



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ  
ΠΑΤΡΩΝ  
UNIVERSITY OF PATRAS

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά  
μαθήματα ΠΠ

# Δυναμική και Έλεγχος E-L Ηλεκτρομηχανικών Συστημάτων

## Ενότητα 6: Δυναμική μηχανής συνεχούς ρεύματος

Καθηγητής Αντώνιος Αλεξανδρίδης

Πολυτεχνική Σχολή

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Τεχνολογίας  
Υπολογιστών

# Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

# Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

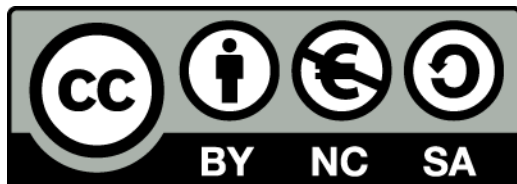
- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.



# Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης creative commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκεινται σε άλλου τύπου άδειες χρήσης, άδεια αναφέρεται ρητώς.



# Γενική περιγραφή

- Στο Σχήμα 6.1 απεικονίζεται η τομή μιας μηχανής συνεχούς ρεύματος. Η μηχανή αποτελείται από δύο μέρη, το στάτη και το δρομέα ή τύμπανο. Στο στάτη, στα σημεία Α και Γ υπάρχουν δύο πηνία συνδεδεμένα σε σειρά και έχουν από  $N_f$  σπείρες το καθένα.
- Μεταξύ των σημείων Α και Γ του στάτη βρίσκεται το τύμπανο, το οποίο τροφοδοτείται από ρεύμα μέσω των ψηκτρών. Εγκάρσια στο τύμπανο υπάρχουν οι περιελίξεις. Κάθε περιέλιξη αποτελείται από  $N$  σπείρες. Αν υποθέσουμε ότι το ρεύμα ξεκινάει από τη θέση  $1^{\alpha}$ , φθάνει ακολουθώντας τις περιελίξεις στη θέση  $1^{\beta}$  και συνεχίζει στη θέση  $1^{\alpha}$  για να ακολουθήσει ανάλογη πορεία.



# Γενική περιγραφή

- Με αυτόν τον τρόπο και με το σύστημα ψηκτρών - συλλέκτη καταφέρνουμε το ρεύμα αριστερά των ψηκτρών (πάνω από τον άξονα  $x$ ) να έχει πάντοτε φορά προς τα έξω, ενώ δεξιά των ψηκτρών (κάτω από τον άξονα  $x$ ) να έχει πάντοτε φορά προς τα μέσα.
- Το μαγνητικό πεδίο που δημιουργείται όταν τροφοδοτήσουμε με ρεύμα το τύμπανο της μηχανής έχει συνισταμένη σχεδόν πάνω στον άξονα  $x$ . Αντίθετα, το μαγνητικό πεδίο που δημιουργείται όταν τροφοδοτήσουμε με ρεύμα το στάτη της μηχανής έχει συνισταμένη σχεδόν πάνω στον άξονα  $y$ .

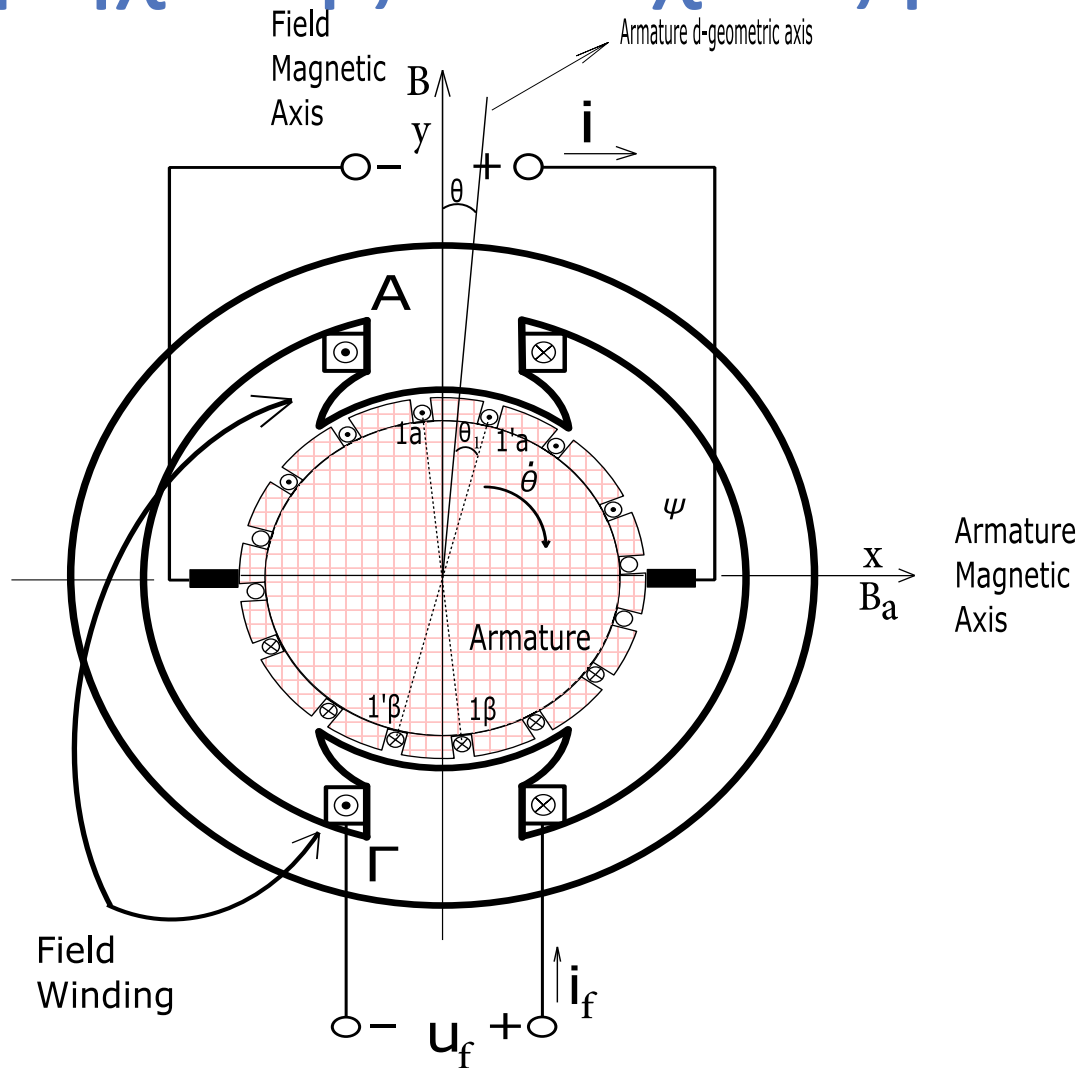


# Γενική περιγραφή

- Δηλαδή τα δύο πεδία, του στάτη και του τυμπάνου, βρίσκονται πάντα υπό υπό γωνία  $90^\circ$  στις μηχανές συνεχούς ρεύματος. Η γωνία αυτή είναι η βέλτιστη για την ανάπτυξη της μέγιστης ηλεκτρομαγνητικής ροπής.
- Όταν λοιπόν τροφοδοτήσουμε με ρεύμα και το στάτη και το τύμπανο της μηχανής, θα παρατηρήσουμε κίνηση στο τύμπανο. Αυτό συμβαίνει διότι το τύμπανο βρίσκεται π'λέον μέσα στο μαγνητικό πεδίο που δημιουργούν τα μαγνητικά πεδία Α και Γ του στάτη, με αποτέλεσμα να ασκείται ζεύγος δυνάμεων στις περιελίξεις του τυμπάνου και λόγω της εμφανιζόμενης μηχανικής ροπής αυτό να κινείται.



# Τομή μηχανής συνεχούς ρεύματος



Σχήμα 6.1





# Μηχανή συνεχούς ρεύματος

- Η συνολική δυναμική ενέργεια του συστήματος είναι μηδέν, εφόσον στο ηλεκτρικό μέρος δεν υπάρχει φαινόμενο πυκνωτή και στο μηχανικό φαινόμενο ελατηρίου.

$$E_V = 0$$

- Η κινητική ενέργεια αποτελείται από τους όρους που εκφράζουν την αυτεπαγωγή των πηνίων, την αμοιβαία επαγωγή τους, αλλά και την κινητική ενέργεια λόγω της περιστροφικής κίνησης του τυμπάνου.



# Μηχανή συνεχούς ρεύματος

- Αναλυτικά για την κινητική ενέργεια:

$$E_T = \frac{1}{2} L \dot{q}^2 + \frac{1}{2} L_f \dot{q}_f^2 + \frac{1}{2} \Phi_f \dot{q} + \frac{1}{2} \Phi \dot{q}_f + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2$$

- Όπου:
  - $L$  ο συντελεστής αυτεπαγωγής του πηνίου του τυμπάνου.
  - $L_f$  ο συντελεστής αυτεπαγωγής του πηνίου του στάτη
  - $\Phi$  η ροή πάνω στο στάτη, που δημιουργεί το τύμπανο.
  - $\Phi_f$  η ροή πάνω στο τύμπανο, που δημιουργεί ο στάτης.
  - $J$  η συνολική ροπή αδράνειας του τυμπάνου και του φορτίου.



# Μηχανή συνεχούς ρεύματος

- Ο όρος  $\frac{1}{2} \Phi \dot{q}_f$  μηδενίζεται, διότι η ροή  $\Phi$  έξω από το τύμπανο διαχέεται, αφού κατασκευαστικά η απόσταση μεταξύ του τυμπάνου και του στάτη κατά τη διεύθυνση της ροής  $\Phi$  (άξονας  $x$ ) είναι πολύ μεγάλη.
- Η ροή που προέρχεται από το πεδίο του στάτη πάνω στο τύμπανο είναι ίση με το άθροισμα της ροής για όλα τα ζεύγη σπειρών.

Δηλαδή  $\Phi_{ολ} = \sum \Phi_{f \text{ ζευγών σπειρών}}$  . Για το ζεύγος 1 – 1' έχουμε:

$$\Phi_{f1-1'} = \int_s \overline{B} d\overline{s}_1 + \int_s \overline{B} d\overline{s}_1,$$



# Μηχανή συνεχούς ρεύματος

- Εφαρμόζοντας τον νόμο του Ampere παίρνουμε

$$\left. \begin{aligned} 2Hg = 2N_f I_f &\Rightarrow H = \frac{N_f I_f}{g} \\ B = \mu_0 H & \end{aligned} \right\} B = \frac{\mu_0}{g} N_f I_f$$

όπου  $H$  η μαγνητική επαγωγή,  $N_f$  ο αριθμός περιελίξεων κάθε πηνίου του στάτη και  $g$  είναι το διάκενο μεταξύ τυμπάνου και στάτη κατά τη διεύθυνση  $y$



# Μηχανή συνεχούς ρεύματος

- Συνεχίζοντας για να βρούμε τη ροή για το ζεύγος 1-1' των σπειρών, έχουμε:

$$\Phi_f = N\Phi_{f,z} \Rightarrow$$

$$\Phi_{f1-1'} = \underbrace{\frac{\mu_0}{g} NN_f S I_f}_{C} \sin(\theta_1 - \theta) + \underbrace{\frac{\mu_0}{g} NN_f S I_f}_{C} \sin[-(\theta_1 + \theta)]$$

όπου  $N$  ο αριθμός των σπειρών σε κάθε περιέλιξη του τυμπάνου.  
 $\theta_1$  δείναι η γωνία που σχηματίζει η επιφάνεια της περιέλιξης 1 του τυμπάνου με τον άξονα συμμετρίας του τυμπάνου. Επομένως  $\theta_1 - \theta$  είναι είναι η γωνία που σχηματίζει η επιφάνεια 1 με το μαγνητικό άξονα του στάτη και  $\theta_1 + \theta$  η γωνία που σχηματίζει η επιφάνεια 1' με το μαγνητικό άξονα του στάτη.



# Μηχανή συνεχούς ρεύματος

- Άρα έχουμε:

$$\Phi_{f1-1'} = C\dot{q}_f \left[ \sin(\theta_1 - \theta) - \sin(\theta_1 + \theta) \right]$$

- Η ολική ροή στο σύνολο των περιελίξεων του τυμπάνου θα είναι:

$$\begin{aligned} \Phi_f &= \sum \Phi_{f \text{ ζευγών σπειρών}} = \\ &= C\dot{q}_f \left[ \sin(\theta_1 - \theta) - \sin(\theta_1 + \theta) + \sin(\theta_2 - \theta) - \sin(\theta_2 + \theta) + \dots \right] \end{aligned}$$

- Εκ κατασκευής ισχύει:

$$\theta_2 = 3\theta_1, \quad \theta_3 = 5\theta_1 \quad \text{κ.ο.κ}$$



# Μηχανή συνεχούς ρεύματος

- Όμως ισχύει:

$$\sin(\theta_1 - \theta) - \sin(\theta_1 + \theta) = -2 \cos \theta_1 \sin \theta$$

$$\sin(\theta_2 - \theta) - \sin(\theta_2 + \theta) = -2 \cos \theta_2 \sin \theta$$

.....

- Άρα

$$\Phi_f = \sum \Phi_{f \text{ ζευγών σπειρών}} = K \dot{q}_f \sin \theta$$

$$K = -2C [\cos \theta_1 + \cos 3\theta_1 + \cos 5\theta_1 + \dots]$$

και έτσι

$$\frac{1}{2} \Phi_f \dot{q} = K \dot{q} \dot{q}_f \sin \theta$$



# Μηχανή συνεχούς ρεύματος

- Για τις απώλειες:

$$D_Q = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int (R\dot{q}^2) dt + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int (R_f \dot{q}_f^2) dt + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int (\beta \dot{\theta}^2) dt \Rightarrow$$

$$D_Q = \frac{1}{2} R \dot{q}^2 + \frac{1}{2} R_f \dot{q}_f^2 + \frac{1}{2} \beta \dot{\theta}^2$$

αφού έχουμε απώλειες λόγω της ωμικής αντίστασης του στάτη, λόγω της ωμικής αντίστασης του τυμπάνου και λόγω τριβών από την περιστροφική κίνηση του τυμπάνου.





# Μηχανή συνεχούς ρεύματος

- Εφαρμογή της εξίσωσης Lagrange

- Για  $g_1 = q$  και  $G_1 = U$ :

$$\frac{\partial}{\partial q} E_V = 0 \quad , \quad \frac{\partial}{\partial \dot{q}} D_Q = R\dot{q} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial q} E_T = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}} E_T = L\dot{q} + K\dot{q}_f \sin(\theta)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{q}} E_T \right) = L\ddot{q} + K\ddot{q}_f \sin(\theta) + K\dot{q}_f \dot{\theta} \cos(\theta)$$



# Μηχανή συνεχούς ρεύματος

- Εφαρμογή της εξίσωσης Lagrange

- Για  $g_1 = q$  και  $G_1 = U$ :

Έτσι η εξίσωση Lagrange γίνεται:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{q}} E_T \right) - \frac{\partial}{\partial q} E_T + \frac{\partial}{\partial \dot{q}} D_{\varrho} + \frac{\partial}{\partial q} E_V = G_1 \Rightarrow$$

$$\boxed{L\ddot{q} + K\ddot{q}_f \sin(\theta) + K\dot{q}_f \dot{\theta} \cos(\theta) + R\dot{q} = U}$$



# Μηχανή συνεχούς ρεύματος

- Εφαρμογή της εξίσωσης Lagrange

- Για  $g_2 = q_f$  και  $G_2 = U_f$ :

$$\frac{\partial}{\partial q_f} E_V = 0 \quad , \quad \frac{\partial}{\partial \dot{q}_f} D_Q = R_f \dot{q}_f \quad , \quad \frac{\partial}{\partial q} E_T = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_f} E_T = L_f \dot{q}_f + K \dot{q} \sin(\theta)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{q}_f} E_T \right) = L_f \ddot{q}_f + K \ddot{q} \sin(\theta) + K \dot{q} \dot{\theta} \cos(\theta)$$



# Μηχανή συνεχούς ρεύματος

- Εφαρμογή της εξίσωσης Lagrange

- Για  $g_2 = q_f$  και  $G_2 = U_f$ :

Έτσι η εξίσωση Lagrange γίνεται:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{q}_f} E_T \right) - \frac{\partial}{\partial q_f} E_T + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_f} D_\varrho + \frac{\partial}{\partial q_f} E_V = G_2 \Rightarrow$$

$$\boxed{L_f \ddot{q}_f + K \ddot{\theta} \sin(\theta) + K \dot{q}_f \dot{\theta} \cos(\theta) + R_f \dot{q}_f = U_f}$$



# Μηχανή συνεχούς ρεύματος

- Εφαρμογή της εξίσωσης Lagrange
  - Για  $g_3 = \theta$  και  $G_3 = -T$ :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} E_V = 0 \quad , \quad \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}} D_Q = \beta \dot{\theta} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial \theta} E_T = K \dot{q} \dot{q}_f \cos \theta$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{\theta}} E_T = J \dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}} E_T \right) = J \ddot{\theta}$$



# Μηχανή συνεχούς ρεύματος

- Εφαρμογή της εξίσωσης Lagrange

- Για  $g_3 = \theta$  και  $G_3 = -T$ :

Έτσι η εξίσωση Lagrange γίνεται:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}} E_T \right) - \frac{\partial}{\partial \theta} E_T + \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}} D_Q + \frac{\partial}{\partial \theta} E_V = G_3 \Rightarrow$$

$$\boxed{J\ddot{\theta} - K\dot{q}\dot{q}_f \cos \theta + \beta\dot{\theta} = -T}$$



# Μηχανή συνεχούς ρεύματος

- Οι διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν τη δυναμική συμπεριφορά του συστήματος είναι:

$$L\ddot{q} + K\dot{q}_f \sin(\theta) + K\dot{q}_f \dot{\theta} \cos(\theta) + R\dot{q} = U$$

$$L_f \ddot{q}_f + K\ddot{q} \sin(\theta) + K\dot{q} \dot{\theta} \cos(\theta) + R_f \dot{q}_f = U_f$$

$$J\ddot{\theta} - K\dot{q}\dot{q}_f \cos \theta + \beta\dot{\theta} = -T$$



# Μηχανή συνεχούς ρεύματος

- Λόγω του συστήματος ψηκτρών-συλλέκτη, η γωνία  $\theta$  στην πράξη είναι πολύ μικρή και περίπου ίση με μηδέν. Άρα μπορούμε να θεωρήσουμε  $\cos\theta = 1$  και  $\sin\theta = 0$ . Έτσι, οι παραπάνω διαφορικές εξισώσεις παίρνουν τη μορφή:

$$L\dot{I} + KI_f\omega + RI = U$$

$$L_f\dot{I}_f + KI\omega + R_f I_f = U_f$$

$$J\dot{\omega} - KI I_f + \beta\omega = -T$$

όπου  $I$  το ρεύμα τυμπάνου,  $I_f$  το ρεύμα διέγερσης και  $\omega$  η γωνιακή ταχύτητα της μηχανής.





# Εξισώσεις της μηχανής συνεχούς ρεύματος στο χώρο κατάστασης

- Στο χώρο κατάστασης παίρνουμε το ακόλουθο σύστημα διαφορικών εξισώσεων που περιγράφει πλήρως τη μηχανή συνεχούς ρεύματος σε λειτουργία κινητήρα:

$$\dot{I} = -\frac{K}{L} I_f \omega - \frac{R}{L} I + \frac{1}{L} U$$

$$\dot{I}_f = -\frac{K}{L_f} I \omega - \frac{R_f}{L_f} I_f + \frac{1}{L_f} U_f$$

$$\dot{\omega} = \frac{K}{J} I_f I - \frac{\beta}{J} \omega - \frac{1}{J} T$$



# Εξισώσεις της μηχανής συνεχούς ρεύματος στο χώρο κατάστασης

- Στο παραπάνω σύστημα διαφορικών εξισώσεων, στη δεύτερη εξίσωση  $\omega = 0$ , αφού ο στάτης δεν καταλαβαίνει την κίνηση του δρομέα, λόγω του συστήματος ψηκτρών και συλλέκτη. Οπότε τελικά, στο χώρο κατάστασης έχουμε:

$$\dot{I} = -\frac{R}{L}I - \frac{K}{L}I_f\omega + \frac{1}{L}U$$

$$\dot{I}_f = -\frac{R_f}{L_f}I_f + \frac{1}{L_f}U_f$$

$$\dot{\omega} = -\frac{\beta}{J}\omega + \frac{K}{J}I_fI - \frac{1}{J}T$$



# Εξισώσεις της μηχανής συνεχούς ρεύματος στο χώρο κατάστασης

- Παρατηρούμε ότι η δεύτερη εξίσωση, δηλαδή:

$$\dot{I}_f = -\frac{R_f}{L_f} I_f + \frac{1}{L_f} U_f$$

δεν εξαρτάται από τις υπόλοιπες μεταβλητές κατάστασης,  $I$  και  $\omega$ . Έτσι, αν η τιμή της  $U_f$  είναι σταθερή, τότε το ρεύμα διέγερσης  $I_f$  θα είναι σταθερό και ίσο προς

$$I_f = \frac{U_f}{R_f}$$



# Εξισώσεις της μηχανής συνεχούς ρεύματος ξένης διέγερσης στο χώρο κατάστασης

- Για τη μηχανή συνεχούς ρεύματος που λειτουργεί υπό ξένη σταθερή διέγερση, το σύστημα εξισώσεων που περιγράφει πλήρως το σύστημα απλοποιείται στο ακόλουθο γραμμικό σύστημα:

$$\dot{I} = -\frac{R}{L}I - \frac{K^*}{L}\omega + \frac{1}{L}U$$
$$\dot{\omega} = -\frac{\beta}{J}\omega + \frac{K^*}{J}I - \frac{1}{J}T$$

όπου  $K^* = Kl_f$



# Εξισώσεις της μηχανής συνεχούς ρεύματος διέγερσης σειράς στο χώρο κατάστασης

- Για τη μηχανή συνεχούς ρεύματος που λειτουργεί με τα τυλίγματα διέγερσης και τυμπάνου σε σειρά, οι εξισώσεις γίνονται:

$$\dot{I} = -\frac{R_{o\lambda}}{L_{o\lambda}} I - \frac{K}{L_{o\lambda}} I \omega + \frac{1}{L_{o\lambda}} U_{o\lambda}$$

$$\dot{\omega} = -\frac{\beta}{J} \omega + \frac{K}{J} I^2 - \frac{1}{J} T$$

όπου  $R_{o\lambda} = R + R_f$  ,  $L_{o\lambda} = L + L_f$  και  $U_{o\lambda} = U + U_f$  , ενώ  $I = I_f$



Τέλος Ενότητας

# Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



# Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Αλεξανδρίδης Αντώνιος 2015.  
Αλεξανδρίδης Αντώνιος. «Δυναμική και Έλεγχος E-L Ηλεκτρομηχανικών Συστημάτων. Δυναμική μηχανής συνεχούς ρεύματος». Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:  
<https://eclass.upatras.gr/courses/EE886/>.





# Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

Όλα τα σχήματα, οι εικόνες και τα γραφήματα που παρουσιάστηκαν σε αυτήν την ενότητα είναι από το βιβλίο << Δυναμική και Έλεγχος E-L Ηλεκτρομηχανικών Συστημάτων >>, Αντώνης Θ. Αλεξανδρίδης, εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών.

