



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ  
ΠΑΤΡΩΝ  
UNIVERSITY OF PATRAS

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά  
μαθήματα ΠΠ

# Βέλτιστος Έλεγχος Συστημάτων

Ενότητα 1: Εισαγωγή

Καθηγητής Αντώνιος Αλεξανδρίδης

Πολυτεχνική Σχολή

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Τεχνολογίας  
Υπολογιστών

# Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

# Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

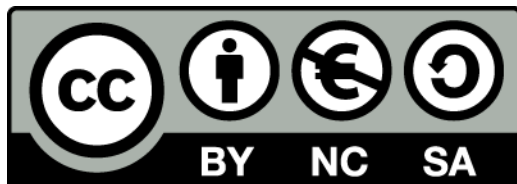
- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.



# Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης creative commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκεινται σε άλλου τύπου άδειες χρήσης, άδεια αναφέρεται ρητώς.



# Εισαγωγή



# Στόχοι αυτομάτου ελέγχου

- Ο αυτόματος έλεγχος δυναμικών συστημάτων συνεχούς ή διακριτού χρόνου έχει σαν κύριο αντικείμενο τη σχεδίαση κατάλληλων βρόχων ελέγχου, τέτοιων ώστε να εξασφαλίζονται δύο βασικοί στόχοι:
  - Η ευστάθεια του συστήματος,
  - Κάποια συγκεκριμένα χαρακτηριστικά για τις εξόδους που μας ενδιαφέρουν ή και για κάποιες ή όλες τις καταστάσεις του συστήματος. Αυτή η απαίτηση εστιάζεται κυρίως στις ακόλουθες κατευθύνσεις:
    - Στην επίτευξη κάποιου επιθυμητού ρυθμού απόσβεσης.
    - Στην όσο το δυνατό πιο ομαλή μεταβατική κατάσταση.
    - Στην ακρίβεια με την οποία η έξοδος ακολουθεί κάποια επιθυμητή είσοδο αναφοράς.



# Στόχοι αυτομάτου ελέγχου

- Για να είναι πραγματοποιήσιμος ο σχεδιασμός βρόχου πρέπει η είσοδος που προκύπτει κάθε φορά για το σύστημα να είναι εφικτό να εφαρμοστεί. Αυτό σημαίνει ότι η είσοδος πρέπει να παίρνει τιμές λογικές, ούτε πολλές τάξεις μικρότερες, ούτε πολλές τάξεις μεγαλύτερες από τις τιμές που ορίζουν το σύστημα.



# Στόχοι αυτομάτου ελέγχου

- Για παράδειγμα, στην περίπτωση του σχεδιασμού ελέγχου για γραμμικά δυναμικά συστήματα πολλών εισόδων και εξόδων, της μορφής:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

δύο βασικοί τρόποι έχουν αναπτυχθεί:

- Η σχεδίαση κλειστών βρόχων ανάδρασης όλων των καταστάσεων με τεχνικές τοποθέτησης των πόλων του κλειστού συστήματος σε επιθυμητά σημεία.
- Η σχεδίαση αντιστοιχών βρόχων ελέγχου έτσι ώστε να ικανοποιούνται συγκεκριμένα κριτήρια κόστους που αφορούν συγκεκριμένους περιορισμούς στις καταστάσεις και τις εισόδους του συστήματος.





# Στόχοι αυτομάτου ελέγχου

- Με τον πρώτο τρόπο εξασφαλίζονται η ευστάθεια του συστήματος και ο επιθυμητός ρυθμός απόσβεσης της εξόδου, αφήνεται δε και μια ελευθερία για τη διαμόρφωση της μεταβατικής συμπεριφοράς του συστήματος.
- Ο δεύτερος τρόπος εξασφαλίζει την ευστάθεια του συστήματος και επιπλέον μπορεί να διαμορφώνει τη μεταβατική συμπεριφορά του συστήματος και να πετυχαίνει εφικτές τιμές εισόδων σύμφωνα με τα κριτήρια κόστους. Η ελευθερία που αφήνεται για τον προσδιορισμό επιθυμητών ρυθμών απόσβεσης είναι αρκετά δύσκολο να αξιοποιηθεί και αφορά κύρια την κατάλληλη επιλογή των κριτηρίων.



# Βέλτιστος έλεγχος

- Το αντικείμενο του βέλτιστου ελέγχου είναι ο προσδιορισμός της βέλτιστης εκείνης εισόδου  $u^*$  που μπορεί να μεταφέρει το σύστημα από μια αρχική σε μια τελική κατάσταση ελαχιστοποιώντας κάποιο κατάλληλο κριτήριο κόστους. Η είσοδος μπορεί να είναι ανεξάρτητη των καταστάσεων του συστήματος, οπότε μιλάμε για βέλτιστη λύση ανοιχτού βρόχου, είτε απευθείας συνάρτηση του διανύσματος κατάστασης  $x$ ,  $u^*=u^*(x)$ , οπότε μιλάμε για λύση κλειστού βρόχου.



# Βέλτιστος έλεγχος

- Τα κριτήρια κόστους ορίζονται μέσω των διανυσμάτων κατάστασης και εισόδου,  $\mathbf{x}(t)$  και  $\mathbf{u}(t)$ , αντίστοιχα. Οι απαιτούμενοι περιορισμοί στις καταστάσεις ή τις εισόδους του συστήματος εισάγονται μέσω του κριτηρίου κόστους, με τη χρήση κατάλληλων συντελεστών βάρους στις μεταβλητές κατάστασης και τις εισόδους.



# Βέλτιστος έλεγχος

- Οι προϋποθέσεις για την αντιμετώπιση ενός προβλήματος βέλτιστου ελέγχου δίνονται από τις ακόλουθες συνθήκες.
- Συνθήκη 1:

Το σύστημα περιγράφεται από την καταστατική του εξίσωση η τάξεως

$$\dot{x} = F(x, u, t)$$

για σύστημα συνεχούς χρόνου, ή

$$x(j+1) = F[x(j), u(j), j]$$

για σύστημα διακριτού χρόνου.



# Βέλτιστος έλεγχος

- Συνθήκη 2:

Η αρχική χρονική στιγμή  $t_0$  και η αρχική κατάσταση  $x(t_0)$  είναι πάντοτε δεδομένες. Προσδιορίζονται επίσης κάποιες προδιαγραφές σχεδιασμού για την τελική χρονική στιγμή  $t_f$  ή για την τελική κατάσταση  $x(t_f)$  ή και για τα δύο. Αντίστοιχα ορίζονται τα  $x(0)$  και  $x(N)$  για τα συστήματα διακριτού χρόνου.



# Βέλτιστος έλεγχος

- Συνθήκη 3:

Καθορίζεται ένα ολοκληρωτικό κριτήριο κόστους, της μορφής

$$J = \int_{t_0}^{t_f} L[x(t), u(t)] dt$$

ή ένα κριτήριο αθροίσματος της μορφής

$$J = \sum_{j=0}^{N-1} L[x(j), u(j)]$$

για συστήματα συνεχούς ή διακριτού χρόνου αντίστοιχα.



# Βέλτιστος έλεγχος

- Συνθήκη 3 (συνέχεια):

Η επιλογή του ελέγχου  $u$  γίνεται ώστε να ελαχιστοποιείται το κριτήριο αυτόστο χρονικό διάστημα που μας ενδιαφέρει. Η  $L(x, u)$  επιλέγεται θετική έτσι ώστε να έχει νόημα η ελαχιστοποίηση.

- Συνθήκη 4:

Είναι δυνατό επίσης να τεθούν επιπρόσθετοι περιορισμοί στις τιμές του διανύσματος ελέγχου  $u$ . Για παράδειγμα, σε ένα φυσικό σύστημα υπάρχει ένα όριο για τον έλεγχό του. Αυτοί οι περιορισμοί μπορούν να εκφραστούν με σχέσεις της μορφής

$$u_{\min} \leq u \leq u_{\max}$$



# Βέλτιστος έλεγχος

- Συνθήκη 5:

Το σύστημα πρέπει να είναι ελέγξιμο και παρατηρήσιμο. Όταν το κριτήριο είναι τετραγωνικό ως προς τις καταστάσεις και τις εισόδους και αναφέρεται σε γραμμικό σύστημα, το ελέγξιμο και παρατηρήσιμο ελέγχεται με τους γνωστούς τρόπους.

- Η επιλογή του κατάλληλου κριτηρίου βασίζεται κάθε φορά στο συγκεκριμένο πρόβλημα ελέγχου και πρέπει να εξασφαλίζει μαθηματική ευκολία επίλυσής του, αλλά και να καταλήγει σε λύση φυσικά αποδεκτή από τη δομή του συστήματος.





# Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Τέλος Ενότητας

# Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Αλεξανδρίδης Αντώνιος 2015.  
Αλεξανδρίδης Αντώνιος. «Βέλτιστος Έλεγχος Συστημάτων . Εισαγωγή».  
Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:  
<https://eclass.upatras.gr/courses/EE887/>



# Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

Όλα τα σχήματα, οι εικόνες και τα γραφήματα που παρουσιάστηκαν σε αυτήν την ενότητα είναι από το βιβλίο << Βέλτιστος Έλεγχος Συστημάτων >>, Αντώνης Θ. Αλεξανδρίδης, εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών.

