2023 - 2024
ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ
1Η ΓΡΑΠΤΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Σε όλες τις παρακάτω ασκήσεις $\lambda = 1 + A \bmod 6$, όπου A το άθροισμα των δύο τελευταίων ψηφίων του Αριθμού Μητρώου σας.

ΑΣΚΗΣΗ 1.1 Να υπολογίσετε τις εκφράσεις:

α. $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\lambda)\cos\left(2\pi t - \frac{\pi}{3}\right) dt$ β. $\lambda \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\Omega t}\,\delta(\Omega)\, d\Omega$

γ. $e^{-j\Omega t}\delta(t)$ δ. $e^{-j\Omega t}\delta(\Omega)$ ε. $(\lambda t - 7)\delta(t-\lambda)$

ΑΣΚΗΣΗ 1.2 Δίνονται τα σήματα: $x_1(t) = \cos(\lambda t)$, $x_2(t) = \cos(\lambda \pi t)$,

$x_{11}(t) = x_1(t) + x_1\left(t - \frac{1}{\lambda}\right)$, $x_{22}(t) = x_2(t) - x_2\left(t - \frac{1}{\lambda}\right)$, $x_{12}(t) = x_1(t) + x_2(t)$

α. Να εξετάσετε αν είναι περιοδικά και να υπολογίσετε την περίοδο για κάθε περιοδικό σήμα.

β. Να σχεδιάσετε τα πέντε σήματα στο διάστημα $[0, 2\pi]$ με χρήση Python/Matlab [Χρήση της εντολής 'subplot(5,1,...)' για να έχετε τις πέντε κυματομορφές μαζί]. Να συμπεριλάβετε στις απαντήσεις σας τον κώδικα και τις εκτυπώσεις των σημάτων.

ΑΣΚΗΣΗ 1.3 Η κρουστική απόκριση ΓΧΑ συστήματος ολοκλήρωσης είναι $h(t) = u(t)$.

ΓΧΑ

$x(t) \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow y(t)$

α. Ποια η βηματική απόκριση του συστήματος;

β. Ποια η έξοδος του συστήματος για είσοδο $x(t) = t\,u(t-1)$;

ΑΣΚΗΣΗ 1.4 Για το συνεχούς χρόνου σήμα $g(t) = \left(\frac{1}{\lambda}t + 1\right)\left[u(t) - u(t+\lambda)\right]$

α. Να το σχεδιάσετε.

β. Να υπολογίσετε και να σχεδιάσετε το σήμα $x(t) = -g(-2t - \lambda/2)$

γ. Να υπολογίσετε και να σχεδιάσετε την άρτια συνιστώσα $x_e(t)$ του σήματος $x(t)$.

δ. Να υπολογίσετε και να σχεδιάσετε το φάσμα $X_e(\Omega)$ του σήματος $x_e(t)$.

Σημείωση: Τα α, β, γ να σχεδιαστούν με το χέρι (μολύβι και χαρτί), ενώ το δ μέσω Python ή Matlab για $-20 \le \Omega \le 20$.

- Προθεσμία παράδοσης: Τετάρτη 20.3.2024 @ 23:55
- Οι λύσεις να είναι ΧΕΙΡΟΓΡΑΦΕΣ - ΕΥΑΝΑΓΝΩΣΤΕΣ - ΑΤΟΜΙΚΕΣ, εκτός από τον κώδικα και τις αντίστοιχες γραφικές
- Η υποβολή των ψηφιοποιημένων (scanned) χειρογράφων και των αρχείων κώδικα να γίνει εμπρόθεσμα σε χώρο εργασιών του eClass. Η εργασία να υποβληθεί ως ενιαίο αρχείο pdf.
- Οι ενδεικτικές λύσεις θα αναρτηθούν στα έγγραφα του eClass μετά την λήξη της προθεσμίας.

ΑΣΚΗΣΗ 1.1 Να υπολογίσετε τις εκφράσεις:

α. $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\lambda) \cos\left(2\pi t - \frac{\pi}{3}\right) dt$ β. $\lambda \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\Omega t} \delta(\Omega)\, d\Omega$

γ. $e^{-j\Omega t} \delta(t)$ δ. $e^{-j\Omega t} \delta(\Omega)$ ε. $(\lambda t - 7)\, \delta(t-\lambda)$

ΛΥΣΗ

α. $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\lambda) \cos\left(2\pi t - \frac{\pi}{3}\right) dt =$

$= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\lambda)\, \underbrace{\cos\left(2\pi\lambda - \frac{\pi}{3}\right)}_{\downarrow} dt =$

$= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\lambda) \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) dt = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\lambda)\, dt}_{1} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1/2$

β. $\lambda \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\Omega t} \delta(\Omega)\, d\Omega = \lambda \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{e^{j\Omega \cdot 0}}_{1} \delta(\Omega)\, d\Omega = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\Omega)\, d\Omega = \lambda \cdot 1 = \lambda$

γ. $e^{-j\Omega t} \delta(t) = \underbrace{e^{-j\Omega \cdot 0}}_{1} \delta(t) = 1 \cdot \delta(t) = \delta(t)$

δ. $e^{-j\Omega t} \delta(\Omega) = \underbrace{e^{-j 0 t}}_{1} \delta(\Omega) = 1 \cdot \delta(\Omega) = \delta(\Omega)$

ε. $(\lambda t - 7)\, \delta(t-\lambda) = (\lambda\lambda - 7)\, \delta(t-\lambda) = (\lambda^2 - 7)\, \delta(t-\lambda)$

ΑΣΚΗΣΗ 1.2 Δίνονται τα συνεχούς χρόνου σήματα $x_1(t)=\cos(4\pi t)$, $x_2(t)=\sin(4t)$, $x_{11}(t)=x_1(t)+2\,x_1(t-\frac{1}{3})$, $x_{22}(t)=x_2(t)+2\,x_2(t-\frac{1}{3})$, $x_{12}(t)=x_1(t)+x_2(t)$

α. Να εξετάσετε εάν τα σήματα είναι <u>περιοδικά</u>. Στην περίπτωση που αυτό ισχύει, να <u>υπολογίσετε</u> την περίοδο.

β. Να <u>σχεδιάσετε</u> καθένα από αυτά τα σήματα στο διάστημα $[0,2\pi]$ με χρήση <u>Python</u> ή <u>Matlab</u> ή <u>Octave</u>. (κάνετε χρήση της εντολής subplot(5,1,–) ώστε να έχετε τις πέντε κυματομορφές σε μία γραφική, για άμεση σύγκριση). Στις απαντήσεις σας να <u>συμπεριλάβετε</u> τις εκτυπώσεις των <u>κυματομορφών</u>, καθώς και εκτυπώσεις του <u>κώδικα</u> που αναπτύξατε.

ΛΥΣΗ

α. $x_1(t)=\cos(4\pi t) \rightsquigarrow \Omega_1=4\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{T_1}=4\pi \Rightarrow T_1=\frac{1}{2}$ → περιοδικό με περίοδο 1/2

$x_2(t)=\sin(4t) \rightsquigarrow \Omega_2=4 \Rightarrow \frac{2\pi}{T_2}=4 \rightarrow T_2=\frac{\pi}{2}$ → περιοδικό με περίοδο $\pi/2$

$x_{11}(t)=x_1(t)+2\,x_1(t-\frac{1}{3})$ → Περιοδικό ως άθροισμα δύο περιοδικών σημάτων με περίοδο 1/2 το καθένα και συνεπώς με λόγο περιόδων 1, δηλαδή ρητό αριθμό. Η περίοδος του σήματος $x_{11}(t)$ είναι 1/2.

$x_{22}(t)=x_2(t)+2\,x_2(t-\frac{1}{3})$ → Περιοδικό ως άθροισμα ....

... με λόγο περιόδων 1, δηλαδή ρητό.
Η περίοδος του σήματος $x_{22}(t)$ είναι $\pi/2$.

$x_{12}(t)=x_1(t)+x_2(t)$ → ΜΗ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ, αφού ο λόγος των περιόδων των δύο σημάτων είναι άρρητος,

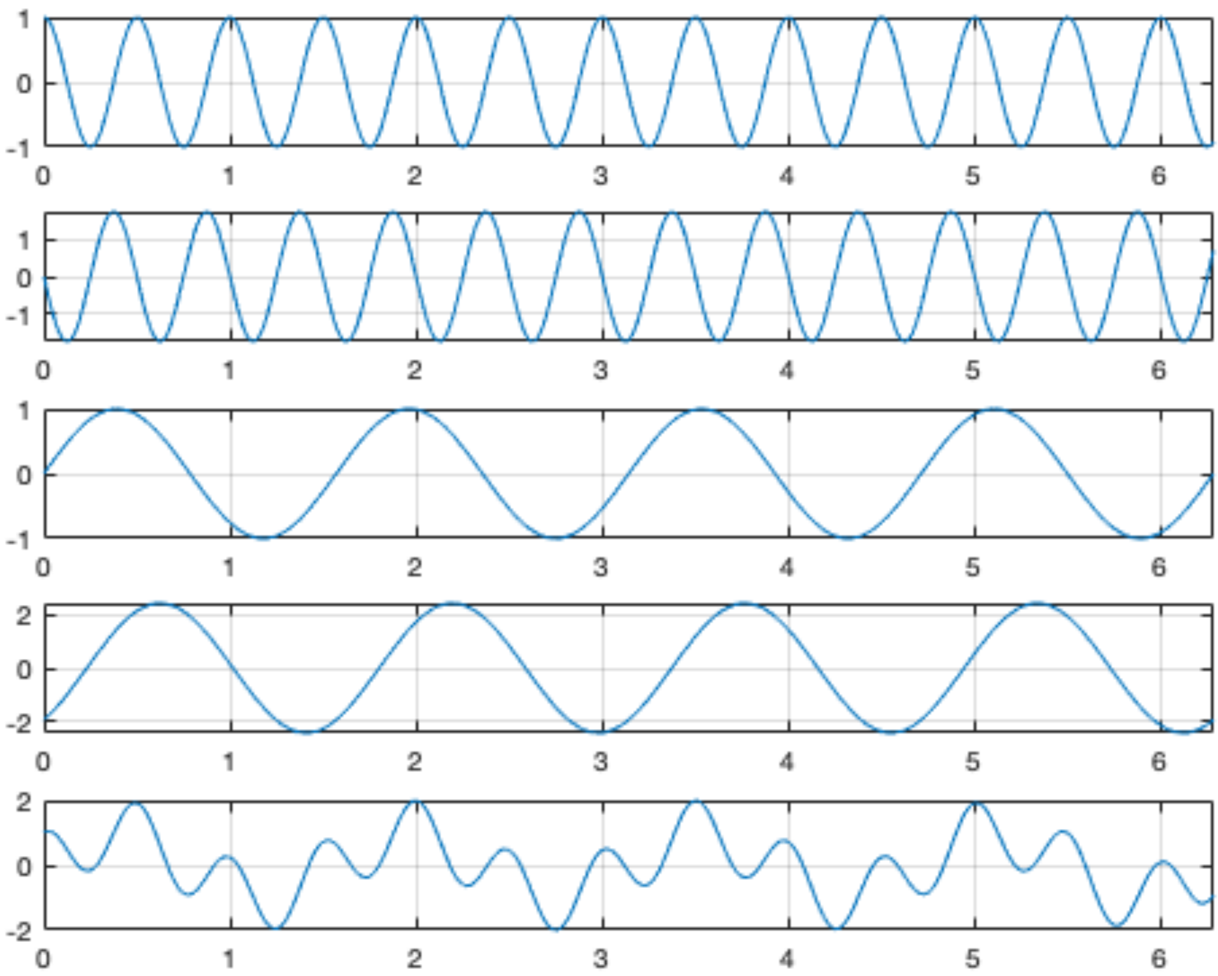
$$\frac{T_1}{T_2}=\frac{1/2}{\pi/2}=\frac{1}{\pi}$$

β. Οι κυματομορφές των σημάτων $x_1(t)$, $x_{11}(t)$, $x_2(t)$, $x_{22}(t)$, $x_{12}(t)$ φαίνονται στην επόμενη σελίδα.

```
x1 = @(t) cos(4*pi*t);
x2 = @(t) sin(4*t);

x11 = @(t) cos(4*pi*t) + 2*cos(4*pi*t-4*pi/3);
x22 = @(t) sin(4*t) + 2*sin(4*t-4/3);
x12 = @(t) cos(4*pi*t) + sin(4*t);

subplot(5,1,1); fplot(x1,  [0 2*pi]); grid on
subplot(5,1,2); fplot(x11, [0 2*pi]); grid on
subplot(5,1,3); fplot(x2,  [0 2*pi]); grid on
subplot(5,1,4); fplot(x22, [0 2*pi]); grid on
subplot(5,1,5); fplot(x12, [0 2*pi]); grid on
```

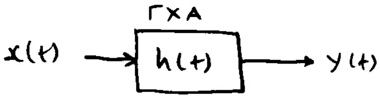


ΑΣΚΗΣΗ 1.3 Δίνεται ΓΧΑ σύστημα συνεχούς χρόνου με κρουστική απόκριση $h(t) = u(t)$.

α. Να υπολογιστεί η βηματική απόκριση του συστήματος.

β. Να υπολογιστεί η έξοδος $y(t)$ για είσοδο $x(t) = t\,u(t-1)$.

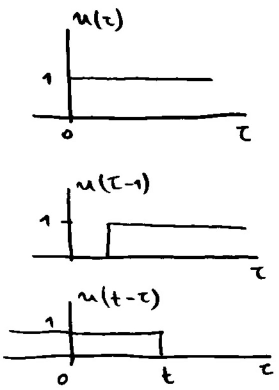
ΛΥΣΗ



α. $$y(t) = x(t) * h(t) = u(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\, u(t-\tau)\, d\tau = \int_0^t d\tau = \tau \Big|_0^t = t$$

Άρα
$$y(t) = \begin{cases} t & \text{για } t>0 \\ 0 & \text{για } t<0 \end{cases}$$
ή
$$y(t) = t\,u(t)$$

β. $$y(t) = x(t) * h(t) = t\,u(t-1) * u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tau\, u(\tau-1)\, u(t-\tau)\, d\tau =$$



$$= \int_1^t \tau\, d\tau = \frac{\tau^2}{2}\Big|_1^t = \frac{1}{2}\left(t^2-1\right)$$

Άρα
$$y(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(t^2-1\right) & \text{για } t>1 \\ 0 & \text{για } t<1 \end{cases}$$

ή

$$y(t) = \frac{1}{2}\left(t^2-1\right) u(t-1)$$

ΑΣΚΗΣΗ 1.4 α. Να σχεδιάσετε το σήμα $v(t) = (0.25t+1)\left[u(t) - u(t+4)\right]$

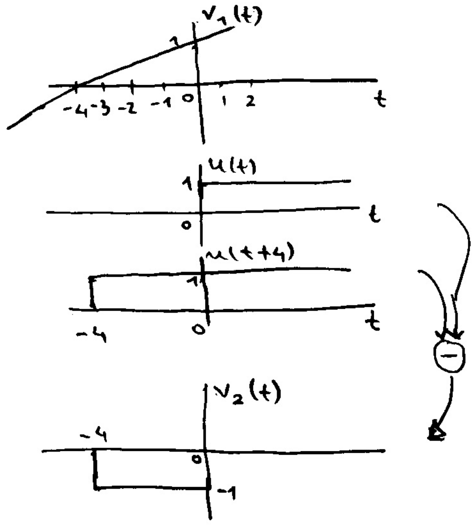
β. Να υπολογίσετε και να σχεδιάσετε το σήμα $x(t) = -v(-2t-2)$

γ. Να υπολογίσετε και να σχεδιάσετε την άρτια συνιστώσα $x_e(t)$ του $x(t)$.

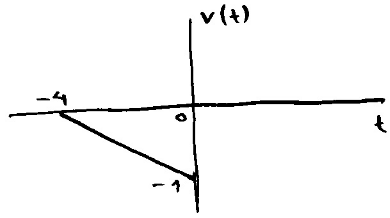
δ. Να υπολογίσετε και να σχεδιάσετε το φάσμα $X_e(\Omega)$ του σήματος $x_e(t)$.

ΛΥΣΗ α. $v(t) = v_1(t) \cdot v_2(t)$ όπου $v_1(t) = 0.25t + 1$

$v_2(t) = u(t) - u(t+4)$



Το γινόμενο των $v_1(t)$ και $v_2(t)$ μας δίνει την $v(t)$ του σχήματος:



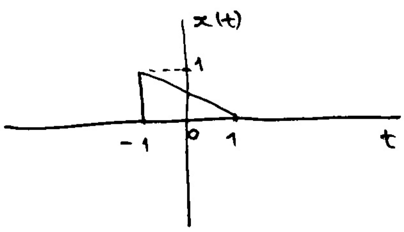
β. Από το παραπάνω σχήμα βρίσκουμε ότι $v(t) = \begin{cases} -(0.25t+1) & \text{για } -4 \le t \le 0 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$

Άρα, αφού $x(t) = -v(-2t-2)$ θα έχουμε:

$$x(t) = \begin{cases} 0.25(-2t-2)+1 & \text{για } -4 \le -2t-2 \le 0 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases} \Rightarrow$$

$$x(t) = \begin{cases} -0.5t + 0.5 & \text{για } -1 \le t \le 1 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

Η γραφική παράσταση του σήματος $x(t)$ δίνεται στο ακόλουθο σχήμα:



γ. Υπολογισμός άρτιας συνιστώσας $x_e(t)$ υπολογιστικά και γραφικά.

Υπολογιστικά

$$x_e(t) = \frac{1}{2}\left[x(t) + x(-t)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}x(t) + \frac{1}{2}x(-t) =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}(-0.5t+0.5) & \text{για } -1 \le t \le 1 \\ \frac{1}{2}\cdot 0 & \text{αλλού} \end{cases} +$$

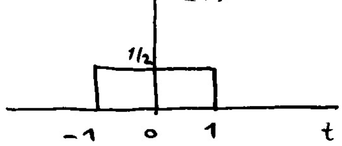
$$+ \begin{cases} \frac{1}{2}(0.5t+0.5) & \text{για } -1 \le -t \le 1 \\ \frac{1}{2}\cdot 0 & \text{αλλού} \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} -0.25t + 0.25 & \text{για } -1 \le t \le 1 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases} +$$

$$+ \begin{cases} 0.25t + 0.25 & \text{για } -1 \le t \le 1 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases} =$$

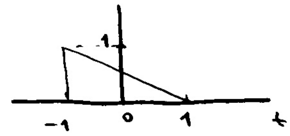
$$= \begin{cases} (-0.25t + 0.25) + (0.25t + 0.25) & \text{για } -1 \le t \le 1 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0.5 & \text{για } -1 \le t \le 1 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

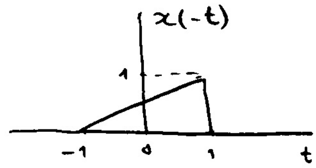


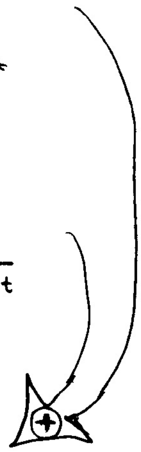
Γραφικά

$x(t)$

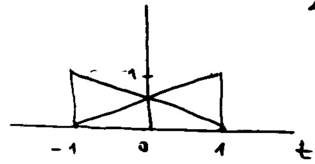


$x(-t)$



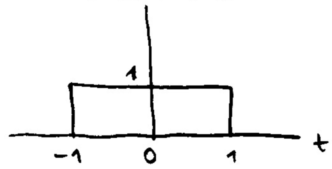


$x(t)+x(-t)$

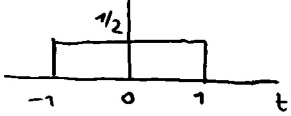


$\Updownarrow$

$x(t)+x(-t)$



$x_e(t) = \frac{1}{2}\left[x(t)+x(-t)\right]$



δ. $$X_e(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_e(t)\, e^{-j\Omega t}\, dt = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} e^{-j\Omega t}\, dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{-j\Omega t}\, dt =$$

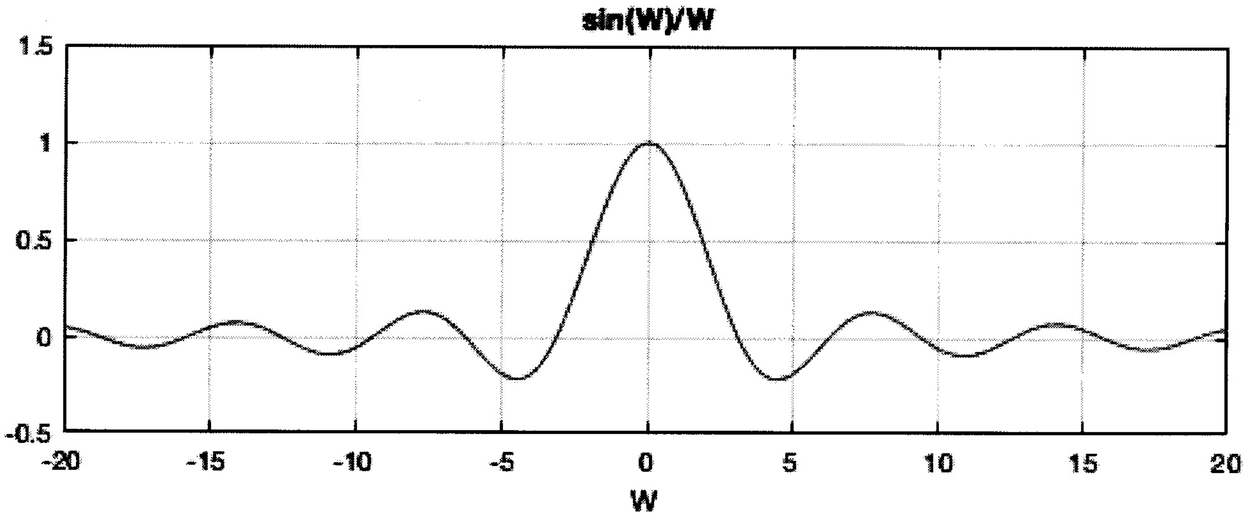
$$= \frac{1}{2} \frac{}{-j\Omega} e^{-j\Omega t} \Big|_{-1}^{1} =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{-j\Omega} \left(e^{-j\Omega} - e^{j\Omega} \right) =$$

$$= \frac{1}{\Omega} \frac{e^{j\Omega} - e^{-j\Omega}}{2j} = \frac{1}{\Omega} \sin\Omega = \frac{\sin\Omega}{\Omega}$$

```
syms W

X(W) = sin(W) / W;
subplot(2,1,1); ezplot(X(W), [-20 20]); grid on; ylim([-0.5,1.5]);
```



<u>Σημείωση</u> Το ερώτημα β θα μπορούσαμε να το απαντήσουμε και γραφικά ως εξής: