Δυναμική και Έλεγχος E-L Ηλεκτρομηχανικών Συστημάτων

Ενότητα 9: Παθητικότητα

Καθηγητής Αντώνιος Αλεξανδρίδης

Πολυτεχνική Σχολή

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Τεχνολογίας Υπολογιστών

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης creative commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκεινται σε άλλου τύπου άδειες χρήσης, άδεια αναφέρεται ρητώς.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Απωλεσιμότητα-Παθητικότητα

- Euler-Lagrange εξίσωση:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{g}_i}E_T\right)-\frac{\partial}{\partial g_i}E_T+\frac{\partial}{\partial g_i}E_V+\frac{\partial}{\partial \dot{g}_i}D_Q=G_i$$

με $E_T=\frac{1}{2}\dot{g}^T M(g)\dot{g}$

$$D_Q=\frac{1}{2}\dot{g}^T D(g)\dot{g}\quad,\quad \text{με}\quad E_Q=\int_0^t \dot{g}^T D(g)\dot{g}\,d\tau$$

$$E_V=P(g)\quad,\ \text{όπου ορίζουμε}\ \frac{\partial E_V}{\partial g}=\frac{\partial P(g)}{\partial g}=-g(g)$$

$$E_{in}=\sum\int_0^t G_i\dot{g}_i\,d\tau=\int_0^t G^T\dot{g}\,d\tau$$

Απωλεσιμότητα-Παθητικότητα

- Με τις παραπάνω συνθήκες, Euler-Lagrange καταλήγει:

$$M(g)\ddot{g} + C(g,\dot{g})\dot{g} + D(g)\dot{g} + \cancel{g}(g) = G$$

με $M(g) > 0$ τετράγωνος και θετικά ορισμένος πίνακας

$D(g) \geq 0$

$C(g, \dot{g})$ τέτοιος ώστε ο πίνακας

$$\dot{M} - 2C$$

να είναι αντισυμμετρικός.

Απωλεσιμότητα-Παθητικότητα

- Στο χώρο κατάστασης, αν ορίσουμε

$$\left(x_1, x_2\right) = \left(g, \dot{g}\right)$$

η εξίσωση:

$$M\left(g\right)\ddot{g} + C\left(g, \dot{g}\right)\dot{g} + D\left(g\right)\dot{g} + \cancel{g}\left(g\right) = G$$

μετασχηματίζεται

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -M^{-1}\left(x_1\right)\cdot C\left(x_1, x_2\right)x_2 - M^{-1}\left(x_1\right)D\left(x_1\right)x_2 - \ldots$$

$$\ldots - M^{-1}\left(x_1\right)\cancel{g}\left(x_1\right) + M^{-1}\left(x_1\right)u$$

$$y = x_2$$

Απωλεσιμότητα-Παθητικότητα

- Έστω μη γραμμικό σύστημα της μορφής

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x)+b(x)u \quad , \quad x(0)=x_0 \in \mathbb{R}^n \\ y &= h(x) \quad , \quad h(0)=0 \, , f(0)=0 \end{aligned} \qquad (9.1)$$

όπου *u* η είσοδος του συστήματος, *b(x)* είναι ένας *nxm* πίνακας και *y* η έξοδος.

- Έστω ο ρυθμός εισόδου της ενέργειας στο σύστημα, *w(y,u)* :

$$\int_0^t |w(s)| ds < \infty$$

Απωλεσιμότητα-Παθητικότητα

- Για το σύστημα (9.1) ισχύουν τα ακόλουθα:
- <u>Απωλεσιμότητα</u>

Ένα σύστημα της μορφής (9.1) είναι σύστημα με απώλειες (σε αναφορά προς την ισχύ εισόδου *w(u,y)*) αν και μόνο αν υπάρχει συνάρτηση αποθήκευσης $H(x(t)) \geq 0$ τέτοια ώστε:

$$H\left(x(T)\right) \leq H\left(x(0)\right) + \int_0^T w\left(u(t), y(t)\right) dt$$

για όλα τα u και όλα τα $T \geq 0$ και $x(0) \in \mathbf{R}^n$.

Απωλεσιμότητα-Παθητικότητα

- Για το σύστημα (9.1) ισχύουν τα ακόλουθα:

- <u>Παθητικότητα</u>

  Ένα σύστημα είναι παθητικό αν είναι σύστημα με απώλειες (ιδιότητα απωλεσιμότητας) με ισχύ εισόδου ίση με:

$$w(u, y) = u^T y$$

Απωλεσιμότητα-Παθητικότητα

- Ένα E-L σύστημα, σύμφωνα με τους ορισμούς είναι σύστημα με απώλειες όταν υπάρχει συνάρτηση:

$$H\left[x(t)\right] \geq 0 \quad \text{τέτοια ώστε:}$$

$$H\left[x(t)\right] - H\left[x(0)\right] \leq \int_0^t w\, d\tau$$

- Επιπλέον το σύστημα είναι παθητικό όταν ισχύει:

$$w(y,u) = y^T u$$

Απωλεσιμότητα-Παθητικότητα

- Η συνάρτηση *H[x(t)]* ονομάζεται συνάρτηση αποθήκευσης και αντιστοιχεί στη συνολική ενέργεια που αποθηκεύει το σύστημα, δηλαδή στην προκειμένη περίπτωση:

$$H\left[x(t)\right] = E_T + E_V$$

- Για να αποδείξουμε ότι ένα σύστημα είναι παθητικό, αρκεί να δείξουμε ότι:

$$H\left[x(t)\right] - H\left[x(0)\right] \leq \int_0^t u^T y \, d\tau$$

ή, για *H[x(0)]* σταθερό:

$$\dot{H}\left[x(t)\right] \leq u^T y$$

Απωλεσιμότητα-Παθητικότητα

- Έστω λοιπόν ότι:

$$H\left[x(t)\right] = E_T + E_V = \frac{1}{2}\dot{g}^T M(g)\dot{g} + P(g)$$

- Τότε:

$$\dot{H} = \frac{1}{2}2\dot{g}^T M(g)\ddot{g} + \frac{1}{2}\dot{g}^T \frac{dM(g)}{dt}\dot{g} + \frac{\partial}{\partial g}P(g)\dot{g} \Rightarrow$$

$$\dot{H} = \frac{1}{2}\dot{g}^T \dot{M}(g)\dot{g} + \dot{g}^T M(g)\ddot{g} + \dot{g}^T \cancel{g}(g)$$

Απωλεσιμότητα-Παθητικότητα

- Έστω λοιπόν ότι:

$$\left.\begin{aligned}\dot{H} &= \frac{1}{2}\dot{g}^T\dot{M}(g)\dot{g} + \dot{g}^T M(g)\ddot{g} + \dot{g}^T \cancel{g}(g) \\ M(g)\ddot{g} &+ C(g,\dot{g})\dot{g} + D(g)\dot{g} + \cancel{g}(g) = G\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$\dot{H} = \dot{g}^T\left[-C(g,\dot{g})\dot{g} - D(g)\dot{g} - \cancel{g}(g) + G\right] + \frac{1}{2}\dot{g}^T\dot{M}(g)\dot{g} + \cancel{g}^T\dot{g} \Rightarrow$$

$$\dot{H} = \frac{1}{2}\dot{g}^T\left[\dot{M}(g) - 2C(g,\dot{g})\right]\dot{g} - \dot{g}^T D(g)\dot{g} + \dot{g}^T G$$

Απωλεσιμότητα-Παθητικότητα

- Ωστόσο, λόγω αντισσυμετρικότητας έχουμε:

$$\dot{g}^T\left[\dot{M}(g)-2C(g,\dot{g})\right]\dot{g}=0$$

Οπότε:

$$\dot{H}=-\dot{g}^T D(g)\,\dot{g}+\dot{g}^T G$$

Στο χώρο κατάστασης έχουμε:

$$\dot{H}=-x_2^T\underbrace{D(x_1)}_{\geq 0}x_2+y^T u\Rightarrow$$

$$\dot{H}\leq y^T u\Rightarrow H\left[x(t)\right]-H\left[x(0)\right]\leq\int_0^t u^T y\,d\tau$$

Απωλεσιμότητα-Παθητικότητα

- Εφόσον

$$H\left[x(t)\right]-H\left[x(0)\right]\leq\int_0^t u^T y\,d\tau$$

αποδεικνύει ότι τα E-L συστήματα με συνάρτηση αποθήκευσης $H[x(t)] = E_T + E_V$ είναι παθητικά. Πρακτικά αυτό σημαίνει ότι η ενέργεια που δίνεται στο σύστημα είναι μεγαλύτερη από αυτήν που αποθηκεύει.

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημείωμα Αναφοράς

Αλεξανδρίδης Αντώνιος. «Δυναμική και Έλεγχος E-L Ηλεκτρομηχανικών Συστημάτων. Παθητικότητα». Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: https://eclass.upatras.gr/courses/EE886/.

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

Όλα τα σχήματα, οι εικόνες και τα γραφήματα που παρουσιάστηκαν σε αυτήν την ενότητα είναι από το βιβλίο << Δυναμική και Έλεγχος E-L Ηλεκτρομηχανικών Συστημάτων >>, Αντώνης Θ. Αλεξανδρίδης, εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών.