



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά
μαθήματα ΠΠ

Δυναμική και Έλεγχος E-L Ηλεκτρομηχανικών Συστημάτων

Ενότητα 8: Δυναμική μηχανής εναλλασσόμενου ρεύματος

Καθηγητής Αντώνιος Αλεξανδρίδης

Πολυτεχνική Σχολή
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Τεχνολογίας
Υπολογιστών

Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

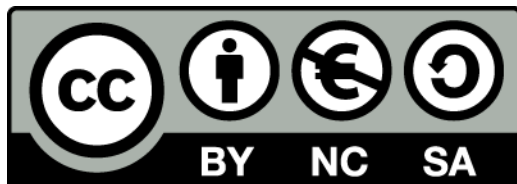
- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.



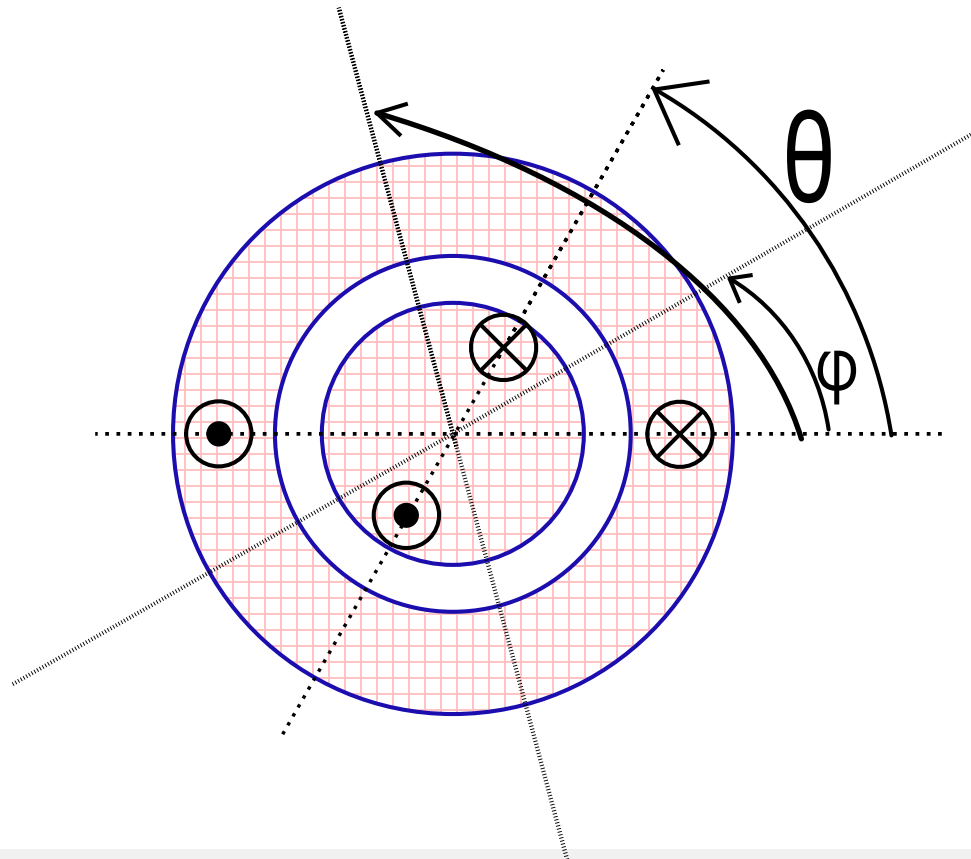
Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης creative commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκεινται σε άλλου τύπου άδειες χρήσης, άδεια αναφέρεται ρητώς.



Γενική περιγραφή

- Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η τομή μηχανής εναλλασσόμενου ρεύματος, με ομοιόμορφο διάκενο.



Γενική περιγραφή

- Δεν υπάρχει φαινόμενο πυκνωτή ή ελατηρίου, οπότε έχω για την ενέργεια στην μηχανή εναλλασσόμενου ρεύματος:

$$E_T = \frac{1}{2} \Phi_1 \dot{q}_1 + \frac{1}{2} \Phi_2 \dot{q}_2 + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2$$

$$E_V = 0$$

$$D_Q = \frac{1}{2} R_s \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} R_r \dot{q}_2^2 + \frac{1}{2} \beta \dot{\theta}^2$$

όπου οι δείκτες 1 και 2 αναφέρονται σε μεγέθη του στάτη και του δρομέα αντίστοιχα.



Γενική περιγραφή

- Για τον υπολογισμό των ροών Φ_1 και Φ_2 :

Εφαρμογή του νόμου Ampere σε κάθε μια από τις κλειστές διαδρομές, ανάλογα με τη θέση του δρομέα:

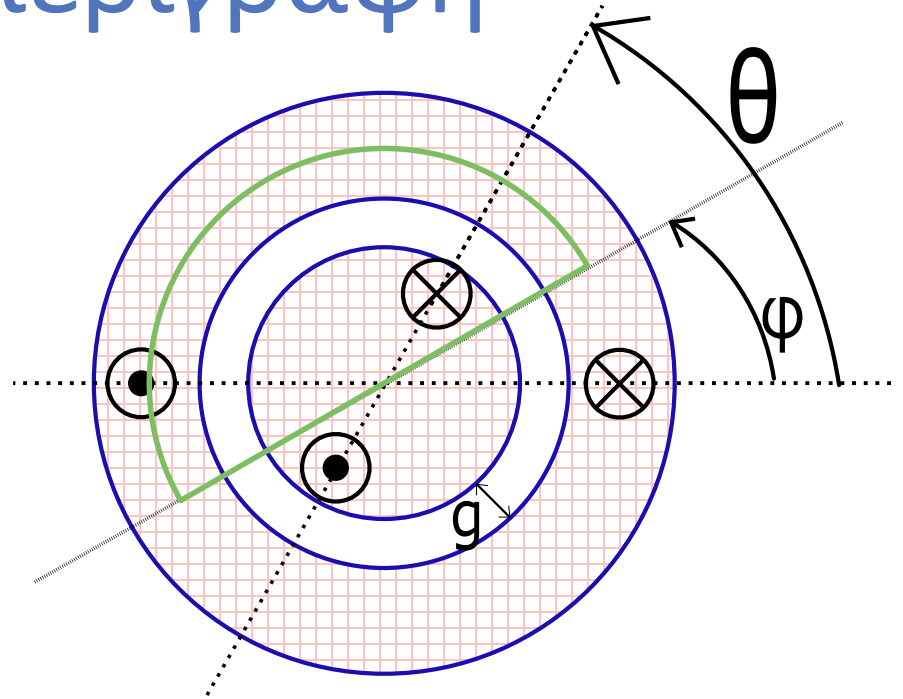
- $0 \leq \phi \leq \theta$

- $\theta < \phi < \pi$



Γενική περιγραφή

- Για $0 \leq \phi \leq \theta$:



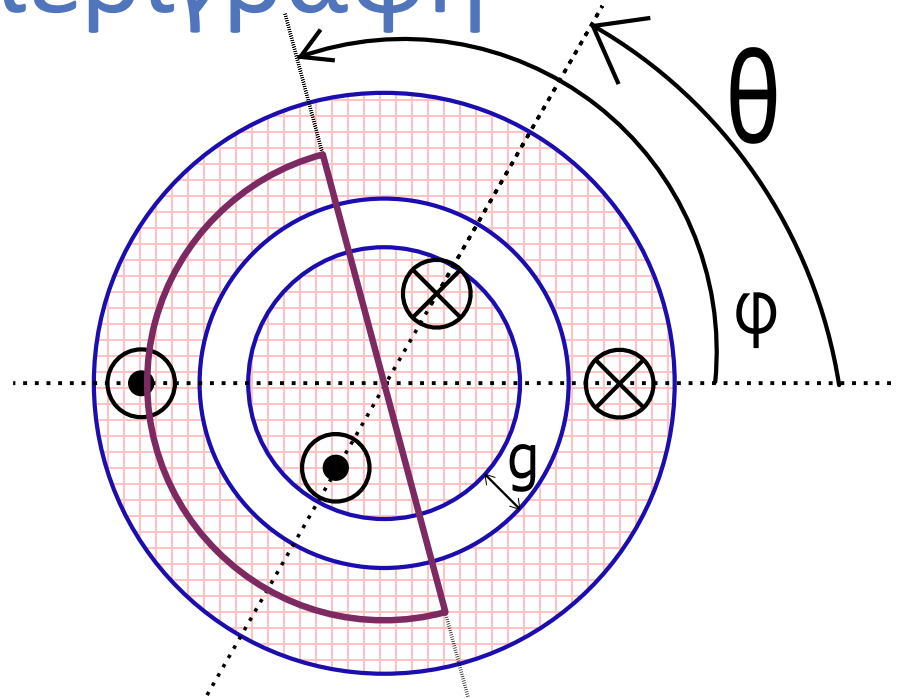
$$2H_r g = N_1 I_1 - N_2 I_2 = N_1 \dot{q}_1 - N_2 \dot{q}_2 \Rightarrow$$

$$H_r = \frac{N_1 \dot{q}_1 - N_2 \dot{q}_2}{2g}$$



Γενική περιγραφή

- Για $\theta < \phi \leq \pi$:



$$2H_r g = N_1 I_1 + N_2 I_2 = N_1 \dot{q}_1 + N_2 \dot{q}_2 \Rightarrow$$

$$H_r = \frac{N_1 \dot{q}_1 + N_2 \dot{q}_2}{2g}$$



Γενική περιγραφή

- Τότε:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1 &= N_1 \int_s \mu_0 H_r ds \\ ds &= r d\phi l \end{aligned} \right\} \Phi_1 = \int_0^\pi N_1 \mu_0 H_r r l d\phi \Rightarrow$$

$$\Phi_1 = \int_0^\theta N_1 \mu_0 H_r r l d\phi + \int_\theta^\pi N_1 \mu_0 H_r r l d\phi \Rightarrow$$

$$\Phi_1 = \frac{\mu_0 N_1^2 r l}{2g} \theta \dot{q}_1 - \frac{\mu_0 N_1 N_2 r l}{2g} \theta \dot{q}_2 + \frac{\mu_0 N_1^2 r l}{2g} (\pi - \theta) \dot{q}_1 + \dots$$

$$\dots + \frac{\mu_0 N_1 N_2 r l}{2g} (\pi - \theta) \dot{q}_2$$



Γενική περιγραφή

- Τότε:

$$\Phi_1 = \underbrace{\frac{\mu_0 N_1^2 r l}{2g}}_{L_s} \pi \dot{q}_1 + \underbrace{\frac{\mu_0 N_1 N_2 r l}{2g} \pi \left(1 - \frac{2\theta}{\pi}\right)}_{L_{sr}(\theta)} \dot{q}_2 \Rightarrow$$

$$\boxed{\Phi_1 = L_s \dot{q}_1 + L_{sr}(\theta) \dot{q}_2}$$

όπου r η ακτίνα του κυλίνδρου που θεωρήσαμε στο διάκενο και $g \ll r$. Επίσης μπορούμε να θέσουμε

$$M = \frac{\mu_0 N_1 N_2 r l \pi}{2g}$$



Γενική περιγραφή

- Επίσης:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_2 &= N_2 \int_s \mu_0 H_r ds \\ ds &= r d\phi \end{aligned} \right\} \Phi_1 = \int_{\theta}^{\theta+\pi} N_2 \mu_0 H_r r l d\phi \Rightarrow$$

$$\Phi_2 = \int_{\theta}^{\pi} N_2 \mu_0 H_r r l d\phi + \int_{\pi}^{\pi+\theta} N_2 \mu_0 H_r r l d\phi \Rightarrow$$

$$\boxed{\Phi_2 = L_{sr}(\theta) \dot{q}_1 + L_r \dot{q}_2}$$

$$\text{όπου } L_r = \frac{\mu_0 N_2^2 r l \pi}{2g}$$



Γενική περιγραφή

- Ο όρος $\frac{\mu_0 N_1 N_2 r l}{2g} \pi \left(1 - \frac{2\theta}{\pi} \right)$ δηλώνει τη σύζευξη μεταξύ των δύο πηνίων, του στάτη και του δρομέα. Παρατηρούμε ότι έχουμε μικρότερη ζεύξη για $\phi = \pi/2$ και μέγιστη για $\phi = 0$.



Γενική περιγραφή

- Άρα για την κινητική ενέργεια ισχύει:

$$E_T = \frac{1}{2} \Phi_1 \dot{q}_1 + \frac{1}{2} \Phi_2 \dot{q}_2 + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 \Rightarrow$$

$$E_T = \frac{1}{2} [L_s \dot{q}_1 + L_{sr}(\theta) \dot{q}_2] \dot{q}_1 + \frac{1}{2} [L_{sr}(\theta) \dot{q}_1 + L_r \dot{q}_2] \dot{q}_2 + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2$$



Γενική περιγραφή

- Τελικά έχουμε:

$$E_T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 & \dot{q}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_s & L_{sr}(\theta) \\ L_{sr}(\theta) & L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2$$

$$E_V = 0$$

$$D_Q = \frac{1}{2} R_s \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} R_r \dot{q}_2^2 + \frac{1}{2} \beta \dot{\theta}^2$$



Εφαρμογή της εξίσωσης Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{g}_i} E_T \right) - \frac{\partial}{\partial g_i} E_T + \frac{\partial}{\partial g_i} E_V + \frac{\partial}{\partial \dot{g}_i} D_Q = G_i$$

- Για $g_1 = q_1$:
$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} E_T = L_s \dot{q}_1 + L_{sr}(\theta) \dot{q}_2, \quad \frac{\partial}{\partial q_1} E_T = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial q_1} E_V = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} D_Q = R_s \dot{q}_1$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} E_T \right) = L_s \ddot{q}_1 + L_{sr}(\theta) \ddot{q}_2 + \frac{\partial L_{sr}(\theta)}{\partial \theta} \dot{q}_2 \dot{\theta} \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} E_T \right) = L_s \ddot{q}_1 + L_{sr}(\theta) \ddot{q}_2 - \frac{2}{\pi} M \dot{q}_2 \dot{\theta}$$



Εφαρμογή της εξίσωσης Lagrange

- Οπότε η εξίσωση Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{g}_1} E_T \right) - \frac{\partial}{\partial g_1} E_T + \frac{\partial}{\partial g_1} E_V + \frac{\partial}{\partial \dot{g}_1} D_Q = G_1 \Rightarrow$$

$$L_s \ddot{q}_1 + L_{sr}(\theta) \ddot{q}_2 - \frac{2}{\pi} M \dot{q}_2 \dot{\theta} + R_s \dot{q}_1 = E_1$$



Εφαρμογή της εξίσωσης Lagrange

- Όμοια, για $g_2 = q_2$:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{g}_2} E_T \right) - \frac{\partial}{\partial g_2} E_T + \frac{\partial}{\partial g_2} E_V + \frac{\partial}{\partial \dot{g}_2} D_Q = G_2 \Rightarrow$$

$$L_r \ddot{q}_2 + L_{sr}(\theta) \ddot{q}_1 - \frac{2}{\pi} M \dot{q}_1 \dot{\theta} + R_r \dot{q}_2 = E_2$$



Εφαρμογή της εξίσωσης Lagrange

- Για $g_3 = \theta$:

$$\frac{\partial}{\partial \dot{\theta}} E_T = J\dot{\theta} \quad , \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{\theta}} E_T \right) = J\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} E_T = \frac{\partial}{\partial \theta} [L_{sr}(\theta) \dot{q}_1 \dot{q}_2] = -\frac{2}{\pi} M \dot{q}_1 \dot{q}_2$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} E_V = 0 \quad , \quad \frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} D_Q = \beta \dot{\theta}$$



Εφαρμογή της εξίσωσης Lagrange

- Οπότε η εξίσωση Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{\theta}} E_T \right) - \frac{\partial}{\partial \theta} E_T + \frac{\partial}{\partial \theta} E_V + \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}} D_Q = G_3 \Rightarrow$$

$$J\ddot{\theta} + \frac{2}{\pi} M\dot{q}_1\dot{q}_2 + \beta\ddot{\theta} = T_m$$



Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Αλεξανδρίδης Αντώνιος 2015.
Αλεξανδρίδης Αντώνιος. «Δυναμική και Έλεγχος E-L Ηλεκτρομηχανικών Συστημάτων. Δυναμική μηχανής εναλλασσόμενου ρεύματος». Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:
<https://eclass.upatras.gr/courses/EE886/>.



Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

Όλα τα σχήματα, οι εικόνες και τα γραφήματα που παρουσιάστηκαν σε αυτήν την ενότητα είναι από το βιβλίο << Δυναμική και Έλεγχος E-L Ηλεκτρομηχανικών Συστημάτων >>, Αντώνης Θ. Αλεξανδρίδης, εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών.

