



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά
μαθήματα ΠΠ

Δυναμική και Έλεγχος E-L Ηλεκτρομηχανικών Συστημάτων

Ενότητα 11: Ελεγκτές P,PI και PID για E-L
συστήματα

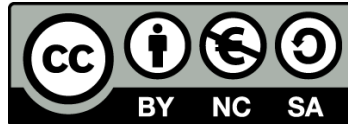
Καθηγητής Αντώνιος Αλεξανδρίδης

Πολυτεχνική Σχολή

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Τεχνολογίας
Υπολογιστών

Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

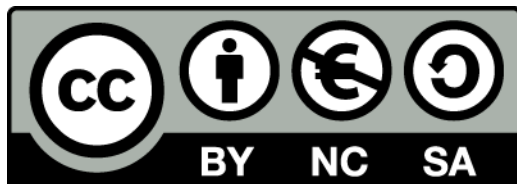
- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.



Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης creative commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκεινται σε άλλου τύπου άδειες χρήσης, άδεια αναφέρεται ρητώς.



Ανασκόπηση

- Η εξίσωση E-L

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{g}_i} E_T \right) - \frac{\partial}{\partial g_i} E_T + \frac{\partial}{\partial g_i} E_V + \frac{\partial}{\partial \dot{g}_i} D_Q = G_i$$

καταλήγει σε συστήματα της μορφής:

$$M(g) \ddot{g} + C(g, \dot{g}) \dot{g} + D(g) \dot{g} + \underline{g}(g) = G$$

όπου G είσοδος u .



Ανασκόπηση

- Αν ορίσουμε

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g \\ \dot{g} \end{bmatrix}$$

στο χώρο κατάστασης έχουμε:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 = & -M^{-1}(x_1) \cdot C(x_1, x_2) x_2 - M^{-1}(x_1) D(x_1) x_2 - \dots \\ & \dots - M^{-1}(x_1) \underline{g}(x_1) + M^{-1}(x_1) u \end{aligned}$$

$$y = x_2$$



Ανασκόπηση

- Όπου

$M(x_1) > 0$ τετράγωνος και θετικά ορισμένος πίνακας

$$D(x_1) \geq 0$$

$C(x_1, x_2)$ τέτοιος ώστε ο πίνακας

$$\dot{M} - 2C$$

να είναι αντισυμμετρικός.



Ανασκόπηση

- Το σύστημα έχει την ιδιότητα της παθητικότητας, για συνάρτηση αποθήκευσης:

$$H = E_T + E_V = \frac{1}{2} x_2^T M(x_1) x_2 + P(x_1)$$

όταν

$$\dot{H} \leq u^T y$$

ή

$$H[x(t)] - H[x(0)] \leq \int_0^t u^T y d\tau$$



P Ελεγκτής

- Στην περίπτωση του P ελεγκτή, δηλαδή όταν η είσοδος u είναι:

$$u = -k_p y + v$$

όπου $k_p \geq 0$ η τιμή του κέρδους του ελεγκτή, y η έξοδος και v άλλη είσοδος, μπορεί και 0.

- Το σύστημα στο χώρο κατάστασης γίνεται:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -M^{-1}(x_1) \cdot C(x_1, x_2) x_2 - M^{-1}(x_1) D(x_1) x_2 - \dots$$

$$\dots - M^{-1}(x_1) g(x_1) + M^{-1}(x_1) \cdot (-k_p y + v)$$

$$y = x_2$$



P Ελεγκτής

- Για να ελέγξουμε την παθητικότητα του συστήματος, θεωρούμε $H = E_T + E_V$

$$\dot{H} = x_2^T M(x_1) \dot{x}_2 + \frac{1}{2} x_2^T \dot{M}(x_1) x_2 + \frac{\partial P(x_1)}{\partial x_1} \dot{x}_1 \Rightarrow$$

$$\dot{H} = x_2^T \left[-C(x_1, x_2) x_2 - D(x_1) x_2 - \underline{g}(x_1) - k_P y + v \right] + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{2} x_2^T \dot{M}(x_1) x_2 + \underline{g}^T(x_1) x_2 \Rightarrow$$

$$\dot{H} = -x_2^T D(x_1) x_2 - x_2^T k_P y + x_2^T v + \frac{1}{2} x_2^T \left[\dot{M}(x_1) - 2C(x_1, x_2) \right] x_2$$



P Ελεγκτής

- Λόγω αντισυμμετρικότητας έχουμε:

$$\dot{H} = -x_2^T D(x_1) x_2 - x_2^T k_P \underbrace{y}_{x_2} + x_2^T v + \frac{1}{2} x_2^T \underbrace{[\dot{M}(x_1) - 2C(x_1, x_2)]}_{0} x_2 \Rightarrow$$

$$\dot{H} = -x_2^T \underbrace{[D(x_1) + k_P]}_{\geq 0} x_2 + y^T v \Rightarrow$$

$$\dot{H} \leq y^T v$$



P Ελεγκτής

- Δηλαδή το κλειστό σύστημα με P ελεγκτή συνεχίζει να είναι παθητικό.
- Θα μπορούσε η τιμή του κέρδους $k_p \leq 0$, ωστόσο δεν θα πρέπει να είναι $[D(x_1) + k_p] < 0$



PI Ελεγκτής

- Στην περίπτωση του PI ελεγκτή, δηλαδή όταν η είσοδος u είναι:

$$u = -k_P y - k_I \int y dt + v$$

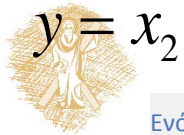
όπου $k_P, k_I \geq 0$ οι τιμές των κερδών του ελεγκτή, y η έξοδος και v άλλη είσοδος, μπορεί και 0.

- Το σύστημα στο χώρο κατάστασης γίνεται:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -M^{-1}(x_1) \cdot C(x_1, x_2) x_2 - M^{-1}(x_1) D(x_1) x_2 - \dots$$

$$\dots - M^{-1}(x_1) \cdot g(x_1) + M^{-1}(x_1) \cdot (-k_P y + v) + M^{-1}(x_1) \left[-k_I \int y dt \right]$$



PI Ελεγκτής

- Για να ελέγξουμε την παθητικότητα του συστήματος, θεωρούμε

$$\tilde{H} = H + \frac{1}{2} x_1^T k_I x_1$$

όπου H η συνάρτηση αποθήκευσης στην περίπτωση του P ελεγκτή, με είσοδο u αυτή για τον PI ελεγκτή.



PI Ελεγκτής

- Έχουμε

$$\dot{\tilde{H}} = \dot{H} + \frac{1}{2} 2x_1^T k_I \underbrace{\dot{x}_1}_{x_2} + \frac{1}{2} x_1^T \dot{k}_I x_1 \Rightarrow$$

$$\dot{\tilde{H}} = \dot{H} + x_1^T k_I x_2 = \dot{H} + x_2^T k_I x_1 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{H}} = & x_2^T \left[-C(x_1, x_2) x_2 - D(x_1) x_2 - \underline{g}(x_1) - k_P y - k_I \int y dt + v \right] + \dots \\ & \dots + \frac{1}{2} x_2^T \dot{M}(x_1) x_2 + \underline{g}^T(x_1) x_2 + x_2^T k_I x_1 \end{aligned}$$



PI Ελεγκτής

- Άρα

$$\dot{\tilde{H}} = -x_2^T [D(x_1) + k_P] + x_2^T v \Rightarrow$$

$$\dot{\tilde{H}} \leq y^T v$$

- Παρατηρούμε ακόμη ότι

$$\tilde{E}_V = P(x_1) + \frac{1}{2} x_1^T k_I x_1$$



PI Ελεγκτής

- Το κλειστό σύστημα , με PI ελεγκτή είναι παθητικό και μάλιστα με τον I όρο του ελεγκτή προσθέτουμε ενέργεια (δυναμική) στο σύστημα, κάνοντάς το πιο σθεναρό.



PID Ελεγκτής

- Στην περίπτωση του PID ελεγκτή, δηλαδή όταν η είσοδος u είναι:

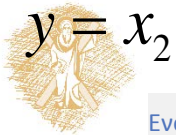
$$u = -k_P y - k_I \int y dt - k_D \dot{y} + v$$

όπου $k_P, k_I, k_D \geq 0$ οι τιμές των κερδών του ελεγκτή, y η έξοδος και v άλλη είσοδος, μπορεί και 0.

- Το σύστημα στο χώρο κατάστασης γίνεται:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 = & -M^{-1}(x_1) \cdot C(x_1, x_2) x_2 - M^{-1}(x_1) D(x_1) x_2 - M^{-1}(x_1) \underline{g}(x_1) + \dots \\ & \dots + M^{-1}(x_1) \cdot (-k_P y + v) + M^{-1}(x_1) \left[-k_I \int y dt \right] + M^{-1}(x_1) \left[-k_D \dot{y} \right] \end{aligned}$$



PID Ελεγκτής

- Για να ελέγξουμε την παθητικότητα του συστήματος, θεωρούμε

$$\tilde{H} = \tilde{H} + \frac{1}{2} x_2^T k_D x_2$$

όπου H η συνάρτηση αποθήκευσης στην περίπτωση του PI ελεγκτή, με είσοδο u αυτή για τον PID ελεγκτή.



PID Ελεγκτής

- Έχουμε

$$\ddot{\tilde{H}} = \dot{\tilde{H}} + \frac{1}{2} 2x_2^T k_D \dot{x}_2 + \frac{1}{2} x_2^T \dot{k}_D x_2 \Rightarrow$$

$$\ddot{\tilde{H}} = \dot{\tilde{H}} + x_2^T k_I \dot{x}_2 = \dot{H} + x_2^T k_I x_1 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \ddot{\tilde{H}} = x_2^T & \left[-C(x_1, x_2) x_2 - D(x_1) x_2 - \underline{g}(x_1) - k_P y - k_I \int y dt - k_P \dot{y} + v \right] + \dots \\ & \dots + \frac{1}{2} x_2^T \dot{M}(x_1) x_2 + \underline{g}^T(x_1) x_2 + x_2^T k_I x_1 + x_2^T k_D \dot{x}_2 \end{aligned}$$



PID Ελεγκτής

- Άρα

$$\dot{\tilde{H}} = -x_2^T [D(x_1) + k_P] + x_2^T v \Rightarrow$$

$$\dot{\tilde{H}} \leq y^T v$$

- Παρατηρούμε ακόμη ότι

$$\tilde{E}_V = P(x_1) + \frac{1}{2} x_1^T k_I x_1$$

$$\tilde{E}_T = \frac{1}{2} x_2^T M(x_1) x_2 + \frac{1}{2} x_2^T k_D x_2$$



PID Ελεγκτής

- Το κλειστό σύστημα , με PID ελεγκτή είναι παθητικό και μάλιστα με τον I όρο του ελεγκτή προσθέτουμε δυναμική ενέργεια ή στο σύστημα, κάνοντάς το πιο σθεναρό, ενώ με τον D όρο προσθέτουμε κινητική ενέργεια.



Σύνοψη

- Για αρνητική ανατροφοδότηση εξόδου, με PID ελεγκτή:
 - P όρος: Αυξάνει απώλειες, άρα και ευστάθεια του συστήματος.
 - I όρος: Αυξάνει την ενέργεια που απορροφά το σύστημα από την είσοδο, κάνοντάς το πιο σθεναρό στο σημείο λειτουργίας του.
 - D όρος: Κάνει το σύστημα πιο γρήγορο, χωρίς να το πάει σε αστάθεια. Αυτό σημαίνει ότι σε μεταβατικά φαινόμενα έχουμε πιο γρήγορη απόκριση.



Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Αλεξανδρίδης Αντώνιος 2015.
Αλεξανδρίδης Αντώνιος. «Δυναμική και Έλεγχος E-L Ηλεκτρομηχανικών Συστημάτων. Ελεγκτές P,PI και PID για E-L συστήματα». Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:
<https://eclass.upatras.gr/courses/EE886/>.



Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

Όλα τα σχήματα, οι εικόνες και τα γραφήματα που παρουσιάστηκαν σε αυτήν την ενότητα είναι από το βιβλίο << Δυναμική και Έλεγχος E-L Ηλεκτρομηχανικών Συστημάτων >>, Αντώνης Θ. Αλεξανδρίδης, εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών.

