ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ

$$x(n) \longrightarrow \boxed{\textbf{Discrete-time system}} \longrightarrow y(n)$$

SYSTEMS

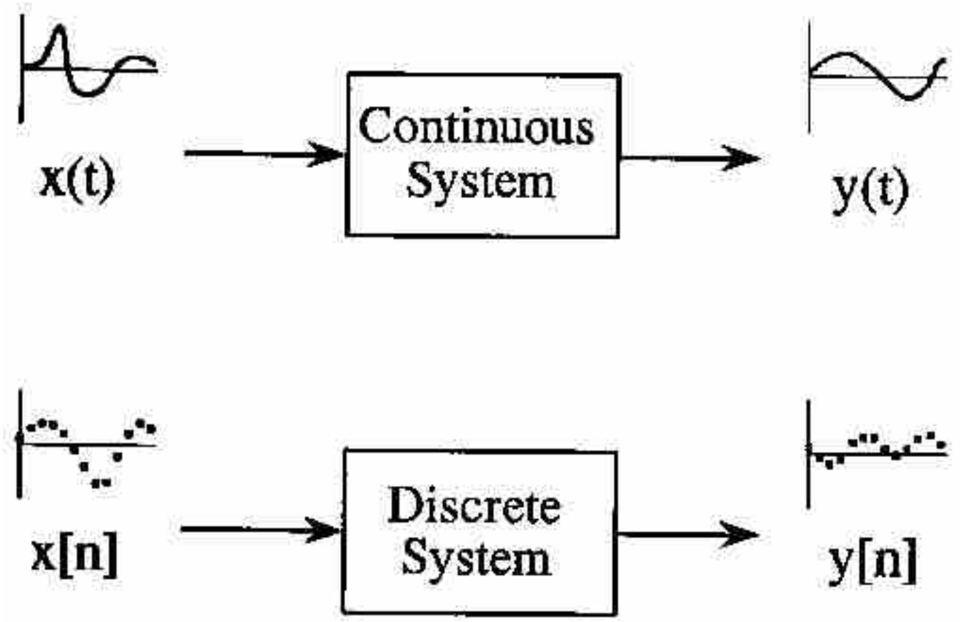
Definition: A discrete-time **system** is a **device** or **algorithm** that operates on an input sequence to produce an output sequence according to some rule or computational procedure.

$$x(n) \longrightarrow \boxed{\textbf{Discrete-time system}} \longrightarrow y(n)$$

Example systems: - savings account system
- radar system
- algorithm performing numerical analysis
- filter to eliminate unwanted signals

System properties:
- Linearity
- Time-Invariance (Shift-Invariance)
- Stability
- Causality

Continuous & Discrete Systems



- **Γραμμικότητα (Linearity)**

Arbitrary input seq. $x_1(n)$ and $x_2(n)$ cause the system to have outputs $y_1(n)$ and $y_2(n)$. If an input given by

$x_3(n)=a_1x_1(n)+a_2x_2(n)$

where a_1,a_2 are complex constants, yields an output $y_3(n)$, which is equal to

$y_3(n)=a_1y_1(n)+a_2y_2(n)$

then the system is said to be linear **(superposition property).**

Note: A linear system can change the amplitude and phase of a sinusoidal input, but **cannot** change its frequency or functional form.

‣ Αμεταβλητότητα στο χρόνο (Time-Invariance):

$x_1(n)$ $\xrightarrow{\text{produces}}$ **$y_1(n)$**

Assume a shifted version of $x_1(n)$: $\mathbf{x_2(n)=x_1(n-n_0)}$.

If the output $y_2(n)$ caused by $x_2(n)$ is a delayed replica of $y_1(n)$, i.e. $\mathbf{y_2(n)=y_1(n-n_0)}$ and for arbitrary $x_1(n)$ and n_0, then the system is said to be **time-invariant** or **shift-invariant**.

This property indicates whether or not the **system itself is changing with time** or the **system parameters are changing with time**.

‣ **Stability:** If the input to a system is bounded (the input magnitude does not grow without bound), and if the system is **stable**, then the output must also be bounded.

(BIBO - Bounded Input Bounded Output)

‣ **Causality:** A casual system is a **nonpredictive** system in the sense that the **output does not precede the input**.

or

A causal system is one for which the output at any sample N_1 depends only upon the input for $n \leq N_1$

or

In a causal system, **it is the input signal that causes the output signal to occur.**

Άσκηση

Εξετάστε αν το σύστημα **y(n) = 3x(n) + 3** είναι γραμμικό.

Λύση

Για είσοδο $x_1(n)$, η έξοδος του συστήματος θα είναι $y_1(n) = 3\, x_1(n) + 3$.
Για είσοδο $x_2(n)$, η έξοδος του συστήματος θα είναι $y_2(n) = 3\, x_2(n) + 3$.
Τέλος, για είσοδο $x_3(n) = a\, x_1(n) + b\, x_2(n)$,
η έξοδος θα ισούται με

$$
\begin{aligned}
y_3(n) &= 3\, x_3(n) + 3 = \\
&= 3\, [a\, x_1(n) + b\, x_2(n)] + 3 = \\
&= 3\, a\, x_1(n) + 3\, b\, x_2(n) + 3 = \\
&= 3\, a\, x_1(n) + 3\, b\, x_2(n) + 3 + 3a - 3a + 3b - 3b = \\
&= a\, [3\, x_1(n)+3] + b\, [3\, x_2(n) + 3] + 3(1-a-b) = \\
&= a\, y_1(n) + b\, y_2(n) + 3(1-a-b) \neq a\, y_1(n) + b\, y_2(n).
\end{aligned}
$$

Άρα, το σύστημα είναι **μη** γραμμικό.

Άσκηση

Εξετάστε αν το σύστημα **y(n) = n x(n)** είναι χρονικά αμετάβλητο.

Λύση

Αφού το σύστημα $y(n) = nx(n)$ έχει ένα συντελεστή χρονικά μεταβαλλόμενο, περιμένουμε αυτό να μην είναι χρονικά αμετάβλητο.

Πράγματι, αν εφαρμόσουμε στην είσοδο την καθυστερημένη κατά n_0 ακολουθία $x(n-n_0)$, η έξοδος θα είναι $y_d(n) = n\, x(n-n_0)$.

Από την άλλη πλευρά, αν καθυστερήσουμε την έξοδο $y(n)$ κατά n_0, αντικαθιστώντας όπου n το $n-n_0$, τότε η έξοδος θα είναι
$y(n-n_0) = (n-n_0)x(n-n_0) \neq y_d(n)$.

Συνεπώς το σύστημα **δεν** είναι χρονικά αμετάβλητο.

Άσκηση

Εξετάστε αν το σύστημα **y(n) = x(2n)** είναι χρονικά αμετάβλητο.

Λύση

Το y(n) = x(2n) είναι στην ουσία ένα σύστημα **υποδειγματοληψίας**.
Η έξοδος ενός τέτοιου συστήματος «κρατάει» τα άρτια μόνο δείγματα της ακολουθίας εισόδου.

Αν λοιπόν καθυστερήσουμε την είσοδο κατά n_0 δείγματα, δηλαδή αν εφαρμόσουμε στο σύστημα την $x(n–n_0)$, τότε η έξοδος θα είναι $y_d(n) = x(2n–n_0)$.

Αν τώρα καθυστερήσουμε την έξοδο κατά n_0 μονάδες, γεγονός που εκφράζεται μαθηματικά με αντικατάσταση του n με το $n–n_0$, τότε η έξοδος θα ισούται με
$y(n–n_0) = x\{2(n–n_0)\} = x(2n–2n_0) \neq x(2n–n_0) = y_d(n)$.

Γίνεται φανερό, επομένως, ότι ένα τέτοιο σύστημα **δεν** είναι χρονικά αμετάβλητο.

... Συνέχεια

Αυτό μπορεί εύκολα να γίνει κατανοητό με το ακόλουθο παράδειγμα.
Έστω ότι η ακολουθία εισόδου είναι
$\{x(n)\} = \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, ...\}$.

Τότε η ακολουθία εξόδου θα ισούται με
$\{y(n)\} = \{x(2n)\} = \{x_0, x_2, x_4, x_6, ...\}$.

Καθυστερούμε την είσοδο κατά μία μονάδα ($n_0 = 1$), δηλαδή κατά ένα δείγμα, οπότε αυτή γίνεται
$\{x(n–1)\} = \{0, x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, ...\}$.

Η ακολουθία εξόδου θα είναι τώρα ίση με
$\{y(n)\} = \{x(2n–1)\} = \{0, x_1, x_3, x_5, ...\}$.

Παρατηρούμε, επομένως, ότι αυτή δεν ισούται με την προηγούμενη ακολουθία εξόδου η οποία έχει υποστεί καθυστέρηση κατά μία μονάδα, αλλά πρόκειται για μία εντελώς διαφορετική ακολουθία, επιβεβαιώνοντας έτσι ότι το σύστημα δεν είναι χρονικά αμετάβλητο.

Stability: An LTI system is **stable** if its **impulse response is absolutely summable**:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$$

Proof:

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x(n-m)$$

Taking the absolute value of both sides we obtain:

$$|y(n)| = \left| \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x(n-m) \right| \leq \sum_{m=-\infty}^{\infty} |h(m)||x(n-m)|$$

If the input is bounded, there exists a finite number M_x such that $|x(n)| \leq M_x$
By substituting this upper bound for x(n) we get:

$$|y(n)| \leq M_x \sum_{m=-\infty}^{\infty} |h(m)|$$

The output will be bounded if the impulse response of the system satisfies the condition

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} |h(m)| < \infty$$

This condition is **not only sufficient but it is also necessary** to ensure the stability of the system.

ΑΠΟΚΡΙΣΗ Γ.Χ.Α. ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

Γνωρίζουμε ότι ένα σήμα διακριτού χρόνου μπορεί να εκφραστεί ως σταθμισμένο άθροισμα ολισθημένων (μετατοπισμένων στον χρόνο) κρουστικών:

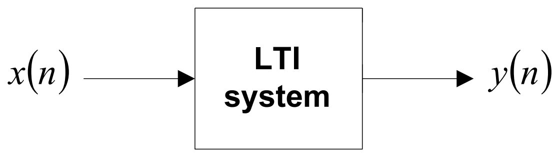
$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)$$

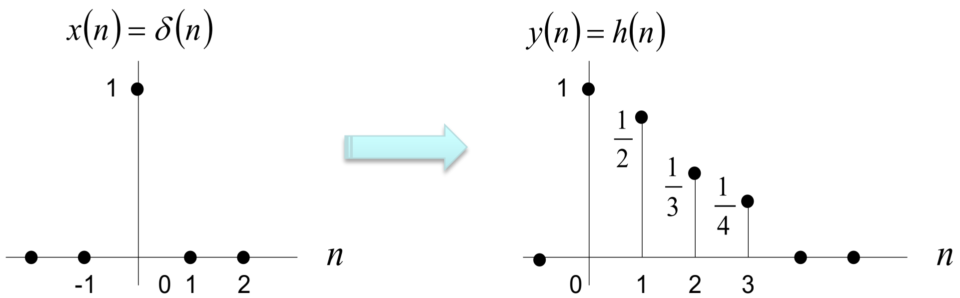
ΑΠΟΚΡΙΣΗ Γ.Χ.Α. ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

Έστω ότι η κρουστική είσοδος δ(n) σε ένα ΓΧΑ σύστημα παράγει την έξοδο h(n) [κρουστική απόκριση]. Τότε αναλυτικά έχουμε:

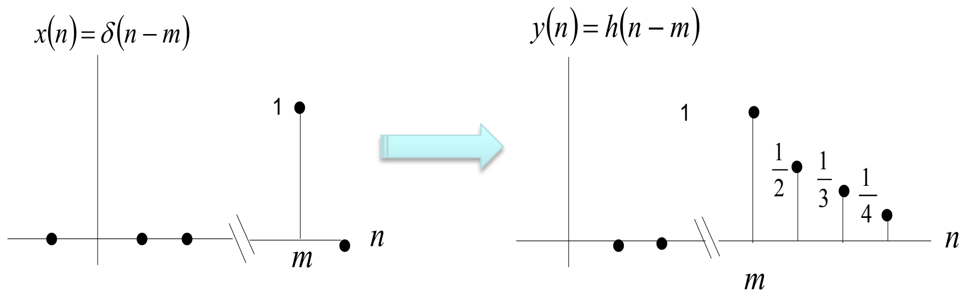
$$\begin{aligned}
\delta(n) &\xrightarrow{\mathcal{T}} h(n) \\
\delta(n-k) &\xrightarrow{\mathcal{T}} h(n-k) \\
\alpha\ \delta(n-k) &\xrightarrow{\mathcal{T}} \alpha\ h(n-k) \\
x(k)\ \delta(n-k) &\xrightarrow{\mathcal{T}} x(k)\ h(n-k) \\
\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k) &\xrightarrow{\mathcal{T}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) \\
x(n) &\xrightarrow{\mathcal{T}} y(n)
\end{aligned}$$

ΑΠΟΚΡΙΣΗ Γ.Χ.Α. ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ



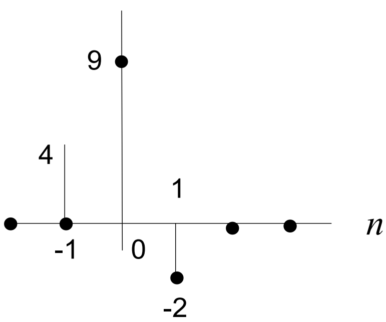


(a) Unit samble response

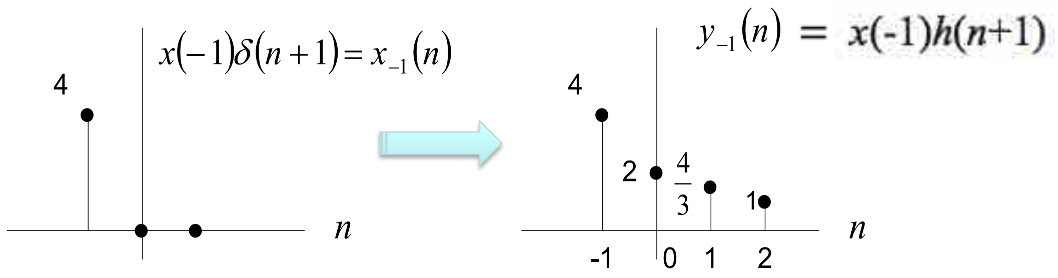


(b) Shifted samble response

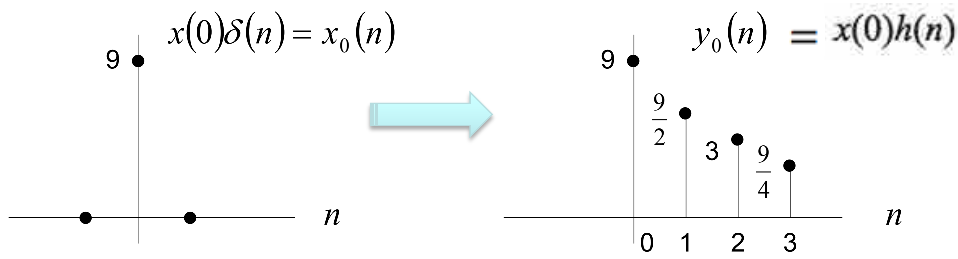
$$x(n) = 4\delta(n+1) + 9\delta(n) - 2\delta(n-1)$$



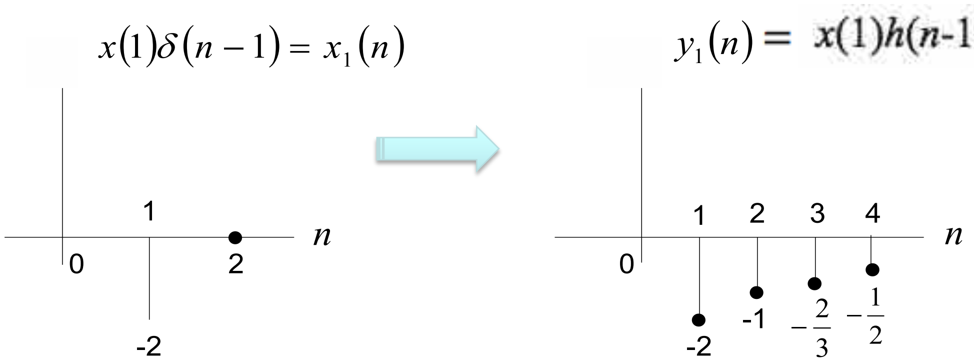
(c) Three-sample input sequence



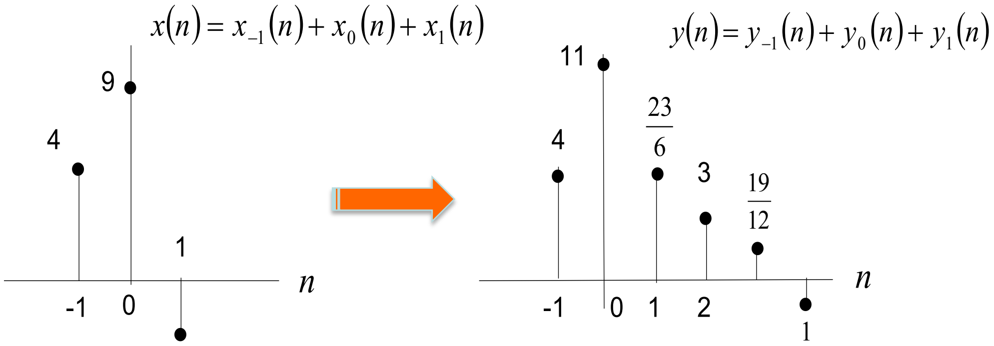
(d) Output due to sample at n=-1



(e) Output due to sample at n=0

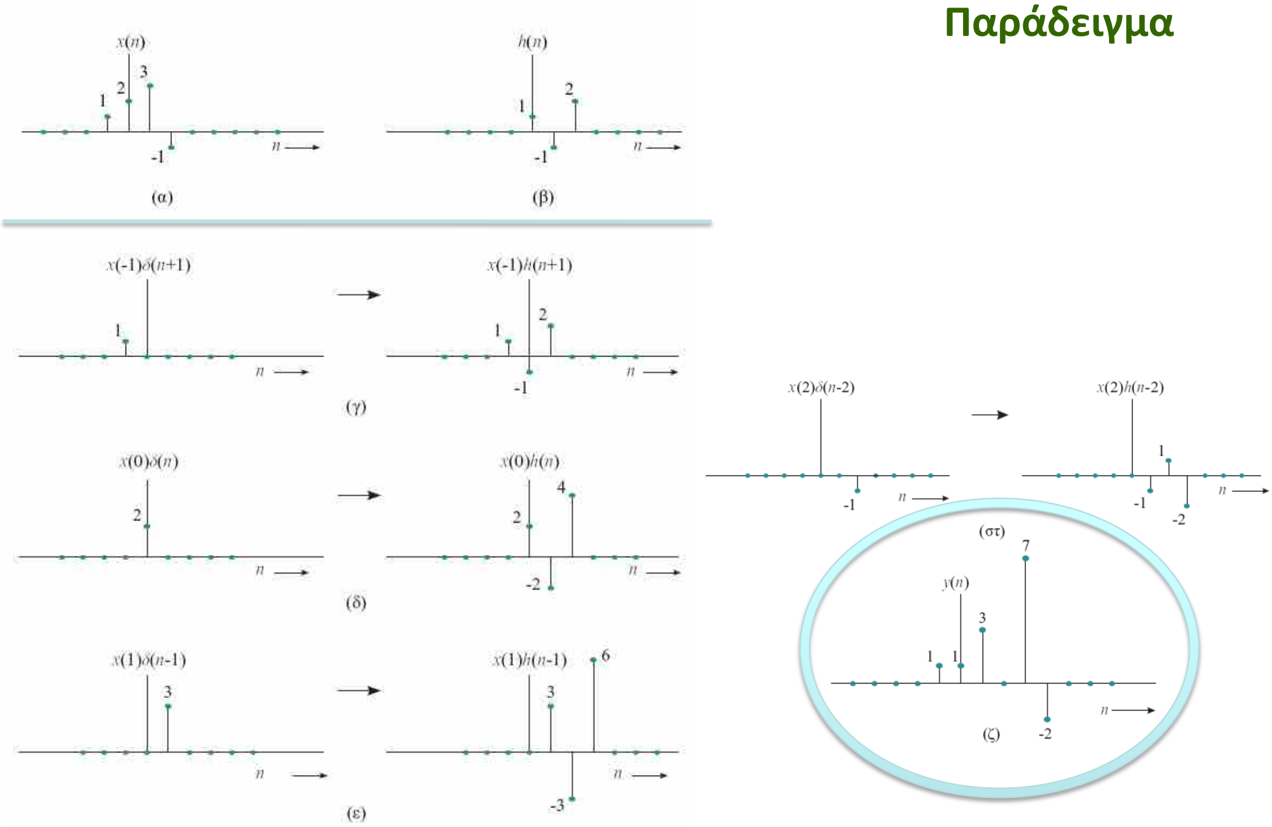


(f) Output due to sample at n=1



(g) Output due to three-sample input

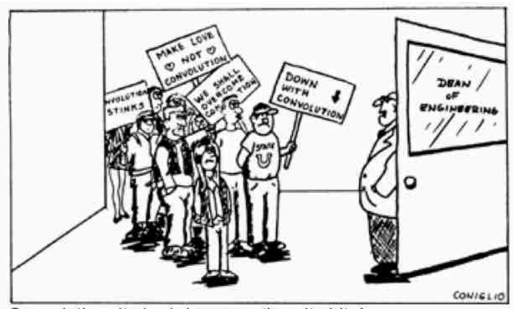
Άλλο Παράδειγμα



$$\boxed{y(n) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} x(m)h(n-m)}$$

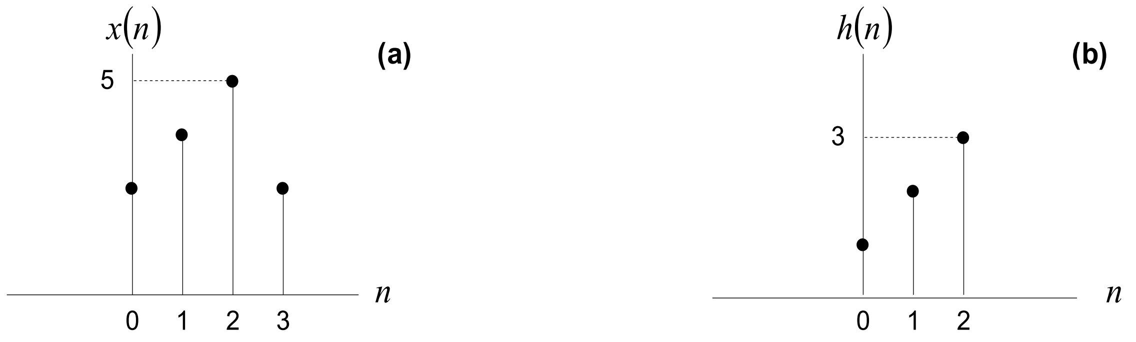
← **ΣΥΝΕΛΙΞΗ**

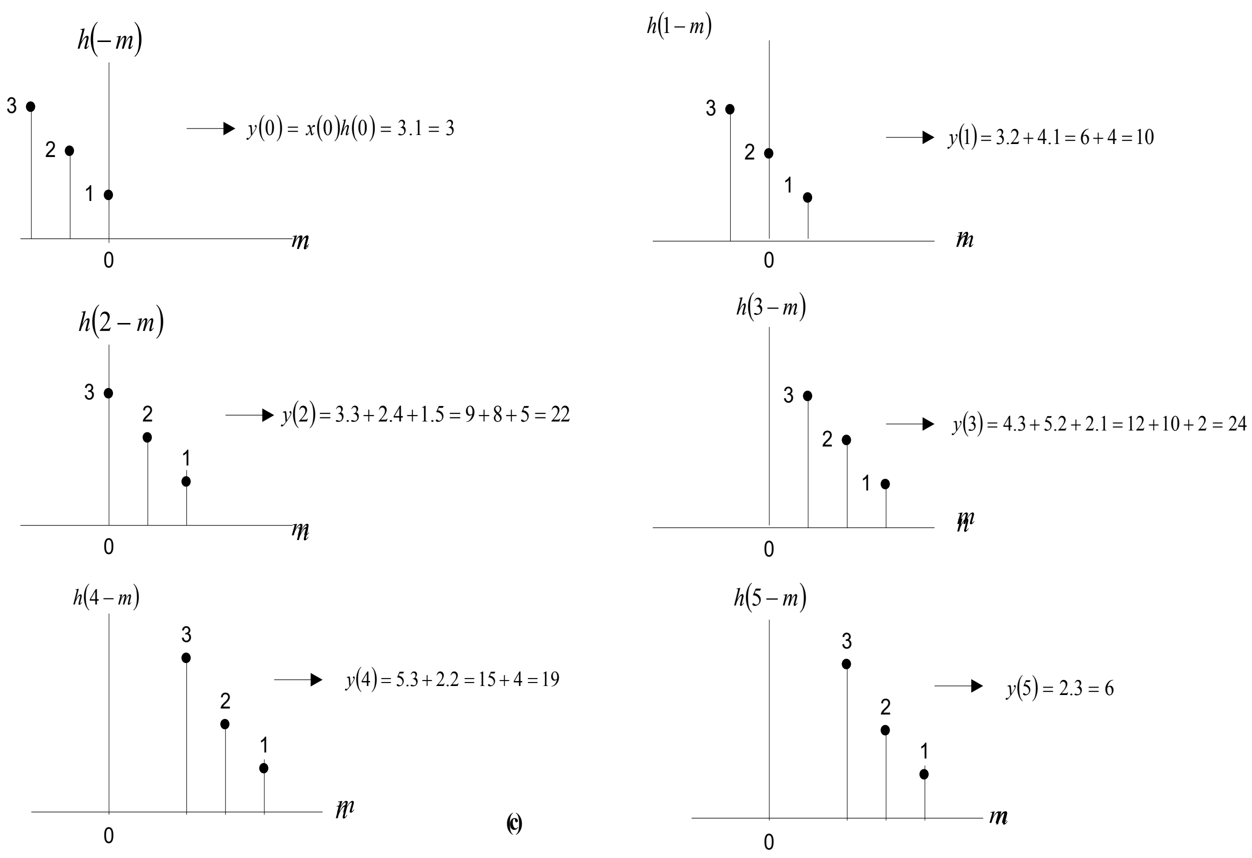
$$y(n) = x(n) * h(n) = h(n) * x(n)$$

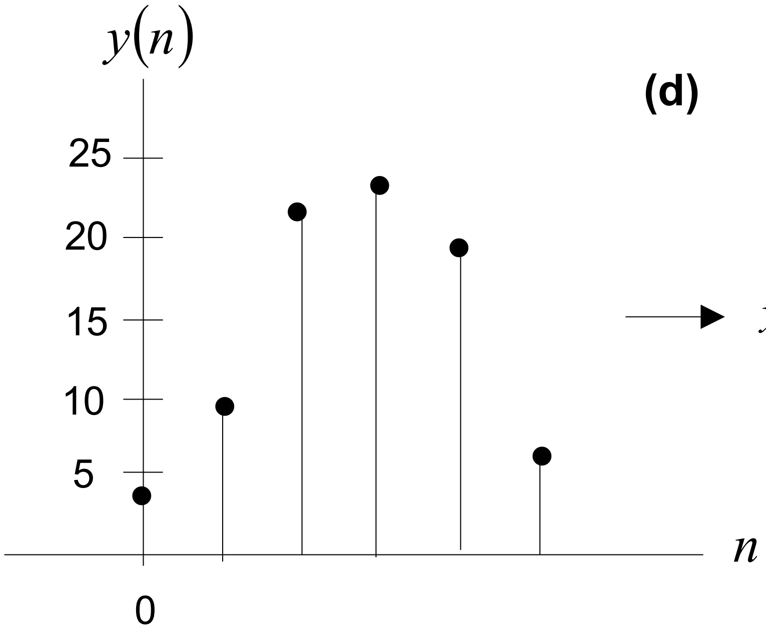


Convolution: its bark is worse than its bite!

Παράδειγμα Συνέλιξης





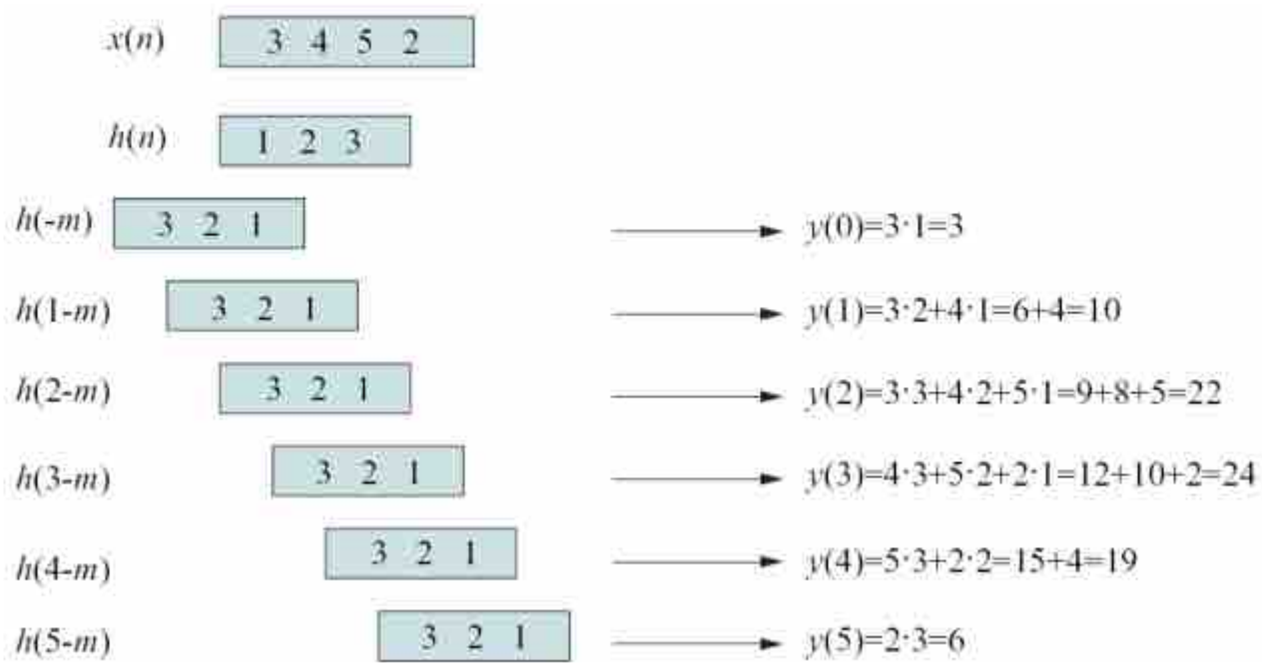


$$y(n) = \{3,10,22,24,19,6\}$$

https://www.youtube.com/watch?v=T-OwCIOlbm0

https://www.youtube.com/watch?v=f_M8nyYOPzU

Παράδειγμα Συνέλιξης



Παράδειγμα Συνέλιξης

Η συνέλιξη μπορεί να υπολογιστεί και ως κανονικός **πολλαπλασιασμός** αριθμών, **χωρίς** όμως τη μεταφορά κρατουμένων από τη μία στήλη στην επόμενη.

		3	4	5	2
			1	2	3
		9	12	15	6
	6	8	10	4	
3	4	5	2		
3	10	22	24	19	6

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί η συνέλιξη των σημάτων $x(n)=\{4,\underset{\uparrow\, n=0}{1},3\}$ και $h(n)=\{2,5,\underset{\uparrow\, n=0}{0},4\}$

ΛΥΣΗ

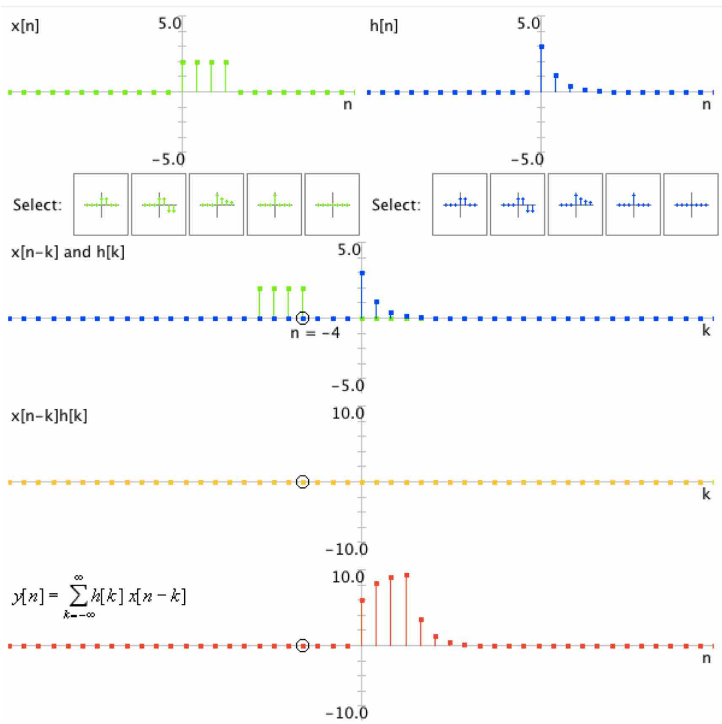
$h(n) \rightarrow$			2	5	0	4
$x(n) \rightarrow$				4	1	3
			6	15	0	12
		2	5	0	4	
	8	20	0	16		
$y(n) \rightarrow$	8	22	11	$\underset{\uparrow\, n=0}{31}$	4	12

Άρα $y(n)=\{8,22,11,31,4,12\}$

Γενικά:
1. Ο δείκτης της αρχής (δηλ. η θέση στην οποία δείχνουμε για $n=0$) της $y(n)$ ισούται με το άθροισμα των δεικτών αρχής των $x(n)$ και $h(n)$.
2. Ο δείκτης του τέλους της $y(n)$ ισούται με το άθροισμα των δεικτών τέλους των $x(n)$ και $h(n)$.
3. Το μήκος N του σήματος $y(n)$ ισούται με το άθροισμα των μηκών N_1 και N_2 των σημάτων $x(n)$ και $h(n)$ μειωμένο κατά 1, δηλ. $N=N_1+N_2-1$.

https://www.youtube.com/watch?v=_RsMMkuQVUE

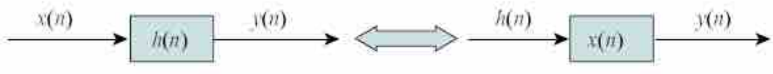
Άλλα Παραδείγματα (Διαδραστικά)



http://pages.jh.edu/~signals/discreteconv2/index.html

Ιδιότητες Συνέλιξης

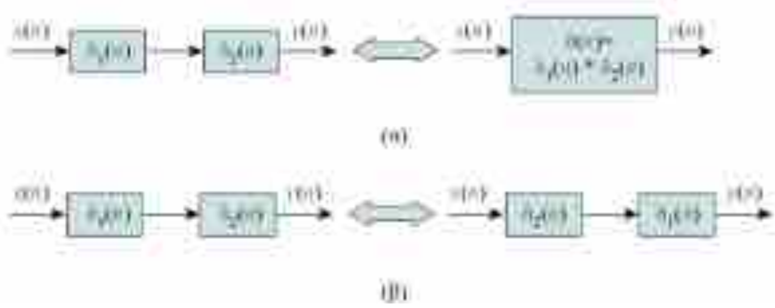
Αντιμεταθετική



$x(n)*h(n) = h(n)*x(n)$

Προσεταιριστική

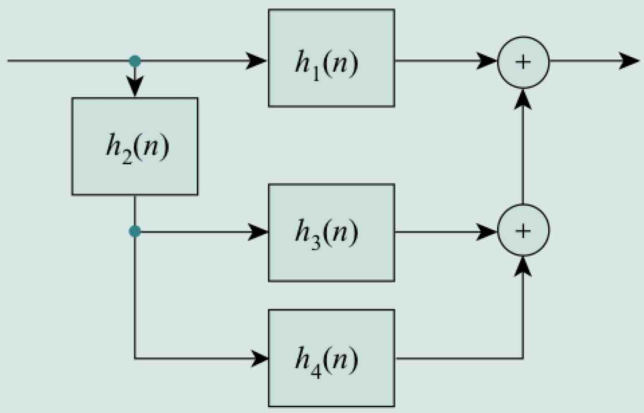
$[x(n)*h_1(n)]*h_2(n) = x(n)*[h_1(n)*h_2(n)]$



Επιμεριστική

$x(n)*[h_1(n)+h_2(n)] = x(n)*h_1(n) + x(n)*h_2(n)$

Να υπολογιστεί η κρουστική απόκριση $h(n)$ του συστήματος διακριτού χρόνου του Σχήματος 1.29, όταν $h_1(n) = \delta(n) + \frac{1}{2}\delta(n-1)$, $h_2(n) = \frac{1}{2}\delta(n) - \frac{1}{4}\delta(n-1)$, $h_3(n) = 2\delta(n)$, και $h_4(n) = -2(\frac{1}{2})^n u(n)$.



βλέπουμε ότι $h(n) = h_1(n) + h_2(n)*[h_3(n) + h_4(n)]$ $= h_1(n) + h_2(n)*h_3(n) + h_2(n)*h_4(n)$. Αλλά

$$h_2(n)*h_3(n) = [\frac{1}{2}\delta(n) - \frac{1}{4}\delta(n-1)]*2\delta(n) = \frac{1}{2}\delta(n)*2\delta(n) - \frac{1}{4}\delta(n-1)*2\delta(n)$$

$$= \delta(n) - \frac{1}{2}\delta(n-1)$$

$$h_2(n)*h_4(n) = [\frac{1}{2}\delta(n) - \frac{1}{4}\delta(n-1)]*[-2(\frac{1}{2})^n u(n)]$$

$$= \frac{1}{2}\delta(n)*[-2(\frac{1}{2})^n u(n)] - \frac{1}{4}\delta(n-1)*[-2(\frac{1}{2})^n u(n)]$$

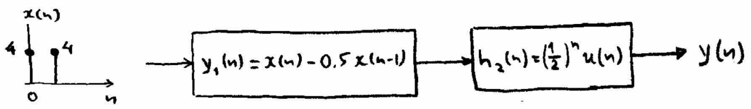
$$= -(\frac{1}{2})^n u(n) + \frac{1}{2}(\frac{1}{2})^{n-1} u(n-1) = -(\frac{1}{2})^n [u(n) - u(n-1)]$$

$$= -(\frac{1}{2})^n \delta(n) = -\delta(n).$$

Άρα, $h(n) = [\delta(n) + \frac{1}{2}\delta(n-1)] + [\delta(n) - \frac{1}{2}\delta(n-1)] + [-\delta(n)] = \delta(n)$

Σημείωση: $\delta(n)*g(n) = g(n)$, $\delta(n-m)*g(n) = g(n-m)$

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί η συνολική κρουστική απόκριση, καθώς και η έξοδος του συστήματος.



ΛΥΣΗ Το πρώτο σύστημα περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών $y_1(n) = x(n) - 0.5\, x(n-1)$. Η κρουστική του απόκριση προκύπτει άμεσα εάν αντικαταστήσουμε $x(n) = \delta(n)$ και $y_1(n) = h_1(n)$. Άρα

$$h_1(n) = \delta(n) - 0.5\,\delta(n-1)$$

Η συνολική κρουστική απόκριση $h(n)$ ισούται με τη συνέλιξη των δύο κρουστικών, δηλαδή

$$h(n) = h_1(n) * h_2(n) = [\delta(n) - 0.5\,\delta(n-1)] * [(\tfrac{1}{2})^n u(n)] =$$

$$= \delta(n) * (\tfrac{1}{2})^n u(n) - 0.5\,\delta(n-1) * (\tfrac{1}{2})^n u(n) =$$

$$= (\tfrac{1}{2})^n u(n) - 0.5\,(\tfrac{1}{2})^{n-1} u(n-1) =$$

$$= (\tfrac{1}{2})^n [u(n) - u(n-1)] = (\tfrac{1}{2})^n \delta(n) = \delta(n)$$

Η έξοδος $y(n)$ του όλου συστήματος ισούται με την είσοδο $x(n)$

$$y(n) = h(n) * x(n) = \delta(n) * x(n) = x(n)$$

Παρατηρούμε ότι το δεύτερο σύστημα είναι το αντίστροφο του πρώτου.

http://www.songho.ca/dsp/convolution/convolution2d_example.htmlVUE