f)}_{\Phi}$$

με t_0, $x(t_0)$, t_f γνωστά και ελεύθερο το $x(t_f)$.

Το γραμμικό τετραγωνικό πρόβλημα ρύθμισης

- Για το παραπάνω τετραγωνικό ως προς τις καταστάσεις κριτήριο θεωρούμε για τις <u>μήτρες βάρους</u>:
  - *Q:* Συμμετρική, τετραγωνική, θετικά ημιορισμένη.
  - *R:* Συμμετρική, τετραγωνική, θετικά ορισμένη.
  - *S*: Συμμετρική, τετραγωνική, θετικά ημιορισμένη.
- <u>Βήμα 1</u>: Φτιάχνουμε τη Hamiltonian για το συγκεκριμένο πρόβλημα

$$H = \frac{1}{2}\left(x^T Q x + u^T R u\right) + \lambda^T \left[Ax + Bu\right]$$

Το γραμμικό τετραγωνικό πρόβλημα ρύθμισης

- Βήμα 2: Συνθήκη βελτιστοποίησης

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \Rightarrow Ru + B^T \lambda = 0 \Rightarrow u = -R^{-1} B^T \lambda$$

- Βήμα 3: Εξίσωση συμπληρωματικών καταστάσεων

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -Qx - A^T \lambda$$

- Βήμα 4: Οριακές συνθήκες

με t_f δεδομένο:

$$\lambda(t_f) = \frac{\partial}{\partial x(t_f)} \left[\frac{1}{2} x^T(t_f) S x(t_f) \right] = S x(t_f)$$

Το γραμμικό τετραγωνικό πρόβλημα ρύθμισης

- **Λύση ανοιχτού βρόχου**
  - Η βέλτιστη λύση ανοιχτού βρόχου προκύπτει από τη σχέση:

$$\boxed{u = -R^{-1}B^{T}\lambda}$$

  - Αντικαθιστώντας στην αρχική διαφορική εξίσωση του συστήματος την είσοδο *u* και από τη διαφορική εξίσωση συμπληρωματικών καταστάσεων έχουμε:

$$\boxed{\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^{T} \\ -Q & -A^{T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix}}$$

Το γραμμικό τετραγωνικό πρόβλημα ρύθμισης

- **Λύση ανοιχτού βρόχου**
  - Με οριακές συνθήκες

$$x\left(t_0\right) = x_0$$

και

$$\lambda\left(t_f\right) = Sx\left(t_f\right)$$

Το γραμμικό τετραγωνικό πρόβλημα ρύθμισης

- **Λύση κλειστού βρόχου**
  - Με στόχο να φθάσουμε από τη λύση ανοιχτού βρόχου σε μια λύση κλειστού βρόχου:

$$u(t) = K(t)\,x(t)$$

  - Θεωρούμε ότι το διάνυσμα των συμπληρωματικών καταστάσεων του συστήματος, λ, μπορεί να γραφεί:

$$\lambda(t) = P(t)\,x(t)$$

Το γραμμικό τετραγωνικό πρόβλημα ρύθμισης

- **Λύση κλειστού βρόχου**
  - Τώρα έχουμε:

$$\dot{x} = Ax - BR^{-1}B^{T}Px$$

και

$$\dot{\lambda} = -Qx - A^{T}Px$$

  - Διαφορίζοντας την

$$\lambda(t) = P(t)x(t)$$

παίρνουμε

$$\dot{\lambda} = \dot{P}x + P\dot{x}$$

Το γραμμικό τετραγωνικό πρόβλημα ρύθμισης

- **Λύση κλειστού βρόχου**
  - Έχουμε:

$$\left.\begin{aligned}\dot{\lambda} &= -Qx - A^T P x \\ \dot{\lambda} &= \dot{P}x + P\dot{x}\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\dot{P} + PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q\right] x(t) = 0$$

  - Η παραπάνω σχέση πρέπει να ισχύει για κάθε *x(t)*. Επομένως ο όρος μπροστά από το *x(t)* πρέπει να είναι ίσος με μηδέν.

Το γραμμικό τετραγωνικό πρόβλημα ρύθμισης

- **Λύση κλειστού βρόχου**
  - Έτσι η μήτρα *P*, η οποία είναιμια συμμετρική nxn μήτρα με n(n+1)/2 διαφορετικά στοιχεία, και θετικά ορισμένη , δίνεται από τη λύση της διαφορικής εξίσωσης Riccati:

$$\dot{P} = -PA - A^T P + PBR^{-1}B^T P - Q$$

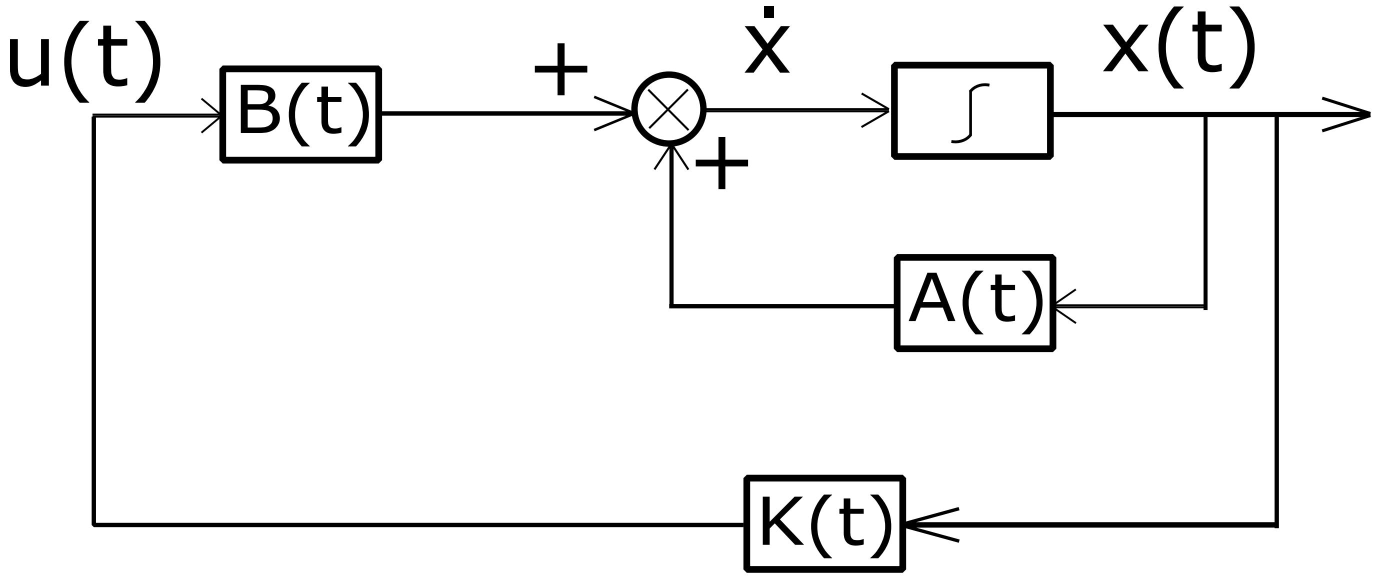
με οριακή συνθήκη που προκύπτει από:

$$\left.\begin{aligned} \lambda(t_f) &= Sx(t_f) \\ \lambda(t) &= P(t)x(t) \end{aligned}\right\} P(t_f) = S$$

  - Τότε η λύση κλειστού βρόχου θα ορίζεται από την:

$$\boxed{K(t) = -R^{-1}B^T P(t)}$$

Το γραμμικό τετραγωνικό πρόβλημα ρύθμισης



Σχήμα 5.1: Το κλειστού βρόχου βέλτιστο σύστημα

Το γραμμικό τετραγωνικό πρόβλημα ρύθμισης

- Βασική παρατήρηση

  Η μήτρα ανάδρασης *K(t)* είναι ανεξάρτητη του *x(t)*. Έτσι η εξίσωση Riccati μπορεί να λυθεί εκ των προτέρων (όχι on-line) αρχίζοντας από την τελική τιμή $P(t_f)$ και πηγαίνοντας προς την αρχή, έτσι ώστε τα *K(t)* να προαποθηκευτούν στη μνήμη ενός υπολογιστήκαι να χρησιμοποιηθούν στη συνέχεια κατά τη λειτουργία του συστήματος.

Το γραμμικό τετραγωνικό πρόβλημα ρύθμισης

- <u>Σχόλια</u>

1. Η λύση της διαφορικής Riccati δίνεται από $t_f \to t_0$. Επομένως, για $P \geq 0$ μπορεί $\dot{P} \to 0$ και μπορεί να οδηγηθούμε σε λύση μόνιμης κατάστασης όταν $t_f \to \infty$.
2. Για $t_f \to \infty$ αρκεί η λύση αλγενρικής Riccati, $\dot{P} = 0$.
3. Η λύση της αλγεβρικής Riccati

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0$$

οδηγεί σε επιμέρους λύσεις δευτέρου βαθμού , από τις οποίες κρατάμε αυτές που ικανοποιούν την συνθήκη $P \geq 0$.

Βέλτιστος Έλεγχος και Ευστάθεια

- Ευστάθεια του κλειστού συστήματος

  Όπως είδαμε και στην πρώτη ενότητα, η ευστάθεαι του προκύπτοντος συστήματος ελέγχου είναι βασική προϋπόθεση. Δηλαδή πρέπει οι πόλοι του συστήματος να βρίσκονται στο αριστερό ημιεπίπεδο των μιγαδικών αριθμών.

- Στην περίπτωση του προβλήματος της γραμμικής τετραγωνικής ρύθμισης η ευστάθεια αποδεικνύεται εύκολα με τη χρήση της δεύτερης μεθόδου Lyapunov.

Βέλτιστος Έλεγχος και Ευστάθεια

- Συγκεκριμένα, το κλειστό σύστημα περιγράφεται από την

$$\dot{x} = \left(A + BK\right)x$$

όπου

$$x\left(0\right) = x_0$$

Σύμφωνα με τη μέθοδο Lyapunov προκύπτει ότι ένα γραμμικό σύστημα της παραπάνω μορφής είναι ασυμπτωτικά ευσταθές στο σημείο *x = 0* αν και μόνο ανγια κάποια δεδομένη θετικά ορισμένη, πραγματική, συμμετρική μήτρα N υπάρχει μια θετικά ορισμένη, πραγματική συμμετρική μήτρα P, ώστε να ικανοποιεί την:

Βέλτιστος Έλεγχος και Ευστάθεια

$$\boxed{P\left(A+BK\right)+\left(A+BK\right)^{T}P=-N-\frac{\partial P}{\partial t}}$$

όπου ο τελευταίος όρος του δεύτερου μέλους απαλείφεται στα χρονικά αμετάβλητα συστήματα.

Αν η *K* έχει βρεθεί με βέλτιστο τρόπο, θα υπάρχει κάποια *P* που θα προκύπτει από την εξίσωση Riccati

$$\dot{P}=-PA-A^{T}P+PBR^{-1}B^{T}P-Q$$

ή, στην περίπτωση που $t_f \rightarrow \infty$, από την

$$PA+A^{T}P-PBR^{-1}B^{T}P+Q=0$$

Βέλτιστος Έλεγχος και Ευστάθεια

- Η εξίσωση Riccati μπορεί να γραφεί και ως:

  $$P\left(A+BK\right)+\left(A+BK\right)^T P=-\left[-Q+K^T RK+\dot{P}\right]$$

  Συνάγεται αμλεσως το συμπέρασμα ότι ικανοποιείται κατά Lyapunov συνθήκη ευστάθειας για *P* <u>θετικά ορισμένη, πραγματική και συμμετρική</u>.

- Για λύση άπειρου χρόνου η συνθήκη ικανοποιείται αφού ισχύει:

  $$P\left(A+BK\right)+\left(A+BK\right)^T P=-\left[Q+K^T RK\right]$$

  η οποία αποτελεί μια Lyapunov εξίσωση.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Τέλος Ενότητας

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Αλεξανδρίδης Αντώνιος 2015. Αλεξανδρίδης Αντώνιος. «Βέλτιστος Έλεγχος Συστημάτων . Το γραμμικό τετραγωνικό πρόβλημα ρύθμισης (LQ Regulators)». Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: https://eclass.upatras.gr/courses/EE887/

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

Όλα τα σχήματα, οι εικόνες και τα γραφήματα που παρουσιάστηκαν σε αυτήν την ενότητα είναι από το βιβλίο << Βέλτιστος Έλεγχος Συστημάτων >>, Αντώνης Θ. Αλεξανδρίδης, εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών.