



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά
μαθήματα ΠΠ

Δυναμική και Έλεγχος E-L Ηλεκτρομηχανικών Συστημάτων

Ενότητα 2: Περιγραφή Δυναμικών Συστημάτων

Καθηγητής Αντώνιος Αλεξανδρίδης

Πολυτεχνική Σχολή

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Τεχνολογίας
Υπολογιστών

Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

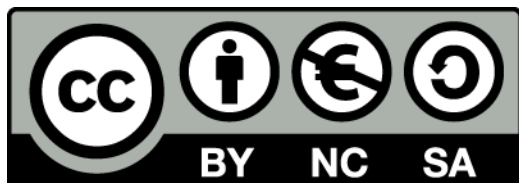
- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.



Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης creative commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκεινται σε άλλου τύπου άδειες χρήσης, άδεια αναφέρεται ρητώς.



Ενέργειες Ηλεκτρικών και Μηχανικών Συστημάτων



Ενέργεια

- Είναι μονόμετρο μέγεθος (δείκτης) της κατάστασης του συστήματος και έχει ιδιότητες νόρμας.
- Διακρίνεται σε:
 - Ενέργεια εισόδου (Αίτιο x Αποτέλεσμα)

$$E_{in} = E_{in}(u, \dot{g})$$

- Ενέργεια απωλειών (ολοκλήρωμα στο χρόνο)

$$E_Q = E_Q(\dot{g}, t)$$



Ενέργεια

- Διακρίνεται σε:
 - Γενικευμένη κινητική ενέργεια

$$E_T = E_T (g, \dot{g})$$

- Γενικευμένη δυναμική ενέργεια

$$E_V = E_V (g)$$



Ενέργειες στα Μηχανικά Συστήματα

Μεταφορική Κίνηση – Διέγερση: Δύναμη F

	Στοιχείο	Μεταβλητή g		Ενέργεια
1.	Ελατήριο k	Μετατόπιση x	(Δυναμική)	$E = \frac{1}{2}k(x+x_0)^2$
2.	Μάζα m	Μετατόπιση x	(Κινητική)	$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$
3.	Αποσβενυτήρας β	Μετατόπιση x	(Απώλειες)	$Q = \int \beta \dot{x}^2 dt$ $D = \frac{1}{2}\beta \dot{x}^2$



Ενέργειες στα Μηχανικά Συστήματα

Περιστροφική Κίνηση – Διέγερση: Ροπή T_α

	Στοιχείο	Μεταβλητή g		Ενέργεια
1.	Ελατήριο k	Γωνία ϑ	(Δυναμική)	$E = \frac{1}{2}k(\vartheta + \vartheta_0)^2$
2.	Μάζα με ροπή αδράνειας J	Γωνία ϑ	(Κινητική)	$E = \frac{1}{2}J\dot{\vartheta}^2$
3.	Αποσβενυτήρας β	Γωνία ϑ	(Απώλειες)	$Q = \int \beta \dot{\vartheta}^2 dt$ $D = \frac{1}{2}\beta \dot{\vartheta}^2$



Ενέργειες στα Ηλεκτρικά Συστήματα

Διέγερση: Πηγή Τάσης U

	Στοιχείο	Μεταβλητή g		Ενέργεια
1.	Χωρητικότητα C	Φορτίο q	(Δυναμική)	$E = \frac{1}{2} \frac{(q + q_0)^2}{C}$
2.	Επαγωγή Φ ή Πηνίο L	Φορτίο q	(Κινητική)	$E = \frac{1}{2} \Phi \dot{q}$ $\dot{\eta} \frac{1}{2} L \dot{q}^2$
3.	Ηλεκτρική αντίσταση R	Φορτίο q	(Απώλειες)	$Q = \int R \dot{q}^2 dt$ $D = \frac{1}{2} R \dot{q}^2$



Ενέργειες στα Ηλεκτρικά Συστήματα

Διέγερση: Πηγή Τάσης U

	Στοιχείο	Μεταβλητή g		Ενέργεια
1.	Χωρητικότητα C	$w = \int U dt$	(Κινητική)	$E = \frac{1}{2} C \dot{w}^2$
2.	Πηνίο L	$w = \int U dt$	(Δυναμική)	$E = \frac{1}{2} \frac{(w + w_0)^2}{L}$
3.	Ηλεκτρική αγωγιμότητα $G = \frac{1}{R}$	$w = \int U dt$	(Απώλειες)	$Q = \int G \dot{w}^2 dt$ $D = \frac{1}{2} G \dot{w}^2$



Δυναμική περιγραφή ηλεκτρομηχανικών συστημάτων με την κλασσική μέθοδο

Μηχανικό μέρος **Νόμοι ισορροπίας του Newton**

- i. Μηχανικά μέρη που εκτελούν μεταφορική κίνηση:
Άθροισμα όλων των δυνάμεων ίσο με μηδέν

$$\sum_i F_i = 0$$

- ii. Μηχανικά μέρη που εκτελούν περιστροφική κίνηση:
Άθροισμα όλων των μηχανικών ροπών ίσο με μηδέν

$$\sum_i M_i = 0$$



Δυναμική περιγραφή ηλεκτρομηχανικών συστημάτων με την κλασσική μέθοδο

Ηλεκτρικό μέρος **Νόμοι του Kirchhoff**

i. Σε κλειστό ηλεκτρικό βρόχο:

Άθροισμα όλων των πτώσεων τάσης ίσο με μηδέν

$$\sum_i U_i = 0$$

ii. Σε ηλεκτρικό κόμβο:

Άθροισμα όλων των ρευμάτων ίσο με μηδέν

$$\sum_i I_i = 0$$



Δυναμική περιγραφή ηλεκτρομηχανικών συστημάτων με τη χρήση της εξ. Lagrange

- i. Έκφραση των γενικευμένων ενεργειών του συστήματος, βάσει των παραπάνω πινάκων.
- ii. Εφαρμογή της εξίσωσης Lagrange.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_T}{\partial \dot{g}_i} \right) - \frac{\partial E_T}{\partial g_i} + \frac{\partial E_V}{\partial g_i} + \frac{\partial D_Q}{\partial \dot{g}_i} = G_i$$



Δυναμική περιγραφή ηλεκτρομηχανικών συστημάτων με τη χρήση της εξ. Lagrange

- Πλεονέκτημα:

- Χρειάζονται βαθμωτές μόνο συναρτήσεις, δηλαδή μαθηματικές εκφράσεις ενεργειών.

Εφαρμόζεται η εξίσωση Lagrange για κάθε ανεξάρτητη μεταβλητή g_i του ηλεκτρομηχανικού συστήματος που θέλουμε να περιγράψουμε.

Σε ένα ηλεκτρομηχανικό σύστημα οι μεταβλητές g_i μπορεί να είναι:

- Ευθύγραμμες μετατοπίσεις κινουμένων μηχανικών μερών, x
- Μετατοπίσεις γωνιών περιστρεφόμενων σωμάτων, ϑ
- Ηλεκτρικά φορτία σε πυκνωτές ή επαγωγές, q

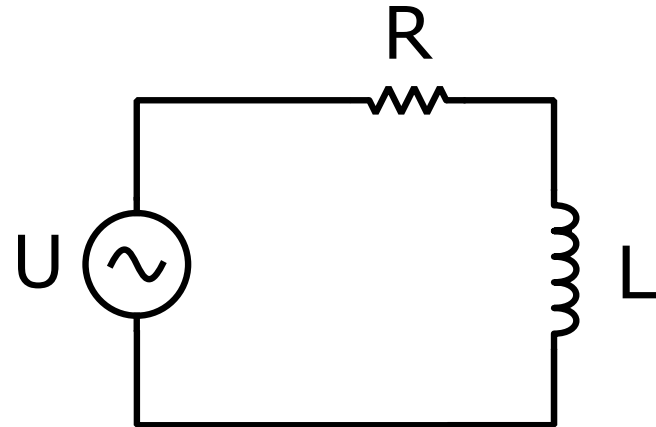


Δυναμική περιγραφή ηλεκτρομηχανικών συστημάτων με τη χρήση της εξ. Lagrange

- Πλεονέκτημα:
 - Οι εξωτερικές διεγέρσεις G_i θα είναι αντίστοιχα:
 - Εξωτερικές δυνάμεις, F
 - Μηχανικές ροπές, T
 - Ηλεκτρεγερτικές τάσεις, U
 - Πρόσημο διεγέρσεων:
 - Θετικό, όταν αυτές δρουν από το περιβάλλον προς το σύστημα,
 - Αρνητικό στην αντίθετη περίπτωση.



Παράδειγμα 1



$$U = RI + L \frac{d}{dt} I$$

$$L\dot{I} = -RI + U \Rightarrow \int_0^t IL\dot{I}d\tau = -\int_0^t RI^2 d\tau + \int_0^t UI d\tau \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{2} LI^2}_{\text{Ενέργεια πηνίου}} + \underbrace{\int_0^t RI^2 d\tau}_{\text{Ενέργεια απωλειών}} = \underbrace{\int_0^t UI d\tau}_{\text{Ενέργεια εισόδου}}$$

$$\underbrace{\frac{1}{2} LI^2}_{\text{Ενέργεια πηνίου}} + \underbrace{\int_0^t RI^2 d\tau}_{\text{Ενέργεια απωλειών}} = \underbrace{\int_0^t UI d\tau}_{\text{Ενέργεια εισόδου}}$$



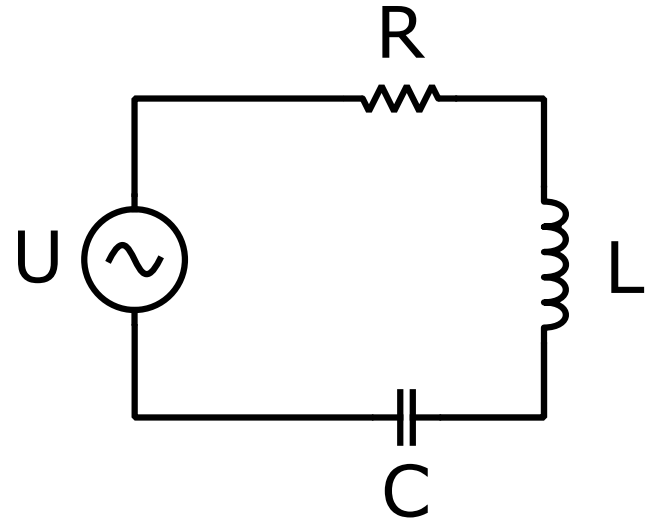
Παράδειγμα 2

$$U = RI + LI + \frac{1}{C} \int_0^t Id\tau \quad \text{ή}$$

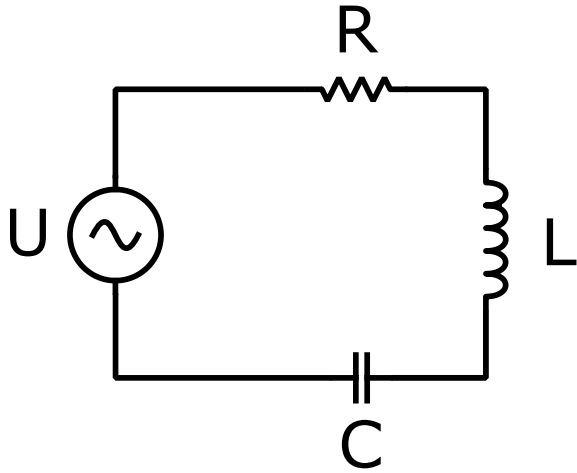
$$U = R\dot{q} + L\ddot{q} + \frac{1}{C}(q - q_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^t U\dot{q}d\tau = \int_0^t R\dot{q}^2 d\tau + \int_0^t L\dot{q}\ddot{q}d\tau + \frac{1}{C} \int_0^t \dot{q}(q - q_0) d\tau \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^t U\dot{q}d\tau = \int_0^t R\dot{q}^2 d\tau + \int_0^t L\dot{q}\ddot{q}d\tau + \frac{1}{C} \int_0^t (q - q_0) \frac{d}{d\tau}(q - q_0) d\tau$$



Παράδειγμα 2



$$\int_0^t UI d\tau = \int_0^t RI^2 d\tau + \frac{1}{2} LI^2 + \frac{1}{2} \frac{(q - q_0)^2}{C}$$

Energy balance equation with brackets under the integrals and terms:

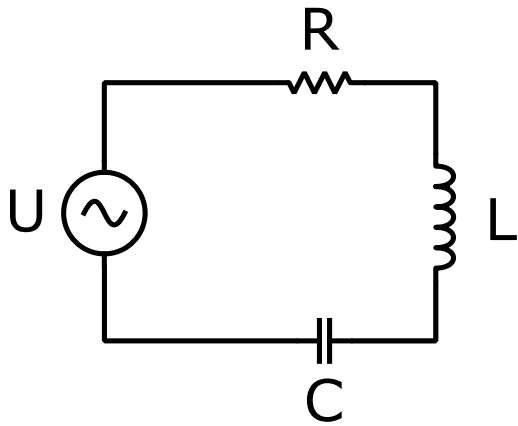
$$\underbrace{\int_0^t UI d\tau}_{\text{Ενέργεια εισόδου}} = \underbrace{\int_0^t RI^2 d\tau}_{\text{Ενέργεια απωλειών}} + \underbrace{\frac{1}{2} LI^2}_{\text{Ενέργεια στο πηνίο}} + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{(q - q_0)^2}{C}}_{\text{Ενέργεια στον πυκνωτή}}$$

$E_{in} = E_a + E_L + E_C$

Ενέργεια του συστήματος: $E_L + E_C$



Παράδειγμα 2



$$U = R\dot{q} + L\ddot{q} + \frac{1}{C}(q - q_0)$$

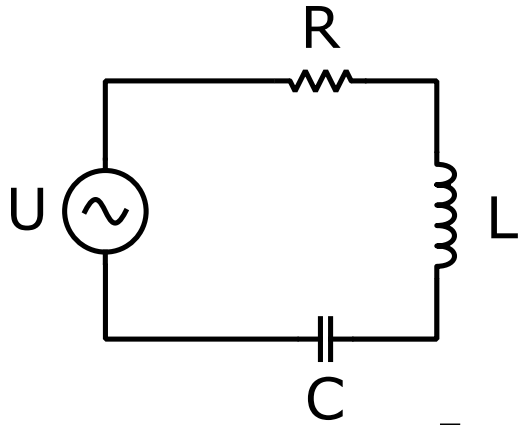
Στο χώρο κατάστασης:

$$\left. \begin{array}{l} \dot{q} = I = x_1 \\ q - q_0 = \int Idt = x_2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \dot{x}_2 = x_1 \\ \dot{x}_1 = \ddot{q} \end{array} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_2 = x_1 \\ U = Rx_1 + L\dot{x}_1 + \frac{1}{C}x_2 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_2 = x_1 \\ \dot{x}_1 = -\frac{R}{L}x_1 - \frac{1}{LC}x_2 + \frac{1}{L}U \end{array} \right.$$



Παράδειγμα 2



$$U = R\dot{q} + L\ddot{q} + \frac{1}{C}(q - q_0)$$

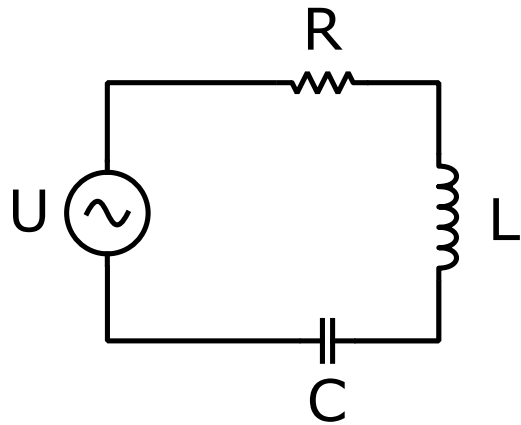
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R/L & -1/LC \\ 1/LC & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix} U \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \frac{1}{LC}\dot{x}_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 0 & -1/LC \\ 1/LC & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} R/L & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix} U$$

ή

$$\begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & 1/C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 0 & -1/C \\ 1/C & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} U$$





Παράδειγμα 2

$$U = R\dot{q} + L\ddot{q} + \frac{1}{C}(q - q_0)$$

$$\begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & 1/C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 0 & -1/C \\ 1/C & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} U$$

Πολλαπλασιάζοντας από αριστερά και τα 2 μέλη με το διάνυσμα

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}$$

Και ολοκληρώνοντας $\int_0^t d\tau$ φθάνω στην ενέργεια.



Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Αλεξανδρίδης Αντώνιος 2015.
Αλεξανδρίδης Αντώνιος. «Δυναμική και Έλεγχος Ε-Λ Ηλεκτρομηχανικών
Συστημάτων. Περιγραφή Δυναμικών Συστημάτων». Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2015.
Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:
<https://eclass.upatras.gr/courses/EE886/>.



Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

Όλα τα σχήματα, οι εικόνες και τα γραφήματα που παρουσιάστηκαν σε αυτήν την ενότητα είναι από το βιβλίο << Δυναμική και Έλεγχος E-L Ηλεκτρομηχανικών Συστημάτων >>, Αντώνης Θ. Αλεξανδρίδης, εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών.

