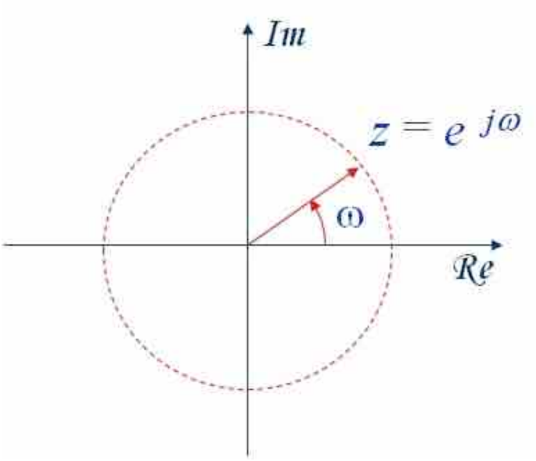
ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ - Ζ

- Z-TRANSFORM -



Z-TRANSFORM

Definition

Definition:

$$\boxed{\mathcal{Z}[x(n)] = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\, z^{-n}}$$

where z is a complex variable

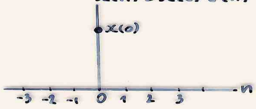
Written out term by term:

$$X(z) = \ldots + x(-203)\, z^{203} + \ldots + x(-1)\, z^{1} + x(0)\, z^{0} + x(1)\, z^{-1} + \ldots + x(199)\, z^{-199} + \ldots$$

ie. the exponent of z indicates the location of each sample in the sequence and the coefficient of z indicates the amplitude or weight of each sample.

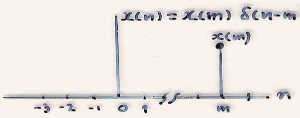
Examples:

$x(n) = x(0)\,\delta(n)$



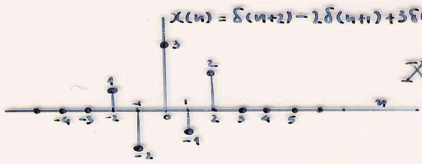
$$X(z) = \mathcal{Z}[x(0)\delta(n)] = x(0)\, z^0 = x(0)$$

$x(n) = x(m)\,\delta(n-m)$



$$X(z) = \mathcal{Z}[x(m)\delta(n-m)] = x(m)\, z^{-m}$$

$x(n) = \delta(n+2) - 2\delta(n+1) + 3\delta(n) - \delta(n-1) + 2\delta(n-2)$



$$X(z) = z^2 - 2z^1 + 3z^0 - z^{-1} + 2z^{-2}$$

Z-TRANSFORM

- z-transform of a shifted weighted sample:

$$\mathcal{Z}[A\,\delta(n-m)] = A\,z^{-m}$$

- Inverse z-transform:

$$\mathcal{Z}^{-1}[A\,z^{-m}] = A\,\delta(n-m)$$

Notes:

- z^{-1} represents a delay (D) of one sample or one unit (unit delay).
- In a sampled system, $X(z)$ is formally independent of the sampling interval T, but the factor z^{-n}, when associated with $x(n)$, corresponds to the time $t=nT$ and in this sense z^{-n} implies a delay of nT seconds from the time $t=0$.

Z-TRANSFORM

Example: Calculate the z-transform of the following finite length sequences
(Underlined blue color numbers denote time n=0)

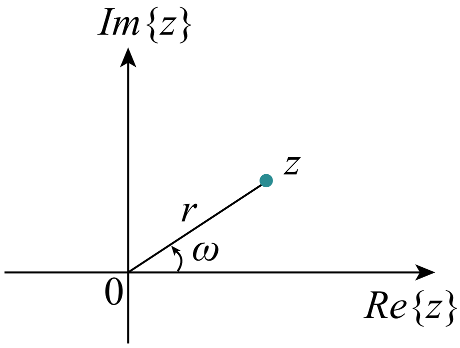
a. $\{x_1(n)\}=\{\underline{3},4,5,0,1,2\}$
b. $\{x_2(n)\}=\{3,4,\underline{5},0,1,2\}$
c. $\{x_3(n)\}=\{\underline{0},0,3,4,5,0,1,2\}$
d. $\{x_4(n)\}=\{4,6,\underline{5},0,1,2\}$
e. $x_5(n)=\delta(n)$
f. $x_6(n)=\delta(n-m)$, $m>0$
g. $x_7(n)=\delta(n+m)$, $m>0$

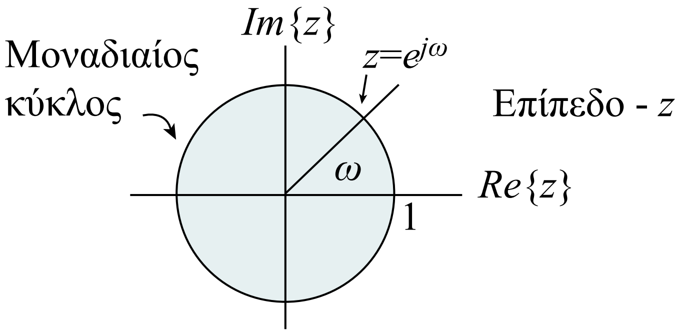
a. $X_1(z)=3+4z^{-1}+5z^{-2}+z^{-4}+2z^{-5}$, ROC: entire z-plane except $z=0$
b. $X_2(z)=3z^{2}+4z+5+z^{-2}+2z^{-3}$, ROC: entire z-plane except $z=0$ and $z=\infty$
c. $X_3(z)=3z^{-2}+4z^{-3}+5z^{-4}+z^{-6}+2z^{-7}$, ROC: entire z-plane except $z=0$
d. $X_4(z)=4z^{2}+6z+5+z^{-2}+2z^{-3}$, ROC: entire z-plane except $z=0$ and $z=\infty$
e. $X_5(z)=1$, ROC: entire z-plane
f. $X_6(z)=z^{-m}$, where $m>0$, ROC: entire z-plane except $z=0$
g. $X_7(z)=z^{m}$, where $m>0$, ROC: entire z-plane except $z=\infty$

Definition

$$x(n) \xleftrightarrow{Z} X(z) \qquad X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n}$$

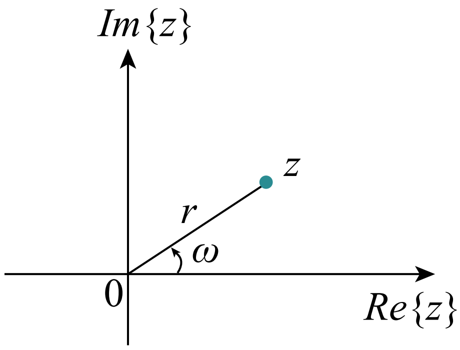
$$z = re^{j\omega}$$

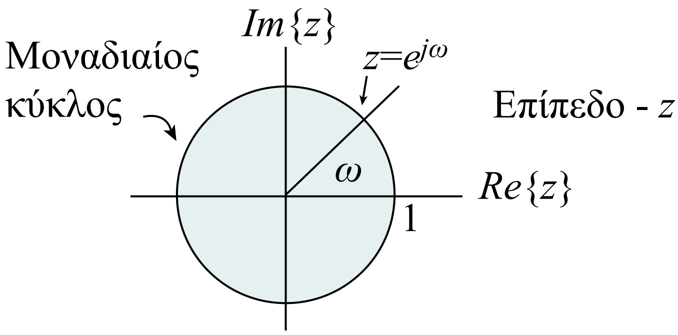




Z-Transform calculated on the unit circle equals to DTFT

$$z = re^{j\omega}$$





$$X(re^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)(re^{j\omega})^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[x(n)r^{-n}\right] e^{-j\omega n} = F\left\{x(n)r^{-n}\right\}$$

$$X(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} = X(e^{j\omega}) = F\left\{x(n)\right\}$$

Existence of the z-transform

Since the z-transform is an infinite power series,
it may not exist (converge) for all values of the variable z.

The Region-of-Convergence (ROC) of X(z) is the set of all values of z for which X(z) attains a **finite** value.

$$|X(z)| = \left|\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n}\right| = \left|\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) r^{-n} e^{-j\omega n}\right| \le \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|x(n) r^{-n} e^{-j\omega n}\right| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|x(n) r^{-n}\right| < \infty$$

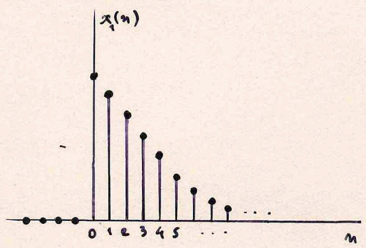
The above expression states that $|X(z)|$ is finite, i.e. converges, if the sequence $x(n)r^{-n}$ is **absolutely summable**.

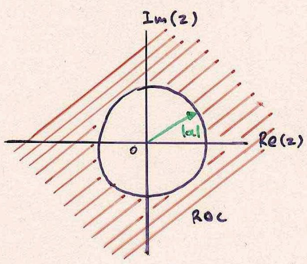
EXAMPLE: Calculate the z-transform and the ROC of the right-sided exponential sequence $x_1(n) = a^n u(n)$.

$$X_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n$$

For $|az^{-1}| < 1 \Leftrightarrow |z| > |a|$ the above power series converges to

$$X_1(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$$





The ROC is the exterior of a circle having radius $|a|$.

Note: A pole is never included in the ROC. (Observe that 'a' is the pole for the above function.

Z-TRANSFORM

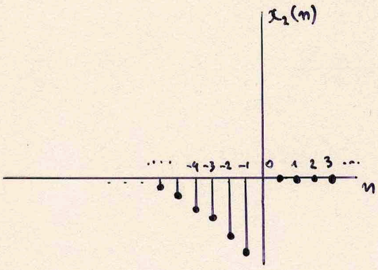
EXAMPLE: Calculate the z-transform of the left-sided exponential sequence $x_2(n) = -a^n u(-n-1)$.

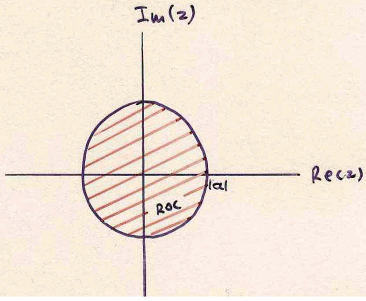
$$X_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(n) z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u(-n-1) z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n} =$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} a^{-n} z^{n} = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (a^{-1} z)^n$$

For $|a^{-1}z| < 1 \Leftrightarrow |z| < |a|$ the above power series converges to

$$X_2(z) = 1 - \frac{1}{1-a^{-1}z} = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$$





The ROC is the interior of a circle having radius |a|.

Z-TRANSFORM

Παράδειγμα 3.3

Να υπολογιστεί η Π.Σ. της αμφίπλευρης (two–sided) εκθετικής ακολουθίας $x(n) = a^{|n|}$, $a > 0$.

$$x(n) = a^n u(n) + a^{-n} u(-n-1)$$

$$x(n) = x_1(n) + x_2(n)$$

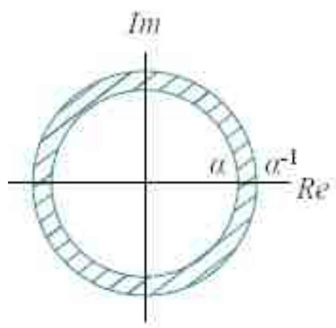
$$X_1(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} \quad \text{για } |z| > a$$

$$X_2(z) = \frac{-1}{1-a^{-1}z^{-1}} \quad \text{για } |z| < a^{-1}$$

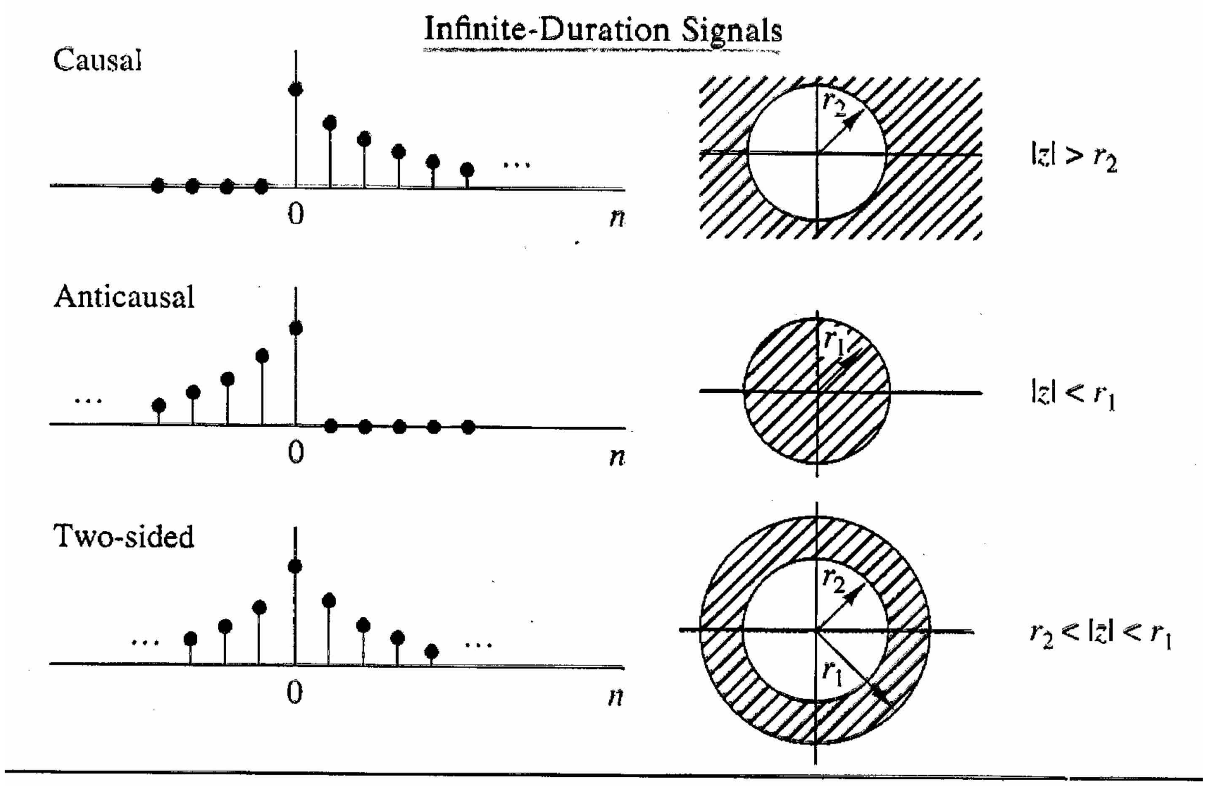
$$X(z) = X_1(z) + X_2(z)$$

$$X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} - \frac{1}{1-a^{-1}z^{-1}}, \quad a < |z| < a^{-1}$$

$$X(z) = \frac{a^2-1}{a} \frac{z}{(z-a)(z-a^{-1})}, \quad a < |z| < a^{-1}$$



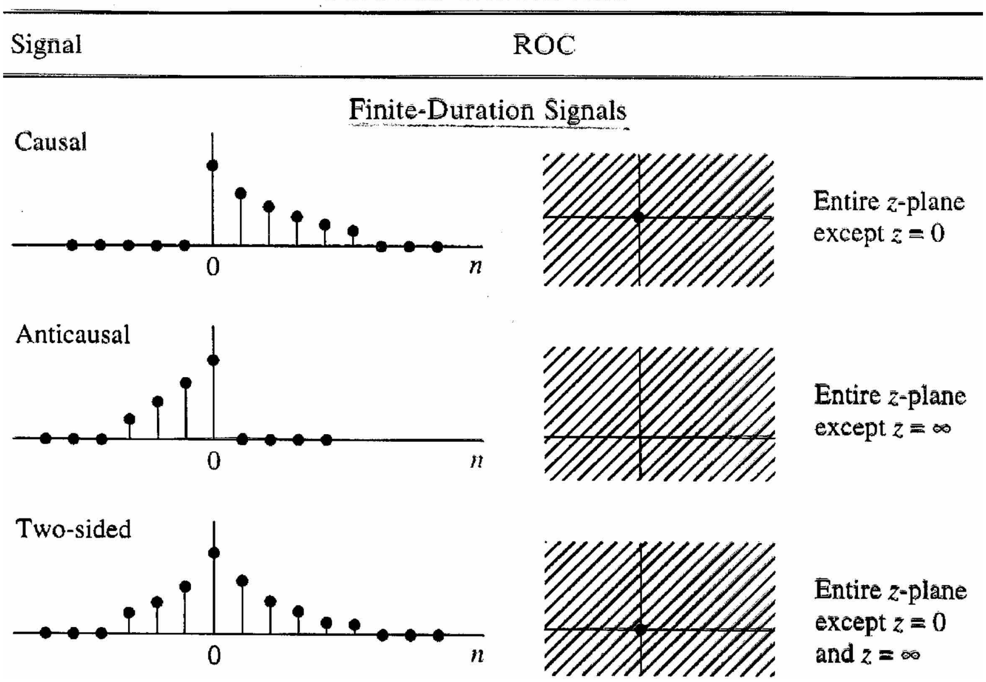
Z-TRANSFORM



Z-TRANSFORM

Z-Transform

CHARACTERISTIC FAMILIES OF SIGNALS WITH THEIR CORRESPONDING ROC



Z-TRANSFORM

Z-Transform Pairs

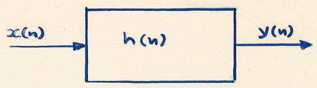
Σήμα	Μετασχηματισμός–z	Περιοχή Σύγκλισης
$\delta(n)$	1	Όλο το z
$\delta(n-m)$	z^{-m}	Όλο το z, εκτός $z=0$ αν $m>0$ ή $z=\infty$ αν $m<0$
$u(n)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$-u(-n-1)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert < 1$
$a^n u(n)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$-a^n u(-n-1)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$
$na^n u(n)$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$-na^n u(-n-1)$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$
$\cos(\omega_0 n)u(n)$	$\frac{1-(\cos\omega_0)z^{-1}}{1-(2\cos\omega_0)z^{-1}+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$\sin(\omega_0 n)u(n)$	$\frac{(\sin\omega_0)z^{-1}}{1-(2\cos\omega_0)z^{-1}+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$\cos(\omega_0 n)u(n)$	$\frac{1-(\cos\omega_0)z^{-1}}{1-(2\cos\omega_0)z^{-1}+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$\sin(\omega_0 n)u(n)$	$\frac{(\sin\omega_0)z^{-1}}{1-(2\cos\omega_0)z^{-1}+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$

Z-TRANSFORM

Z-Transform Convolution

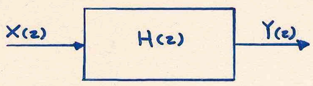
Convolution

Discrete-time domain



$y(n) = h(n) * x(n)$

z-transform domain



$Y(z) = H(z)\cdot X(z)$

Proof: The forced output of an LTI system can be determined from the convolution sum

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)\, x(n-m)$$

By taking the z-transform we obtain:

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\Big[\sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)\, x(n-m)\Big] z^{-n} =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(m)\, x(n-m)\, z^{-n} =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n-m)\, z^{-n} = \langle \ell = n-m \rangle =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} x(\ell)\, z^{-\ell} z^{-m} =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)\, z^{-m} \cdot \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} x(\ell)\, z^{-\ell} =$$

$$= H(z)\cdot X(z)$$

Note: H(z) is the transfer function of the system,

i.e. $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$

ΚΛΙΜΑΚΩΣΗ ΣΤΟΝ ΧΩΡΟ-Ζ

Εάν $x(n) \xleftrightarrow{z} X(z)$ με ΠΣ: $r_1 < |z| < r_2$

τότε $\alpha^n x(n) \xleftrightarrow{z} X(\alpha^{-1} z)$ με ΠΣ: $|\alpha| r_1 < |z| < |\alpha| r_2$

$\forall$ σταθερά α, πραγματική ή μιγαδική

Απόδειξη: $Z\{\alpha^n x(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha^n x(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) (\alpha^{-1} z)^{-n} = X(\alpha^{-1} z)$

Αφού η ΠΣ του $X(z)$ είναι $r_1 < |z| < r_2$,

η ΠΣ του $X(\alpha^{-1} z)$ θα είναι $r_1 < |\alpha^{-1} z| < r_2 \Rightarrow |\alpha| r_1 < |z| < |\alpha| r_2$

ΙΔΙΟΤΗΤΑ ΑΝΑΣΤΡΟΦΗΣ ΧΡΟΝΟΥ (time reversal)

Εάν $x(n) \xleftrightarrow{z} X(z)$ με ΠΣ: $r_1 < |z| < r_2$

τότε $x(-n) \xleftrightarrow{z} X(z^{-1})$ με ΠΣ: $\frac{1}{r_2} < |z| < \frac{1}{r_1}$

Απόδειξη: $Z\{x(-n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(-n) z^{-n} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(l) z^{l} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(l) (z^{-1})^{-l} = X(z^{-1})$

με ΠΣ $\frac{1}{r_2} < |z| < \frac{1}{r_1}$

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί ο ΜΖ του σήματος $x(n) = u(-n)$

Λύση Γνωρίζουμε ότι $u(n) \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1-z^{-1}}$ με ΠΣ: $|z| > 1$

Με χρήση της ιδιότητας αναστροφής χρόνου έχουμε:

$$u(-n) \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1-(z^{-1})^{-1}} = \frac{1}{1-z} \quad \text{με ΠΣ: } |z^{-1}| > 1 \Rightarrow |z| < 1$$

ΙΔΙΟΤΗΤΑ ΔΙΑΦΟΡΙΣΗΣ ΣΤΟΝ ΧΩΡΟ-Z

Εάν $x(n) \xleftrightarrow{Z} X(z)$

τότε $n\, x(n) \xleftrightarrow{Z} -z \dfrac{dX(z)}{dz}$

Απόδειξη: $\dfrac{dX(z)}{dz} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)(-n) z^{-n-1} = -z^{-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [n\, x(n)] z^{-n} = -z^{-1} Z\{n\, x(n)\}$

ΘΕΩΡΗΜΑ ΑΡΧΙΚΗΣ ΤΙΜΗΣ

Εάν $x(n)$ αιτιατό, δηλ. $x(n)=0$ για $n<0$,

τότε $x(0) = \lim_{z\to\infty} X(z)$

Απόδειξη: Αφού $x(n)$ αιτιατό έχουμε

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n} = x(0) + x(1) z^{-1} + x(2) z^{-2} + \dots$$

Από τη σχέση αυτή γίνεται φανερό ότι για $z\to\infty \Rightarrow z^{-n}\to 0$ αφού $n>0$ και άρα $x(0) = \lim_{z\to\infty} X(z)$

Z-Transform Properties

Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχηματισμός–z	Περιοχή σύγκλισης
	$x(n)$	$X(z)$	$P: R_1 < \|z\| < R_2$
	$x_1(n)$	$X_1(z)$	P_1
	$x_2(n)$	$X_2(z)$	P_2
Γραμμικότητα	$\alpha x_1(n) + bx_2(n)$	$\alpha X_1(z) + bX_2(z)$	$P_1 \cap P_2$ τουλάχιστον
Ολίσθηση στο χρόνο	$x(n-m)$	$z^{-m}X(z)$	P, εκτός $z = 0$ αν $m > 0$ ή $z = \infty$ αν $m < 0$
Κλιμάκωση στο πεδίο–z	$\alpha^n x(n)$	$X(\alpha^{-1}z)$	$\|\alpha\|R_1 < \|z\| < \|\alpha\|R_2$
Κατοπτρισμός στο χρόνο	$x(-n)$	$X(z^{-1})$	$\frac{1}{R_2} < \|z\| < \frac{1}{R_1}$
Συζυγία	$x^*(n)$	$X^*(z^*)$	P
Παραγώγιση στο πεδίο–z	$nx(n)$	$-z\frac{dX(z)}{dz}$	P
Συνέλιξη	$x_1(n)*x_2(n)$	$X_1(z)X_2(z)$	$P_1 \cap P_2$ τουλάχιστον
Πρώτη διαφορά	$x(n) - x(n-1)$	$(1 - z^{-1})X(z)$	Τουλάχιστον η τομή της P και της $\|z\| > 0$
Θεώρημα αρχικής τιμής	Αν $x(n) = 0$ για $n < 0$, τότε $x(0) = \lim_{z\to\infty} X(z)$		

Inverse z-transform

$$x(n) = Z^{-1}\{X(z)\} \qquad x(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint_c X(z)z^{n-1}dz$$

Υπολογισμός του αντίστροφου Μ.Ζ. με ανάπτυξη σε δυναμοσειρά

$$X(z) = \frac{1+2z^{-1}}{1+0{,}4z^{-1}-0{,}12z^{-2}}$$

$$\begin{array}{r|l} 1+0{,}4z^{-1}-0{,}12z^{-2} & 1+1{,}6z^{-1}-0{,}52z^{-2}+0{,}4z^{-3}+\dots \\ \hline & 1+2z^{-1} \\ & \underline{1+0{,}4z^{-1}-0{,}12z^{-2}} \\ & 1{,}6z^{-1}+0{,}12z^{-2} \\ & \underline{1{,}6z^{-1}+0{,}64z^{-2}-0{,}192z^{-3}} \\ & -0{,}52z^{-2}+0{,}192z^{-3} \\ & \underline{-0{,}52z^{-2}-0{,}208z^{-3}+0{,}0624z^{-4}} \\ & -0{,}4z^{-3}-0{,}0624z^{-4} \\ & \dots\dots \\ & \dots\dots \end{array}$$

$$X(z) = 1 + 1{,}6z^{-1} - 0{,}52z^{-2} + 0{,}4z^{-3} + \dots$$

$$x(0) = 1,\ x(1) = 1{,}6,\ x(2) = -0{,}52,\ x(3) = 0{,}4, \dots$$

INVERSE Z-TRANSFORM

Υπολογισμός του αντίστροφου Μ.Ζ. με ανάπτυξη σε μερικά κλάσματα

$$X(z)=\frac{C(z)}{D(z)}=\frac{a_0+a_1z^{-1}+\ldots+a_M z^{-M}}{1+b_1z^{-1}+\ldots+b_N z^{-N}}$$

$$X(z)=\frac{C(z)}{D(z)}=\underline{c_0+c_1z^{-1}+\ldots+c_{M-N}z^{-(M-N)}}+\underline{\underline{\frac{C_1(z)}{D(z)}}}=X_0(z)+X_1(z)$$

$$X_0(z)=c_0+c_1z^{-1}+\ldots+c_{M-N}z^{-(M-N)}=\sum_{q=0}^{M-N}c_q z^{-q}$$

$$X_1(z)=\frac{C_1(z)}{D(z)}$$

INVERSE Z-TRANSFORM

$$X(z)=\frac{a_0z^{N}+a_1z^{N-1}+\ldots+a_M z^{N-M}}{z^{N}+b_1z^{N-1}+\ldots+b_N}$$

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{a_0z^{N-1}+a_1z^{N-2}+\ldots+a_M z^{N-M-1}}{z^{N}+b_1z^{N-1}+\ldots+b_N} \qquad N>M$$

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{A_1}{z-p_1}+\frac{A_2}{z-p_2}+\ldots.+\frac{A_N}{z-p_N}$$

$$\frac{(z-p_k)X(z)}{z}=\frac{(z-p_k)A_1}{z-p_1}+\frac{(z-p_k)A_2}{z-p_2}+\ldots.+\frac{(z-p_k)A_N}{z-p_N}$$

$$A_k=\left.\frac{(z-p_k)X(z)}{z}\right|_{z=p_k} \qquad k=1,2,\ldots,N$$

$$X(z)=A_1\frac{z}{z-p_1}+A_2\frac{z}{z-p_2}+\ldots.+A_N\frac{z}{z-p_N}$$

$$X(z)=A_1\frac{1}{1-p_1z^{-1}}+A_2\frac{1}{1-p_2z^{-1}}+\ldots.+A_N\frac{1}{1-p_Nz^{-1}}$$

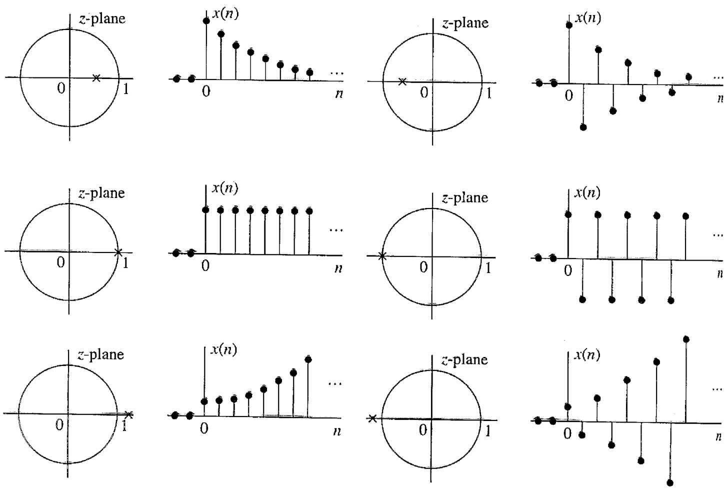
$$\boxed{Z^{-1}\{\frac{1}{1-p_kz^{-1}}\}=\begin{cases}p_k^n u(n) & \text{αν Π.Σ.: } |z|>|p_k| \quad (\text{αιτιατό σήμα})\\ -p_k^n u(-n-1) & \text{αν Π.Σ.: } |z|<|p_k| \quad (\text{μη αιτιατό σήμα})\end{cases}}$$

Z-TRANSFORM

Pole Location and Time-Domain Behavior of Causal Signals

(single -real pole)

$$x(n) = a^n u(n) \xleftrightarrow{z} X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} \qquad \text{ROC: } |z| > |a|$$



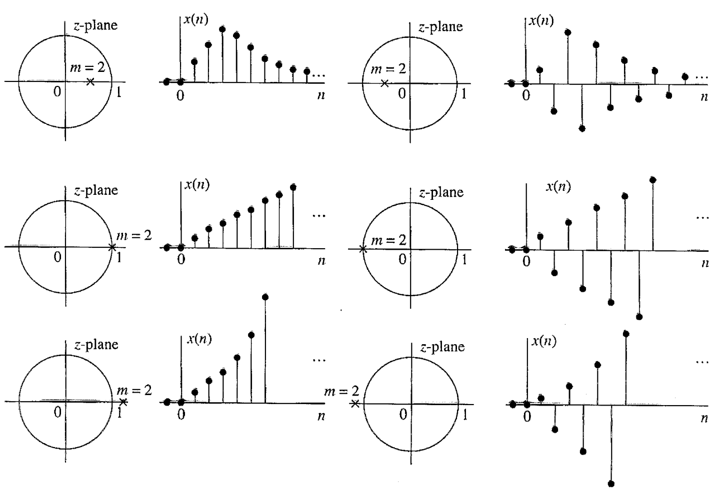
Time-domain behavior of a single-real pole causal signal as a function of the location of the pole with respect to the unit circle.

Z-TRANSFORM

Pole Location and Time-Domain Behavior of Causal Signals

(double-real pole)

$$x(n) = na^n u(n) \xleftrightarrow{z} X(z) = \frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2} \qquad \text{ROC: } |z| > |a|$$



Time-domain behavior of causal signals corresponding to a double ($m = 2$) real pole, as a function of the pole location.

ONE-SIDED Z-TRANSFORM

ΜΟΝΟΠΛΕΥΡΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ – Z

$$X^+(z) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} x(n)\, z^{-n}$$

- Χρησιμοποιείται για συστήματα τα οποία περιγράφονται από εξισώσεις διαφορών με μη μηδενικές αρχικές συνθήκες.
- Το κατώτερο όριο του αθροίσματος είναι πάντοτε μηδέν, ανεξάρτητα από το αν το σήμα $x(n)$ είναι μηδέν για $n<0$, δηλαδή αιτιατό.

Λόγω του ότι το κάτω όριο είναι μηδέν, ο μονόπλευρος ΜΖ έχει τα εξής χαρακτηριστικά:

- Δεν περιέχει πληροφορία για το σήμα $x(n)$ για $n<0$.
- Είναι μοναδικός (unique) για αιτιατά σήματα και μόνο, αφού μόνον αυτά είναι μηδέν για $n<0$.
- Ο μονόπλευρος ΜΖ $X^+(z)$ του σήματος $x(n)$ ταυτίζεται με τον αμφίπλευρο ΜΖ του σήματος $x(n)u(n)$. Αφού το $x(n)u(n)$ είναι αιτιατό, η ΠΣ του αμφίπλευρου ΜΖ είναι το εξωτερικό ενός κύκλου, όπως και η ΠΣ του $X^+(z)$. Συνεπώς, όταν έχουμε μονόπλευρους ΜΖ, δεν είναι απαραίτητο να αναφερόμαστε στην περιοχή σύγκλισής τους.

ONE-SIDED Z-TRANSFORM

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ μονόπλευρων ΜΖ διαφόρων σημάτων.

$$x_1(n) = \{\underline{\underline{1}}, 2, 5, 7, 0, 1\} \quad \overset{z^+}{\longleftrightarrow} \quad X_1^+(z) = 1 + 2z^{-1} + 5z^{-2} + 7z^{-3} + z^{-5}$$

$$x_2(n) = \{1, 2, \underline{\underline{5}}, 7, 0, 1\} \quad \overset{z^+}{\longleftrightarrow} \quad X_2^+(z) = 5 + 7z^{-1} + z^{-3}$$

$$x_3(n) = \{\underline{\underline{0}}, 0, 1, 2, 5, 7, 0, 1\} \quad \overset{z^+}{\longleftrightarrow} \quad X_3^+(z) = z^{-2} + 2z^{-3} + 5z^{-4} + 7z^{-5} + z^{-7}$$

$$x_4(n) = \{2, 4, \underline{\underline{5}}, 7, 0, 1\} \quad \overset{z^+}{\longleftrightarrow} \quad X_4^+(z) = 5 + 7z^{-1} + z^{-3}$$

$$x_5(n) = \delta(n) \quad \overset{z^+}{\longleftrightarrow} \quad X_5^+(z) = 1$$

$$x_6(n) = \delta(n-m),\ m>0 \quad \overset{z^+}{\longleftrightarrow} \quad X_6^+(z) = z^{-m}$$

$$x_7(n) = \delta(n+m),\ m>0 \quad \overset{z^+}{\longleftrightarrow} \quad X_7^+(z) = 0$$

Παρατηρήσεις:
1. Για αντι-αιτιατά σήματα, ο μονόπλευρος ΜΖ είναι πάντοτε 0. Π.χ. $X_7^+(z)=0$
2. Για μη-αιτιατά σήματα, ο μονόπλευρος ΜΖ <u>δεν</u> είναι μοναδικός (unique). Π.χ. $X_2^+(z) = X_4^+(z)$ αλλά $x_2(n) \neq x_4(n)$.

ONE-SIDED Z-TRANSFORM

Α. ΚΑΘΥΣΤΕΡΗΣΗ ΣΤΟ ΧΡΟΝΟ (Time Delay)

Εάν $\quad x(n) \overset{z^+}{\longleftrightarrow} X^+(z)$

τότε $\quad x(n-m) \overset{z^+}{\longleftrightarrow} z^{-m}\left[X^+(z) + \sum_{n=1}^{m} x(-n)\, z^{n}\right] \qquad m>0$

Για αιτιατά σήματα η ιδιότητα αυτή γίνεται

$$x(n-m) \overset{z^+}{\longleftrightarrow} z^{-m} X^+(z)$$

ONE-SIDED Z-TRANSFORM

Απόδειξη: $\quad Z^+\{x(n-m)\} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n-m)\, z^{-n} = \langle$ θέτω $n-m=l \rightarrow n=l+m \rangle =$

$$= z^{-m}\left[\underbrace{\sum_{l=-m}^{-1} x(l)\, z^{-l}}_{\text{θέτω } l=-n} + \underbrace{\sum_{l=0}^{\infty} x(l)\, z^{-l}}_{X^+(z)}\right] =$$

$$= z^{-m}\left[\sum_{n=1}^{m} x(-n)\, z^{n} + X^+(z)\right]$$

Παρατήρηση: Η ιδιότητα αυτή μπορεί να γίνει εύκολα αντιληπτή εάν σκεφτούμε ότι η ολίσθηση προς τα δεξιά (καθυστέρηση) εισάγει στον θετικό άξονα των χρόνων νέα δείγματα τα οποία βρισκόντουσαν στον αρνητικό ημιάξονα. Άρα ο συνολικός μετασχηματισμός θα αποτελείται από τα δείγματα που υπήρχαν ήδη και που ολίσθησαν κατά m θέσεις δεξιά $[z^{-m} X^+(z)]$, και από τα νέα δείγματα που προέκυψαν μετά την δεξιά ολίσθηση $\left[z^{-m} \sum_{n=1}^{m} x(-n)\, z^{n}\right]$.

ONE-SIDED Z-TRANSFORM

Β. ΠΡΟΗΓΗΣΗ ΣΤΟ ΧΡΟΝΟ (Time Advance)

Εάν $\quad x(n) \xleftrightarrow{z^+} X^+(z)$

τότε $\quad x(n+m) \xleftrightarrow{z^+} z^m \left[X^+(z) - \sum_{n=0}^{m-1} x(n) z^{-n} \right] \qquad m>0$

ONE-SIDED Z-TRANSFORM

Απόδειξη: $\quad Z^+\{x(n+m)\} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n+m) z^{-n} = \langle$ θέτω $n+m=l \rangle = z^m \underbrace{\sum_{l=m}^{\infty} x(l) z^{-l}}$

Αλλά

$$X^+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(l) . z^{-l} = \sum_{l=0}^{m-1} x(l) z^{-l} + \underbrace{\sum_{l=m}^{\infty} x(l) z^{-l}}$$

Άρα

$$Z^+\{x(n+m)\} = z^m \left[X^+(z) - \sum_{l=0}^{m-1} x(l) z^{-l} \right]$$

Παρατήρηση: Η ιδιότητα αυτή μπορεί εύκολα να γίνει κατανοητή αν σκεφτούμε ότι με την ολίσθηση προς τα αριστερά (προήγηση στο χρόνο) κατά m θέσεις τα δείγματα $x(0), x(1), \dots, x(m-1)$ "χάνονται" και άρα πρέπει να αφαιρεθούν από τον $X^+(z)$, στον υπολογισμό του οποίου ήδη συμμετείχαν.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΕΛΙΚΗΣ ΤΙΜΗΣ (Final Value Theorem)

Εάν $x(n) \xleftrightarrow{z^+} X^+(z)$

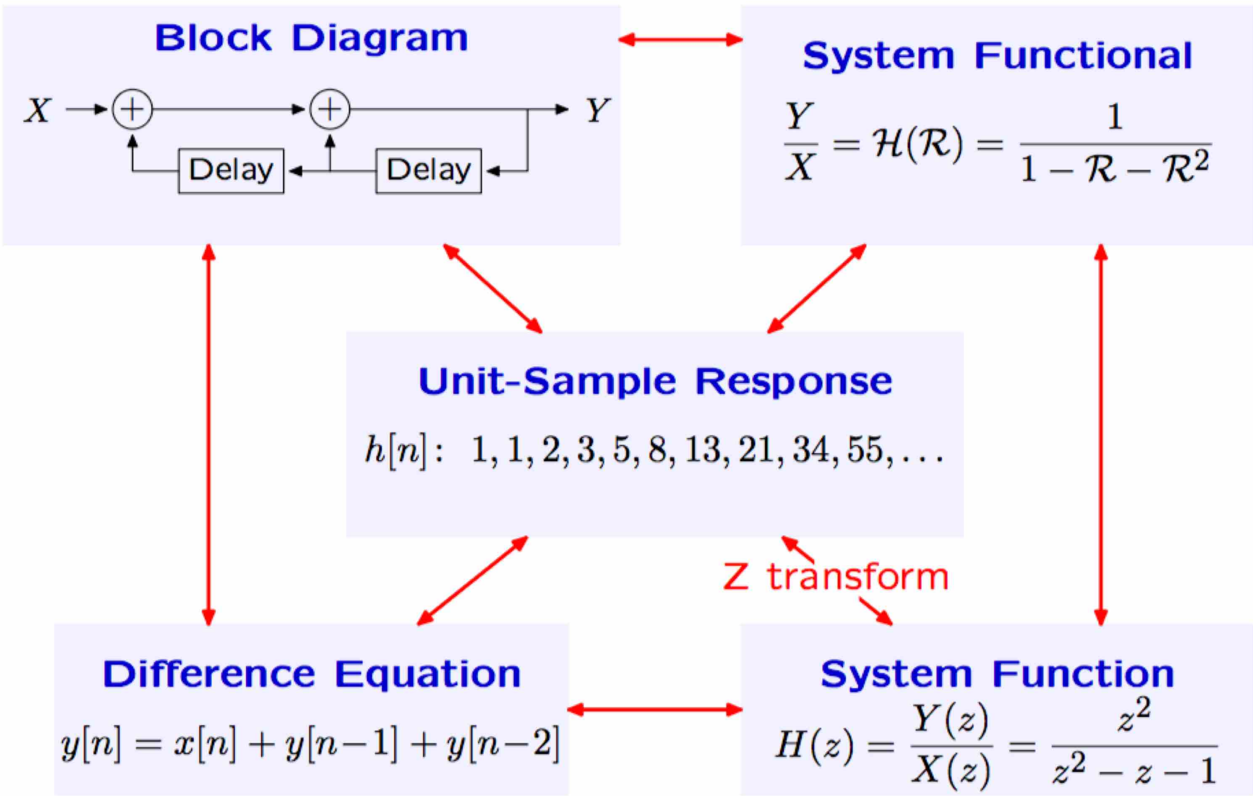
Τότε $\lim\limits_{n\to\infty} x(n) = \lim\limits_{z\to 1} (z-1)X^+(z)$

Σημειώνεται ότι το όριο υπάρχει εάν η ΠΣ του $(z-1)X^+(z)$ περιλαμβάνει τον μοναδιαίο κύκλο.

Το θεώρημα αυτό είναι χρήσιμο για τον υπολογισμό της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς ενός σήματος x(n) για το οποίο γνωρίζουμε τον ΜΖ, αλλά όχι το ίδιο το σήμα.

Concept Map: Discrete-Time Systems

Relations among representations.



Πηγή: MIT OpenCourseWare http://ocw.mit.edu (6.003 Signals and SystemsFall 2011)

ΣΧΕΣΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΤΩΝ ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΩΝ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ ΕΝΟΣ ΣΔΧ