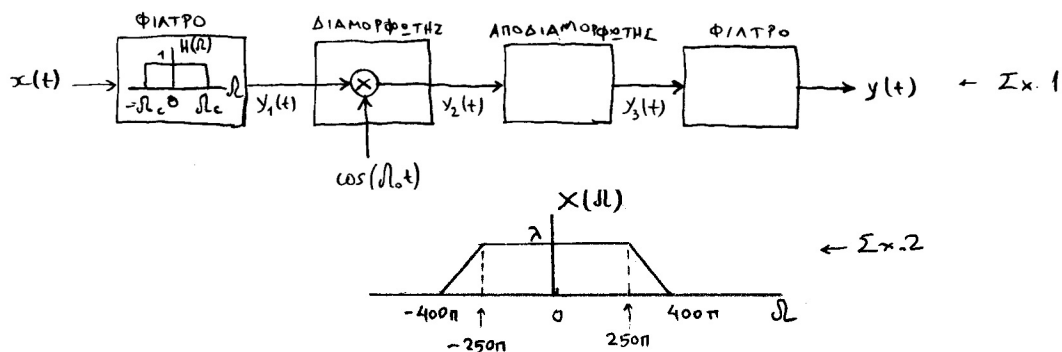


2023 - 2024  
ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ  
2<sup>Η</sup> ΓΡΑΠΤΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Για όλες τις ασκήσεις  $\lambda = 1 + A \bmod 5$ , όπου  $A$  το άθροισμα των δύο τελευταίων ψηφίων του ΑΜ

**ΑΣΚΗΣΗ 2.1** Δίνεται το πλήρες σύστημα διαμόρφωσης-αποδιαμόρφωσης του Σχ.1. Η συχνότητα αποκοπής του ιδανικού βαθυπερατού φίλτρου της εισόδου είναι  $F_c = 10(\lambda + 10)$  Hz. Η συχνότητα του φέροντος σήματος είναι  $F_0 = 1$  kHz. Στην είσοδο του συστήματος εφαρμόζεται το σήμα  $x(t)$ , του οποίου το φάσμα δίνεται στο Σχ.2.

- Να υπολογίσετε και να σχεδιάσετε το φάσμα του σήματος  $y_1(t)$ .
- Να υπολογίσετε και να σχεδιάσετε το φάσμα του σήματος  $y_2(t)$ .
- Να προτείνετε το σύστημα αποδιαμόρφωσης και να σχεδιάσετε το φάσμα του  $y_3(t)$ .
- Να προτείνετε το φίλτρο εξόδου και να σχεδιάσετε το φάσμα του σήματος  $y(t)$ .



**ΑΣΚΗΣΗ 2.2** Δίνονται τα σήματα  $x(t) = \begin{cases} \lambda & \text{για } 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$  και  $d(t) = x(2t) - x(2t-1)$ .

- Να τα σχεδιάσετε.
- Να εξετάσετε εάν αυτά μπορούν να αποτελέσουν μια ορθοκανονική βάση στο διάστημα  $[0, 1]$ .

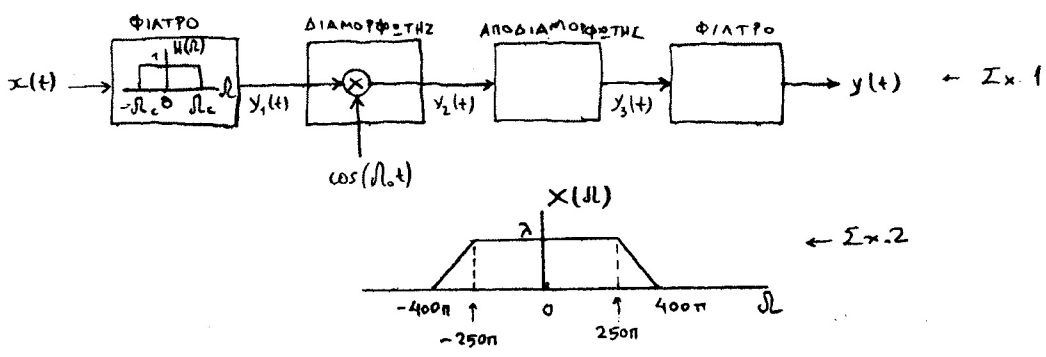
**ΑΣΚΗΣΗ 2.3** Δίνεται το συνεχούς χρόνου σήμα  $x_1(t) = \lambda t^2$ ,  $-\pi < t < \pi$ . Το σήμα αυτό επαναλαμβάνεται περιοδικά με περίοδο  $2\pi$ , δημιουργώντας το σήμα  $x(t)$ .

- Να σχεδιάσετε τα σήματα  $x_1(t)$  και  $x(t)$ .
- Να εκφράσετε το σήμα  $x(t)$  ως ευθεία σειρά Fourier.
- Το σήμα  $x(t)$  εφαρμόζεται στην είσοδο ιδανικού βαθυπερατού φίλτρου το οποίο επιτρέπει την διέλευση τόνων της  $\lambda$ ης αρμονικής. Να υπολογίσετε και να σχεδιάσετε την έξοδο του φίλτρου.

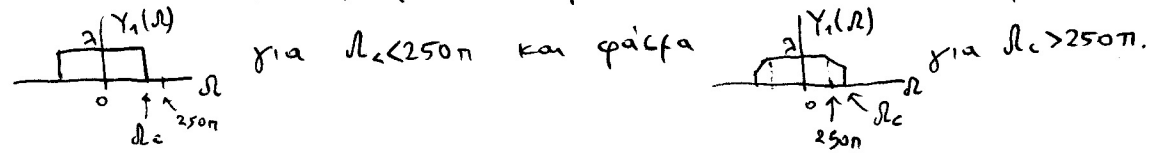
- Πρόθεσφα: Δευτέρα 8.4.2024 @ 23:55
- Οι λύσεις να είναι χειρόγραφες, συνιχθωστές, κροτικίς
- Η υποβολή των ψηφιοποιημένων (scanned) χειρογράφων να γίνει επιρόδεςφα στον χώρο εργασιών του eclass ως ένα ενιαίο αρχείο pdf.

**ΑΣΚΗΣΗ 2.1** Δίνεται το πλήρες σύστημα διαμόρφωσης-αποδιαμόρφωσης του Σχ.1. Η συχνότητα αποκοπής του ιδανικού βαθυπέρατου φίλτρου της εισόδου είναι  $F_c = 10(\lambda + 10)$  Hz. Η συχνότητα του φέροντος σήματος είναι  $F_0 = 1$  kHz. Στην είσοδο του συστήματος εφαρμόζεται το σήμα  $x(t)$ , του οποίου το φάσμα δίνεται στο Σχ.2.

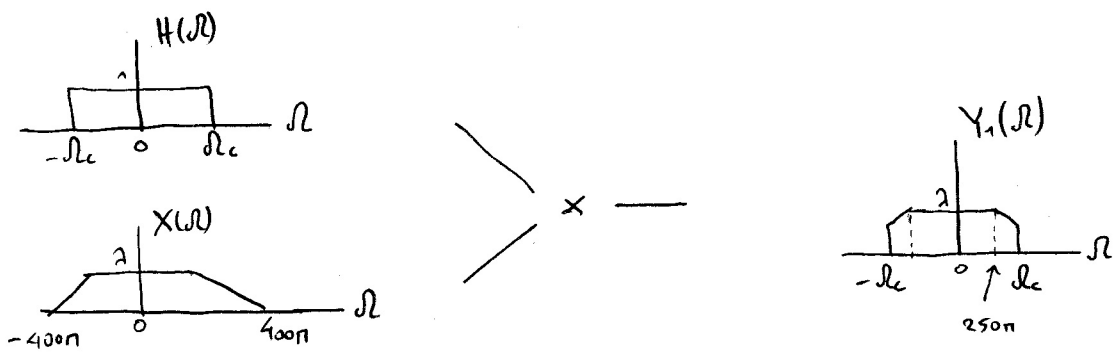
- α. Να υπολογίσετε και να σχεδιάσετε το φάσμα του σήματος  $y_1(t)$ .
- β. Να υπολογίσετε και να σχεδιάσετε το φάσμα του σήματος  $y_2(t)$ .
- γ. Να προτείνετε το σύστημα αποδιαμόρφωσης και να σχεδιάσετε το φάσμα του  $y_3(t)$ .
- δ. Να προτείνετε το φίλτρο εξόδου και να σχεδιάσετε το φάσμα του σήματος  $y(t)$ .



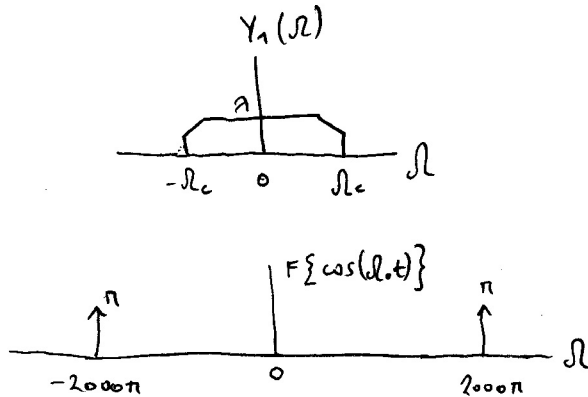
**ΛΥΣΗ** Το  $\lambda$  με βάση την σχέση  $\lambda = 1 + A \text{ mod } 5$  βρίσκεται στην περιοχή  $[1, 5]$ , οπότε η συχνότητα αποκοπής  $F_c$  θα κυμαίνεται μεταξύ  $[140, 150]$  Hz και αντίστοιχα η κυκλική συχνότητα  $\Omega_c$  θα κυμαίνεται μεταξύ  $[220\pi, 300\pi]$  rad/sec. Συνεπώς, το ιδανικό βαθυπέρατο φίλτρο θα επιτρέψει την διέλευση ενός σήματος με φάσμα  $\lambda |Y_1(\Omega)|$  για  $\Omega_c < 250\pi$  και φάσμα  $\lambda |Y_1(\Omega)|$  για  $\Omega_c > 250\pi$ .



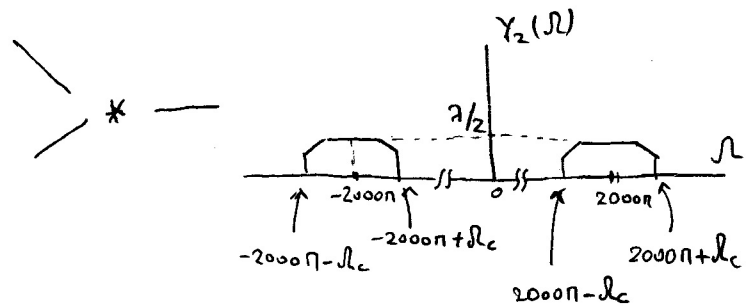
α. Τα φάσματα κατά προκύπτουν ως το γινόμενο της ανώτερης συχνότητας  $H(\Omega)$  του ιδανικού φίλτρου με το φάσμα  $X(\Omega)$  του σήματος εισόδου, δηλ.  $Y_1(\Omega) = H(\Omega) \cdot X(\Omega)$ , όπως δείχνεται στο σχήμα για  $\Omega_c > 250\pi$ .



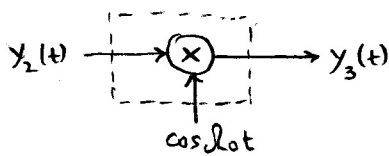
$$\begin{aligned}
 \text{b. } y_2(t) &= y_1(t) \cdot \cos \Omega_0 t \xrightarrow{F} Y_2(\Omega) = \frac{1}{2\pi} Y_1(\Omega) * F\{\cos \Omega_0 t\} = \\
 &= \frac{1}{2\pi} Y_1(\Omega) * \pi [\delta(\Omega - \Omega_0) + \delta(\Omega + \Omega_0)] = \\
 &= \frac{1}{2} [Y_1(\Omega) * \delta(\Omega - \Omega_0) + Y_1(\Omega) * \delta(\Omega + \Omega_0)] = \\
 &= \frac{1}{2} [Y_1(\Omega - \Omega_0) + Y_1(\Omega + \Omega_0)]
 \end{aligned}$$



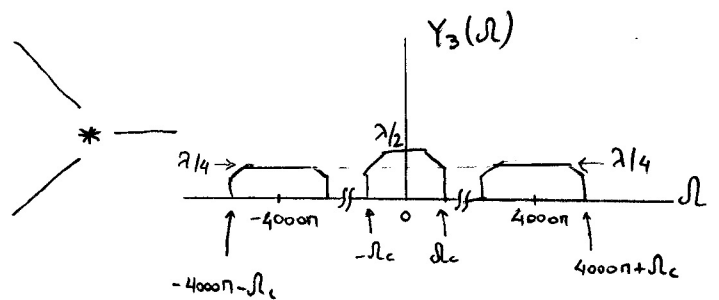
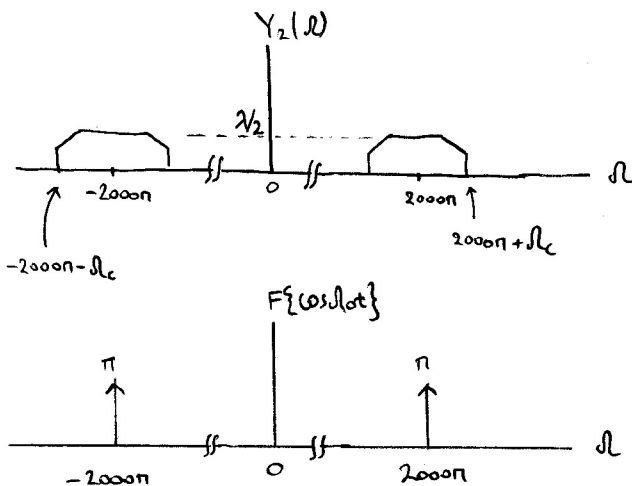
όπου  $\Omega_0 = 2\pi F_0 = 2\pi \cdot 1000 = 2000\pi \text{ rad/sec}$



γ. Το σύστημα αποδιαμόρφωσης είναι το ίδιο με το σύστημα διαμόρφωσης

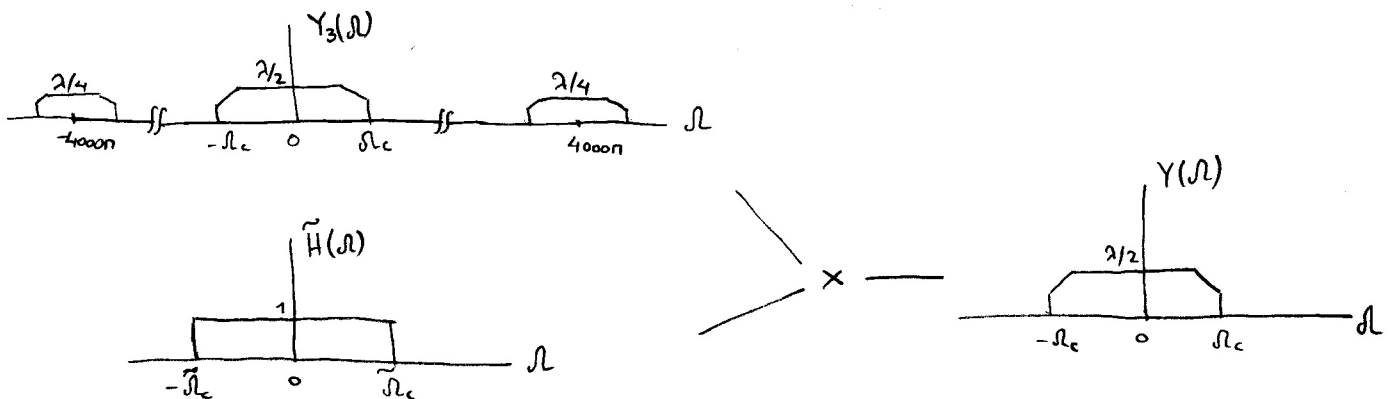


$$\begin{aligned}
 y_3(t) &= y_2(t) \cdot \cos \Omega_0 t \\
 \xrightarrow{F} Y_3(\Omega) &= \frac{1}{2\pi} Y_2(\Omega) * F\{\cos \Omega_0 t\} \Rightarrow \\
 Y_3(\Omega) &= \frac{1}{2} [Y_2(\Omega - \Omega_0) + Y_2(\Omega + \Omega_0)]
 \end{aligned}$$



δ. Το γραμμάτιο φίλτρο της εξόδου είναι βαθυπερατό (low pass) με συχνότητα κλιμακωμένη μεγαλύτερη της  $\tilde{\omega}_c$  και μικρότερη από την συχνότητα  $4000\pi - \omega_c$ . Με τον τρόπο αυτό θα επιτρακεί η διέλευση όλων των συχνοτήτων που κεντρικοί λοβοί και θα κλιμακωθούν οι εναλλασσόμενες. Έτσι η έξοδος  $y(t)$  θα ισούται με το σήμα  $y_1(t)$ , δηλ.  $y(t) = y_1(t)$ . Το αρχικό σήμα  $x(t)$  δεν μπορούμε να το ανακτήσουμε γιατί κάποιες συχνότητες του (από  $\omega_c$  και πάνω) έχουν κλιμακωθεί από το ιδανικό φίλτρο εισόδου. Αν θέλαμε να ανακτήσουμε το αρχικό σήμα  $x(t)$ , θα έπρεπε η συχνότητα κλιμακωμένη του φίλτρου εισόδου να είναι μεγαλύτερη της μέγιστης συχνότητας του σήματος  $x(t)$ , δηλ. θα έπρεπε  $\omega_c > \omega_{\max}$  ή  $\omega_c > 4000\pi$  rad/sec.

Έστω  $\tilde{H}(\omega)$  η απόκριση συχνότητας του ιδανικού βαθυπερατού φίλτρου της εξόδου. Το φάσμα της εξόδου  $Y(\omega)$  υπολογίζεται ως το γινόμενο του  $\tilde{H}(\omega)$  με το  $Y_3(\omega)$ , δηλ.  $Y(\omega) = \tilde{H}(\omega) \cdot Y_3(\omega)$ . Σχηματικά έχουμε:

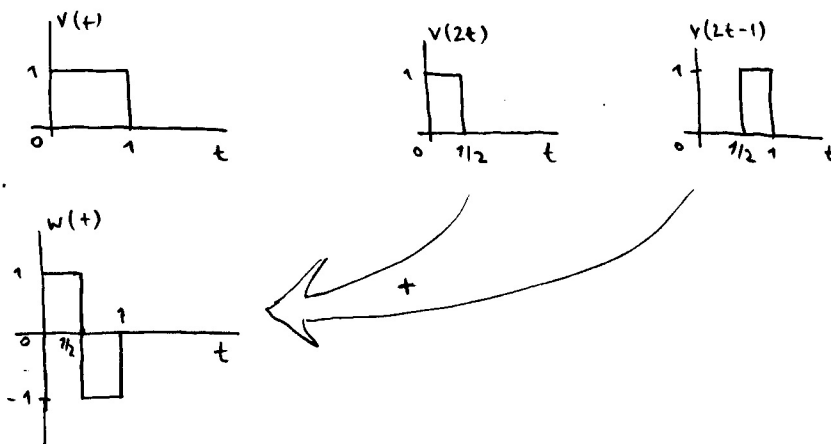


Συμφωνείται ότι το πλάτος του  $\tilde{H}(\omega)$  θα μπορούσε να ήταν  $2$ , δηλ.  $|\tilde{H}(\omega)| = 2$ . Σ' αυτή την περίπτωση το πλάτος του φάσματος εξόδου θα ήταν ίσο με  $\lambda$ , δηλ. όσο και το αρχικό.

### ΑΣΚΗΣΗ

Δίνεται το σήμα  $v(t) = \begin{cases} 1 & \text{για } 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$ . Να σχεδιάσετε το σήμα  $w(t) = v(2t) - v(2t-1)$  και να αποδείξετε ότι τα  $v(t)$ ,  $w(t)$  είναι ορθοκανονικά.

### ΛΥΣΗ



Εξετάσουμε εάν τα σήματα είναι ορθογώνια υπολογίζοντας το εσωτερικό τους γινόμενο.

$$\begin{aligned} \langle v(t), w(t) \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} v(t) w^*(t) dt = \int_0^{1/2} 1 \cdot 1 dt + \int_{1/2}^1 1 \cdot (-1) dt = t \Big|_0^{1/2} - t \Big|_{1/2}^1 = \\ &= \left( \frac{1}{2} - 0 \right) - \left( 1 - \frac{1}{2} \right) = 0 \end{aligned}$$

Άρα τα σήματα είναι ορθογώνια.

Υπολογίστε τώρα το μέτρο καθενός από αυτά.

$$\langle v(t), v(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} v(t) v^*(t) dt = \int_0^1 1 \cdot 1 dt = t \Big|_0^1 = 1$$

$$\langle w(t), w(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} w(t) w^*(t) dt = \int_0^{1/2} 1 \cdot 1 dt + \int_{1/2}^1 (-1) \cdot (-1) dt = t \Big|_0^{1/2} + t \Big|_{1/2}^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Άρα τα σήματα  $v(t)$  και  $w(t)$  είναι ορθοκανονικά.

### ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Τα σήματα  $v(2t)$  και  $v(2t-1)$  προέκυψαν από τον ορισμό του  $v(t)$ , ως εξής:

$$v(2t) = \begin{cases} 1 & \text{για } 0 \leq 2t < 1 \Rightarrow 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad v(2t-1) = \begin{cases} 1 & \text{για } 0 \leq 2t-1 < 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq t < 1 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

2. Τα  $v(t)$ ,  $w(t)$  αποτελούν τις συναρτήσεις βάσης Haar, τις απλούστερες των συναρτήσεων κυματιδίων (wavelets).

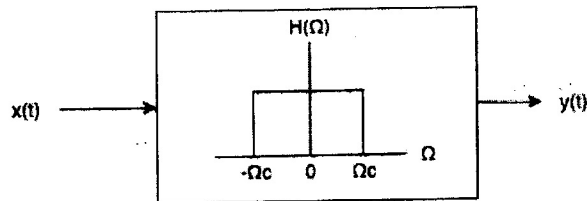
### ΑΣΚΗΣΗ 2.3

Δίνεται το συνεχούς χρόνου σήμα  $x_1(t) = \lambda t^2$ ,  $-\pi < t < \pi$ . Το σήμα αυτό επεκτείνεται περιοδικά και προς τις δύο πλευρές του χρόνου με περίοδο  $2\pi$ , δημιουργώντας το περιοδικό σήμα  $x(t)$ .

A. Να σχεδιάσετε το περιοδικό σήμα  $x(t)$ .

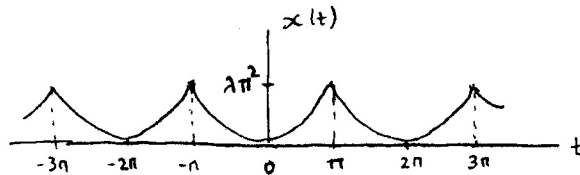
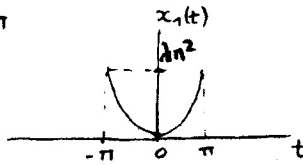
B. Να υπολογίσετε τους συντελεστές της εκθετικής σειράς Fourier του σήματος  $x(t)$ .

Γ. Το περιοδικό σήμα  $x(t)$  εφαρμόζεται στην είσοδο ενός ιδανικού βαθυπερατού φίλτρου με συχνότητα αποκοπής  $F_c = (3/4\pi)$  Hz. Να υπολογίσετε και να σχεδιάσετε την έξοδο του συστήματος  $y(t)$ .  
(για περίοδο, από  $-\pi$  έως  $\pi$ )



ΛΥΣΗ

A.  $x_1(t) = \lambda t^2$ ,  $-\pi < t < \pi$



Το σήμα  $x(t)$  είναι περιοδικό με περίοδο  $T_0 = 2\pi \Rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 1$  rad/sec

B. Η DC συνιστώσα του σήματος ισούται με:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_T x(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \lambda t^2 dt = \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt = \frac{\lambda}{2\pi} \left. \frac{t^3}{3} \right|_{-\pi}^{\pi} = \frac{\lambda}{6\pi} [\pi^3 - (-\pi)^3] = \\ &= \frac{\lambda}{6\pi} \cdot 2\pi^3 = \frac{\lambda}{3} \pi^2 \end{aligned}$$

Οι συντελεστές συχνότητας  $\alpha_k$  υπολογίζονται ως:

$$\begin{aligned}
 \alpha_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) e^{-jk\omega t} dt = \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 e^{-jkt} dt = \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 e^{-jkt} dt = \\
 &= \frac{\lambda}{2\pi} \cdot \frac{1}{-jk} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 d(e^{-jkt}) = \langle \text{κατά παράγοντες ολοκλήρωση} \rangle \\
 &= \frac{\lambda}{-jk2\pi} \left[ t^2 e^{-jkt} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} e^{-jkt} dt^2 \right] = \\
 &= \frac{\lambda}{-jk2\pi} \left[ (\pi^2 e^{-jk\pi} - (-\pi)^2 e^{jk\pi}) - 2 \int_{-\pi}^{\pi} t e^{-jkt} dt \right] = \langle \alpha) \lambda e^{-jk\pi} = e^{-jk\pi} = (\cos k\pi + j \sin k\pi) = (-1)^k \rangle \\
 &= \frac{\lambda}{-jk2\pi} \left[ (\pi^2 (-1)^k - \pi^2 (-1)^k) - 2 \frac{1}{-jk} \int_{-\pi}^{\pi} t d(e^{-jkt}) \right] = \langle \text{κατά παράγοντες ολοκλήρωση} \rangle \\
 &= \frac{\lambda}{-jk2\pi} \left[ 0 + \frac{2}{jk} \left[ t e^{-jkt} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} e^{-jkt} dt \right] \right] = \\
 &= \frac{\lambda}{-jk2\pi} \cdot \frac{2}{jk} \left[ (\pi e^{-jk\pi} - (-\pi) e^{jk\pi}) - \frac{1}{-jk} e^{-jkt} \Big|_{-\pi}^{\pi} \right] = \\
 &= \frac{\lambda}{k^2\pi} \left[ (\pi (-1)^k + \pi (-1)^k) - \frac{1}{-jk} (e^{-jk\pi} - e^{jk\pi}) \right] = \\
 &= \frac{\lambda}{k^2\pi} \left[ 2\pi (-1)^k - \frac{2}{k} \frac{e^{jk\pi} - e^{-jk\pi}}{2j} \right] = \\
 &\quad \underbrace{\sin k\pi = 0} \\
 &= \frac{\lambda}{k^2\pi} \cdot 2\pi (-1)^k = \\
 &= \frac{2\lambda}{k^2} (-1)^k
 \end{aligned}$$

Άρα το σήμα  $x(t)$  εκφράζεται ως:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{jk\lambda t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{jkt}$$

όπου

$$\alpha_0 = \frac{\lambda}{3} \pi^2$$

$$\alpha_1 = \frac{-2\lambda}{1} = \alpha_{-1}$$

$$\alpha_2 = \frac{2\lambda}{4} = \alpha_{-2}$$

$$\alpha_3 = \frac{-2\lambda}{9} = \alpha_{-3}$$

Συνεπώς η σειρά Fourier γράφεται

$$x(t) = \dots \alpha_{-3} e^{-j3t} + \alpha_{-2} e^{-j2t} + \alpha_{-1} e^{-jt} + \alpha_0 + \alpha_1 e^{jt} + \alpha_2 e^{j2t} + \alpha_3 e^{j3t} + \dots =$$

$$= \alpha_0 + \alpha_1 (e^{jt} + e^{-jt}) + \alpha_2 (e^{j2t} + e^{-j2t}) + \alpha_3 (e^{j3t} + e^{-j3t}) + \dots =$$

$$= \alpha_0 + 2\alpha_1 \cos t + 2\alpha_2 \cos 2t + 2\alpha_3 \cos 3t + \dots =$$

$$= \frac{1}{3} + 2 \frac{(-2)}{1} \cos t + 2 \frac{2}{4} \cos 2t + 2 \frac{(-2)}{9} \cos 3t + \dots =$$

$$= \frac{1}{3} - 4 \left[ \frac{\cos t}{1^2} - \frac{\cos 2t}{2^2} + \frac{\cos 3t}{3^2} - \dots \right]$$

Αυτή είναι η τριγωνομετρική σειρά του σήμα  $x(t)$ .

Γ. Το ίδιο βασισμένο φίλτρο έχει συχνότητα αποκοπής  $F_c = \frac{3}{4\pi}$  Hz :

$$\omega_c = 2\pi F_c = 2\pi \cdot \frac{3}{4\pi} = \frac{3}{2} \text{ rad.}$$

Παρατηρούμε ότι η χαρακτηριστική συχνότητα του σήματος ( $k=1$ ) είναι  $\omega_0 = 1$  rad, αυτή και πάνω θα επιτρέπεται να περάσει από το ίδιο φίλτρο. Η επόμενη κρονομορφή θα είναι για  $k=2$ , δηλαδή  $2\omega_0 = 2 \cdot 1 = 2$  rad και θα αποκονεί, όπως και όλες οι επόμενες. Άρα το σήμα εξόδου του ενισχυτή θα είναι:

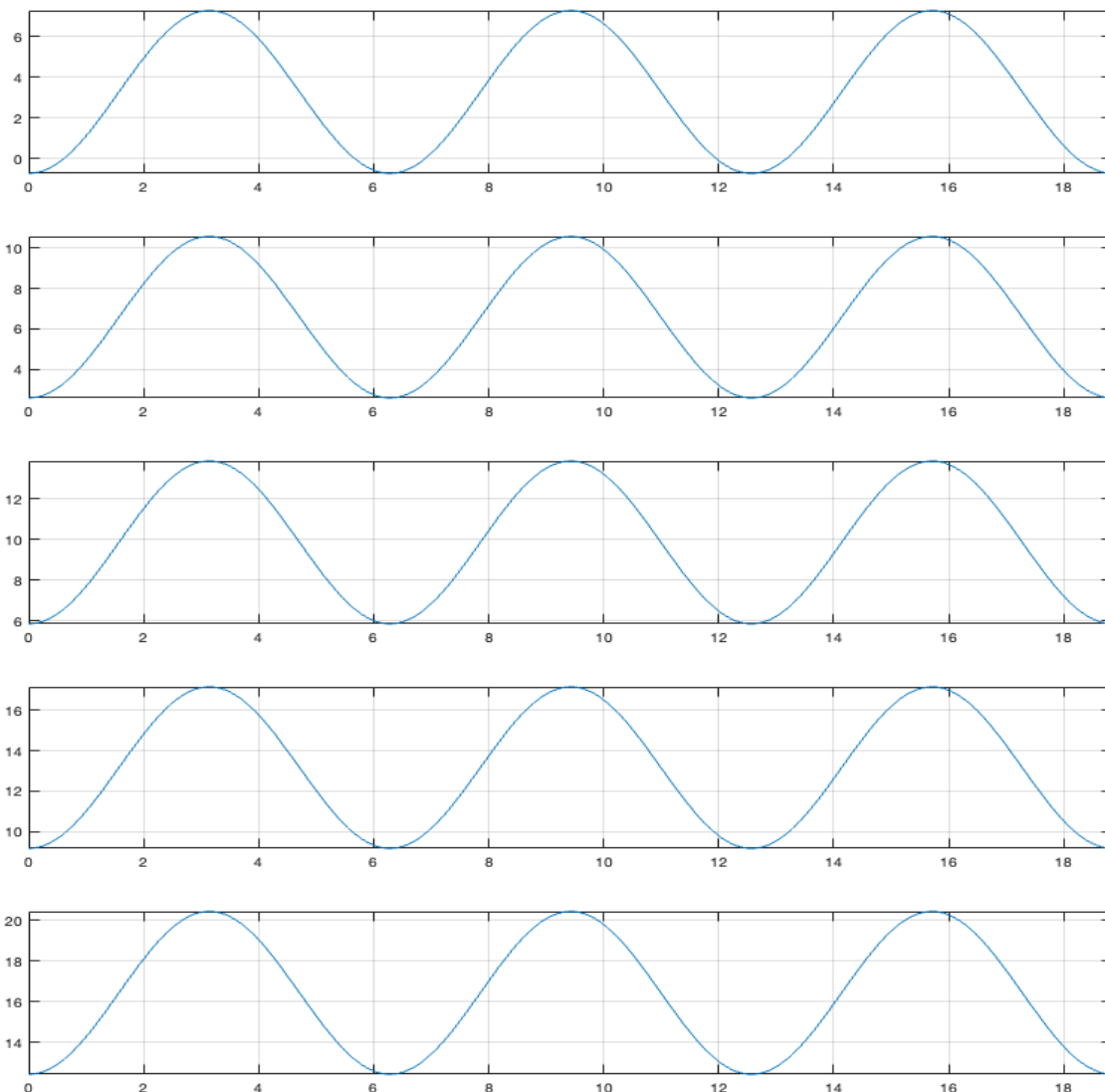
$$y(t) = \frac{\lambda \pi^2}{3} - 4\lambda \cos t$$



```
% MATLAB code
% Signals and plots for all possible values of l (lamda)
% [DC and 1st harmonic]
```

```
clear all
close all
l=1; y1 = @(t) (l*pi*pi/3) - 4*l*cos(t);
l=2; y2 = @(t) (l*pi*pi/3) - 4*l*cos(t);
l=3; y3 = @(t) (l*pi*pi/3) - 4*l*cos(t);
l=4; y4 = @(t) (l*pi*pi/3) - 4*l*cos(t);
l=5; y5 = @(t) (l*pi*pi/3) - 4*l*cos(t);
```

```
subplot(5,1,1); fplot(y1, [0 6*pi]); grid on
subplot(5,1,2); fplot(y2, [0 6*pi]); grid on
subplot(5,1,3); fplot(y3, [0 6*pi]); grid on
subplot(5,1,4); fplot(y4, [0 6*pi]); grid on
subplot(5,1,5); fplot(y5, [0 6*pi]); grid on
```

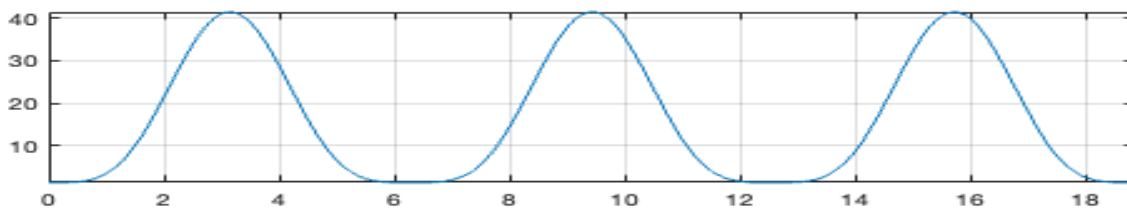
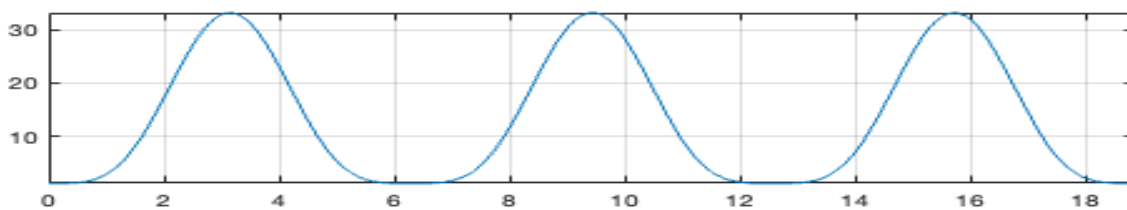
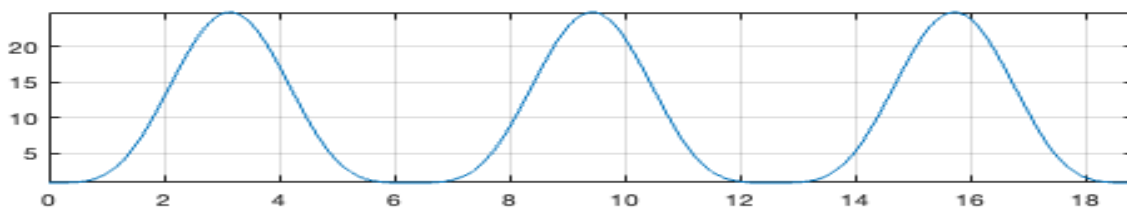
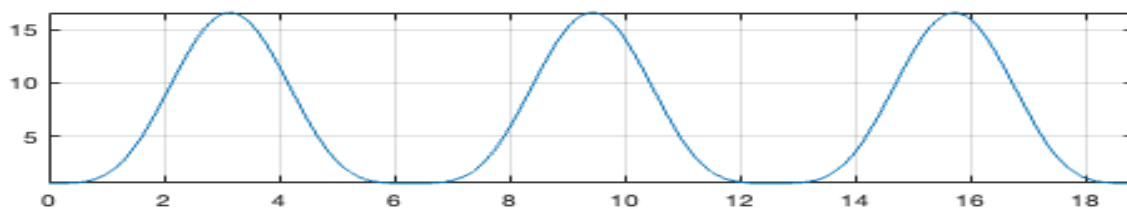
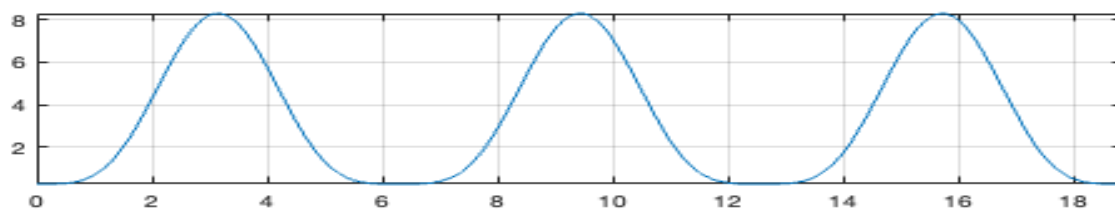


```
% Signals and plots for all possible values of l (lamda)
% [DC - 1st & 2nd harmonics]
```

```
clear all
close all
```

```
l=1; y1 = @(t) (l*pi*pi/3) - 4*l*(cos(t) - cos(2*t)/4);
l=2; y2 = @(t) (l*pi*pi/3) - 4*l*(cos(t) - cos(2*t)/4);
l=3; y3 = @(t) (l*pi*pi/3) - 4*l*(cos(t) - cos(2*t)/4);
l=4; y4 = @(t) (l*pi*pi/3) - 4*l*(cos(t) - cos(2*t)/4);
l=5; y5 = @(t) (l*pi*pi/3) - 4*l*(cos(t) - cos(2*t)/4);
```

```
subplot(5,1,1); fplot(y1, [0 6*pi]); grid on
subplot(5,1,2); fplot(y2, [0 6*pi]); grid on
subplot(5,1,3); fplot(y3, [0 6*pi]); grid on
subplot(5,1,4); fplot(y4, [0 6*pi]); grid on
subplot(5,1,5); fplot(y5, [0 6*pi]); grid on
```

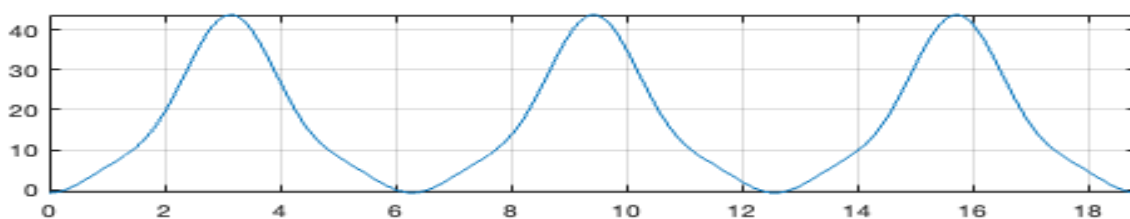
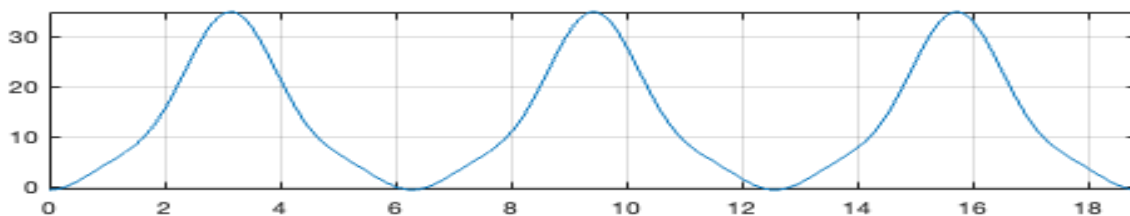
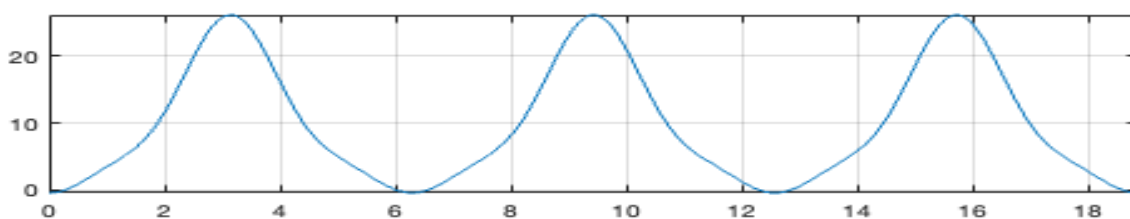
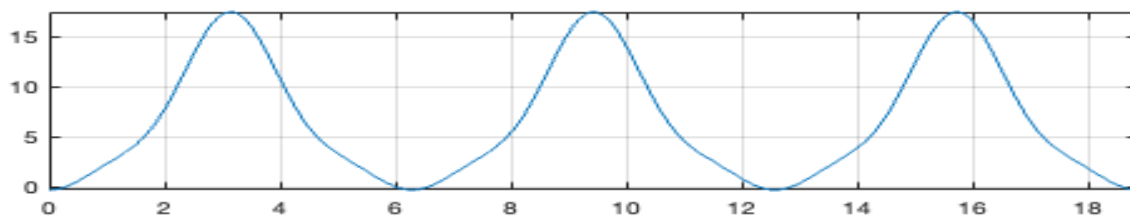
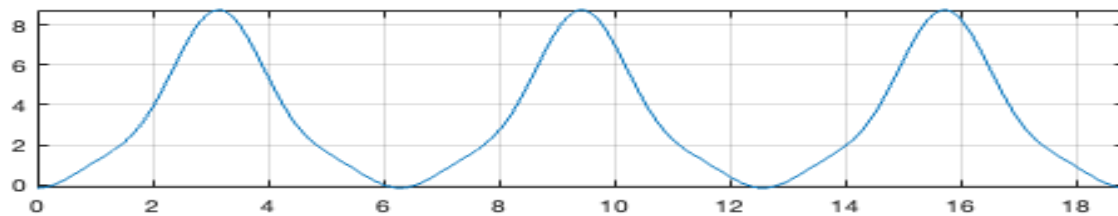


```
% Signals and plots for all possible values of l (lamda)
% [DC - 1st & 2nd & 3rd harmonics]
```

```
clear all
close all
```

```
l=1; y1 = @(t) (l*pi*pi/3) - 4*l*(cos(t) - cos(2*t)/4 + cos(3*t)/9);
l=2; y2 = @(t) (l*pi*pi/3) - 4*l*(cos(t) - cos(2*t)/4 + cos(3*t)/9);
l=3; y3 = @(t) (l*pi*pi/3) - 4*l*(cos(t) - cos(2*t)/4 + cos(3*t)/9);
l=4; y4 = @(t) (l*pi*pi/3) - 4*l*(cos(t) - cos(2*t)/4 + cos(3*t)/9);
l=5; y5 = @(t) (l*pi*pi/3) - 4*l*(cos(t) - cos(2*t)/4 + cos(3*t)/9);
```

```
subplot(5,1,1); fplot(y1, [0 6*pi]); grid on
subplot(5,1,2); fplot(y2, [0 6*pi]); grid on
subplot(5,1,3); fplot(y3, [0 6*pi]); grid on
subplot(5,1,4); fplot(y4, [0 6*pi]); grid on
subplot(5,1,5); fplot(y5, [0 6*pi]); grid on
```



```
% Signals and plots for all possible values of l (lamda)
% [DC - 1st & 2nd & 3rd & 4th harmonics]
```

```
clear all
close all
```

```
l=1; y1 = @(t) (l*pi*pi/3) - 4*l*(cos(t) - cos(2*t)/4 + cos(3*t)/9 -
cos(4*t)/16);
l=2; y2 = @(t) (l*pi*pi/3) - 4*l*(cos(t) - cos(2*t)/4 + cos(3*t)/9 -
cos(4*t)/16);
l=3; y3 = @(t) (l*pi*pi/3) - 4*l*(cos(t) - cos(2*t)/4 + cos(3*t)/9 -
cos(4*t)/16);
l=4; y4 = @(t) (l*pi*pi/3) - 4*l*(cos(t) - cos(2*t)/4 + cos(3*t)/9 -
cos(4*t)/16);
l=5; y5 = @(t) (l*pi*pi/3) - 4*l*(cos(t) - cos(2*t)/4 + cos(3*t)/9 -
cos(4*t)/16);
```

```
subplot(5,1,1); fplot(y1, [0 6*pi]); grid on
subplot(5,1,2); fplot(y2, [0 6*pi]); grid on
subplot(5,1,3); fplot(y3, [0 6*pi]); grid on
subplot(5,1,4); fplot(y4, [0 6*pi]); grid on
subplot(5,1,5); fplot(y5, [0 6*pi]); grid on
```

