ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Δ6 – ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑ

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

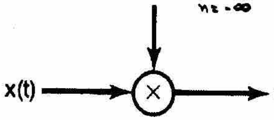
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ ΣΚΟΔΡΑΣ

2023 - 2024

ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑ

ΠΕΔΙΟ ΧΡΟΝΟΥ

$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)$

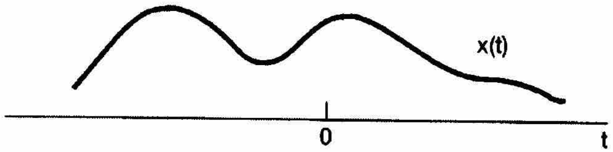


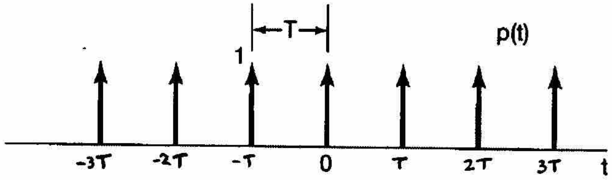
$x_p(t) = x(t)\cdot p(t) = x(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT) = \dots + x(t)\delta(t+T) + x(t)\delta(t) + x(t)\delta(t-T) + x(t)\delta(t-2T) + \dots =$

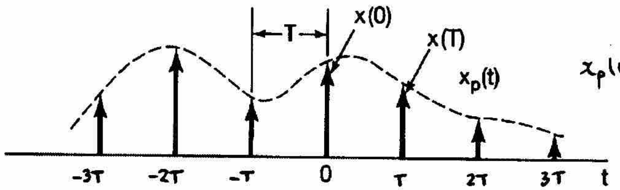
$= \langle$ λόγω ιδιότητας $x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0)\rangle =$

$= \dots + x(-T)\delta(t+T) + x(0)\delta(t) + x(T)\delta(t-T) + x(2T)\delta(t-2T) + \dots =$

$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\,\delta(t-nT)$



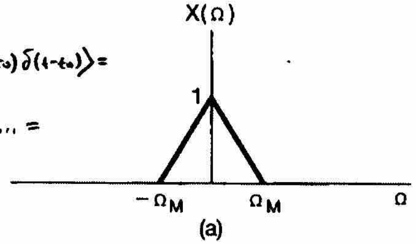


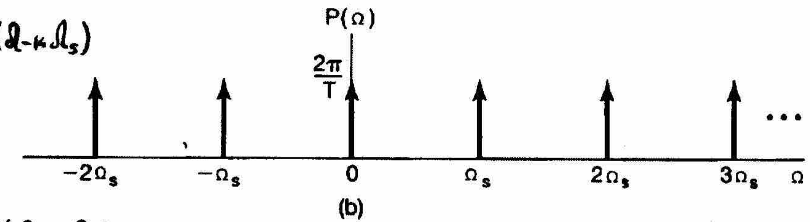


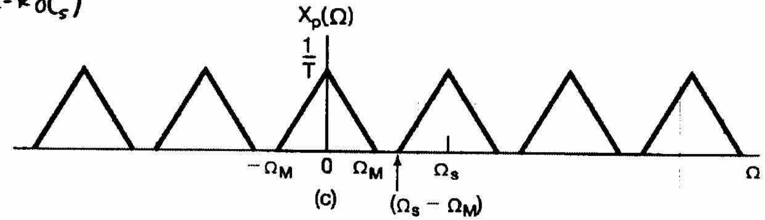
$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT) \overset{F}{\longleftrightarrow} P(\Omega) = \frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega - k\Omega_s)$

$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT) \overset{F}{\longleftrightarrow} X_p(\Omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\Omega - k\Omega_s)$

ΠΕΔΙΟ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ

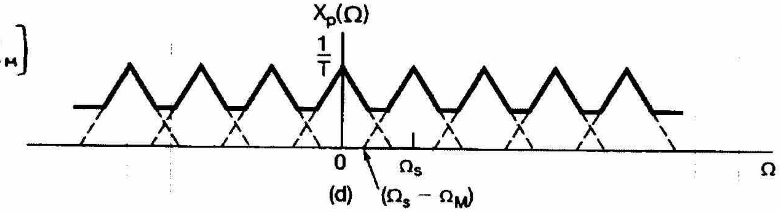






$\Omega_s > 2\Omega_M$

$[\Omega_M < \Omega_s - \Omega_M \Rightarrow \Omega_s > 2\Omega_M]$



$\Omega_s < 2\Omega_M$

ΘΕΩΡΗΜΑ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑΣ

Έστω το περιορισμένου εύρους σήμα $x(t)$ με ΜF $X(\Omega)=0$ για $|\Omega| > \Omega_M$. Τότε το σήμα $x(t)$ μπορεί μονοσήμαντα να προσδιοριστεί από τα δείγματά του $x(nT)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ εάν

$$\Omega_s > 2\,\Omega_M$$

όπου $\Omega_s = \frac{2\pi}{T}$

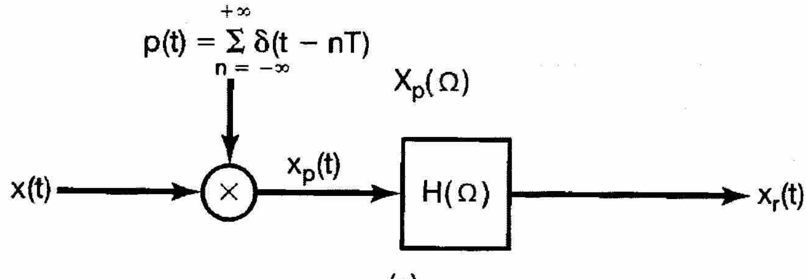
Σημείωση: Απόδειξη της σχέσης $X_p(\Omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\Omega - k\Omega_s)$

$X_p(\Omega) = \frac{1}{2\pi}X(\Omega) * P(\Omega) = \frac{1}{2\pi}X(\Omega) * \frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega - k\Omega_s) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\Omega) * \delta(\Omega - k\Omega_s) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\Omega - k\Omega_s)$

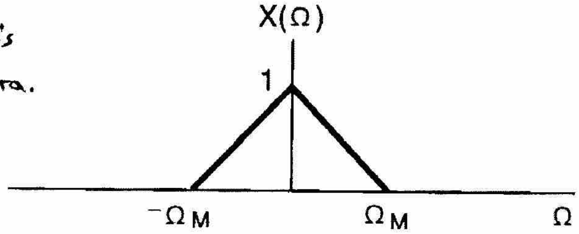
ΘΕΩΡΗΜΑ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑΣ (συνέχεια)

Όταν μας δοθούν τα δείγματα $x(nT)$, $n=0,\pm1,\pm2,\ldots$ ενός σήματος $x(t)$ το οποίο έχει υποστεί δειγματοληψία με συχνότητα $\Omega_s > 2\Omega_M$, τότε μπορούμε να ανακατασκευάσουμε το $x(t)$ δημιουργώντας ένα περιοδικό τραίνο κρουστικών, στο οποίο οι διαδοχικές κρουστικές έχουν πλάτη τα διαδοχικά δείγματα. Το τραίνο αυτό των κρουστικών τροφοδοτεί ένα ιδανικό βαθυπερατό φίλτρο κέρδους T και συχνότητας αποκοπής Ω_c μεταξύ Ω_M και $\Omega_s-\Omega_M$, δηλαδή $\Omega_M<\Omega_c<\Omega_s-\Omega_M$.

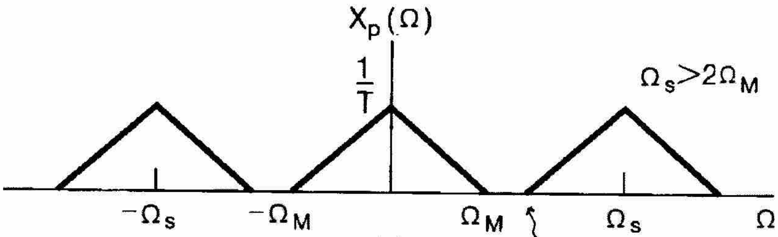
Η έξοδος του φίλτρου θα είναι ίση με το σήμα $x(t)$.



(a)



(b)



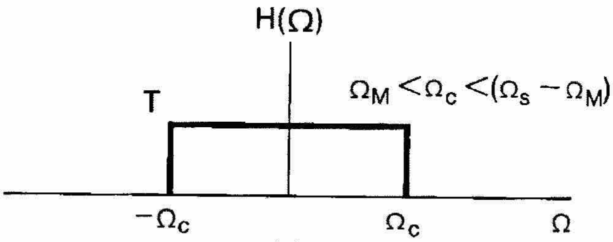
(c)

$(\Omega_s-\Omega_M)$

Σημειώσεις:

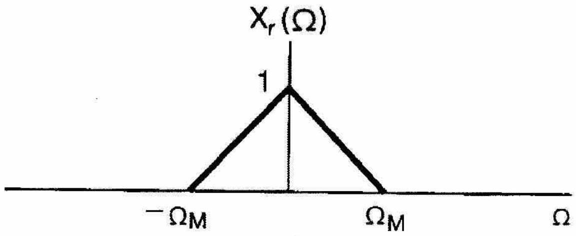
1. Η συχνότητα $2\Omega_M$ ονομάζεται ρυθμός Nyquist (Nyquist rate).

   Υπενθυμίζεται ότι Ω_M είναι η μέγιστη συχνότητα του περιορισμένου εύρους (band limited) σήματος $x(t)$.



(d)

2. Ο H. Nyquist το 1928 και ο D. Gabor το 1946, βασιζόμενοι στη σειρά Fourier, είχαν αποδείξει ότι: "2TW αριθμοί είναι αρκετοί για να ορίσουν μονοσήμαντα μια συνάρτηση διάρκειας T και μέγιστης συχνότητας W."



(e)

Ανακατασκευή Σήματος (Signal Reconstruction)

Στη συχνότητα:

$$X_r(\Omega) = H(\Omega)\cdot X_p(\Omega) =$$

$$= H(\Omega)\cdot \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\Omega - k\Omega_s) =$$

$$= T \cdot \frac{1}{T} X(\Omega) = \langle \text{αφού } H(\Omega)=T \text{ μόνον για } k=0 \rangle$$

$$= X(\Omega)$$

Στον χρόνο:

$$x_r(t) = h(t) * x_p(t) =$$

$$= h(t) * \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\,\delta(t-nT) =$$

$$= \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\,\underbrace{\delta(t-nT) * h(t)} =$$

$$= \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\; h(t-nT) =$$

$$= \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\; T\,\frac{\sin[\Omega_c(t-nT)]}{\pi(t-nT)} =$$

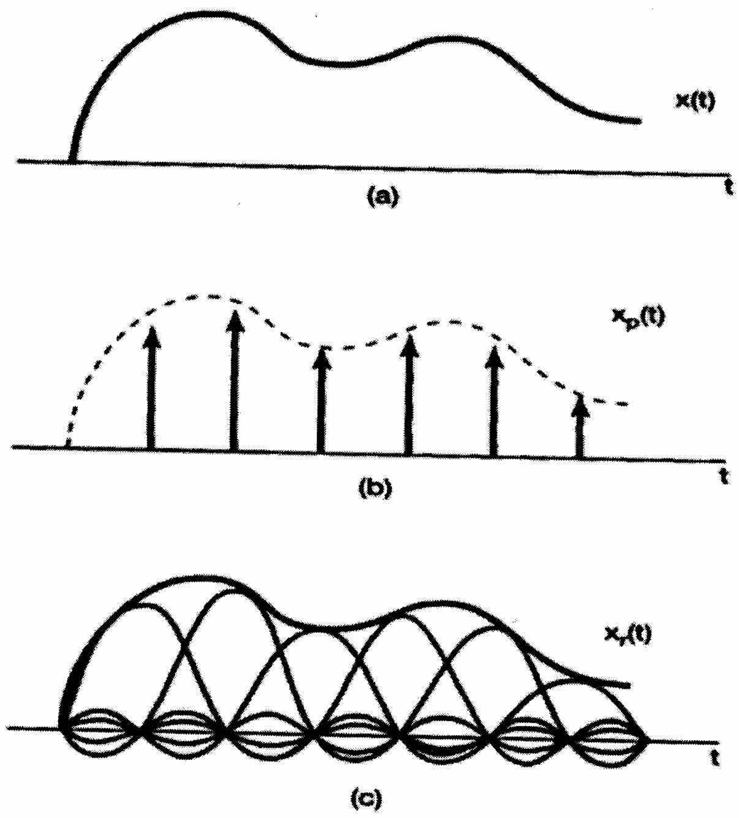
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\,\frac{\sin[\Omega_c(t-nT)]}{\pi(t-nT)}$$

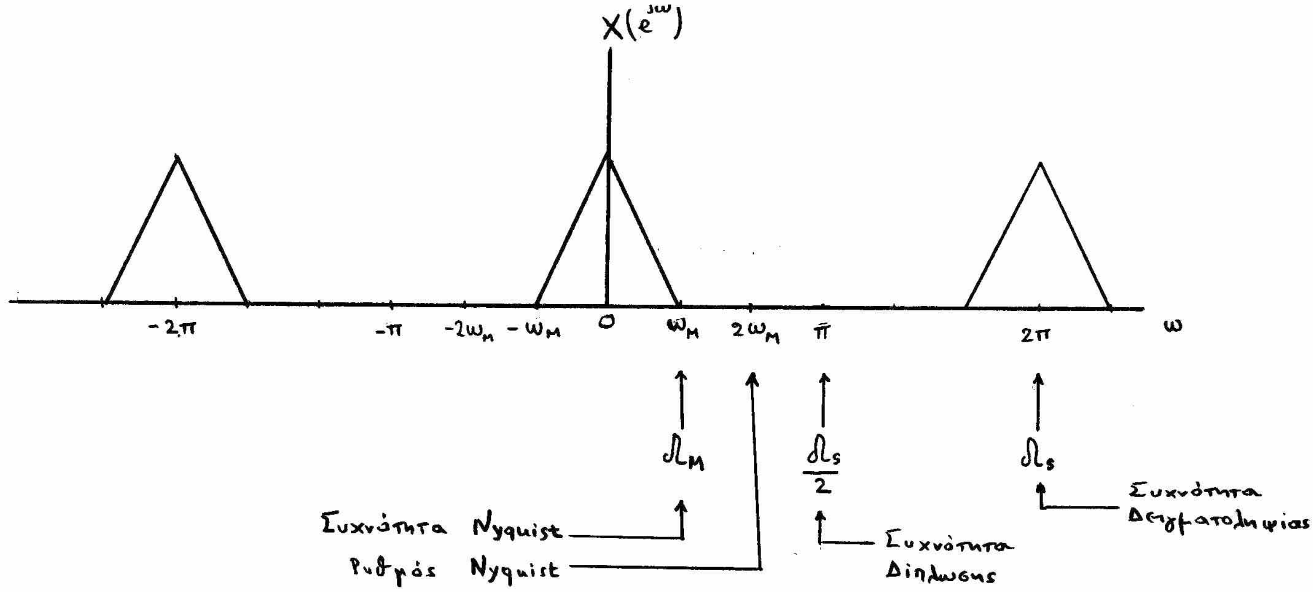
Σημείωση

$$H(\Omega) = \begin{cases} T & \text{για } |\Omega| \le \Omega_c \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$\Big\updownarrow F$$

$$h(t) = T\,\frac{\sin(\Omega_c t)}{\pi t}$$



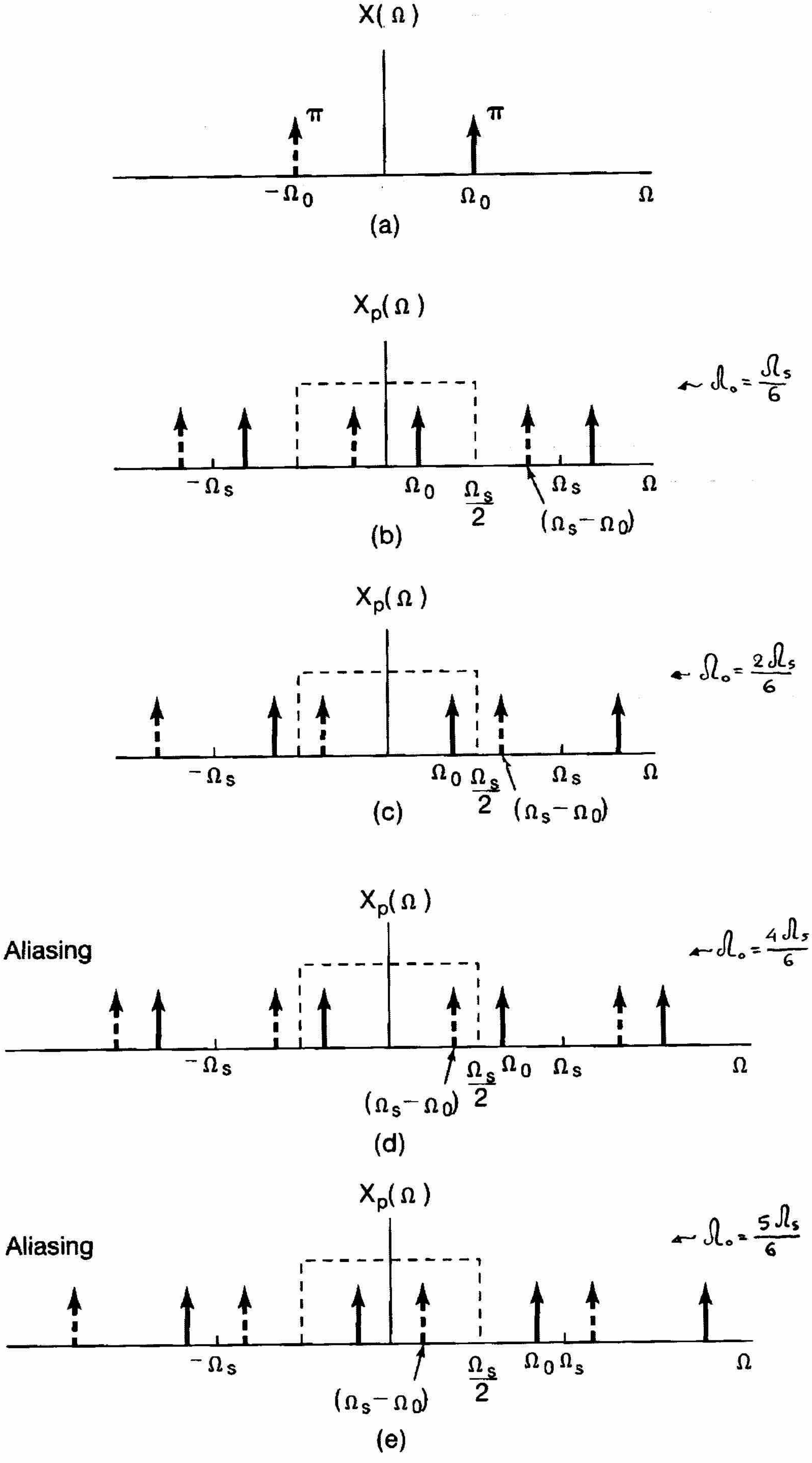


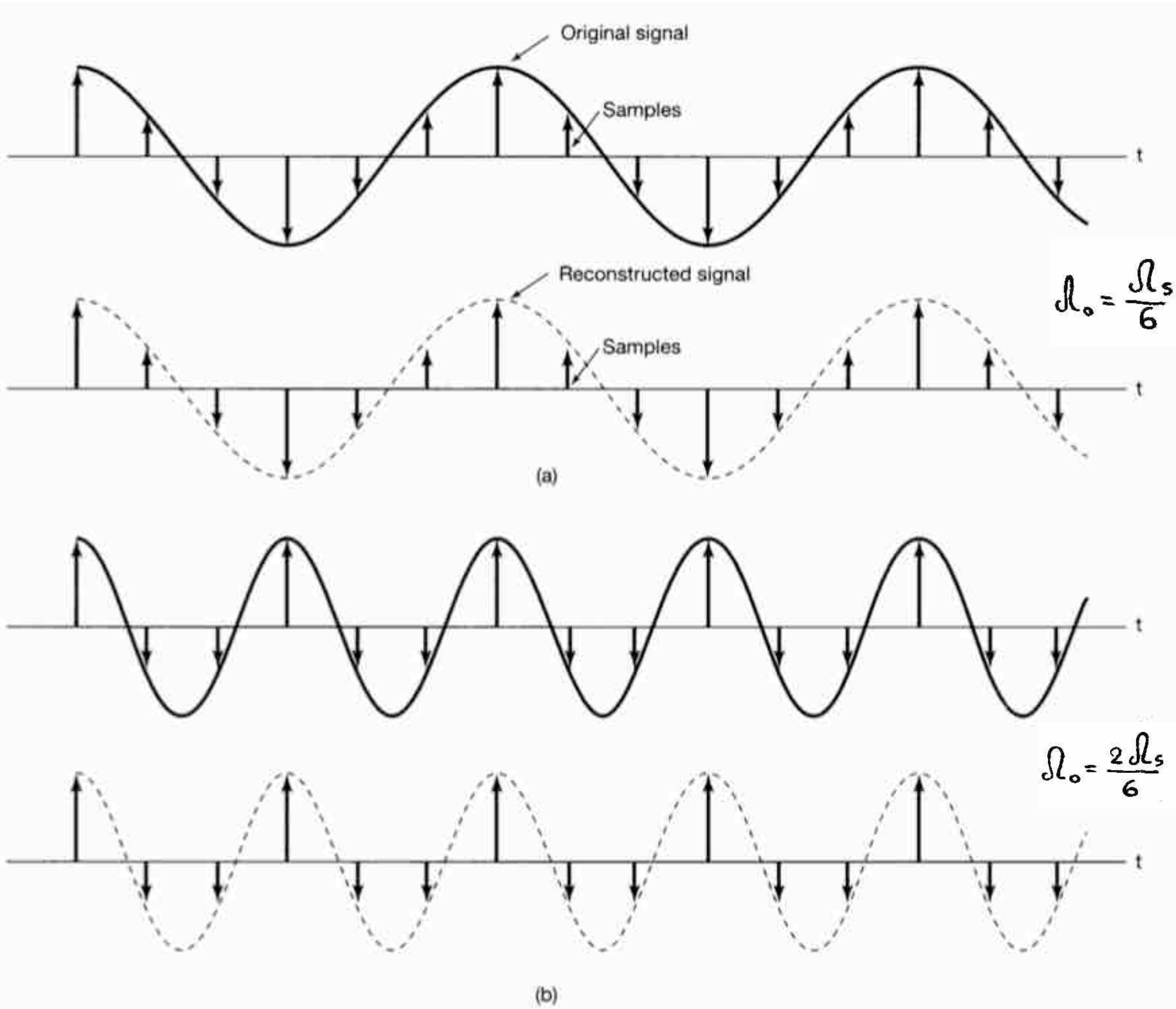
Σημείωση: $\omega = \Omega T$ $\qquad \Omega = 2\pi F = \frac{2\pi}{T}$

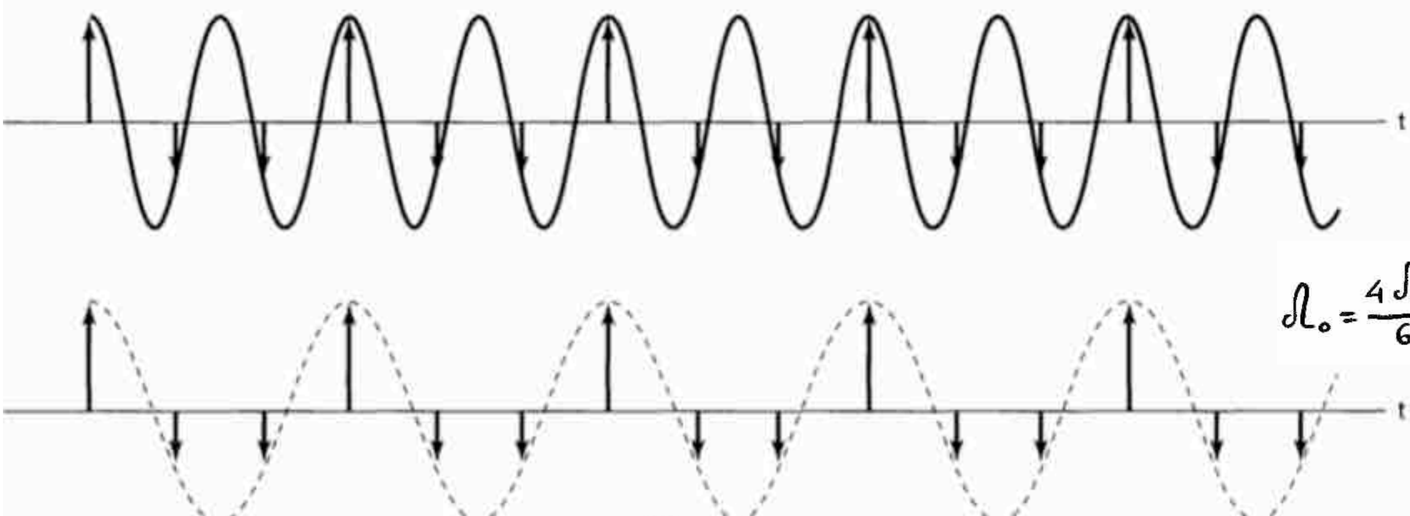
$\omega = 2\pi f$ $\qquad f = \frac{F}{F_s}$

Παράδειγμα δειγματοληψίας με συχνότητα Ω_s ενός σήματος $x(t)=\cos(\Omega_0 t)$ για διαφορετικές συχνότητες Ω_0, δηλ. για $\Omega_0=\frac{\Omega_s}{6}$, $\Omega_0=\frac{2\Omega_s}{6}$, $\Omega_0=\frac{4\Omega_s}{6}$, $\Omega_0=\frac{5\Omega_s}{6}$.

$x(t)=\cos(\Omega_0 t)$

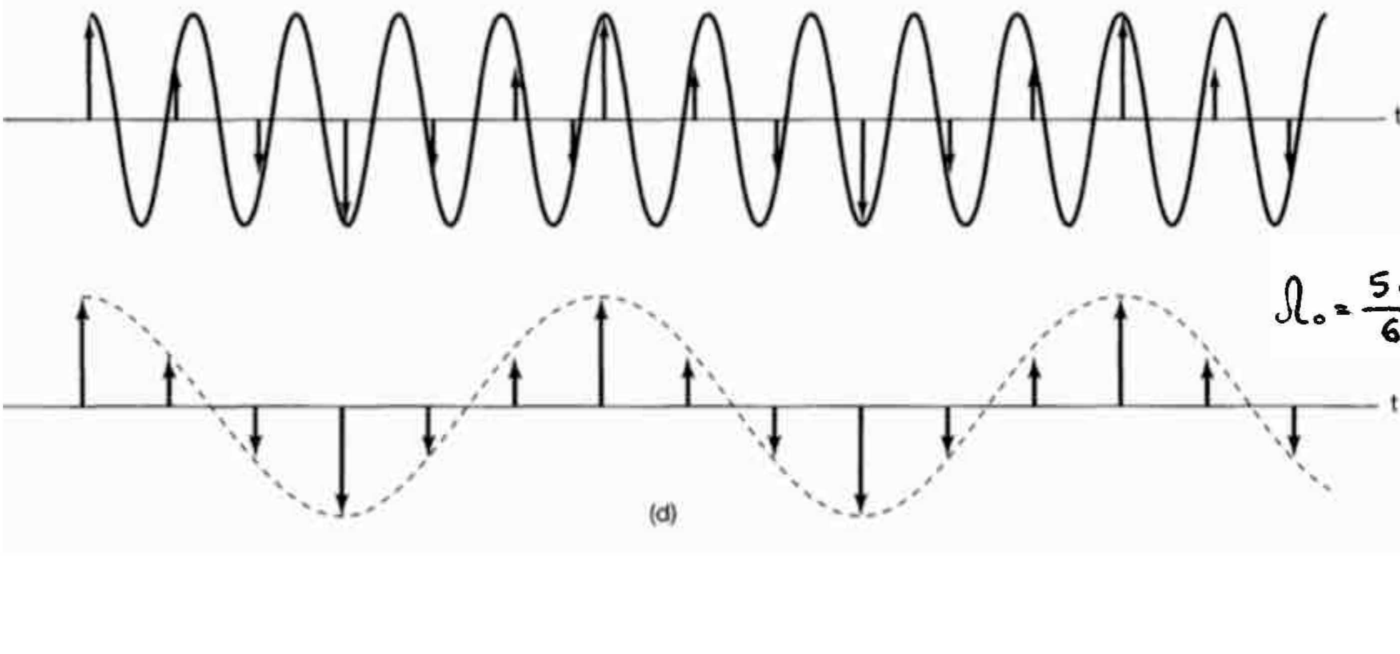



Original signal
Samples
t
Reconstructed signal
Samples
t
(a)
$\Omega_0 = \frac{\Omega_s}{6}$
t
t
(b)
$\Omega_0 = \frac{2\Omega_s}{6}$



$\Omega_0 = \frac{4\Omega_s}{6}$

(c)



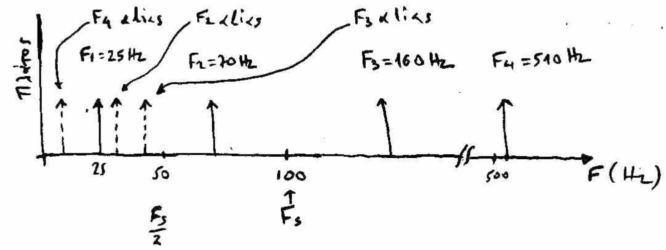
$\Omega_0 = \frac{5\Omega_s}{6}$

(d)

Παράδειγμα Aliasing

Έστω αναλογικό σήμα, το οποίο περιέχει τις συχνότητες 25 Hz, 70 Hz, 160 Hz και 510 Hz, δειγματοληπτείται με συχνότητα 100 Hz. Ποιες οι aliased συχνότητες;

Λύση



Οι συχνότητες που θα "φαίνονται" σωστά είναι εκείνες που βρίσκονται στο διάστημα $\left[-\frac{F_s}{2}, \frac{F_s}{2}\right]$, δηλ. μεταξύ -50 Hz και 50 Hz.

Από τη σχέση $F_0 = F_k - kF_s$ μπορούμε να υπολογίσουμε τις aliased συχνότητες.

$F_1 = 25$ Hz $\rightarrow$ Όχι aliasing

$F_2' = F_2 - k100 = 70 - 100 = -30$ Hz

$F_3' = F_3 - k \cdot 100 = 160 - 2 \cdot 100 = -40$ Hz

$F_4' = F_4 - k \cdot 100 = 510 - 5 \cdot 100 = 10$ Hz

Παράδειγμα Aliasing

Δύο συνεχή σήματα συνημιτονικά με συχνότητες 0.5 H και 1.5 Hz δειγματοληπτούνται με συχνότητα $F_s = 2$ samples/sec. Να βρεθούν και να σχεδιαστούν τα δειγματοληπτημένα σήματα.

Λύση

$F_1 = 0.5\,Hz \rightarrow$ όχι aliasing

$F_2 = 1.5\,Hz \rightarrow F_2' = 1.5 - 2 = -0.5\,Hz$

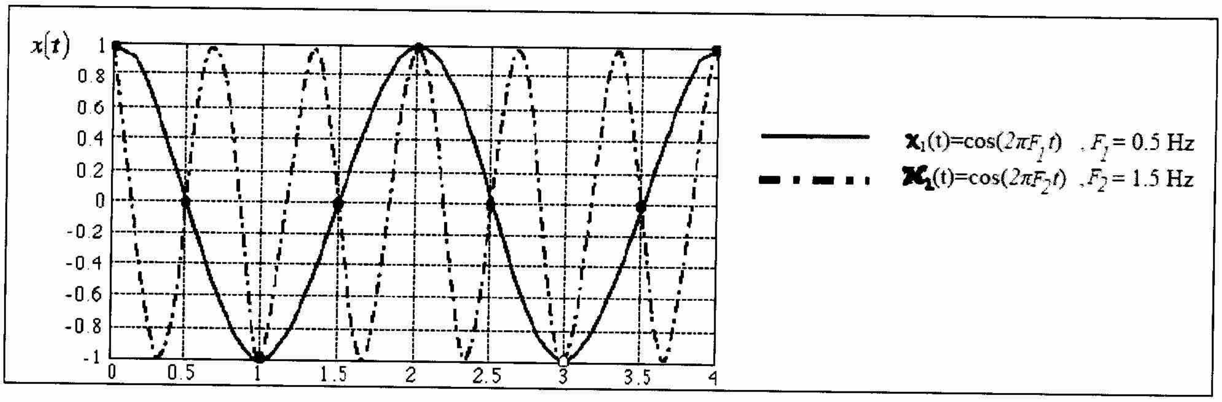
Άρα η συχνότητα F_2 θα φαίνεται ως συχνότητα $F_2' = F_1$ μετά τη δειγματοληψία.

Τα αντίστοιχα δειγματοληπτημένα σήματα θα είναι:

$$x_1(t) = \cos(\Omega_1 t) \rightarrow x_1(n) = \cos\left(2\pi F_1 \cdot n \frac{1}{F_s}\right) = \cos\left(\cancel{2}\pi n \frac{0.5}{\cancel{2}}\right) = \cos(0.5\pi n)$$

$$x_2(t) = \cos(\Omega_2 t) \rightarrow x_2(n) = \cos\left(2\pi F_2 n \frac{1}{F_s}\right) = \cos\left(\cancel{2}\pi \frac{3}{2} n \frac{1}{\cancel{2}}\right) =$$

$$= \cos\left(\frac{3}{2}\pi n\right) = \cos\left(2\pi n - \frac{1}{2}\pi n\right) = \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) = x_1(n)$$



Sampling examples

EXAMPLE 1

Consider the analog signal

$$x_a(t) = 3 \cos 100\pi t$$

(a) Determine the minimum required sampling rate to avoid aliasing.
(b) Suppose that the signal is sampled at the rate $F_s = 200$ Hz. What is the discrete-time signal obtained after sampling?
(c) Suppose that the signal is sampled at the rate $F_s = 75$ Hz. What is the discrete-time signal obtained after sampling?
(d) What is the frequency $F < F_s/2$ of a sinusoid that yields samples identical to those obtained in part (c)?

Solution: **(a)** The frequency of the analog signal is $F = 50$ Hz. Hence the minimum sampling rate required to avoid aliasing is $F_s = 100$ Hz.

(b) If the signal is sampled at $F_s = 200$ Hz, the discrete-time signal is

$$x(n) = 3 \cos \frac{100\pi}{200} n = 3 \cos \frac{\pi}{2} n$$

(c) If the signal is sampled at $F_s = 75$ Hz, the discrete-time signal is

$$\begin{aligned} x(n) &= 3 \cos \frac{100\pi}{75} n = 3 \cos \frac{4\pi}{3} n \\ &= 3 \cos \left(2\pi - \frac{2\pi}{3}\right) n \\ &= 3 \cos \frac{2\pi}{3} n \end{aligned}$$

(d) For the sampling rate of $F_s = 75$ Hz, we have

$$F = fF_s = 75f$$

The frequency of the sinusoid in part (c) is $f = \frac{1}{3}$. Hence

$$F = 25 \text{ Hz}$$

Clearly, the sinusoidal signal

$$\begin{aligned} y_a(t) &= 3 \cos 2\pi Ft \\ &= 3 \cos 50\pi t \end{aligned}$$

sampled at $F_s = 75$ samples/s yields identical samples. Hence $F = 50$ Hz is an alias of $F = 25$ Hz for the sampling rate $F_s = 75$ Hz.

EXAMPLE 2

Consider the analog signal

$$x_a(t) = 3 \cos 50\pi t + 10 \sin 300\pi t - \cos 100\pi t$$

What is the Nyquist rate for this signal?

Solution: The frequencies present in the signal above are

$$F_1 = 25 \text{ Hz} \qquad F_2 = 150 \text{ Hz} \qquad F_3 = 50 \text{ Hz}$$

Thus $F_{\max} = 150$ Hz and according to (1.4.2),

$$F_s > 2F_{\max} = 300 \text{ Hz}$$

The Nyquist rate is $F_N = 2F_{\max}$. Hence

$$F_N = 300 \text{ Hz}$$

Discussion: It should be observed that the signal component $10 \sin 300\pi t$, sampled at the Nyquist rate $F_N = 300$, results in the samples $10 \sin \pi n$, which are identically zero. In other words, we are sampling the analog sinusoid at its zero-crossing points, and hence we miss this signal component completely. This situation would not occur if the sinusoid is offset in phase by some amount θ. In such a case we have $10 \sin (300\pi t + \theta)$ sampled at the Nyquist rate $F_N = 300$ samples per second, which yields the samples

$$\begin{aligned} 10 \sin (\pi n + \theta) &= 10(\sin \pi n \cos \theta + \cos \pi n \sin \theta) \\ &= 10 \sin \theta \cos \pi n \\ &= (-1)^n \, 10 \sin \theta \end{aligned}$$

Thus if $\theta \neq 0$ or π, the samples of the sinusoid taken at the Nyquist rate are not all zero. However, we still cannot obtain the correct amplitude from the samples because the phase θ is unknown. A simple remedy that avoids this potentially troublesome situation is to sample the analog signal at a rate higher than the Nyquist rate.

$\sin(A+B) = \sin A \cdot \cos B + \cos A \cdot \sin B$

EXAMPLE 3

Consider the analog signal

$$x_a(t) = 3 \cos 2000\pi t + 5 \sin 6000\pi t + 10 \cos 12{,}000\pi t$$

(a) What is the Nyquist rate for this signal?

(b) Assume now that we sample this signal using a sampling rate $F_s = 5000$ samples/s. What is the discrete-time signal obtained after sampling?

(c) What is the analog signal $y_a(t)$ we can reconstruct from the samples if we use ideal interpolation?

Solution: **(a)** The frequencies existing in the analog signal are

$$F_1 = 1 \text{ kHz} \qquad F_2 = 3 \text{ kHz} \qquad F_3 = 6 \text{ kHz}$$

Thus $F_{max} = 6$ kHz, and according to the sampling theorem,

$$F_s > 2F_{max} = 12 \text{ kHz}$$

The Nyquist rate is

$$F_N = 12 \text{ kHz}$$

(b) Since we have chosen $F_s = 5$ kHz, the folding frequency is

$$\frac{F_s}{2} = 2.5 \text{ kHz}$$

and this is the maximum frequency that can be represented uniquely by the sampled signal. By making use of (1.4.5) we obtain

$$\begin{aligned} x(n) &= x_a(nT) = x_a\left(\frac{n}{F_s}\right) \\ &= 3 \cos 2\pi(\tfrac{1}{5})n + 5 \sin 2\pi(\tfrac{3}{5})n + 10 \cos 2\pi(\tfrac{6}{5})n \\ &= 3 \cos 2\pi(\tfrac{1}{5})n + 5 \sin 2\pi(1 - \tfrac{2}{5})n + 10 \cos 2\pi(1 + \tfrac{1}{5})n \\ &= 3 \cos 2\pi(\tfrac{1}{5})n + 5 \sin 2\pi(-\tfrac{2}{5})n + 10 \cos 2\pi(\tfrac{1}{5})n \end{aligned}$$

$$x(n) = 13 \cos 2\pi(\tfrac{1}{5})n - 5 \sin 2\pi(\tfrac{2}{5})n$$

The same result can be obtained using Fig. 1.17. Indeed, since $F_s = 5$ kHz, the folding frequency is $F_s/2 = 2.5$ kHz. This is the maximum frequency that can be represented uniquely by the sampled signal. From (1.4.17) we have $F_0 = F_k - kF_s$. Thus F_0 can be obtained by substracting from F_k an integer multiple of F_s such that $-F_s/2 \le F_0 \le F_s/2$. The frequency F_1 is less than $F_s/2$ and thus it is not affected by aliasing. However, the other two frequencies are above the folding frequency and they will be changed by the aliasing effect. Indeed,

$$\begin{aligned} F_2' &= F_2 - F_s = -2 \text{ kHz} \\ F_3' &= F_3 - F_s = 1 \text{ kHz} \end{aligned}$$

From (1.4.5) it follows that $f_1 = \frac{1}{5}$, $f_2 = -\frac{2}{5}$, and $f_3 = \frac{1}{5}$, which are in agreement with the result above.

(c) Since only the frequency components at 1 kHz and 2 kHz are present in the sampled signal, the analog signal we can recover is

$$y_a(t) = 13 \cos 2000\pi t - 5 \sin 4000\pi t$$

which is obviously different from the original signal $x_a(t)$. This distortion of the original analog signal was caused by the aliasing effect, due to the low sampling rate used.

The Sampling Process

Example: Consider the three sequences generated by uniformly sampling the three cosine functions of freq. 3 Hz, 7 Hz, 13 Hz, respectively: $g_1(t) = \cos(6\pi t)$, $g_2(t) = \cos(14\pi t)$, $g_3(t) = \cos(26\pi t)$ with a sampling rate of 10 Hz, i.e. with $T = 0.1$ sec.

The derived sequences are therefore:

$$g_1(n) = \cos(0.6\pi n), \quad g_2(n) = \cos(1.4\pi n), \quad g_3(n) = \cos(2.6\pi n)$$

If we plot these sequences we realise that each sequence has exactly the same sample value for any given n. This is verified by observing that:

$$g_2(n) = \cos(1.4\pi n) = \cos((2\pi - 0.6\pi)n) = \cos(0.6\pi n) = g_1(n)$$

$$g_2(n) = \cos(2.6\pi n) = \cos((2\pi + 0.6\pi)n) = \cos(0.6\pi n) = g_1(n)$$

In fact, all cosine waveforms of frequencies given by $(10k \pm 3)$ Hz, with k being any nonnegative integer, lead to the sequence $g_1(n) = \cos(0.6\pi n)$ when sampled at a 10 Hz rate.

Note: A different approach of finding the aliased frequencies, is by using the formula $F_a = F \bmod F_s$, where F_a must lie within the closed interval $\left[-\frac{F_s}{2}, \frac{F_s}{2}\right]$. Given that $F_s = 10$ Hz $\rightsquigarrow \frac{F_s}{2} = 5$ Hz we have:

$F_1 = 3$ Hz $\rightsquigarrow F_1(\text{aliased}) = F_1 \bmod F_s = 3 \bmod 10 = 3$ No aliasing as expected!

$$\left.\begin{array}{l} F_2 = 7\text{ Hz} \rightsquigarrow F_2(\text{aliased}) = F_2 \bmod F_s = 7 \bmod 10 = -3 = F_1 \\ F_3 = 13\text{ Hz} \rightsquigarrow F_3(\text{aliased}) = F_3 \bmod F_s = 13 \bmod 10 = 3 = F_1 \end{array}\right\} \text{Aliasing!}$$

Example: Determine the discrete-time signal $v(n)$ obtained by uniformly sampling at a sampling rate of 200 Hz a continuous signal $v_c(t)$ composed of a weighted sum of five sinusoidal signals of frequencies 30 Hz, 150 Hz, 170 Hz, 250 Hz, 330 Hz, as given below:

$$v_c(t) = 6\cos(60\pi t) + 3\sin(300\pi t) + 2\cos(340\pi t) + 4\cos(500\pi t) + 10\sin(660\pi t).$$

The sampling period $T = 1/200 = 0.005$ sec. Hence, the generated discrete-time signal $v(n)$ is given by

$$v(n) = 6\cos(0.3\pi n) + 3\sin(1.5\pi n) + 2\cos(1.7\pi n) + 4\cos(2.5\pi n) + 10\sin(3.3\pi n) =$$

$$= 6\cos(0.3\pi n) + 3\sin((2\pi - 0.5\pi)n) + 2\cos((2\pi - 0.3\pi)n) + 4\cos((2\pi + 0.5\pi)n) + 10\sin((4\pi - 0.7\pi)n)$$

$$= 6\cos(0.3\pi n) - 3\sin(0.5\pi n) + 2\cdot\cos(0.3\pi n) + 4\cos(0.5\pi n) - 10\sin(0.7\pi n) =$$

$$= 8\cos(0.3\pi n) + 5\cos(0.5\pi n + 0.6435) - 10\sin(0.7\pi n)$$

The discrete-time signal $v(n)$ is composed of a weighted sum of three discrete-time sinusoidal signals of normalised angular freq.: 0.3π, 0.5π, 0.7π

Note: Calculations using the formula: $F_a = F \bmod F_s$, where $F_a \in [-\frac{F_s}{2}, \frac{F_s}{2}]$

$F_s = 200$ Hz $\rightsquigarrow$ $F_s/2 = 100$ Hz

$F_1 = 30$ Hz $\rightsquigarrow$ $F_{1(\text{aliased})} = F_1 = 30$ Hz

$F_2 = 150$ Hz $\rightsquigarrow$ $F_{2(\text{aliased})} = F_2 \bmod F_s = 150 \bmod 200 = -50$ Hz

$F_3 = 170$ Hz $\rightsquigarrow$ $F_{3(\text{aliased})} = F_3 \bmod F_s = 170 \bmod 200 = -30$ Hz

$F_4 = 250$ Hz $\rightarrow$ $F_{4(\text{aliased})} = F_4 \bmod F_s = 250 \bmod 200 = 50$ Hz

$F_5 = 330$ Hz $\rightarrow$ $F_{5(\text{aliased})} = F_5 \bmod F_s = 330 \bmod 200 = -70$ Hz

Hence, the generated discrete-time signal $v(n)$ will be given by:

$$v(n) = 6\cdot\cos(2\pi\cdot 30\ n/200) + 3\cdot\sin(2\pi(-50)\ n/200) + 2\cos(2\pi(-30)\ n/200) + 4\cos(2\pi\ 50\ n/200) +$$
$$+ 10\sin(2\pi\cdot(-70)\ n/200) =$$

$$= 6\cos(0.3\pi n) - 3\sin(0.5\pi n) + 2\cos(0.3\pi n) + 4\cos(0.5\pi n) - 10\sin(0.7\pi n) =$$

$$= 8\cos(0.3\pi n) + 5\cos(0.5\pi n + 0.6435) - 10\sin(0.7\pi n)$$

Calculation of

$$4\cos(0.5\pi n) - 3\sin(0.5\pi n) = 4\cos\varphi - 3\sin\varphi =$$

$$= 4\,\frac{e^{j\varphi}+e^{-j\varphi}}{2} - 3\,\frac{e^{j\varphi}-e^{-j\varphi}}{2j} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[4\left(e^{j\varphi}+e^{-j\varphi}\right) + 3j\left(e^{j\varphi}-e^{-j\varphi}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^{j\varphi}(4+3j) + e^{-j\varphi}(4-3j)\right] =$$

$$\left\langle \text{but} \quad 4+3j = \sqrt{4^2+3^2}\; e^{j\tan^{-1}\frac{3}{4}} = 5\,e^{j\,0{,}6435} \leftarrow \text{in rad} \right.$$

$$\left. 4-3j = \sqrt{4^2+3^2}\; e^{j\tan^{-1}\frac{-3}{4}} = 5\,e^{-j\,0.6435} \right\rangle$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^{j\varphi}\cdot 5\,e^{j\,0.6435} + e^{-j\varphi}\,5\,e^{-j\,0.6435}\right] =$$

$$= 5\cdot\frac{e^{j(\varphi+0.6435)} + e^{-j(\varphi+0.6435)}}{2} =$$

$$= 5\cdot\cos(\varphi+0.6435) =$$

$$= 5\cdot\cos(0.5\pi n + 0.6435)$$

qed

Άσκηση :

Το συνεχούς χρόνου σήμα $x(t)$ αποτελείται από ένα γραμμικό συνδυασμό ημιτονικών σημάτων συχνοτήτων 300 Hz, 400 Hz, 1,3 KHz, 3.6 KHz και 4.95 kHz. Το σήμα αυτό δειγματοληπτείται με συχνότητα 2 KHz και η δειγματοληπτημένη ακολουθία περνάει από ένα ιδανικό βαθυπερατό (lowpass) φίλτρο με συχνότητα αποκοπής 900 Hz, δημιουργώντας το συνεχούς χρόνου σήμα $y(t)$. Ποιες είναι οι συχνότητες που θα εμφανίζονται στο ανακατασκευασμένο σήμα $y(t)$;

Λύση

Εφόσον η συχνότητα δειγματοληψίας είναι $F_s = 2000$ Hz, μόνον οι συχνότητες μεταξύ $[-\frac{F_s}{2}, \frac{F_s}{2}]$ θα ανακατασκευαστούν σωστά, ενώ οι υπόλοιπες θα εμφανίζονται με τα ψευδεπίγραφά τους (aliases). Έχουμε λοιπόν:

$F_1 = 300$ Hz σωστά

$F_2 = 400$ Hz σωστά

$F_3 = 1.3$ KHz $\rightsquigarrow F_3' = F_3 - kF_s = 1300 - 2000 = -700$ Hz

$F_4 = 3.6$ KHz $\rightsquigarrow F_4' = F_4 - kF_s = 3600 - 2 \cdot 2000 = -400$ Hz

$F_5 = 4.95$ KHz $\rightsquigarrow F_5' = F_5 - kF_s = 4950 - 2 \cdot 2000 = 950$ Hz

Τελικά, μετά το βαθυπερατό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής 900 Hz θα "επιζήσουν" μόνο οι συχνότητες των 300 Hz, 400 Hz, 700 Hz.

Άσκηση

Το αναλογικό σήμα $g(t)=4\cdot\sin(3\pi t)\cdot\cos(2\pi t)+\sin(\pi t)$ δειγματοληπτείται με ρυθμό 3 δειγμάτων ανά δευτερόλεπτο. Ποιο το ψηφιακό σήμα που θα προκύψει;

Λύση

Με βάση τη σχέση $2\sin A\cdot\cos B=\sin(A+B)+\sin(A-B)$ η $g(t)$ γίνεται:

$$g(t)=2\cdot\left[\sin(3\pi t+2\pi t)+\sin(3\pi t-2\pi t)\right]+\sin(\pi t)=$$

$$=2\cdot\sin(5\pi t)+2\sin(\pi t)+\sin(\pi t)=$$

$$=2\sin(5\pi t)+3\sin(\pi t) \qquad (1)$$

Το σήμα αυτό δειγματοληπτείται με συχνότητα $F_s=3\,\text{Hz}$, οπότε το ψηφιακό σήμα που προκύπτει είναι:

$$g(n)=g(t)\Big|_{t=nT}=2\sin\left(5\pi n\frac{1}{F_s}\right)+3\sin\left(\pi n\frac{1}{F_s}\right)=$$

$$=2\sin\left(\frac{5}{3}\pi n\right)+3\sin\left(\frac{1}{3}\pi n\right)=$$

$$=2\cdot\sin\left(\frac{6}{3}\pi n-\frac{1}{3}\pi n\right)+3\sin\left(\frac{1}{3}\pi n\right)=$$

$$=2\cdot\sin\left(-\frac{1}{3}\pi n\right)+3\sin\left(\frac{1}{3}\pi n\right)=$$

$$=-2\sin\left(\frac{\pi n}{3}\right)+3\sin\left(\frac{\pi n}{3}\right)=$$

$$=\sin\left(\frac{\pi n}{3}\right) \qquad (2)$$

Παρατηρούμε ότι ενώ το αναλογικό σήμα αποτελείται από δύο συχνότητες, $F_1=\frac{5}{2}\,\text{Hz}$, $F_2=\frac{1}{2}\,\text{Hz}$, το ψηφιακό σήμα αποτελείται από μόνο μία συχνότητα $\frac{1}{2}\,\text{Hz}$. Αυτό οφείλεται στον χαμηλό ρυθμό δειγματοληψίας και μπορούμε να υπολογιστεί απευθείας ως εξής:

$F_1'=\frac{5}{2}-k\cdot 3=\frac{5}{2}-3=-\frac{1}{2}$ αφού οι συχνότητες που "βλέπουμε" σωστά βρίσκονται στην περιοχή $\left[-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right]$

ΑΣΚΗΣΗ (ΘΕΜΑ 2)

Δίνεται το αναλογικό σήμα

$$x(t) = \cos(100\pi t)\cos(200\pi t)$$

Α. Ποια η συχνότητα Nyquist;

Β. Ποιες οι συχνότητες του σήματος που θα προκύψει μετά τη δειγματοληψία αυτού με ρυθμό **200** δειγμάτων ανά δευτερόλεπτο;

Γ. Ποιο το ψηφιακό σήμα μετά την παραπάνω δειγματοληψία;

Λύση

Α. $x(t) = \cos(\Omega_1 t)\cdot\cos(\Omega_2 t) = \langle$ όπου $\Omega_1 = 100\pi$, $\Omega_2 = 200\pi \rangle$

$$= \frac{e^{j\Omega_1 t} + e^{-j\Omega_1 t}}{2} \cdot \frac{e^{j\Omega_2 t} + e^{-j\Omega_2 t}}{2} = \frac{1}{4}\left[e^{j(\Omega_1+\Omega_2)t} + e^{j(\Omega_1-\Omega_2)t} + e^{j(\Omega_2-\Omega_1)t} + e^{-j(\Omega_1+\Omega_2)t}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{e^{j(\Omega_1+\Omega_2)t} + e^{-j(\Omega_1+\Omega_2)t}}{2}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{e^{j(\Omega_1-\Omega_2)t} + e^{-j(\Omega_1-\Omega_2)t}}{2}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\cos(\Omega_1+\Omega_2)t + \frac{1}{2}\cos(\Omega_1-\Omega_2)t =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos(\Omega_1+\Omega_2)t + \cos(\Omega_1-\Omega_2)t\right]$$ και τελικά

$$x(t) = \frac{1}{2}\left[\cos(300\pi t) + \cos(100\pi t)\right]$$ $\langle$ θυμηθείτε ότι $\cos(-\theta) = \cos(\theta) \rangle$

Άρα το σήμα $x(t)$ αποτελείται από δύο συχνότητες: $F_1 = 150$ Hz, $F_2 = 50$ Hz

Η συχνότητα Nyquist ισούται με το διπλάσιο της μεγαλύτερης συχνότητας του σήματος, δηλαδή $F_N = 2\cdot\max\{F_1, F_2\} = 2\cdot 150 = 300$ Hz

Β. Για $F_s = 200$ Hz οι συχνότητες που θα αναπαρίστανται σωστά είναι αυτές που ανήκουν στο διάστημα $\left[-\frac{F_s}{2}, \frac{F_s}{2}\right]$, δηλαδή $[-100, 100]$ Hz.

Από τις συχνότητες του σήματος η $F_2 = 50$ Hz δεν έχει πρόβλημα.

Η $F_1 = 150$ Hz όμως, μετά τη δειγματοληψία με $F_s = 200$ Hz, θα φαίνεται ως $F_1' = F_1 - kF_s = 150 - 1\cdot 200 = -50$ Hz.

Τελικά το σήμα, μετά τη δειγματοληψία, θα φαίνεται ως ένα συνημίτονο συχνότητας 50 Hz.

Γ. Για να βρούμε το ψηφιακό σήμα $x(n)$ που θα προκύψει μετά τη δειγματοληψία του $x(t)$ με ρυθμό $F_s = 200Hz$, θα αντικαταστήσουμε όπου t το nT, δηλαδή $t = nT = n \cdot \frac{1}{F_s} = n \cdot \frac{1}{200}$

$$x(n) = x(t)\Big|_{t=nT} = \frac{1}{2}\left[\cos\left(300\pi n \frac{1}{200}\right) + \cos\left(100\pi n \frac{1}{200}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{2}n\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{4\pi}{2}n - \frac{\pi}{2}n\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos\left(2\pi n - \frac{\pi}{2}n\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\, 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) =$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)$$

ΘΕΜΑ

Δίνεται το συνεχούς χρόνου σήμα $x(t) = -1 + 3\cos(100\pi t) + 2\sin(200\pi t - \frac{\pi}{2}) + \cos(300\pi t)$, όπου t σε δευτερόλεπτα.

α. Να υπολογίσετε την ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας (συχνότητα Nyquist) ώστε το σήμα να ανακατασκευάζεται από τα δείγματά του.

β. Το σήμα $x(t)$ δειγματοληπτείται λαμβάνοντας 150 δείγματα ανά δευτερόλεπτο. Ποιες οι συχνότητες που θα προκύψουν;

γ. Ποιο το διακριτού χρόνου σήμα $x(n)$ που θα προκύψει μετά την παραπάνω δειγματοληψία; Υπολογίστε το.

δ. Αν το πλάτος του σήματος εκφράζεται σε Volts και το κάθε δείγμα κβαντίζεται στα 10 bits, σε πόσα Volts αντιστοιχεί το βήμα κβάντισης;

ΛΥΣΗ

α. Το σήμα $x(t) = -1 + 3\cos(100\pi t) + 2\sin(200\pi t - \frac{\pi}{2}) + \cos(300\pi t)$ είναι άθροισμα σημάτων με συχνότητες: $F_0 = 0\,Hz$, $F_1 = 50\,Hz$, $F_2 = 100\,Hz$, $F_3 = 150\,Hz$

Η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας για τη σωστή ανακατασκευή του σήματος είναι $F_{s(min)} = 2F_3 = 300\,Hz$

β. Για $F_s = 150\,Hz$ οι συχνότητες μεταξύ $-\frac{F_s}{2} \le F \le \frac{F_s}{2} \Rightarrow -75\,Hz \le F \le 75\,Hz$ θα αναπαραχθούν σωστά.
Άρα οι συχνότητες του σήματος F_2 και F_3 θα έχουν πρόβλημα και θα φαίνονται αντίστοιχα ως F_2' και F_3':

$$F_2' = F_2 - kF_s = 100 - 1\cdot 150 = -50\ Hz \quad \in [-75, 75]$$

$$F_3' = F_3 - kF_s = 150 - 1\cdot 150 = 0\ Hz \quad \in [-75, 75]$$

Τελικά παρατηρούμε ότι το σήμα θα φαίνεται ως μία συχνότητα, αυτή των 50 Hz.

γ. Για να βρούμε το $x(n)$, δηλαδή το $x(nT)$, αντικαθιστούμε όπου $t = nT = n\frac{1}{F_s} = n\frac{1}{150}$

$$x(n) = -1 + 3\cos\left(100\pi\frac{1}{150}n\right) + 2\sin\left(200\pi\frac{n}{150} - \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(300\pi\frac{1}{150}n\right) =$$

$$= -1 + 3\cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right) - 2\cos\left(\frac{4\pi}{3}n\right) + \cos(2\pi n) =$$

$$= -1 + 3\cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right) - 2\cdot\cos\left(\frac{6\pi n}{3} - \frac{2\pi n}{3}\right) + 1 =$$

$$= 3\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right) - 2\cdot\cos\left(2\pi n - \frac{2\pi}{3}n\right) =$$

$$= \cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right)$$

Σημειώνεται ότι: $\omega = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \Omega T = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow 2\pi F\cdot\frac{1}{F_s} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow F = \frac{F_s}{3} = 50\,Hz$

δ. Η δυναμική περιοχή του αναλογικού (συνεχούς) σήματος είναι 8 Volts, αφού η μέγιστη τιμή αυτού είναι 1 Volts και η ελάχιστη τιμή −7 Volts (βλ. σχήμα).

Άρα το βήμα κβάντισης Δ ισούται με:

$$\Delta = \frac{x_{max} - x_{min}}{2^{10}-1} = \frac{1-(-7)}{1024-1} = \frac{8}{1023}\,V = 0{,}0078 \text{ Volts} = 7{,}8 \text{ mV} \simeq 8 \text{ mV}$$

Σημείωση 1

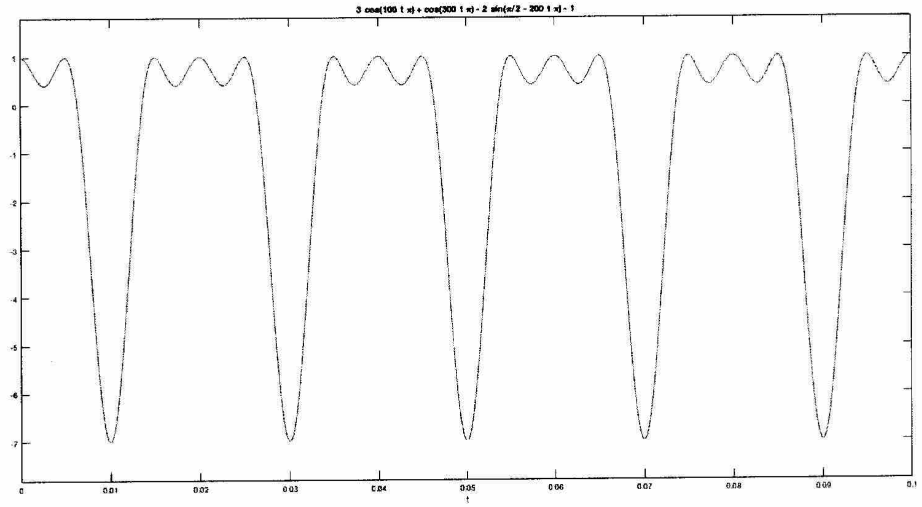
Για κβάντιση στα 8 bits, το αντίστοιχο βήμα κβάντισης θα είναι:

$$\Delta = \frac{8}{2^8-1} = \frac{8}{255} = 0{,}0314 \text{ V} = 31{,}4 \text{ mV}$$

Σημείωση 2

Συνηθίζεται οι μετατροπείς A/D να λειτουργούν για τιμές τάσης εισόδου $\pm A$ Volts, π.χ. $\pm 2{,}5$ V ή ± 5 V ή ± 10 V, ...

Έτσι, στην προκειμένη περίπτωση που το πλάτος του αναλογικού σήματος κυμαίνεται από +1 έως −7, θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί ένας A/D μετατροπέας ± 10 V. Συνεπώς, το βήμα κβάντισης για τον 10 bit μετατροπέα, θα είναι: $\Delta = \frac{10-(-10)}{2^{10}-1} = \frac{20}{1023} = 0{,}0195 \text{ V} = 19{,}5 \text{ mV}$



Κώδικας Matlab:

```
syms t
x(t)=-1+3*cos(100*pi*t)+2*sin(200*pi*t-pi/2)+cos(300*pi*t);
ezplot(x(t), [0,0.1]);
```

Explanation of 44.1 kHz CD sampling rate

The CD sampling rate has to be larger than about 40 kHz to fulfill the Nyquist criterion that requires sampling at twice the maximum analog frequency, which is about 20 kHz for audio. The sampling frequency is chosen somewhat higher than the Nyquist rate since practical filters neede to prevent aliasing have a finite slope. Digital audio tapes (DATs) use a sampling rate of 48 kHz. It has been claimed that thier sampling rate differs from that of CDs to make digital copying from one to the other more difficult. 48 kHz is, in principle, a better rate since it is a multiple of the other standard sampling rates, namely 8 and 16 kHz for telephone-quality audio. Sampling rate conversion is simplified if rates are integer multiples of each other.

From John Watkinson, *The Art of Digital Audio*, 2nd edition, pg. 104:

> In the early days of digital audio research, the necessary bandwidth of about 1 Mbps per audio channel was difficult to store. Disk drives had the bandwidth but not the capacity for long recording time, so attention turned to video recorders. These were adapted to store audio samples by creating a pseudo-video waveform which would convey binary as black and white levels. The sampling rate of such a system is constrained to relate simply to the field rate and field structure of the television standard used, so that an integer number of samples can be stored on each usable TV line in the field. Such a recording can be made on a monochrome recorder, and these recording are made in two standards, 525 lines at 60 Hz and 625 lines at 50 Hz. Thus it is possible to find a frequency which is a common multiple of the two and is also suitable for use as a sampling rate.
>
> The allowable sampling rates in a pseudo-video system can be deduced by multiplying the field rate by the number of active lines in a field (blanking lines cannot be used) and again by the number of samples in a line. By careful choice of parameters it is possible to use either 525/60 or 625/50 video with a sampling rate of 44.1KHz.
>
> In 60 Hz video, there are 35 blanked lines, leaving 490 lines per frame or 245 lines per field, so the sampling rate is given by :
>
> 60 X 245 X 3 = 44.1 KHz
>
> In 50 Hz video, there are 37 lines of blanking, leaving 588 active lines per frame, or 294 per field, so the same sampling rate is given by
>
> 50 X 294 X3 = 44.1 Khz.
>
> The sampling rate of 44.1 KHz came to be that of the Compact Disc. Even though CD has no video circuitry, the equipment used to make CD masters is video based and determines the sampling rate.

(Reference kindly provided by Kavitha Parthasarathy.)

Also, David Singer noted that 44,100 can be factored as 2^2 * 3^2 * 5^2 * 7^2, i.e., the product of the squares of the first four prime numbers.

Last updated 01/10/2008 01:39:22 by Henning Schulzrinne