

## Μετασχηματισμός-z

### Σκοπός

Οι μετασχηματισμοί αποτελούν ένα από τα σημαντικότερα εργαλεία στην ανάλυση σημάτων και LTI συστημάτων. Στο παρόν Κεφάλαιο εισάγουμε το μετασχηματισμό-z, μελετούμε τις ιδιότητές του και αναδεικνύουμε τη σπουδαιότητά του στην ανάλυση και στο χαρακτηρισμό διακριτών LTI συστημάτων.

Ο μετασχηματισμός-z παίζει σπουδαίο ρόλο στην ανάλυση σημάτων διακριτού χρόνου και LTI συστημάτων, αντίστοιχο με εκείνον του μετασχηματισμού Laplace για την ανάλυση σημάτων και LTI συστημάτων συνεχούς χρόνου. Για παράδειγμα, θα δούμε ότι η συνέλιξη δύο σημάτων στο χρόνο, ισοδυναμεί με τον πολλαπλασιασμό των αντίστοιχων μετασχηματισμών-z αυτών. Μία τέτοια ιδιότητα απλοποιεί σημαντικά την ανάλυση της απόκρισης ενός LTI συστήματος για διάφορα σήματα. Ακόμη, ο μετασχηματισμός-z μας παρέχει τη δυνατότητα χαρακτηρισμού ενός LTI συστήματος και υπολογισμού της απόκρισής του για διάφορα σήματα, με απλή τοποθέτηση των πόλων και μηδενικών του στο επίπεδο-z.

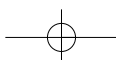
### Προσδοκώμενα αποτελέσματα

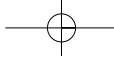
Όταν ολοκληρώσετε τη μελέτη του κεφαλαίου αυτού θα είστε σε θέση να:

- Υπολογίζετε το μετασχηματισμό-z οποιασδήποτε πεπερασμένης ακολουθίας
- Υπολογίζετε το μετασχηματισμό-z και να προσδιορίζετε την περιοχή σύγκλισης ακολουθιών απείρου μήκους
- Προσδιορίζετε τον αντίστροφο μετασχηματισμό-z συναρτήσεων
- Αποφαινεστε εύκολα σχετικά με την αιτιατότητα και ευστάθεια συστημάτων διακριτού χρόνου
- Σχεδιάζετε τη δομή πραγματοποίησης συστημάτων διακριτού χρόνου
- Υπολογίζετε την απόκριση συχνότητας συστημάτων διακριτού χρόνου

### Έννοιες κλειδιά

- Μετασχηματισμός-z
- Περιοχή σύγκλισης



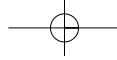


- Συνάρτηση μεταφοράς
- Ευστάθεια
- Πραγματοποίηση συστημάτων διακριτού χρόνου
- Απόκριση συχνότητας
- Εξισώσεις διαφορών

### Εισαγωγικές Παρατηρήσεις

Ο μετασχηματισμός-z ( $z$ -transform) για τα σήματα διακριτού χρόνου είναι ό,τι και ο μετασχηματισμός Laplace για τα σήματα συνεχούς χρόνου (continuous-time). Θα δούμε ότι ο μετασχηματισμός-z είναι πιο γενικός από το μετασχηματισμό Fourier διακριτού χρόνου (discrete-time Fourier transform, DTFT), αφού ο τελευταίος αποτελεί ειδική περίπτωση του μετασχηματισμού-z. Συμπερασματικά, ο μετασχηματισμός-z είναι ένα πολύ ισχυρό μαθηματικό εργαλείο για τη μελέτη διακριτών σημάτων και συστημάτων. Για την κατανόηση του Κεφαλαίου ο αναγνώστης θα πρέπει να έχει εξοικειωθεί με τους μιγαδικούς αριθμούς, καθώς και με τις σειρές με σταθερούς όρους.

Στην ενότητα 3.1 ορίζουμε το μετασχηματισμό-z και μελετούμε τις ιδιότητές του. Στη συνέχεια ορίζουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό-z, δηλαδή το μετασχηματισμό ο οποίος μας οδηγεί από το πεδίο-z στο πεδίο του χρόνου (ενότητα 3.2). Ο μονόπλευρος μετασχηματισμός-z, ο οποίος χρησιμοποιείται για την ανάλυση συστημάτων που αρχικά δεν βρίσκονται σε ηρεμία, παρουσιάζεται στην ενότητα 3.3. Τέλος, γνωρίζοντας το μετασχηματισμό-z και τις ιδιότητές του, προχωρούμε στην αξιοποίηση αυτού για τη μελέτη συστημάτων διακριτού χρόνου. Έτσι, στην ενότητα 3.4 μελετούμε την αιτιατότητα και την ευστάθεια τέτοιων συστημάτων, τις δομές πραγματοποίησής τους και την απόκρισή τους στη συχνότητα.



### 3.1 Ο Μετασχηματισμός-z

#### 3.1.1 Ορισμός

Ο μετασχηματισμός-z (M.Z.) ενός σήματος  $x(n)$  διακριτού χρόνου ορίζεται ως:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n} \quad (3.1)$$

όπου  $z$  μία μιγαδική μεταβλητή. Για λόγους ευκολίας θα συμβολίζουμε το M.Z. της ακολουθίας  $x(n)$  ως  $Z\{x(n)\}$  και τη σχέση μεταξύ της  $x(n)$  και του M.Z.  $X(z)$  ως:

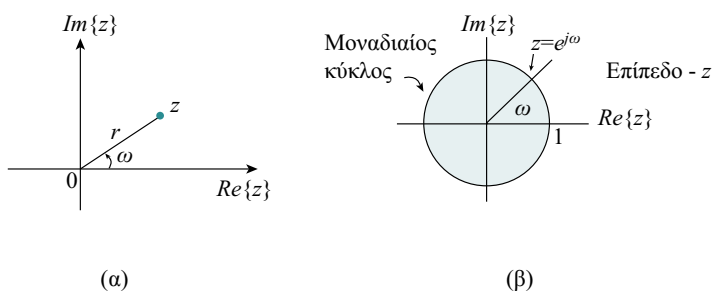
$$x(n) \xleftrightarrow{Z} X(z) \quad (3.2)$$

Ο M.Z. όπως ορίζεται στη σχέση (3.1) ονομάζεται *αμφίπλευρος* M.Z. (bilateral  $z$ -transform), γιατί το άθροισμα εκτείνεται από το  $-\infty$  έως το  $+\infty$ . Υπάρχει και ο *μονόπλευρος* M.Z. (unilateral  $z$ -transform), τον οποίο θα εξετάσουμε αργότερα (ενότητα 3.3), όπου το άθροισμα εκτείνεται από το 0 έως το  $+\infty$ . Ο μονόπλευρος M.Z. εφαρμόζεται στην ανάλυση αιτιατών συστημάτων με μη μηδενικές αρχικές συνθήκες.

Η μιγαδική μεταβλητή  $z$  σε πολικές συντεταγμένες εκφράζεται ως:

$$z = re^{j\omega} \quad (3.3)$$

όπου  $r$  το μέτρο της  $z$  και  $\omega$  η γωνία της  $z$ , όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.1α.



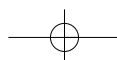
**Σχήμα 3.1**

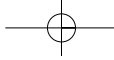
(α) Μιγαδικό επίπεδο, (β) ο M.Z. όταν υπολογίζεται για τις τιμές του  $z$  που ανήκουν στο μοναδιαίο κύκλο ισοδυναμεί με τον DTFT.

Τώρα μπορούμε να εκφράσουμε την (3.1) ως συνάρτηση των  $r$  και  $\omega$ , αντικαθιστώντας σ' αυτήν τη μεταβλητή  $z$  από τη σχέση (3.3). Έτσι έχουμε:

$$X(re^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)(re^{j\omega})^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [x(n)r^{-n}]e^{-j\omega n} = F\{x(n)r^{-n}\} \quad (3.4)$$

όπου με  $F\{g(n)\}$  συμβολίζουμε το μετασχηματισμό Fourier της ακολουθίας  $g(n)$ .





Η σχέση (3.4) μας δείχνει ότι ο Μ.Ζ. της ακολουθίας  $x(n)$  στο σημείο  $z = re^{j\omega}$  ισούται με το μετασχηματισμό Fourier διακριτού χρόνου (DTFT) της τροποποιημένης ακολουθίας  $x(n)r^{-n}$  για τη γωνιακή συχνότητα  $\omega$ . Αν η παράμετρος  $r$  επιλεγεί ίση με τη μονάδα, τότε η (3.4) μας δίνει τον DTFT της  $x(n)$ . Επιπλέον, όταν η παράμετρος  $\omega$  μεταβάλλεται, τότε όλες οι τιμές της μιγαδικής μεταβλητής  $z$  θα βρίσκονται πάνω στο μοναδιαίο κύκλο (unit circle) του μιγαδικού επιπέδου, δηλαδή στον κύκλο που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ίση με τη μονάδα. Η σχέση μεταξύ του DTFT και του Μ.Ζ. είναι πλέον προφανής. *Ο DTFT μιας ακολουθίας ισούται με το Μ.Ζ. αυτής για τις τιμές του  $z$  που βρίσκονται πάνω στο μοναδιαίο κύκλο του μιγαδικού επιπέδου-z (z-plane)* (Βλ. Σχήμα 3.1β). Δηλαδή για  $r = |z| = 1$  η σχέση (3.4) καταλήγει σ' αυτή του διακριτού χρόνου μετασχηματισμού Fourier:

$$X(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} = X(e^{j\omega}) = F\{x(n)\} \quad (3.5)$$

### 3.1.2 Ύπαρξη του Μετασχηματισμού-z

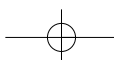
Ο Μ.Ζ., ως δυναμοσειρά απείρων όρων, μπορεί να μην υπάρχει, δηλαδή να μην συγκλίνει για όλες τις τιμές της μιγαδικής μεταβλητής  $z$ . Η περιοχή τιμών του  $z$  για τις οποίες ο Μ.Ζ.  $X(z)$  έχει πεπερασμένες τιμές καλείται *περιοχή σύγκλισης* (Π.Σ.) (region of convergence, ROC). Έστω, τώρα ότι η  $x(n)r^{-n}$  είναι αθροίσιμη κατ' απόλυτη τιμή. Τότε

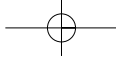
$$|X(z)| = \left| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n} \right| = \left| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)r^{-n}e^{-j\omega n} \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)r^{-n}e^{-j\omega n}| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)r^{-n}| < \infty \quad (3.6)$$

Η σχέση (3.6) μας δείχνει ότι η  $|X(z)|$  είναι πεπερασμένη (συγκλίνει) αν η ακολουθία  $x(n)r^{-n}$  είναι αθροίσιμη κατ' απόλυτη τιμή (absolutely summable). Γίνεται φανερό ότι η σύγκλιση εξαρτάται μόνο από το  $r = |z|$  και όχι από το  $\omega$ . Γενικά, ισχύει ότι η Π.Σ. θα καθορίζεται από ομόκεντρους δακτυλίους με κέντρο την αρχή των αξόνων του μιγαδικού επιπέδου. Στη γενική περίπτωση η Π.Σ. του Μ.Ζ. θα είναι της μορφής  $R_1 < |z| < R_2$ , όπου τα όρια  $R_1, R_2$  εξαρτώνται από την ακολουθία  $x(n)$ . Ας προσπαθήσουμε να εξετάσουμε τις διαφορετικές περιπτώσεις σύγκλισης με τη βοήθεια ορισμένων παραδειγμάτων.

#### Παράδειγμα 3.1

Να υπολογισθεί η Π.Σ. του Μ.Ζ. της δεξιόπλευρης (right-sided) εκθετικής ακολουθίας  $x_1(n) = a^n u(n)$ .





### Λύση

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό (3.1) του Μ.Ζ. έχουμε:

$$X_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (az^{-1})^n \quad (3.7)$$

Η (3.7) είναι άθροισμα απείρων όρων γεωμετρικής προόδου με λόγο  $az^{-1}$  και ισούται με

$$X_1(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a} \quad (3.8)$$

με την προϋπόθεση βέβαια ότι  $|az^{-1}| < 1$  ή ισοδύναμα  $|z| > |a|$ . Η ανισότητα αυτή προσδιορίζει την Π.Σ. πάνω στο μιγαδικό επίπεδο  $z$ . Πρόκειται για όλα τα σημεία που βρίσκονται στο εξωτερικό του κύκλου με ακτίνα  $|a|$ , όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.2α. Ο Μ.Ζ. της  $x_1(n)$  είναι ρητή συνάρτηση (σχέση 3.8). Κάθε συνάρτηση αυτής της μορφής χαρακτηρίζεται από τα μηδενικά (δηλαδή τις ρίζες του αριθμητή) και τους πόλους (δηλαδή τις ρίζες του παρανομαστή). Η συνάρτηση  $X_1(z)$  έχει ένα μηδενικό στο σημείο  $z = 0$  και ένα πόλο στο  $z = a$ . Παρατηρούμε επομένως, ότι η Π.Σ. της  $X_1(z)$  εκτείνεται σε όλο το μιγαδικό επίπεδο που είναι έξω από τον κύκλο ο οποίος έχει ακτίνα τον πόλο αυτής. Η Π.Σ. δεν περιέχει ποτέ κάποιον πόλο.

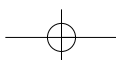
Γενικά, μια δεξιόπλευρη ακολουθία  $x(n)$  ικανοποιεί τη συνθήκη  $x(n) = 0$  για  $n < N_1$ . Ο Μ.Ζ. αυτής ισούται με:

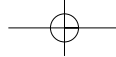
$$X(z) = \sum_{n=N_1}^{+\infty} x(n)z^{-n} \quad (3.9)$$

και η Π.Σ. αυτού είναι της μορφής  $|z| > R_1$ . Δηλαδή η Π.Σ. περιλαμβάνει όλες τις τιμές του μιγαδικού επιπέδου  $z$  που βρίσκονται έξω από τον κύκλο ακτίνας  $|z| = R_1$ , όπου  $R_1$  είναι εκείνος ο πόλος της  $X(z)$  ο οποίος απέχει περισσότερο από την αρχή των αξόνων. Προσοχή θα πρέπει να δοθεί όταν  $N_1 < 0$ . Σε μια τέτοια περίπτωση η σχέση (3.9) περιλαμβάνει όρους με θετικές δυνάμεις του  $z$ . Επομένως, η τιμή  $z = \infty$  θα πρέπει να αποκλειστεί από την Π.Σ., αφού αυτή θα οδηγήσει σε μη φραγμένο Μ.Ζ.

### Παράδειγμα 3.2

Να υπολογισθεί η Π.Σ. της αριστερόπλευρης (left-sided) εκθετικής ακολουθίας  $x_2(n) = -a^n u(-n-1)$ .





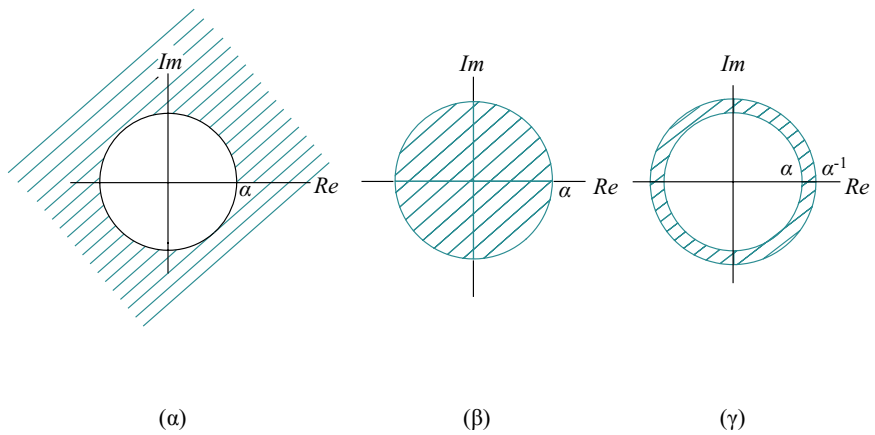
**Λύση**

Από τον ορισμό (3.1) του Μ.Ζ. έχουμε:

$$\begin{aligned} X_2(z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_2(n)z^{-n} = - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u(-n-1)z^{-n} = - \sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n} = \\ &= - \sum_{n=1}^{+\infty} a^{-n} z^n = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} (a^{-1}z)^n \end{aligned} \tag{3.10}$$

Για  $|a^{-1}z| < 1$  ή ισοδύναμα  $|z| < |a|$  το άθροισμα της (3.10) συγκλίνει δίνοντας:

$$X_2(z) = 1 - \frac{1}{1 - a^{-1}z} = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a} \tag{3.11}$$



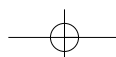
**Σχήμα 3.2**

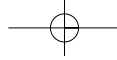
Περιοχή σύγκλισης (α) δεξιόπλευρης, (β) αριστερόπλευρης, (γ) αμφίπλευρης ακολουθίας

Η Π.Σ. της  $X_2(z)$  είναι οι τιμές του μιγαδικού επιπέδου  $z$  με  $|z| < |a|$ , δηλαδή το εσωτερικό του κύκλου ακτίνας  $|z| = |a|$  (Σχήμα 3.2β). Είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι οι συναρτήσεις  $X_1(z)$  και  $X_2(z)$  είναι ακριβώς ίδιες (Βλ. σχέσεις 3.8 και 3.11). Η μόνη διαφορά βρίσκεται στην Π.Σ. Αυτό σημαίνει ότι η Π.Σ. αποτελεί αναπόσπαστο τμήμα του Μ.Ζ. και πρέπει πάντοτε να καθορίζεται. Αν μας δοθεί μόνο ο Μ.Ζ. χωρίς την αντίστοιχη Π.Σ. αυτού, θα υπάρχει αβεβαιότητα στον προσδιορισμό της ακολουθίας που οδήγησε σ' αυτόν, αφού μπορεί να υπάρχουν περισσότερες από μία απαντήσεις.

Γενικά, μία αριστερόπλευρη ακολουθία  $x(n)$  ικανοποιεί τη συνθήκη  $x(n) = 0$  για  $n > N_2$ . Ο Μ.Ζ. αυτής ισούται με:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{N_2} x(n)z^{-n} \tag{3.12}$$





και η Π.Σ. αυτού είναι της μορφής  $|z| < R_2$ , δηλαδή οι τιμές του μιγαδικού επιπέδου  $z$  που βρίσκονται στο εσωτερικό του κύκλου  $|z| = R_2$ , όπου  $R_2$  είναι εκείνος ο πόλος της  $X(z)$  ο οποίος απέχει λιγότερο από την αρχή των αξόνων. Προσοχή θα πρέπει να δοθεί όταν  $N_2 > 0$ . Σ' αυτή την περίπτωση η σχέση (3.12) περιλαμβάνει όρους με αρνητικές δυνάμεις του  $z$ . Επομένως, η τιμή  $z = 0$  θα πρέπει να αποκλειστεί από την Π.Σ., αφού αυτή θα οδηγήσει σε μη φραγμένο Μ.Ζ.

### Παράδειγμα 3.3

Να υπολογιστεί η Π.Σ. της αμφίπλευρης (two-sided) εκθετικής ακολουθίας  $x(n) = a^{|n|}$ ,  $a > 0$ .

#### Λύση

Η ακολουθία  $x(n)$  μπορεί να εκφραστεί ως άθροισμα δύο άλλων ακολουθιών, μιας δεξιόπλευρης και μιας αριστερόπλευρης, ως εξής:

$$x(n) = a^n u(n) + a^{-n} u(-n-1) \quad (3.13)$$

ή

$$x(n) = x_1(n) + x_2(n) \quad (3.14)$$

Από τα δύο προηγούμενα παραδείγματα γνωρίζουμε ότι οι Μ.Ζ. των παραπάνω ακολουθιών είναι:

$$X_1(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} \quad \text{για } |z| > a \quad (3.15)$$

$$X_2(z) = \frac{-1}{1-a^{-1}z^{-1}} \quad \text{για } |z| < a^{-1} \quad (3.16)$$

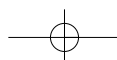
Ο Μ.Ζ.  $X(z)$  της αμφίπλευρης ακολουθίας ισούται με το άθροισμα των Μ.Ζ. των επιμέρους ακολουθιών (βλ. ιδιότητα γραμμικότητας στην επόμενη υποενότητα), άρα:

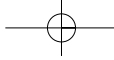
$$X(z) = X_1(z) + X_2(z) \quad (3.17)$$

$$\text{ή} \quad X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} - \frac{1}{1-a^{-1}z^{-1}}, \quad a < |z| < a^{-1} \quad (3.18)$$

$$\text{ή} \quad X(z) = \frac{a^2 - 1}{a} \frac{z}{(z-a)(z-a^{-1})}, \quad a < |z| < a^{-1}$$

Η αντίστοιχη Π.Σ. φαίνεται στο Σχήμα 3.2γ και ισούται με το κοινό τμήμα των δύο περιοχών όπως τις γνωρίσαμε στα παραδείγματα 3.1 και 3.2 προηγουμένως. Είναι φανερό ότι για να υπάρχει κοινό τμήμα (επικάλυψη) μεταξύ των δύο περιοχών σύγκλι-





σης, θα πρέπει  $a < 1$ . Για  $a > 1$  δεν υπάρχει επικάλυψη των περιοχών σύγκλισης και έτσι η (3.13) δεν θα έχει Μ.Ζ., παρόλο που οι επιμέρους ακολουθίες που την απαρτίζουν (αριστερόπλευρη και δεξιόπλευρη) από μόνες τους έχουν!

Γενικά, εάν υπάρχει η Π.Σ. μιας αμφίπλευρης ακολουθίας της μορφής  $x(n) = x_1(n) + x_2(n)$ , όπου  $x_1(n)$ ,  $x_2(n)$  δεξιόπλευρη και αριστερόπλευρη ακολουθία άπειρου μήκους αντίστοιχα, τότε αυτή αποτελείται από τις τιμές του μιγαδικού επιπέδου- $z$  για τις οποίες ισχύει:

$$R_1 < |z| < R_2 \quad (3.20)$$

Πρόκειται δηλαδή για ένα δακτύλιο του οποίου η μικρότερη ακτίνα  $R_1$  προσδιορίζεται από εκείνον τον πόλο της  $X_1(z)$  ο οποίος απέχει περισσότερο από την αρχή των αξόνων του επιπέδου- $z$ , ενώ η μεγαλύτερη ακτίνα  $R_2$  προσδιορίζεται από εκείνο τον πόλο της  $X_2(z)$  ο οποίος απέχει λιγότερο από την αρχή των αξόνων. Αν  $R_1 \geq R_2$ , τότε οι δύο περιοχές σύγκλισης δεν καλύπτουν η μία την άλλη και η τελική Π.Σ. της  $X(z)$  είναι το κενό, δηλαδή ο Μ.Ζ. δεν υπάρχει.

#### Σημαντική παρατήρηση

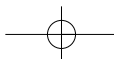
Μία πεπερασμένου μήκους ακολουθία αποτελείται από πεπερασμένο πλήθος μη μηδενικών στοιχείων. Έστω ότι μια τέτοια ακολουθία  $x(n)$  εκτείνεται μεταξύ  $N_1$  και  $N_2$ , δηλαδή

$$x(n) = 0 \text{ για } n < N_1 \text{ ή } n > N_2 \quad (3.21)$$

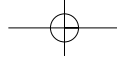
όπου  $N_1, N_2$  πεπερασμένοι αριθμοί. Ο Μ.Ζ. αυτής ισούται με:

$$X(z) = \sum_{n=N_1}^{N_2} x(n)z^{-n} \quad (3.22)$$

Είναι φανερό ότι η σειρά αυτή συγκλίνει για κάθε τιμή του  $z$ , δηλαδή η Π.Σ. είναι όλο το μιγαδικό επίπεδο- $z$ . Προσοχή όμως χρειάζεται στα εξής σημεία: Εάν  $N_1$  αρνητικός και  $N_2$  θετικός, τότε το άθροισμα περιλαμβάνει όρους με αρνητικές και θετικές δυνάμεις του  $z$ . Έτσι, όταν  $z = 0$ , οι όροι με αρνητικές δυνάμεις του  $z$  τείνουν στο άπειρο, ενώ όταν  $z = \infty$ , οι όροι με θετικές δυνάμεις του  $z$  τείνουν στο άπειρο. Επομένως, σε μια τέτοια περίπτωση η Π.Σ. δεν περιλαμβάνει τις τιμές  $z = 0$  και  $z = \infty$ . Εάν  $N_1 \geq 0$ , τότε έχουμε μόνο αρνητικές δυνάμεις του  $z$  στην εξίσωση (3.22) και, κατά συνέπεια, η Π.Σ. περιλαμβάνει την τιμή  $z = \infty$ . Εάν  $N_2 \leq 0$ , τότε έχουμε μόνο θετικές δυνάμεις του  $z$  στην εξίσωση (3.22) και κατά συνέπεια η Π.Σ. περιλαμβάνει την τιμή  $z = 0$ .







### Παράδειγμα 3.4

Να υπολογιστεί ο Μ.Ζ. καθενός από τα παρακάτω διακριτά σήματα πεπερασμένης διάρκειας: (Η έντονη υπογράμμιση υποδηλώνει την χρονική στιγμή  $n = 0$ ).

$$\alpha. \{x_1(n)\} = \{\underline{3}, 4, 5, 0, 1, 2\}$$

$$\epsilon. x_5(n) = \delta(n)$$

$$\beta. \{x_2(n)\} = \{3, 4, \underline{5}, 0, 1, 2\}$$

$$\sigma\tau. x_6(n) = \delta(n-m), m > 0$$

$$\gamma. \{x_3(n)\} = \{\underline{0}, 0, 3, 4, 5, 0, 1, 2\}$$

$$\zeta. x_7(n) = \delta(n+m), m > 0$$

$$\delta. \{x_4(n)\} = \{4, 6, \underline{5}, 0, 1, 2\}$$

### Λύση

Από τον ορισμό (3.1) του Μ.Ζ. έχουμε:

$$\alpha. X_1(z) = 3 + 4z^{-1} + 5z^{-2} + z^{-4} + 2z^{-5}, \quad \text{με Π.Σ.:} \quad \text{όλο το επίπεδο-}z \text{ εκτός του } z = 0$$

$$\beta. X_2(z) = 3z^2 + 4z + 5 + z^{-2} + 2z^{-3}, \quad \text{με Π.Σ.:} \quad \text{όλο το επίπεδο-}z \text{ εκτός του } z = 0 \text{ και του } z = \infty$$

$$\gamma. X_3(z) = 3z^{-2} + 4z^{-3} + 5z^{-4} + z^{-6} + 2z^{-7}, \quad \text{με Π.Σ.:} \quad \text{όλο το επίπεδο-}z \text{ εκτός του } z = 0$$

$$\delta. X_4(z) = 4z^2 + 6z + 5 + z^{-2} + 2z^{-3}, \quad \text{με Π.Σ.:} \quad \text{όλο το επίπεδο-}z \text{ εκτός του } z = 0 \text{ και του } z = \infty$$

$$\epsilon. X_5(z) = 1, \quad \text{με Π.Σ.:} \quad \text{όλο το επίπεδο-}z$$

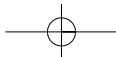
$$\sigma\tau. X_6(z) = z^{-m}, \text{ όπου } m > 0, \quad \text{με Π.Σ.:} \quad \text{όλο το επίπεδο-}z \text{ εκτός του } z = 0$$

$$\zeta. X_7(z) = z^m, \text{ όπου } m > 0, \quad \text{με Π.Σ.:} \quad \text{όλο το επίπεδο-}z \text{ εκτός του } z = \infty$$

Από το παράδειγμα αυτό γίνεται φανερό ότι η Π.Σ. του Μ.Ζ. μίας ακολουθίας πεπερασμένου μήκους (διάρκειας), είναι όλο το επίπεδο- $z$ , εκτός ίσως από τα σημεία  $z = 0$  και/ή  $z = \infty$ . Αυτά τα σημεία αποκλείονται γιατί το  $z^m$  ( $m > 0$ ) τείνει στο άπειρο για  $z = \infty$  και το  $z^{-m}$  τείνει στο άπειρο για  $z = 0$ .

Από το ίδιο παράδειγμα συνειδητοποιούμε επίσης ότι από μαθηματική άποψη ο Μ.Ζ. είναι απλώς ένας εναλλακτικός τρόπος αναπαράστασης ενός σήματος. Βλέπουμε, δηλαδή, ότι ο συντελεστής του  $z^{-n}$  είναι ουσιαστικά η τιμή του σήματος τη χρονική στιγμή  $n$ . Με άλλα λόγια, ο εκθέτης του  $z$  παρέχει εκείνη την πληροφορία για το χρόνο, η οποία μας είναι απαραίτητη για τον προσδιορισμό των δειγμάτων ενός σήματος.

Σε πολλές περιπτώσεις μπορούμε να εκφράσουμε το άθροισμα μιας σειράς πεπερασμένου ή απείρου μήκους, σε κλειστή μορφή. Στις περιπτώσεις αυτές ο Μ.Ζ. μας παρέχει μια εναλλακτική συμπαγή μορφή αναπαράστασης ενός σήματος, όπως φαί-



νεται και στον Πίνακα 3.1. που ακολουθεί.

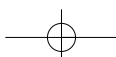
#### ΣΥΝΗΘΗ ΖΕΥΓΗ Μ.Ζ.

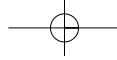
Ορισμένα από τα πιο συνηθισμένα ζεύγη Μ.Ζ. παρατίθενται στον Πίνακα 3.1. Αυτά θα μας βοηθήσουν πάρα πολύ και στον υπολογισμό του αντίστροφου Μ.Ζ., εκφράζοντας τη συνάρτηση  $X(z)$  ως γραμμικό συνδυασμό απλούστερων συναρτήσεων, όπως θα δούμε στην ενότητα 3.2.

#### Πίνακας 3.1

Συνήθη ζεύγη μετασχηματισμών-z

Σήμα	Μετασχηματισμός-z	Περιοχή Σύγκλισης
$\delta(n)$	1	Όλο το z
$\delta(n - m)$	$z^{-m}$	Όλο το z, εκτός $z = 0$ αν $m > 0$ ή $z = \infty$ αν $m < 0$
$u(n)$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$	$ z  > 1$
$-u(-n - 1)$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$	$ z  < 1$
$a^n u(n)$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$	$ z  >  a $
$-a^n u(-n - 1)$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$	$ z  <  a $
$na^n u(n)$	$\frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$	$ z  >  a $
$-na^n u(-n - 1)$	$\frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$	$ z  <  a $
$\cos(\omega_0 n)u(n)$	$\frac{1 - (\cos \omega_0)z^{-1}}{1 - (2 \cos \omega_0)z^{-1} + z^{-2}}$	$ z  > 1$
$\sin(\omega_0 n)u(n)$	$\frac{(\sin \omega_0)z^{-1}}{1 - (2 \cos \omega_0)z^{-1} + z^{-2}}$	$ z  > 1$





$$\begin{aligned} (r^n \cos \omega_0 n) u(n) & \quad \frac{1 - (r \cos \omega_0) z^{-1}}{1 - (2r \cos \omega_0) z^{-1} + r^2 z^{-2}} & |z| > |r| \\ (r^n \sin \omega_0 n) u(n) & \quad \frac{(r \sin \omega_0) z^{-1}}{1 - (2r \cos \omega_0) z^{-1} + r^2 z^{-2}} & |z| > |r| \end{aligned}$$

### 3.1.3 Ιδιότητες του μετασχηματισμού-z

Ο Μ.Ζ. έχει ορισμένες ιδιότητες οι οποίες τον καθιστούν ένα εξαιρετικά χρήσιμο εργαλείο στη μελέτη των σημάτων και συστημάτων διακριτού χρόνου. Στην παρούσα υποενότητα παρουσιάζουμε με συντομία τις πιο χρήσιμες από αυτές και όλες μαζί τις παραθέτουμε στον Πίνακα 3.2.

#### ΓΡΑΜΜΙΚΟΤΗΤΑ

Εάν

$$x_1(n) \xrightarrow{Z} X_1(z) \text{ με Π.Σ. } P_1$$

και

$$x_2(n) \xrightarrow{Z} X_2(z) \text{ με Π.Σ. } P_2$$

τότε

$$ax_1(n) + bx_2(n) \xrightarrow{Z} aX_1(z) + bX_2(z) \text{ με Π.Σ. τουλάχιστον } P_1 \cap P_2 \quad (3.23)$$

όπου  $a, b$  σταθερές και  $P_1 \cap P_2$  η τομή των περιοχών  $P_1$  και  $P_2$ . Η λέξη «τουλάχιστον» χρησιμοποιήθηκε για την περίπτωση κατά την οποία ο γραμμικός συνδυασμός είναι τέτοιος ώστε κάποια μηδενικά εξουδετερώνουν ορισμένους πόλους. Σε μια τέτοια περίπτωση η Π.Σ. είναι μεγαλύτερη από την τομή των δύο περιοχών.

#### ΟΛΙΣΘΗΣΗ ΣΤΟ ΧΡΟΝΟ

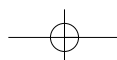
$$\text{Εάν } x(n) \xrightarrow{Z} X(z) \text{ με Π.Σ. } P$$

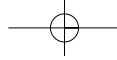
$$\text{τότε } x(n-m) \xrightarrow{Z} z^{-m} X(z) \text{ με Π.Σ. } P' \quad (3.24)$$

όπου  $P' = P$  με ενδεχόμενο όμως την προσθήκη ή απόρριψη των τιμών 0 και  $\infty$ , λόγω του παράγοντα  $z^{-m}$ .

**Απόδειξη:**

$$Z\{x(n-m)\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n-m) z^{-n} = z^{-m} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n-m) z^{-(n-m)} = z^{-m} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x(l) z^{-l} = z^{-m} X(z)$$





### ΣΥΝΕΛΙΞΗ ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ

Εάν  $x_1(n) \xrightarrow{Z} X_1(z)$  με Π.Σ.  $P_1$

και  $x_2(n) \xrightarrow{Z} X_2(z)$  με Π.Σ.  $P_2$

τότε  $x_1(n) * x_2(n) \xrightarrow{Z} X_1(z)X_2(z)$  με Π.Σ. τουλάχιστον  $P_1 \cap P_2$  (3.25)

#### Απόδειξη:

Από τον ορισμό της συνέλιξης της ενότητας 1.5 του Κεφαλαίου 1 γνωρίζουμε ότι

$$x_1(n) * x_2(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_1(m)x_2(n-m).$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση αυτή στην (3.1) έχουμε:

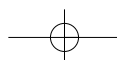
$$\begin{aligned} Z\{x_1(n) * x_2(n)\} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [x_1(n) * x_2(n)]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_1(m) \cdot x_2(n-m) \right] z^{-n} = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_1(m) \left[ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_2(n-m)z^{-n} \right] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_1(m) [z^{-m}X_2(z)] = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_1(m)z^{-m}X_2(z) = X_1(z)X_2(z) \end{aligned}$$

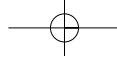
Στον Πίνακα 3.2 παραθέτουμε τις πιο γνωστές ιδιότητες του Μ.Ζ.

### Πίνακας 3.2

Ιδιότητες του Μ.Ζ.

Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχηματισμός-z	Περιοχή σύγκλισης
	$x(n)$	$X(z)$	$P: R_1 <  z  < R_2$
	$x_1(n)$	$X_1(z)$	$P_1$
	$x_2(n)$	$X_2(z)$	$P_2$
Γραμμικότητα	$\alpha x_1(n) + bx_2(n)$	$\alpha X_1(z) + bX_2(z)$	$P_1 \cap P_2$ τουλάχιστον
Ολίσθηση στο χρόνο	$x(n-m)$	$z^{-m}X(z)$	$P$ , εκτός $z=0$ αν $m > 0$ ή $z=\infty$ αν $m < 0$
Κλιμάκωση στο πεδίο-z	$\alpha^n x(n)$	$X(\alpha^{-1}z)$	$ \alpha R_1 <  z  <  \alpha R_2$





Κατοπτρισμός στο χρόνο	$x(-n)$	$X(z^{-1})$	$\frac{1}{R_2} <  z  < \frac{1}{R_1}$
Συζυγία	$x^*(n)$	$X^*(z^*)$	$P$
Παραγώγιση στο πεδίο-z	$nx(n)$	$-z \frac{dX(z)}{dz}$	$P$
Συνέλιξη	$x_1(n)*x_2(n)$	$X_1(z)X_2(z)$	$P_1 \cap P_2$ τουλάχιστον
Πρώτη διαφορά	$x(n) - x(n-1)$	$(1-z^{-1})X(z)$	Τουλάχιστον η τομή της $P$ και της $ z  > 0$

Θεώρημα αρχικής τιμής    Αν  $x(n) = 0$  για  $n < 0$ , τότε  $x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$

### Παράδειγμα 3.5

Υπολογίστε το Μ.Ζ. των σημάτων  $x_2(n)$  και  $x_3(n)$  του Παραδείγματος 3.4, βασιζόμενοι στο Μ.Ζ. του σήματος  $x_1(n)$ .

#### Λύση

Διαπιστώνουμε εύκολα ότι  $x_2(n) = x_1(n+2)$  και  $x_3(n) = x_1(n-2)$ . Άρα, με βάση την ιδιότητα της ολίσθησης στο χρόνο, βρίσκουμε ότι

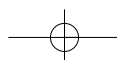
$$X_2(z) = z^2 X_1(z) = 3z^2 + 4z + 5 + z^{-2} + 2z^{-3} \text{ και } X_3(z) = z^{-2} X_1(z) = 3z^{-2} + 4z^{-3} + 5z^{-4} + z^{-6} + 2z^{-7}.$$

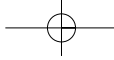
Ας σημειωθεί ότι λόγω του πολλαπλασιασμού επί  $z^2$  η Π.Σ. του  $X_2(z)$  δεν περιλαμβάνει το σημείο  $z = \infty$ , αν και αυτό ανήκε στην Π.Σ. του  $X_1(z)$ .

Το παράδειγμα αυτό μας δίνει τη δυνατότητα να κατανοήσουμε καλύτερα την ιδιότητα της ολίσθησης. Πράγματι, αν θυμηθούμε ότι ο συντελεστής του  $z^{-n}$  αντιστοιχεί στην τιμή του δείγματος στην χρονική στιγμή, καταλαβαίνουμε αμέσως ότι η καθυστέρηση ενός σήματος κατά  $m$  ( $m > 0$ ) δείγματα, δηλαδή  $x(n) \rightarrow x(n-m)$ , ισοδυναμεί με πολλαπλασιασμό όλων των όρων του Μ.Ζ. επί  $z^{-m}$ . Ο συντελεστής του  $z^{-n}$  γίνεται συντελεστής του  $z^{-(n+m)}$ .

### Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 3.1

Να υπολογίσετε την έξοδο  $y(n)$  του Παραδείγματος 1.6, αξιοποιώντας τις ιδιότητες του Μ.Ζ.





### Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 3.2

Να υπολογίσετε το Μ.Ζ. του σήματος  $x(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, 1, \dots, N-1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$

#### Σύνοψη ενότητας

Στην ενότητα αυτή γνωρίσαμε το Μ.Ζ.  $X(z)$  της ακολουθίας  $x(n)$  και είδαμε ότι:

Η Π.Σ. της συνάρτησης  $X(z)$  είναι στη γενική περίπτωση, ένας κυκλικός δακτύλιος ( $R_1 < |z| < R_2$ ) στο επίπεδο- $z$  με κέντρο την αρχή των αξόνων. Σε ορισμένες περιπτώσεις  $R_1 = 0$ , οπότε η Π.Σ. γίνεται ένας δίσκος ακτίνας  $R_2$ , ενώ σε άλλες  $R_2 = \infty$ , οπότε η Π.Σ. εκτείνεται σε όλο το επίπεδο  $|z| > R_1$ .

Η Π.Σ. δεν περιλαμβάνει του πόλους της συνάρτησης  $X(z)$ .

Εάν η  $x(n)$  είναι πεπερασμένου μήκους, τότε η Π.Σ. είναι όλο το επίπεδο- $z$ , με πιθανή εξαίρεση τα σημεία  $z = 0$  και / ή  $z = \infty$ .

Εάν η  $X(z)$  είναι ρητή και η  $x(n)$  δεξιόπλευρη, τότε η Π.Σ. ορίζεται στο επίπεδο- $z$  εκτός του κύκλου με ακτίνα τον πλέον απομακρυσμένο πόλο της  $X(z)$ . Εάν επιπλέον, η  $x(n)$  είναι αιτιατή, τότε η Π.Σ. συμπεριλαμβάνει και την τιμή  $z = \infty$ .

Εάν η  $X(z)$  είναι ρητή και η  $x(n)$  αριστερόπλευρη, τότε η Π.Σ. ορίζεται στο επίπεδο- $z$  εντός του κύκλου με ακτίνα τον πλησιέστερο στο κέντρο πόλο της  $X(z)$ . Εάν, επιπλέον, η  $x(n)$  είναι αντι-αιτιατή (δηλαδή αριστερόπλευρη και ίση με 0 για  $n > 0$ ), τότε η Π.Σ. συμπεριλαμβάνει και την τιμή  $z = 0$ .

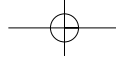
#### 3.2 Ο αντίστροφος μετασχηματισμός-z

Ο αντίστροφος Μ.Ζ. μας βοηθά να υπολογίσουμε το σήμα διακριτού χρόνου  $x(n)$  όταν γνωρίζουμε το Μ.Ζ. αυτού,  $X(z)$ . Συμβολικά γράφουμε  $x(n) = Z^{-1}\{X(z)\}$ . Αποδεικνύεται ότι ο αντίστροφος Μ.Ζ. της  $X(z)$  δίνεται από τη σχέση:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z) z^{n-1} dz \quad (3.26)$$

όπου  $c$  μια αριστερόστροφη κλειστή καμπύλη ολοκλήρωσης γύρω από την αρχή των αξόνων και εντός της Π.Σ. της  $X(z)$ . Για δεδομένη Π.Σ. ο αντίστροφος Μ.Ζ. είναι μοναδικά ορισμένος.

Ένας τρόπος να υπολογίσουμε την  $x(n)$  είναι να αναπτύξουμε την  $X(z)$  σε δυναμοσειρά (power-series expansion) ως προς  $z^{-1}$ , δηλαδή:



$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n} = \dots + x(-2)z^2 + x(-1)z^1 + x(0)z^0 + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \dots \tag{3.27}$$

Διαπιστώνουμε εύκολα ότι το ζητούμενο σήμα είναι οι συντελεστές του πολωνύμου. Όταν η  $X(z)$  δίνεται σε κλειστή μορφή, λ.χ. ως μια ρητή συνάρτηση πολωνύμων, ένα τέτοιο ανάπτυγμα δεν είναι εύκολο να υπολογιστεί. Σε αυτές τις περιπτώσεις, για τον υπολογισμό της ακολουθίας  $x(n)$ , χρησιμοποιούμε είτε τη μέθοδο της ανάπτυξης σε μερικά κλάσματα (partial-fraction expansion) είτε τη μέθοδο των ολοκληρωτικών υπολοίπων (residue method). Θα εξετάσουμε στα επόμενα εδάφια τον υπολογισμό του αντίστροφου M.Z. με ανάπτυξη σε δυναμοσειρά και με ανάπτυξη σε μερικά κλάσματα.

### 3.2.1 Υπολογισμός του αντίστροφου M.Z. με ανάπτυξη σε δυναμοσειρά

Η ανάπτυξη μιας ρητής συνάρτησης σε δυναμοσειρά επιτυγχάνεται συνήθως με *συνεχή διαίρεση* (long division). Η μέθοδος αυτή δεν καταλήγει σε μια αναλυτική έκφραση για την  $x(n)$ . Είναι μία αριθμητική μέθοδος με την οποία μπορούμε να υπολογίζουμε ένα νέο στοιχείο της  $x(n)$  κάθε φορά.

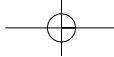
#### Παράδειγμα 3.6

Να υπολογιστεί η δεξιόπλευρη ακολουθία  $x(n)$  της οποίας ο M.Z. είναι:

$$X(z) = \frac{1 + 2z^{-1}}{1 + 0,4z^{-1} - 0,12z^{-2}}$$

**Λύση** Η συνεχής διαίρεση του αριθμητή με τον παρανομαστή μας δίνει:

$$\begin{array}{r}
 1 + 0,4z^{-1} - 0,12z^{-2} \overline{) 1 + 1,6z^{-1} - 0,52z^{-2} + 0,4z^{-3} + \dots} \\
 \underline{1 + 2z^{-1}} \phantom{- 0,12z^{-2}} \\
 1,6z^{-1} + 0,12z^{-2} \phantom{+ \dots} \\
 \underline{1,6z^{-1} + 0,64z^{-2} - 0,192z^{-3}} \phantom{+ \dots} \\
 -0,52z^{-2} + 0,192z^{-3} \phantom{+ \dots} \\
 \underline{-0,52z^{-2} - 0,208z^{-3} + 0,0624z^{-4}} \phantom{+ \dots} \\
 -0,4z^{-3} - 0,0624z^{-4} \phantom{+ \dots} \\
 \dots\dots\dots \\
 \dots\dots\dots
 \end{array}$$



Επομένως η  $X(z)$  μπορεί να εκφραστεί ως δυναμοσειρά:

$$X(z) = 1 + 1,6z^{-1} - 0,52z^{-2} + 0,4z^{-3} + \dots$$

Είναι φανερό ότι:

$$x(0) = 1, x(1) = 1,6, x(2) = -0,52, x(3) = 0,4, \dots$$

Συνεχίζοντας τη διαίρεση θα μπορούσαμε να πάρουμε και άλλα στοιχεία της  $x(n)$ .

### 3.2.2 Υπολογισμός του αντίστροφου M.Z. με ανάπτυξη σε μερικά κλάσματα

Έστω  $X(z)$  ρητή συνάρτηση της μορφής

$$X(z) = \frac{C(z)}{D(z)} = \frac{a_0 + a_1z^{-1} + \dots + a_Mz^{-M}}{1 + b_1z^{-1} + \dots + b_Nz^{-N}} \quad (3.28)$$

Θεωρήσαμε ότι  $b_0 = 1$ . Αυτό όμως δεν περιορίζει τη γενικότητα της έκφρασης, αφού εάν  $b_0 \neq 1$ , μπορούμε να διαιρέσουμε αριθμητή και παρονομαστή με  $b_0$  και να καταλήξουμε στη μορφή της σχέσης (3.28). Μία ρητή συνάρτηση της μορφής αυτής ονομάζεται κανονική (proper) εάν  $b_N \neq 0$  και  $M < N$ , δηλαδή όταν ο αριθμός των μηδενικών της συνάρτησης είναι μικρότερος του αριθμού των πόλων αυτής. Εάν η ρητή συνάρτηση είναι μη-κανονική ( $M \geq N$ ), τότε αυτή μπορεί πάντοτε να εκφραστεί ως άθροισμα ενός πολωνύμου και μιας κανονικής ρητής συνάρτησης, εκτελώντας τη διαίρεση του  $C(z)$  δια του  $D(z)$ , δηλαδή

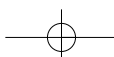
$$X(z) = \frac{C(z)}{D(z)} = c_0 + c_1z^{-1} + \dots + c_{M-N}z^{-(M-N)} + \frac{C_1(z)}{D(z)} = X_0(z) + X_1(z) \quad (3.29)$$

$$\text{όπου} \quad X_0(z) = c_0 + c_1z^{-1} + \dots + c_{M-N}z^{-(M-N)} = \sum_{q=0}^{M-N} c_q z^{-q} \quad (3.30)$$

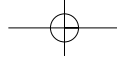
$$\text{και} \quad X_1(z) = \frac{C_1(z)}{D(z)} \quad (3.31)$$

Ο υπολογισμός του αντίστροφου M.Z. του πολωνύμου  $X_0(z)$  είναι προφανής και γίνεται απευθείας χωρίς επιπλέον πράξεις, από τον ορισμό του M.Z. (σχέση 3.1).

Η συνάρτηση  $X_1(z)$  είναι κανονική ρητή συνάρτηση. Στόχος μας είναι να την αναπτύξουμε σε μερικά κλάσματα, δηλαδή να την εκφράσουμε ως άθροισμα απλών κλασμάτων και στη συνέχεια να υπολογίσουμε τον αντίστροφο M.Z. κάθε κλάσματος ξεχωριστά. Λόγω της ιδιότητας της γραμμικότητας, ο αντίστροφος M.Z. της συνάρ-







τησης  $X_1(z)$  θα ισούται με το άθροισμα των επιμέρους αντίστροφων Μ.Ζ. των κλασμάτων. Ας δούμε λοιπόν, πώς γίνεται η ανάπτυξη μιας κανονικής ρητής συνάρτησης σε μερικά κλάσματα.

Έστω ότι η  $X(z)$  είναι κανονική ρητή συνάρτηση της μορφής (3.28). Για να απλοποιήσουμε την όλη ανάλυση, απαλείφουμε τις αρνητικές δυνάμεις του  $z$  πολλαπλασιάζοντας αριθμητή και παρονομαστή επί  $z^N$ , οπότε η σχέση γίνεται:

$$X(z) = \frac{a_0 z^N + a_1 z^{N-1} + \dots + a_M z^{N-M}}{z^N + b_1 z^{N-1} + \dots + b_N} \quad (3.32)$$

Επειδή  $N > M$  η συνάρτηση

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{a_0 z^{N-1} + a_1 z^{N-2} + \dots + a_M z^{N-M-1}}{z^N + b_1 z^{N-1} + \dots + b_N} \quad (3.33)$$

είναι πάντοτε κανονική. Για να αναπτύξουμε την τελευταία συνάρτηση σε μερικά κλάσματα, βρίσκουμε τις ρίζες  $p_1, p_2, \dots, p_N$  του παρονομαστή, δηλαδή τους πόλους της  $X(z)$ . Θα εξετάσουμε στη συνέχεια την περίπτωση που οι πόλοι είναι όλοι διαφορετικοί μεταξύ τους, δηλαδή είναι πολλαπλότητας 1. Σε μια τέτοια περίπτωση η (3.33) γράφεται ως

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{A_1}{z - p_1} + \frac{A_2}{z - p_2} + \dots + \frac{A_N}{z - p_N} \quad (3.34)$$

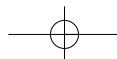
Στόχος μας είναι να υπολογίσουμε τους συντελεστές  $A_1, A_2, \dots, A_N$ . Αυτό μπορούμε να το πετύχουμε πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της (3.34) με καθέναν από τους όρους  $(z - p_k)$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$  και υπολογίζοντας την έκφραση που προκύπτει στις αντίστοιχες θέσεις των πόλων  $p_1, p_2, \dots, p_N$ . Έτσι, στη γενική περίπτωση θα έχουμε

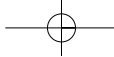
$$\frac{(z - p_k)X(z)}{z} = \frac{(z - p_k)A_1}{z - p_1} + \frac{(z - p_k)A_2}{z - p_2} + \dots + \frac{(z - p_k)A_N}{z - p_N} \quad (3.35)$$

και, επομένως, για  $z = p_k$  η σχέση αυτή θα μας δώσει το συντελεστή  $A_k$ , αφού όλοι οι άλλοι όροι του δευτέρου μέλους μηδενίζονται. Δηλαδή

$$A_k = \left. \frac{(z - p_k)X(z)}{z} \right|_{z=p_k} \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (3.36)$$

Σημειώνεται ότι οι σχέσεις (3.34) και (3.36) ισχύουν τόσο για πραγματικούς, όσο και για μιγαδικούς πόλους.





Η διαδικασία της ανάπτυξης της  $X(z)$  σε μερικά κλάσματα έχει ολοκληρωθεί στο σημείο αυτό, αφού έχουμε υπολογίσει τις τιμές  $A_1, A_2, \dots, A_N$ . Η  $X(z)$  γράφεται τώρα ως

$$X(z) = A_1 \frac{z}{z - p_1} + A_2 \frac{z}{z - p_2} + \dots + A_N \frac{z}{z - p_N} \quad (3.37)$$

ή διαιρώντας αριθμητή και παρονομαστή κάθε μερικού κλάσματος με  $z$  έχουμε την τελική έκφραση του  $X(z)$  σε μορφή αρνητικών δυνάμεων του  $z$ :

$$X(z) = A_1 \frac{1}{1 - p_1 z^{-1}} + A_2 \frac{1}{1 - p_2 z^{-1}} + \dots + A_N \frac{1}{1 - p_N z^{-1}} \quad (3.38)$$

Ο αντίστροφος M.Z.  $x(n) = Z^{-1}\{X(z)\}$  μπορεί τώρα εύκολα να υπολογιστεί με τον αντίστροφο M.Z. κάθε μερικού κλάσματος ξεχωριστά και τελικά τον γραμμικό συνδυασμό τους. Από τον Πίνακα 3.1 μπορούμε να δούμε ότι

$$Z^{-1}\left\{\frac{1}{1 - p_k z^{-1}}\right\} = \begin{cases} p_k^n u(n) & \text{αν Π.Σ.: } |z| > |p_k| \quad (\text{αιτιατό σήμα}) \\ -p_k^n u(-n-1) & \text{αν Π.Σ.: } |z| < |p_k| \quad (\text{μη αιτιατό σήμα}) \end{cases} \quad (3.39)$$

Το ποια από τις σχέσεις θα επιλέξουμε, εξαρτάται από την επιπλέον πληροφορία που έχουμε. Για παράδειγμα, αν γνωρίζουμε ότι το σήμα  $x(n)$  είναι αιτιατό, τότε θα επιλέξουμε τη δεξιόπλευρη ακολουθία (πρώτη από τις σχέσεις 3.39) και ο αντίστροφος M.Z. της (3.38) θα ισούται με

$$x(n) = (A_1 p_1^n + A_2 p_2^n + \dots + A_N p_N^n) u(n) \quad (3.40)$$

Ας παρακολουθήσουμε την όλη διαδικασία υπολογισμού του αντίστροφου M.Z. μιας κανονικής ρητής συνάρτησης με τη μέθοδο της ανάπτυξης σε μερικά κλάσματα, μέσα από το επόμενο παράδειγμα.

### Παράδειγμα 3.7

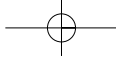
Να υπολογιστεί η δεξιόπλευρη ακολουθία  $x(n)$  της συνάρτησης του Παραδείγματος 3.6.

#### Λύση

Καταρχήν απαλείφουμε τις αρνητικές δυνάμεις του  $z$  από τη συνάρτηση, πολλαπλασιάζοντας τον αριθμητή και τον παρονομαστή με το  $z^2$ . Έτσι έχουμε:

$$X(z) = \frac{1 + 2z^{-1}}{1 + 0,4z^{-1} - 0,12z^{-2}} = \frac{z^2 + 2z}{z^2 + 0,4z - 0,12}$$

Οι πόλοι της  $X(z)$  είναι  $p_1 = 0,2$  και  $p_2 = -0,6$ , οπότε η σχέση αυτή γράφεται στη



μορφή της (3.34) ως εξής:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z+2}{(z-0,2)(z+0,6)} = \frac{A_1}{z-0,2} + \frac{A_2}{z+0,6}$$

Εφαρμόζοντας τη σχέση (3.36) υπολογίζουμε τα  $A_1$  και  $A_2$

$$A_1 = \left. \frac{(z-0,2)X(z)}{z} \right|_{z=0,2} = \left. \frac{z+2}{z+0,6} \right|_{z=0,2} = 2,75$$

$$A_2 = \left. \frac{(z+0,6)X(z)}{z} \right|_{z=-0,6} = \left. \frac{z+2}{z-0,2} \right|_{z=-0,6} = -1,75$$

Άρα η  $X(z)$  μπορεί πλέον να εκφραστεί ως ανάπτυγμα μερικών κλασμάτων

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{2,75}{z-0,2} - \frac{1,75}{z+0,6} \Rightarrow$$

$$X(z) = 2,75 \frac{z}{z-0,2} - 1,75 \frac{z}{z+0,6} \Rightarrow$$

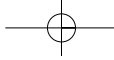
$$X(z) = 2,75 \frac{1}{1-0,2z^{-1}} - 1,75 \frac{1}{1+0,6z^{-1}}$$

Γνωρίζοντας ότι η ζητούμενη ακολουθία  $x(n)$  είναι δεξιόπλευρη, υπολογίζουμε τον αντίστροφο M.Z. από την πρώτη σχέση της (3.39) ως

$$x(n) = 2,75(0,2)^n u(n) - 1,75(-0,6)^n u(n)$$

Αυτή είναι η ζητούμενη ακολουθία. Παρατηρούμε ότι για τις τιμές του  $n = 0, 1, 2, 3$  παίρνουμε τα στοιχεία  $x(0) = 1$ ,  $x(1) = 1,6$ ,  $x(2) = -0,52$ ,  $x(3) = 0,4$ , επιβεβαιώνοντας έτσι τα αποτελέσματα του Παραδείγματος 3.6.

Η διαδικασία της ανάπτυξης σε μερικά κλάσματα που εξετάσαμε μέχρι τώρα, εφαρμόζεται στην περίπτωση που έχουμε απλούς πόλους, δηλαδή πόλους διαφορετικούς μεταξύ τους. Εάν η  $X(z)$  έχει πόλους πολλαπλότητας  $l$ , δηλαδή ο παρονομαστής της περιέχει παράγοντες της μορφής  $(z-p_k)^l$ , τότε η προηγούμενη διαδικασία δεν ισχύει όπως έχει, και πρέπει να τροποποιηθεί. Η περίπτωση αυτή, όμως, παρεκκλίνει από τους στόχους του παρόντος βιβλίου και δε θα εξεταστεί. Όπως επίσης δε θα εξεταστεί η περίπτωση υπολογισμού του αντίστροφου M.Z. με χρήση των ολοκληρωτι-



κόν υπολοίπων. Στη βιβλιογραφία του Κεφαλαίου δίνονται συγγράμματα τα οποία αναφέρονται εκτενώς στα θέματα αυτά.

### Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 3.3

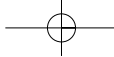
Να υπολογίσετε την  $x(n)$  όταν γνωρίζετε ότι  $X(z) = (z-1)/(z^2-1,9z+0,84)$  και η Π.Σ. είναι (α)  $|z| > 1$  ή (β)  $|z| < 0,5$ .

### Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 3.4

Να υπολογίσετε τον αντίστροφο Μ.Ζ. της  $X(z) = (6+z^{-1})/(1-0,25z^{-2})$ .

#### Σύνοψη ενότητας

Στην ενότητα αυτή είδαμε τις μεθόδους υπολογισμού του αντίστροφου Μ.Ζ. Συγκεκριμένα, είδαμε ότι όταν μας δίνεται ο Μ.Ζ. μιας ακολουθίας, ο οποίος είναι συνήθως ρητής μορφής, μπορούμε να βρούμε την ίδια την ακολουθία είτε αναπτύσσοντας σε δυναμοσειρά εκτελώντας τη λεγόμενη συνεχή διαίρεση, είτε αναπτύσσοντας σε μερικά κλάσματα. Η πρώτη από τις μεθόδους αυτές δεν καταλήγει σε κάποια αναλυτική μορφή για την ζητούμενη ακολουθία, και χρησιμοποιείται κυρίως για τον υπολογισμό μερικών από τους πρώτους όρους του αναπτύγματος.



### 3.3 Ο μονόπλευρος μετασχηματισμός-z

Ο Μ.Ζ. που γνωρίσαμε μέχρι τώρα αναφέρεται σε σήματα τα οποία ορίζονται σε όλο το διάστημα του χρόνου από το  $-\infty$  έως το  $+\infty$  ( $-\infty < n < +\infty$ ) και ονομάζεται αμφίπλευρος Μ.Ζ. (bilateral  $z$ -transform). Εκτός αυτού, υπάρχει και ο *μονόπλευρος* Μ.Ζ. (one-sided or unilateral  $z$ -transform), ο οποίος είναι ιδιαίτερα χρήσιμος για την ανάλυση διακριτών συστημάτων τα οποία αρχικά δεν βρίσκονται σε ηρεμία. Αυτά τα συστήματα περιγράφονται από εξισώσεις διαφορών με *μη μηδενικές αρχικές συνθήκες*. Με άλλα λόγια, ένα τέτοιο σύστημα αρχικά δεν βρίσκεται σε ηρεμία, λόγω διεγέρσεων που εφαρμόστηκαν σ' αυτό πριν ακόμα εφαρμοστεί η είσοδος  $x(n)$  κατά τη χρονική στιγμή  $n = 0$ . Οι αρχικές τιμές  $y(-1), y(-2), \dots, y(-N)$  της εξόδου του συστήματος, οι οποίες οφείλονται στις προηγούμενες διεγέρσεις, αποτελούν τις αρχικές συνθήκες αυτού.

Ο μονόπλευρος Μ.Ζ. της ακολουθίας  $x(n)$  ορίζεται ως

$$X^+(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n)z^{-n} \quad (3.41)$$

και γράφουμε συνήθως

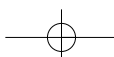
$$x(n) \xrightarrow{Z^+} X^+(z) = Z^+ \{x(n)\} \quad (3.42)$$

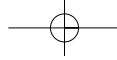
Παρατηρούμε ότι στο μονόπλευρο Μ.Ζ. το άθροισμα υπολογίζεται μόνο για τις μη-αρνητικές τιμές του  $n$ , ανεξάρτητα από το αν η ακολουθία  $x(n)$  είναι μηδενική ή μη για  $n < 0$ . Δηλαδή ο μονόπλευρος Μ.Ζ. της  $x(n)$  μπορεί να θεωρηθεί ως ο αμφίπλευρος Μ.Ζ. της  $x(n)u(n)$ . Επειδή η ακολουθία  $x(n)u(n)$  είναι πάντοτε μία δεξιόπλευρη ακολουθία, η Π.Σ. του  $X^+(z)$  είναι πάντοτε το *εξωτερικό ενός κύκλου*. Πολλές από τις ιδιότητες του μονόπλευρου Μ.Ζ. είναι ίδιες με εκείνες του αμφίπλευρου Μ.Ζ., όπως οι ιδιότητες της γραμμικότητας, κλιμάκωσης στο επίπεδο-z, επέκτασης στο χρόνο, συζυγούς ακολουθίας και παραγώγισης. Μία από τις ιδιότητες που διαφέρουν, και παρουσιάζει ενδιαφέρον είναι εκείνη της ολίσθησης, την οποία και θα εξετάσουμε στη συνέχεια.

#### ΟΛΙΣΘΗΣΗ ΣΤΟ ΧΡΟΝΟ

Εάν  $x(n) \xrightarrow{Z^+} X^+(z)$

τότε  $x(n-m) \xrightarrow{Z^+} z^{-m} \left[ X^+(z) + \sum_{n=1}^m x(-n)z^n \right]$  για  $m > 0$  (3.43)





$$x(n+m) \xleftrightarrow{Z^+} z^m \left[ X^+(z) - \sum_{n=0}^{m-1} x(n)z^{-n} \right] \text{ για } m > 0 \quad (3.44)$$

Απόδειξη:

$$\begin{aligned} Z^+ \{x(n-m)\} &= \sum_{n=0}^{\infty} x(n-m)z^{-n} = \sum_{l=-m}^{\infty} x(l)z^{-(l+m)} = z^{-m} \left[ \sum_{l=-m}^{\infty} x(l)z^{-l} \right] = \\ &= z^{-m} \left[ \sum_{l=-m}^{-1} x(l)z^{-l} + \sum_{l=0}^{\infty} x(l)z^{-l} \right] = z^{-m} \left[ \sum_{n=1}^m x(-n)z^n + X^+(z) \right] \end{aligned}$$

Η σχέση (3.43) αφορά τη δεξιά ολίσθηση ή καθυστέρηση της ακολουθίας  $x(n)$ , ενώ η (3.44) την αριστερή ολίσθηση ή προήγηση αυτής. Συγκρίνοντας τις σχέσεις αυτές με την αντίστοιχη σχέση (3.24), για τον αμφίπλευρο Μ.Ζ., γίνεται φανερό ότι κατά τη δεξιά ολίσθηση, νέα δείγματα εισέρχονται στο διάστημα  $[0, +\infty)$  και άρα πρέπει να λάβουν και αυτά μέρος στους υπολογισμούς. Τα νέα αυτά δείγματα είναι τα  $x(-1)$ ,  $x(-2)$ , ...,  $x(-m)$ . Κατά την αριστερή ολίσθηση, κάποια από τα υπάρχοντα δείγματα βρίσκονται εκτός του διαστήματος  $[0, +\infty)$  και συνεπώς πρέπει να αφαιρεθούν από το συνολικό άθροισμα. Πρόκειται για τα δείγματα  $x(0)$ ,  $x(1)$ , ...,  $x(m-1)$ .

### Παράδειγμα 3.8

Να υπολογιστεί ο μονόπλευρος Μ.Ζ. των σημάτων  $x_1(n) = a^n u(n)$  και  $x_2(n) = x_1(n+1)$ .

#### Λύση

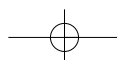
Ο υπολογισμός του  $X_1^+(z)$  γίνεται εύκολα από τον ορισμό του μονόπλευρου Μ.Ζ. (3.41). Άλλωστε, το αποτέλεσμα είναι ίδιο με εκείνο του αμφίπλευρου Μ.Ζ. αφού πρόκειται για αιτιατή ακολουθία (βλ. σχέση 3.8). Έχουμε λοιπόν:

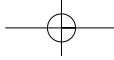
$$X_1^+(z) = X_1(z) = 1/(1-az^{-1}) \quad \text{με Π.Σ. } |z| > |a|.$$

Για τον υπολογισμό του  $X_2^+(z)$  εφαρμόζουμε το θεώρημα της ολίσθησης (σχέση 3.44) για  $m = 1$  και παίρνουμε

$$X_2^+(z) = z^1 [X_1^+(z) - x_1(0)z^0] = z[X_1^+(z) - 1] = z/(1-az^{-1}) - z$$

αφού  $x_1(0) = 1$ .





### Σύνοψη ενότητας

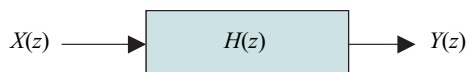
Στην ενότητα αυτή γνωρίσαμε το μονόπλευρο Μ.Ζ., ο οποίος χρησιμοποιείται στην ανάλυση διακριτών συστημάτων, όταν αυτά δεν βρίσκονται σε αρχική ηρεμία. Ο μονόπλευρος Μ.Ζ. δεν περιέχει πληροφορία για το σήμα στις αρνητικές χρονικές στιγμές. Ο μονόπλευρος Μ.Ζ. του σήματος  $x(n)$  ταυτίζεται με τον αμφίπλευρο Μ.Ζ. του σήματος  $x(n)u(n)$ , το οποίο είναι αιτιατό. Άρα, η Π.Σ. του Μ.Ζ. ορίζεται πάντα στο εξωτερικό ενός κύκλου.

### 3.4 Ο μετασχηματισμός-z στην ανάλυση συστημάτων

Ο Μ.Ζ. παίζει πρωτεύοντα ρόλο στη μελέτη LTI συστημάτων διακριτού χρόνου. Από τον ορισμό της συνέλιξης (σχέση 1.37) όπως και την ιδιότητα της συνέλιξης (σχέση 3.25), γίνεται προφανές ότι  $Y(z) = H(z)X(z)$  ή:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad (3.45)$$

όπου  $X(z)$ ,  $Y(z)$ ,  $H(z)$  είναι οι Μ.Ζ. της εισόδου  $x(n)$ , της εξόδου  $y(n)$  και της κρουστικής απόκρισης  $h(n)$  του συστήματος, αντίστοιχα. Διαγραμματικά αυτό φαίνεται στο Σχήμα 3.3. Η συνάρτηση  $H(z)$  ονομάζεται *συνάρτηση συστήματος* (system function) ή *συνάρτηση μεταφοράς* (transfer function) του συστήματος. Για τιμές του  $z$  πάνω στο μοναδιαίο κύκλο, δηλαδή για  $z = e^{j\omega}$ , η  $H(z)$  μας δίνει την απόκριση συχνότητας (frequency response) του συστήματος, υπό την προϋπόθεση, βέβαια, ότι ο μοναδιαίος κύκλος ανήκει στην Π.Σ. της  $H(z)$ . Πολλές από τις ιδιότητες ενός συστήματος εξάγονται κατευθείαν από τα χαρακτηριστικά των πόλων, των μηδενικών και της Π.Σ. της συνάρτησης μεταφοράς αυτού, όπως θα δούμε στη συνέχεια.

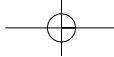


#### Σχήμα 3.3

Γενικό διάγραμμα συστήματος διακριτού χρόνου

#### 3.4.1 Αιτιατότητα LTI συστήματος

Είδαμε στην ενότητα 1.4 ότι ένα σύστημα είναι αιτιατό όταν η έξοδος του εξαρτάται μόνο από τις παρούσες και προηγούμενες τιμές της εισόδου του συστήματος και όχι από μελλοντικές τιμές αυτής. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της συνέλιξης (εξίσωση 1.17), μπορούμε να συνδυάσουμε την ιδιότητα της αιτιατότητας με την κρουστική απόκριση ενός LTI συστήματος. Συγκεκριμένα, για να είναι αιτιατό ένα LTI σύστημα διακριτού χρόνου, θα πρέπει η  $y(n)$  να μην εξαρτάται από τη  $x(m)$  για  $m >$



$n$ . Από τη σχέση (1.17), βλέπουμε ότι για να ισχύει αυτό, θα πρέπει όλοι οι συντελεστές  $h(n-m)$  οι οποίοι πολλαπλασιάζουν τις τιμές του  $x(m)$  για  $m > n$  να είναι ίσοι με μηδέν. Αυτό σημαίνει ότι η κρουστική απόκριση ενός αιτιατού LTI συστήματος διακριτού χρόνου θα πρέπει να ικανοποιεί τη συνθήκη

$$h(n) = 0 \text{ για } n < 0 \quad (3.46)$$

Η συνθήκη αυτή, για ένα αιτιατό LTI σύστημα διακριτού χρόνου, συνεπάγεται ότι το άθροισμα της συνέλιξης της σχέσης (1.17) γίνεται

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^n x(m)h(n-m) \quad (3.47)$$

και η ισοδύναμη σχέση (1.18) γίνεται

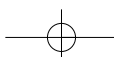
$$y(n) = \sum_{m=0}^{\infty} h(m)x(n-m) \quad (3.48)$$

Από τη σχέση (3.46) παρατηρούμε ότι η  $h(n)$  είναι μια δεξιόπλευρη ακολουθία. (Υπενθυμίζεται ότι ο Μ.Ζ. αυτής ισούται με την  $H(z)$ , τη συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος). Άρα, όπως είδαμε στην ενότητα 3.1, η Π.Σ. του Μ.Ζ. μιας τέτοιας ακολουθίας θα είναι το εξωτερικό ενός κύκλου με κέντρο την αρχή των αξόνων, συμπεριλαμβανομένου και του απείρου. Στην περίπτωση κατά την οποία η  $H(z)$  είναι ρητή συνάρτηση, αυτό σημαίνει ότι η Π.Σ. θα ορίζεται στο εξωτερικό του κύκλου με ακτίνα τον πλέον απομακρυσμένο πόλο αυτής. Επειδή μάλιστα, η τιμή  $z = \infty$  ανήκει στην Π.Σ., συνεπάγεται ότι ο βαθμός του πολωνόμου του αριθμητή της  $H(z)$  δε θα πρέπει να είναι μεγαλύτερος του βαθμού του παρανομαστή, όταν τα πολώνυμα αυτά εκφραστούν ως συνάρτηση του  $z$ .

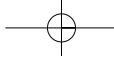
### 3.4.2 Ευστάθεια LTI συστήματος

Στην ενότητα 1.4 είδαμε ότι ένα σύστημα είναι ευσταθές εάν κάθε φραγμένη είσοδος παράγει μια φραγμένη έξοδο (BIBO). Ας δούμε τώρα τις συνθήκες υπό τις οποίες τα LTI συστήματα διακριτού χρόνου είναι ευσταθή. Αρχίζουμε θεωρώντας ότι η είσοδος  $x(n)$  είναι φραγμένη κατά μέτρο, δηλαδή  $|x(n)| < B$  για όλα τα  $n$ . Εάν η είσοδος αυτή εφαρμοστεί σ' ένα LTI σύστημα του οποίου η κρουστική απόκριση είναι  $h(n)$ , τότε το μέτρο της εξόδου θα είναι

$$|y(n)| = \left| \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x(n-m) \right| \quad (3.49)$$







Επειδή η απόλυτη τιμή του αθροίσματος αριθμών είναι πάντοτε μικρότερη ή ίση του αθροίσματος των απολύτων τιμών των αριθμών, η σχέση (3.49) γίνεται

$$|y(n)| \leq \sum_{m=-\infty}^{\infty} |h(m)| |x(n-m)| \quad (3.50)$$

και αφού  $|x(n-m)| < B$  για όλες τις τιμές των  $m$  και  $n$ , η σχέση αυτή καταλήγει στην

$$|y(n)| \leq B \sum_{m=-\infty}^{\infty} |h(m)| \quad \text{για όλα τα } n. \quad (3.51)$$

Άρα, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι εάν η κρουστική απόκριση είναι αθροίσιμη κατ' απόλυτη τιμή, δηλαδή εάν

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} |h(m)| \leq \infty \quad (3.52)$$

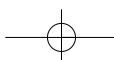
τότε η  $y(n)$  είναι φραγμένη κατά μέτρο και κατά συνέπεια το σύστημα είναι ευσταθές. Η σχέση (3.52) αποτελεί την ικανή συνθήκη για την ευστάθεια ενός LTI συστήματος διακριτού χρόνου. Αποδεικνύεται ότι αυτή είναι επίσης, και αναγκαία συνθήκη για την ευστάθεια ενός LTI συστήματος διακριτού χρόνου. Γνωρίζουμε όμως ότι η 3.52 αποτελεί και την ικανή συνθήκη για να υπάρχει ο μετασχηματισμός Fourier. Άρα, για ευσταθή συστήματα, ο μετασχηματισμός Fourier της  $h(n)$  συγκλίνει και κατά συνέπεια, η Π.Σ. της  $H(z)$  πρέπει να περιλαμβάνει το μοναδιαίο κύκλο. Άρα, ένα LTI σύστημα είναι ευσταθές εάν και μόνο εάν η Π.Σ. της συνάρτησης μεταφοράς του  $H(z)$  περιλαμβάνει το μοναδιαίο κύκλο,  $|z| = 1$ .

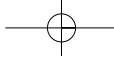
Συνδυάζοντας τα δύο παραπάνω συμπεράσματα, τα οποία προέκυψαν από την αιτιότητα και την ευστάθεια ενός LTI συστήματος διακριτού χρόνου, μπορούμε να καταλήξουμε στην ικανή και την αναγκαία συνθήκη για να είναι ένα αιτιατό σύστημα και ευσταθές: Ένα αιτιατό LTI σύστημα με ρητή συνάρτηση μεταφοράς  $H(z)$  είναι ευσταθές εάν και μόνο εάν όλοι οι πόλοι της  $H(z)$  βρίσκονται στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου, δηλαδή το μέτρο τους είναι μικρότερο της μονάδας.

### 3.4.3 Εξισώσεις Διαφορών

Μία μεγάλη κατηγορία συστημάτων είναι αυτή που τα σήματα εισόδου-εξόδου συνδέονται με μια εξίσωση διαφορών (difference equation) της μορφής

$$y(n) = \sum_{i=0}^M a_i x(n-i) - \sum_{i=1}^N b_i y(n-i) \quad (3.53)$$





όπου  $x(n)$  η ακολουθία εισόδου,  $y(n)$  η ακολουθία εξόδου και  $a_i, b_i$  οι συντελεστές του συστήματος. Η εξίσωση αυτή μας λέει ότι η τρέχουσα τιμή του δείγματος εξόδου προκύπτει ως γραμμικός συνδυασμός του παρόντος και των προηγούμενων δειγμάτων της εισόδου, καθώς και από προηγούμενες τιμές της εξόδου. Η σύνδεση μεταξύ της εξίσωσης αυτής και της συνάρτησης μεταφοράς του συστήματος μπορεί εύκολα να γίνει με τη βοήθεια των ιδιοτήτων της γραμμικότητας (σχέση 3.23) και της ολίσθησης στο χρόνο (σχέση 3.24) του Μ.Ζ. Έτσι, παίρνοντας το Μ.Ζ. και των δύο μελών της (3.53) έχουμε:

$$Y(z) = \sum_{i=0}^M \alpha_i z^{-i} X(z) - \sum_{i=1}^N b_i z^{-i} Y(z) \quad (3.54)$$

$$\text{ή} \quad Y(z) \cdot \left( 1 + \sum_{i=1}^N b_i z^{-i} \right) = X(z) \cdot \sum_{i=0}^M \alpha_i z^{-i} \quad (3.55)$$

και, κατά συνέπεια:

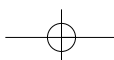
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^M \alpha_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^N b_i z^{-i}} \quad (3.56)$$

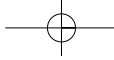
Με άλλα λόγια, η συνάρτηση μεταφοράς ενός συστήματος, του οποίου η εξίσωση διαφορών είναι γραμμική με σταθερούς συντελεστές, είναι πάντοτε ρητή. Εάν οι συντελεστές  $b_i$  του παρανομαστή είναι μηδενικοί ( $b_i = 0, i = 1, 2, \dots, N$ ), τότε οι παραπάνω εξισώσεις (3.53) και (3.56) γίνονται αντίστοιχα:

$$y(n) = \sum_{i=0}^M \alpha_i x(n-i) \quad (3.57)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{i=0}^M \alpha_i z^{-i} \quad (3.58)$$

Η έξοδος του συστήματος  $y(n)$  εξαρτάται τώρα μόνο από την τρέχουσα και τις προηγούμενες τιμές της εισόδου, και όχι από τις προηγούμενες τιμές της εξόδου. Λαμβάνοντας υπόψη ότι  $h(n) \xleftrightarrow{Z} H(z)$ , καταλαβαίνουμε ότι  $\alpha_i = h(n)$ . Δηλαδή, οι συντελεστές  $\alpha_i$  συμπίπτουν με την κρουστική απόκριση  $h(n)$  του συστήματος. Τα LTI συστήματα αυτής της κατηγορίας ονομάζονται συστήματα πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης (FIR, Finite Impulse Response), επειδή το μήκος της ακολουθίας  $h(n)$  είναι πεπερασμένο. Τα συστήματα αυτά είναι πάντοτε ευσταθή, αφού η κρουστική





τους απόκριση  $h(n)$  είναι πεπερασμένου μήκους και άρα αθροίσιμη κατ' απόλυτη τιμή (βλ. σχέση 3.52).

Τα συστήματα με συνάρτηση μεταφοράς της μορφής (3.56) στην οποία τουλάχιστον ένας από τους συντελεστές του παρανομαστή είναι διάφορος του μηδενός, ονομάζονται συστήματα *άπειρης κρουστικής απόκρισης* (IIR, Infinite Impulse Response), επειδή η αντίστοιχη κρουστική απόκριση  $h(n)$  αποτελείται από άπειρους όρους. (Θυμηθείτε την ενότητα 3.2 στην οποία ο υπολογισμός του αντίστροφου Μ.Ζ. μιας ρητής συνάρτησης με τη μέθοδο της ανάπτυξης σε δυναμοσειρά ή σε μερικά κλάσματα, κατέληγε σε ακολουθία απείρων όρων). Για αιτιατά συστήματα, οι πόλοι της  $H(z)$  θα πρέπει να βρίσκονται εντός του μοναδιαίου κύκλου για να είναι ευσταθή.

Μια διαφορετική ταξινόμηση των συστημάτων είναι σε *επαναληπτικά* (recursive) ή *μη επαναληπτικά* (non recursive) συστήματα<sup>[1]</sup>. Επαναληπτικά είναι τα συστήματα στα οποία η εξίσωση διαφορών εκφράζεται με τη μορφή (3.53) με  $b_i \neq 0$ . Σ' αυτά τα συστήματα η έξοδος  $y(n)$  σε κάθε χρονική στιγμή εξαρτάται και από τιμές της εξόδου σε προηγούμενες χρονικές στιγμές  $y(n-1)$ ,  $y(n-2)$ ,... Έχουμε δηλαδή, ανατροφοδότηση (feedback) τιμών της εξόδου στο σύστημα. Στα μη επαναληπτικά συστήματα, η εξίσωση διαφορών εκφράζεται με τη μορφή (3.57), γεγονός που σημαίνει πως η έξοδος  $y(n)$  σε κάθε χρονική στιγμή εξαρτάται μόνο από την τρέχουσα και τις προηγούμενες τιμές της εισόδου.

#### 3.4.4 Δομές συστημάτων διακριτού χρόνου

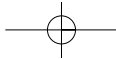
Τα συστήματα διακριτού χρόνου παριστάνονται συχνά με τη μορφή διαγραμμάτων ροής. Πρόκειται για ένα απλό και κατανοητό τρόπο αναπαράστασης των εξισώσεων διαφορών και των συναρτήσεων μεταφοράς. Ας μελετήσουμε αυτόν τον τρόπο αναπαράστασης με τη βοήθεια της εξίσωσης διαφορών ενός αιτιατού ψηφιακού φίλτρου δεύτερης τάξης. Το ότι το συγκεκριμένο φίλτρο είναι δεύτερης τάξης, σημαίνει ότι στην εξίσωση (3.53) έχουμε  $N = 2$ . Το ότι αυτό είναι και αιτιατό, σημαίνει επιπλέον ότι  $M \leq N$ . Άρα η γενική μορφή της εξίσωσης διαφορών ενός τέτοιου φίλτρου θα είναι

$$y(n) = a_0x(n) + a_1x(n-1) + a_2x(n-2) - b_1y(n-1) - b_2y(n-2) \quad (3.59)$$

και η αντίστοιχη συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}}{1 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2}} \quad (3.60)$$

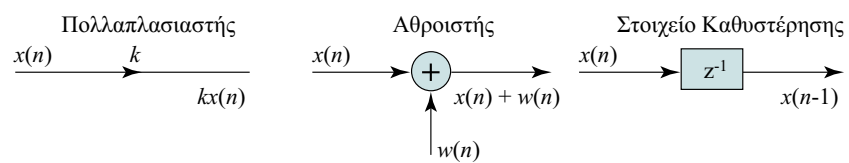
[1] Στην ελληνική βιβλιογραφία τα συστήματα αυτά θα τα δούμε και ως *αναδρομικά* και ως *μη αναδρομικά*.



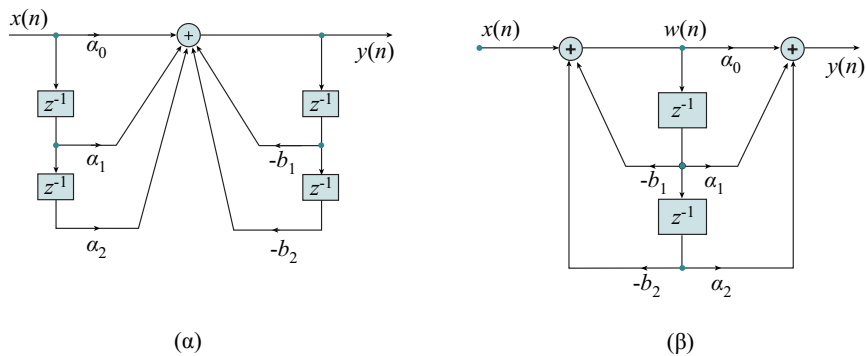
Για τον υπολογισμό των εξισώσεων διαφορών της μορφής (3.59), ή γενικότερα της μορφής (3.53), χρειαζόμαστε πολλαπλασιαστές, αθροιστές και στοιχεία καθυστέρησης. Οι αντίστοιχες σχηματικές τους αναπαραστάσεις δίνονται από το Σχήμα 3.4.

Το διάγραμμα ροής που αντιστοιχεί στην εξίσωση (3.59) δίνεται από το Σχήμα 3.5α. Το σύμβολο  $z^{-1}$  αντιπροσωπεύει καθυστέρηση 1 μονάδας χρόνου (μοναδιαία καθυστέρηση, unit delay), γεγονός που μας είναι ήδη γνωστό από την ιδιότητα της ολίσθησης του M.Z. (σχέση 3.24).

**Σχήμα 3.4**  
Τα βασικά δομικά στοιχεία των ψηφιακών συστημάτων.

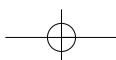


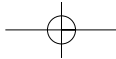
**Σχήμα 3.5**  
Πραγματοποίηση δομής δεύτερης τάξης: (α) άμεση μορφή τύπου-1, (β) κανονική ή άμεση μορφή τύπου-2



Η πραγματοποίηση<sup>[2]</sup> του φίλτρου δεύτερης τάξης με το διάγραμμα του Σχήματος 3.5α, προκύπτει άμεσα από τη σχέση (3.59) και ονομάζεται *άμεση μορφή τύπου-1* (direct form type - 1). Παρατηρούμε ότι μια τέτοια δομή πραγματοποίησης απαιτεί τέσσερα στοιχεία καθυστέρησης. Ένας διαφορετικός τρόπος πραγματοποίησης του ίδιου φίλτρου είναι ο ακόλουθος:

[2] Με τον όρο «πραγματοποίηση» (realization) εννοούμε τον τρόπο με τον οποίο αναπαριστούμε και τελικά υπολογίζουμε μία εξίσωση διαφορών ή την αντίστοιχη συνάρτηση μεταφοράς. Με τον όρο «υλοποίηση» (implementation) εννοούμε τον τελικό υπολογισμό αυτών με τη βοήθεια ειδικών ψηφιακών κυκλωμάτων ή υπολογιστών.





Αρχίζοντας από τη συνάρτηση μεταφοράς (3.60), έχουμε ότι:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = (a_0 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}) \cdot \frac{1}{1 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y(z) = (a_0 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}) \cdot \frac{X(z)}{1 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2}}$$

ή 
$$Y(z) = (a_0 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}) \cdot W(z) \tag{3.61}$$

όπου 
$$W(z) = \frac{X(z)}{1 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2}} \tag{3.62}$$

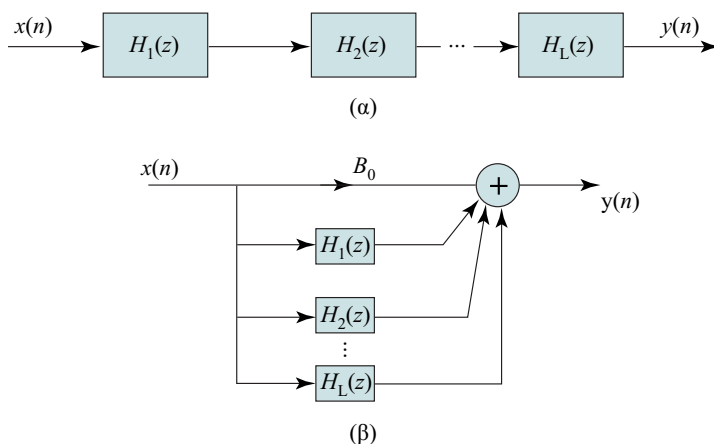
Ο αντίστροφος Μ.Ζ. των τελευταίων δύο σχέσεων (3.61) και (3.62) μας δίνει αντίστοιχα:

$$y(n) = a_0w(n) + a_1w(n-1) + a_2w(n-2) \tag{3.63}$$

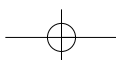
$$w(n) = x(n) - b_1w(n-1) - b_2w(n-2) \tag{3.64}$$

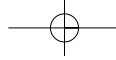
Η δομή πραγματοποίησης των τελευταίων σχέσεων δίνεται από το Σχήμα 3.5β και είναι γνωστή ως *άμεση μορφή τύπου-2 ή κανονική μορφή* πραγματοποίησης του ίδιου φίλτρου. Στην περίπτωση αυτή απαιτούνται μόνο δύο στοιχεία καθυστέρησης.

Συστήματα διακριτού χρόνου τάξης υψηλότερης της δεύτερης, που μόλις εξετάσαμε, μπορούν να πραγματοποιηθούν με τρόπο αντίστοιχο εκείνου του Σχήματος 3.5. Στην πράξη όμως, οι υψηλής τάξης συναρτήσεις ( $N > 2$ ) πραγματοποιούνται ως συνδυασμοί δομών πρώτης και / ή δεύτερης τάξης σε *σειρά* (cascade) ή *παράλληλα* (parallel), όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.6. Αυτό γίνεται για να μειωθούν τα σφάλματα των υπολογισμών κατά την υλοποίησή τους με ψηφιακά συστήματα τα οποία χρησιμοποιούν πεπερασμένη ακρίβεια για την αναπαράσταση των συντελεστών και τον υπολογισμό των πράξεων.



**Σχήμα 3.6**  
 Δομές υψηλής τάξης ως συνδυασμός δομών πρώτης ή δεύτερης τάξης (α) σε σειρά και (β) παράλληλα





Για την *πραγματοποίηση σε σειρά* (cascade realisation), η συνάρτηση μεταφοράς  $H(z)$  αναλύεται σε γινόμενο παραγόντων ως:

$$H(z) = H_1(z)H_2(z)\dots H_L(z) = \prod_{i=1}^L H_i(z) \quad (3.65)$$

όπου  $L$  το ακέραιο μέρος του  $(N+1)/2$  και  $H_i(z)$  δομή πρώτης ή δεύτερης τάξης:

$$H_i(z) = \frac{\alpha_{0i} + \alpha_{1i}z^{-1}}{1 + b_{1i}z^{-1}} \quad \text{πρώτης τάξης} \quad (3.66)$$

$$H_i(z) = \frac{\alpha_{0i} + \alpha_{1i}z^{-1} + \alpha_{2i}z^{-2}}{1 + b_{1i}z^{-1} + b_{2i}z^{-2}} \quad \text{δεύτερης τάξης} \quad (3.67)$$

Τρία είναι τα προβλήματα που πρέπει να αντιμετωπιστούν κατά την πραγματοποίηση σε σειρά:

- 1) με ποιο τρόπο θα πρέπει να συνδυαστούν οι αριθμητές με τους παρανομαστές, μετά την παραγοντοποίηση της  $H(z)$
- 2) με ποια σειρά θα πρέπει οι επιμέρους δομές να συνδεθούν, και
- 3) η ανάγκη κλιμάκωσης, δηλαδή μείωσης του πλάτους του σήματος σε ενδιάμεσα σημεία της δομής, ώστε αυτό να μην είναι ούτε πολύ μεγάλο, ούτε πολύ μικρό.

Για την *παράλληλη πραγματοποίηση* (parallel realisation), η συνάρτηση μεταφοράς  $H(z)$  αναλύεται σε άθροισμα παραγόντων ως:

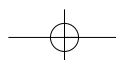
$$H(z) = B_0 + \sum_{i=1}^L H_i(z) \quad (3.68)$$

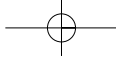
όπου  $L$  το ακέραιο μέρος του  $(N+1)/2$ ,  $B_0 = \alpha_M/b_N$  και

$$H_i(z) = \frac{\alpha_{0i}}{1 + b_{1i}z^{-1}} \quad \text{πρώτης τάξης} \quad (3.69)$$

$$H_i(z) = \frac{\alpha_{0i} + \alpha_{1i}z^{-1}}{1 + b_{1i}z^{-1} + b_{2i}z^{-2}} \quad \text{δεύτερης τάξης} \quad (3.70)$$

Στην παράλληλη πραγματοποίηση δεν παίζει ρόλο η σειρά διασύνδεσης των επιμέρους δομών. Επιπλέον, η κλιμάκωση είναι πιο εύκολη υπόθεση, αφού μπορεί να γίνει για κάθε μία δομή ανεξάρτητα. Τα μηδενικά όμως των επιμέρους δομών είναι περισσότερο ευαίσθητα στα σφάλματα κβάντισης των συντελεστών.





### 3.4.5 Απόκριση συχνότητας συστημάτων διακριτού χρόνου

Η σχέση εισόδου-εξόδου ενός LTI συστήματος διακριτού χρόνου με κρουστική απόκριση  $h(n)$  δίνεται από την εξίσωση της συνέλιξης (1.18)

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x(n-m) \quad (3.71)$$

όπου  $x(n)$ ,  $y(n)$  οι ακολουθίες εισόδου και εξόδου αντίστοιχα. Αν η ακολουθία εισόδου  $x(n)$  είναι εκθετικής μορφής

$$x(n) = e^{j\omega n} \quad -\infty < n < \infty \quad (3.72)$$

τότε η έξοδος  $y(n)$  θα ισούται με

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)e^{j\omega(n-m)} = \left( \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)e^{-j\omega m} \right) e^{j\omega n} \quad (3.73)$$

η οποία μπορεί να γραφεί ως

$$y(n) = H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} \quad (3.74)$$

όπου

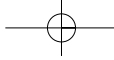
$$H(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)e^{-j\omega m} \quad (3.75)$$

Η ποσότητα  $H(e^{j\omega})$  ονομάζεται *απόκριση συχνότητας* (frequency response) του LTI συστήματος και μας παρέχει μια περιγραφή αυτού στο πεδίο της συχνότητας. Από την εξίσωση (3.75) παρατηρούμε ότι η  $H(e^{j\omega})$  αποτελεί ουσιαστικά το μετασχηματισμό *Fourier* διακριτού χρόνου (DTFT) της κρουστικής απόκρισης  $h(n)$  του συστήματος. Η εξίσωση (3.74) μας λέει ότι για μια μιγαδική ακολουθία εισόδου  $x(n)$  γωνιακής συχνότητας  $\omega$ , η έξοδος είναι επίσης μια μιγαδική ακολουθία της ίδιας γωνιακής συχνότητας, πολλαπλασιασμένη όμως με το μιγαδικό παράγοντα  $H(e^{j\omega})$ . Ο παράγοντας αυτός εξαρτάται από τη συχνότητα εισόδου  $\omega$  και την κρουστική ακολουθία  $h(n)$ .

Η  $H(e^{j\omega})$ , όπως είδαμε άλλωστε και στην ενότητα 2.1 για τον DTFT, είναι γενικά μια μιγαδική συνάρτηση του  $\omega$  με περίοδο  $2\pi$  και μπορεί να εκφραστεί ως

$$H(e^{j\omega}) = H_r(e^{j\omega}) + jH_i(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\theta(\omega)} \quad (3.76)$$

όπου  $H_r(e^{j\omega})$  και  $H_i(e^{j\omega})$  είναι πραγματικές συναρτήσεις ως προς  $\omega$ , και αποτελούν το πραγματικό και φανταστικό μέρος της  $H(e^{j\omega})$  αντίστοιχα, και



$$\Theta(\omega) = \arg\{H(e^{j\omega})\} = \angle H(e^{j\omega}) = \tan^{-1} \left[ \frac{H_i(e^{j\omega})}{H_r(e^{j\omega})} \right] \quad (3.77)$$

Η ποσότητα  $|H(e^{j\omega})|$  ονομάζεται *απόκριση μέτρου* (magnitude response) και η ποσότητα  $\Theta(\omega)$  *απόκριση φάσης* (phase response) του LTI συστήματος διακριτού χρόνου. Και οι δύο αυτές συναρτήσεις είναι πραγματικές συναρτήσεις του  $\omega$ .

Η απόκριση συχνότητας ενός συστήματος διακριτού χρόνου μπορεί εύκολα να υπολογιστεί από τη συνάρτηση μεταφοράς  $H(z)$  του συστήματος. Φυσικά, όπως έχουμε ήδη σχολιάσει, η απόκριση συχνότητας έχει νόημα μόνο για ευσταθή συστήματα. Είδαμε ότι η απόκριση συχνότητας του συστήματος δεν είναι άλλη από το μετασχηματισμό Fourier της κρουστικής του απόκρισης. Για να βρούμε το μετασχηματισμό Fourier του συστήματος πρέπει να υπολογίσουμε το Μ.Ζ. πάνω στο μοναδιαίο κύκλο, δηλαδή για  $z = e^{j\omega}$ . Έχουμε, επομένως, από τον ορισμό του Μ.Ζ.:

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n} \Big|_{z=e^{j\omega}} \quad (3.78)$$

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει ογεωμετρικός ή γραφικός προσδιορισμός της απόκρισης συχνότητας που θα εξετάσουμε αμέσως τώρα. Είναι ένας εύκολος και χρήσιμος τρόπος για να υπολογίζουμε ποιοτικά κυρίως, την απόκριση συχνότητας σχετικά απλών συστημάτων και βασίζεται στο διάγραμμα πόλων-μηδενικών της συνάρτησης μεταφοράς  $H(z)$ . Ταυτόχρονα αναδεικνύει και μια φυσική σημασία των πόλων και μηδενικών της συνάρτησης μεταφοράς. Συγκεκριμένα, η ρητή συνάρτηση  $H(z)$  της σχέσης (3.56) γράφεται ως:

$$H(z) = \frac{b_0 z^{N-M} (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_M)}{(z - p_1)(z - p_2) \dots (z - p_N)} \quad (3.79)$$

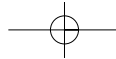
όπου  $z_1, z_2, \dots, z_M$  τα  $M$  μηδενικά και  $p_1, p_2, \dots, p_N$  οι  $N$  πόλοι αυτής.

Για  $z = e^{j\omega}$  η σχέση αυτή γίνεται:

$$H(e^{j\omega}) = b_0 e^{j\omega(N-M)} \frac{(e^{j\omega} - z_1)(e^{j\omega} - z_2) \dots (e^{j\omega} - z_M)}{(e^{j\omega} - p_1)(e^{j\omega} - p_2) \dots (e^{j\omega} - p_N)} \quad (3.80)$$

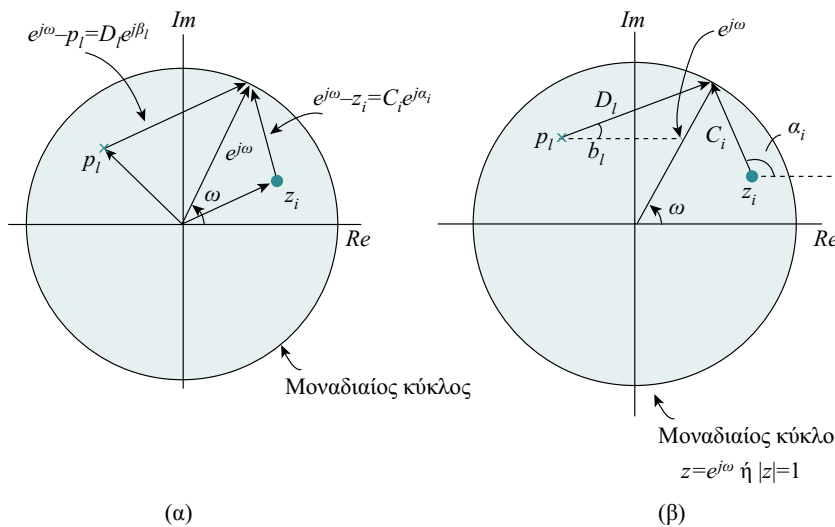
και εκφράζοντας κάθε μιγαδικό αριθμό του αριθμητή και παρανομαστή σε πολικές συντεταγμένες έχουμε:





$$H(e^{j\omega}) = b_0 e^{j\omega(N-M)} \frac{(C_1 e^{j\alpha_1})(C_2 e^{j\alpha_2}) \dots (C_M e^{j\alpha_M})}{(D_1 e^{j\beta_1})(D_2 e^{j\beta_2}) \dots (D_N e^{j\beta_N})} \equiv V e^{j\theta} \quad (3.81)$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι κάθε μιγαδικός  $z_i$  μπορεί να αναπαρασταθεί και από ένα διάνυσμα στο μιγαδικό επίπεδο και ότι ο  $e^{j\omega}$  είναι το διάνυσμα μέτρου ίσου με τη μονάδα με κέντρο την αρχή των αξόνων και γωνίας  $\omega$  με τον άξονα των θετικών πραγματικών, τότε το  $e^{j\omega} - z_i = C_i e^{j\alpha_i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, M$ , αντιπροσωπεύει το διάνυσμα από το μηδενικό  $z_i$  μέχρι εκείνο το σημείο του μοναδιαίου κύκλου, όπου καταλήγει το  $e^{j\omega}$  (Βλ. Σχήμα 3.7α). Αντίστοιχα ορίζονται και τα διανύσματα  $e^{j\omega} - p_l = D_l e^{j\beta_l}$ ,  $l = 1, 2, \dots, N$ , για τους πόλους της σχέσης (3.80). Παρατηρούμε λοιπόν ότι το  $C_i$  είναι η απόσταση του μηδενικού  $z_i$  από το σημείο του μοναδιαίου κύκλου όπου καταλήγει το διάνυσμα  $e^{j\omega}$  και  $D_l$  είναι η απόσταση του πόλου  $p_l$  από το ίδιο σημείο. Οι φάσεις  $\alpha_i$  και  $\beta_l$  είναι οι γωνίες των αντιστοίχων διανυσμάτων με τον άξονα των θετικών πραγματικών. Αυτές οι γεωμετρικές αναπαραστάσεις φαίνονται στο Σχήμα 3.7β.



**Σχήμα 3.7**

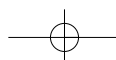
Γραφικός προσδιορισμός της απόκρισης συχνότητας.

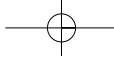
Από τη σχέση (3.81) βρίσκουμε πλέον ότι το μέτρο της απόκρισης συχνότητας ισούται με

$$V = |b_0| \frac{C_1 C_2 \dots C_M}{D_1 D_2 \dots D_N} \quad (3.82)$$

και η φάση της με

$$\theta = \angle b_0 + (N - M)\omega + (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_M) - (\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_N) \quad (3.83)$$



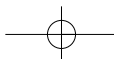


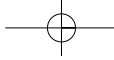
Η φάση του συντελεστή  $b_0$  είναι 0 ή  $\pi$ , ανάλογα με το πρόσημο αυτού (θετικό ή αρνητικό αντίστοιχα).

Η γεωμετρική αναπαράσταση είναι πολύ χρήσιμη στην κατανόηση του τρόπου με τον οποίο οι θέσεις των πόλων και των μηδενικών επηρεάζουν την απόκριση μέτρον και φάσης ενός συστήματος. Για παράδειγμα, εάν ένα μηδενικό  $z_i$  βρίσκεται πάνω στο μοναδιαίο κύκλο, τότε το μέτρο του αντίστοιχου διανύσματος  $C_i$  θα ισούται με μηδέν για  $\omega = \angle z_i$ , με αποτέλεσμα και το μέτρο  $|H(e^{j\omega})|$  να γίνεται 0 για τη συχνότητα αυτή. Όμοια, όταν ένας πόλος  $p_l$  βρίσκεται πάνω στο μοναδιαίο κύκλο, τότε το μέτρο του αντίστοιχου διανύσματος  $D_l$  θα ισούται με 0 για  $\omega = \angle p_l$ , με αποτέλεσμα το μέτρο  $|H(e^{j\omega})|$  να γίνεται άπειρο για τη συχνότητα αυτή. Γίνεται λοιπόν φανερό, ότι η παρουσία ενός μηδενικού κοντά στο μοναδιαίο κύκλο αναγκάζει το μέτρο της απόκρισης συχνότητας να παίρνει πολύ μικρές τιμές, για τιμές της συχνότητας κοντά στο συγκεκριμένο σημείο του μοναδιαίου κύκλου. Κατ' αναλογία, η παρουσία ενός πόλου κοντά στο μοναδιαίο κύκλο, αναγκάζει το μέτρο της απόκρισης συχνότητας να παίρνει πολύ μεγάλες τιμές για τιμές της συχνότητας κοντά στο συγκεκριμένο σημείο του μοναδιαίου κύκλου. Επομένως, οι πόλοι επιφέρουν το αντίθετο αποτέλεσμα από τα μηδενικά. Θέτοντας ένα μηδενικό κοντά σ' ένα πόλο, αυτό εξουδετερώνει την επίδραση του πόλου. Το ίδιο συμβαίνει και αν θέσουμε ένα πόλο κοντά σ' ένα μηδενικό. Αυτό γίνεται κατανοητό και από την εξίσωση (3.80), όπου φαίνεται ότι για  $z_i = p_l$  οι όροι  $e^{j\omega} - z_i$  και  $e^{j\omega} - p_l$  απλοποιούνται.

Καταλαβαίνουμε λοιπόν ότι η γεωμετρική αναπαράσταση των πόλων και των μηδενικών της συνάρτησης μεταφοράς ενός συστήματος είναι ουσιώδους σημασίας για τον προσδιορισμό της απόκρισης συχνότητας αυτού. Και αντίθετα, εάν μας δίνεται η επιθυμητή απόκριση συχνότητας, μπορούμε εύκολα να προσδιορίσουμε τη συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος εκείνου που έχει την απόκριση αυτή. Με άλλα λόγια, μπορούμε να σχεδιάσουμε το κατάλληλο φίλτρο το οποίο παρουσιάζει την απόκριση συχνότητας που μας ενδιαφέρει. Πριν όμως προχωρήσουμε σε κάποια παραδείγματα σχετικά με τον γεωμετρικό προσδιορισμό της απόκρισης συχνότητας ενός συστήματος, θα ήταν καλό να κάνουμε μια σύντομη αναφορά στα φίλτρα.

Ο όρος *φίλτρο* (filter) αναφέρεται σε ένα LTI σύστημα το οποίο χρησιμοποιείται για την επιλογή διαφόρων συχνοτήτων μεταξύ αυτών που εφαρμόζονται στην είσοδό του. Οι συχνότητες που θα επιλεγούν καθορίζονται από την απόκριση συχνότητας  $H(e^{j\omega})$  του συστήματος, η οποία με τη σειρά της εξαρτάται από τις παραμέτρους του συστήματος, λ.χ. τους συντελεστές  $a_i$ ,  $b_i$  της εξίσωσης διαφορών (3.53). Επομένως, επιλέγοντας κατάλληλα τους συντελεστές, μπορούμε να σχεδιάσουμε φίλτρα τα οποία επιτρέπουν τη διέλευση σημάτων με συνιστώσες συχνότητας σε ορισμένες

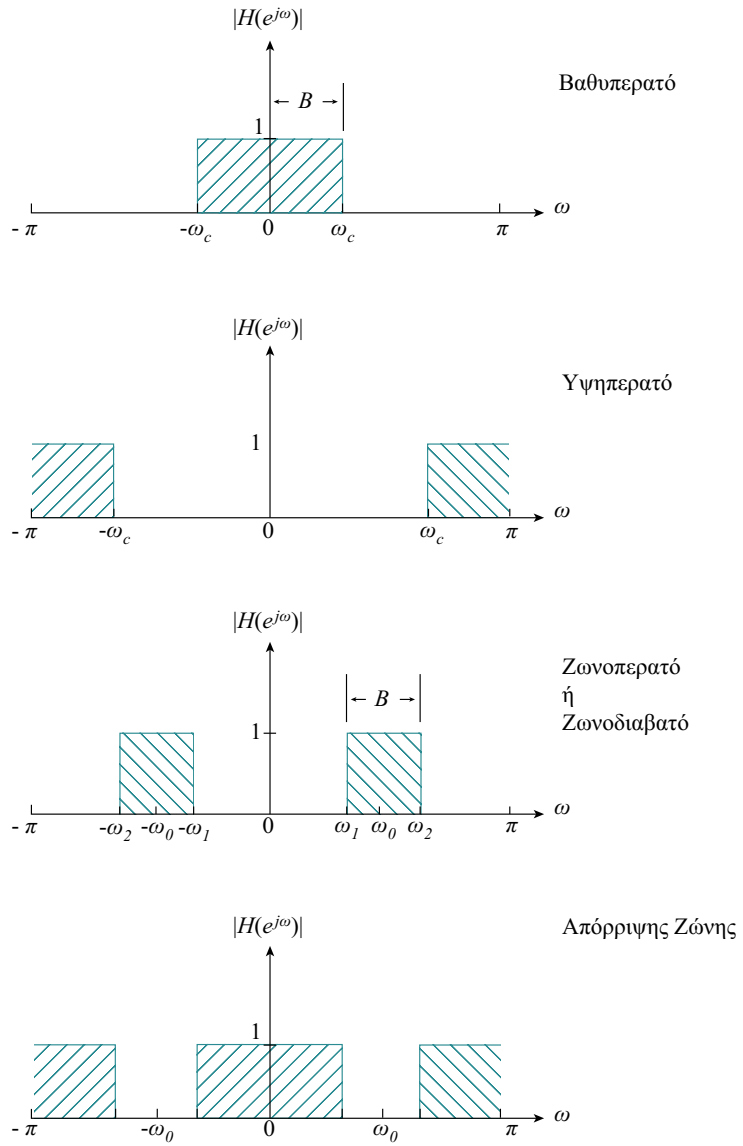
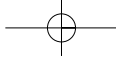




περιοχές, ενώ εξασθενίζουν τις συνιστώσες συχνότητας σε άλλες περιοχές. Γενικά, ένα LTI σύστημα τροποποιεί το φάσμα του σήματος  $X(e^{j\omega})$  σύμφωνα με την απόκριση  $H(e^{j\omega})$  αυτού, δίνοντας στην έξοδο ένα σήμα με φάσμα  $Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) X(e^{j\omega})$ . Με άλλα λόγια, η  $H(e^{j\omega})$  δρα ως *συνάρτηση βάρους* (weighting function) για τις διαφορετικές συνιστώσες της συχνότητας του σήματος εισόδου. Από αυτή την άποψη, μπορούμε να πούμε ότι κάθε LTI σύστημα μπορεί να χαρακτηριστεί ως ένα φίλτρο, ακόμη και αν αυτό δεν εμποδίζει τη διέλευση σε κάποιες ή σε όλες τις συχνότητες. Αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο οι όροι «LTI σύστημα» και «φίλτρο» χρησιμοποιούνται ο ένας αντί του άλλου.

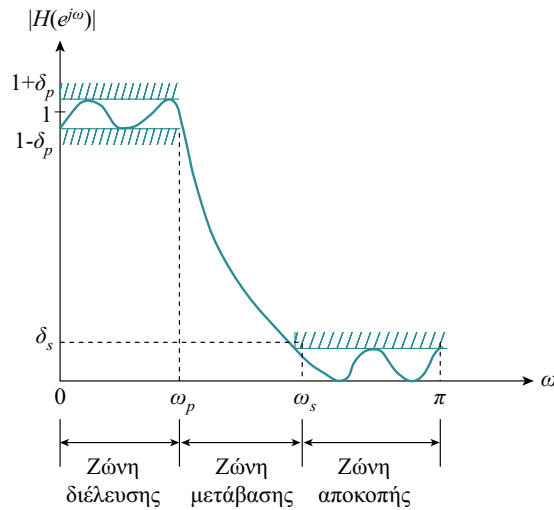
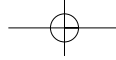
Τα φίλτρα ταξινομούνται σε *βαθυπερατά* (lowpass), *υψηπερατά* (highpass), *ζωνοπερατά* (bandpass) και *απόρριψης ζώνης* (bandstop), ανάλογα με τα χαρακτηριστικά τους στο πεδίο της συχνότητας. Η ιδανική απόκριση μέτρου των φίλτρων αυτών φαίνεται στο Σχήμα 3.8. Οι συχνότητες  $\omega_c$ ,  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  ονομάζονται *συχνότητες αποκοπής* (cutoff frequencies) και ορίζουν τα όρια μεταξύ των συχνοτήτων που επιτρέπεται να διέλθουν από το σύστημα και αυτών που απορρίπτονται. Η περιοχή συχνοτήτων στην οποία επιτρέπεται η διέλευση αποτελεί τη *ζώνη διέλευσης* (passband), ενώ η περιοχή συχνοτήτων στην οποία δεν επιτρέπεται η διέλευση ονομάζεται *ζώνη απόρριψης* ή *ζώνη αποκοπής* (stopband). Όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.8, τα ιδανικά φίλτρα έχουν ζώνη διέλευσης σταθερού κέρδους, δηλαδή σταθερής τιμής (συνήθως ίσης με 1) και ζώνη αποκοπής μηδενικού κέρδους.

Στην πραγματικότητα όμως, η μορφή ενός φίλτρου αποκλίνει από τις ιδανικές αυτές μορφές, όπως για παράδειγμα αυτή του Σχήματος 3.9 για ένα βαθυπερατό φίλτρο. Η μετάβαση από τη ζώνη διέλευσης στη ζώνη αποκοπής δεν γίνεται ακαριαία, και καθορίζει έτσι μια νέα περιοχή συχνοτήτων, τη λεγόμενη *ζώνη μετάβασης* (transition band). Η συχνότητα  $\omega_p$  αναφέρεται και ως *όριο ζώνης διέλευσης* (passband edge), και η συχνότητα  $\omega_s$  ως *όριο ζώνης αποκοπής* (stopband edge). Η ζώνη μετάβασης καθορίζεται μεταξύ των συχνοτήτων  $\omega_p$  και  $\omega_s$ . Επίσης, το κέρδος στις ζώνες διέλευσης και αποκοπής δεν είναι σταθερό, αλλά μεταβάλλεται. Για παράδειγμα, μπορεί να παρουσιάζεται κάποια κυμάτωση (απόκλιση) γύρω από τις τιμές 1 και 0 αντίστοιχα, η οποία συμβολίζεται με  $\delta_p$  και  $\delta_s$  για την κάθε περιοχή αντίστοιχα.



**Σχήμα 3.8**

Απόκριση μέτρου των βασικών ιδανικών φίλτρων διακριτού χρόνου



**Σχήμα 3.9**

Μη ιδανικό βαθυπερατό φίλτρο

### Παράδειγμα 3.9

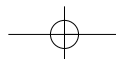
Να προσδιοριστεί η απόκριση συχνότητας του συστήματος διακριτού χρόνου το οποίο έχει συνάρτηση μεταφοράς  $H(z) = (z + 0,5)/(z - 0,5)$  με  $|z| > 0,5$ .

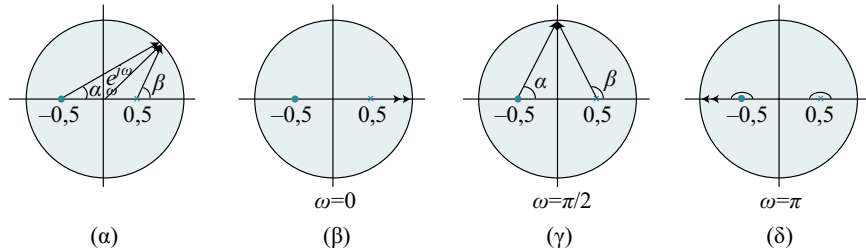
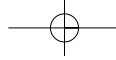
#### Λύση

Για να βρούμε την απόκριση συχνότητας του συστήματος, πρέπει να υπολογίσουμε τη συνάρτηση μεταφοράς για όλες τις τιμές  $|z| = 1$  ή  $z = e^{j\omega}$ . Έτσι, με βάση την ανάλυση που προηγήθηκε έχουμε:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{0,5 + e^{j\omega}}{-0,5 + e^{j\omega}} = \frac{C e^{j\alpha}}{D e^{j\beta}} = V e^{j\theta}$$

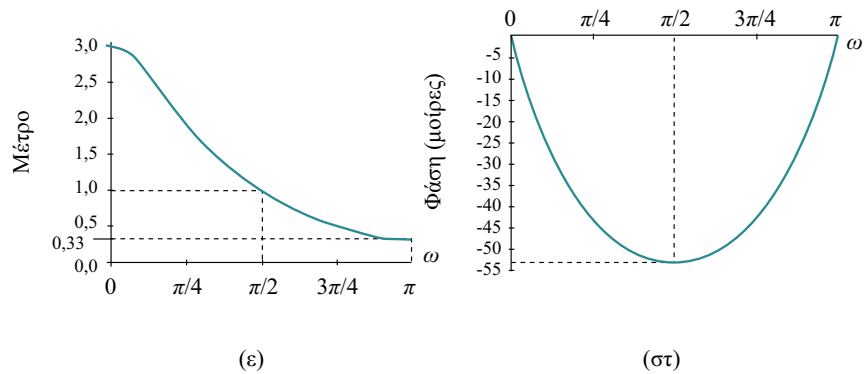
όπου  $V = C/D$  και  $\theta = \alpha - \beta$ . Γραφικά, οι υπολογισμοί αυτοί αρχίζουν με την τοποθέτηση στο μιγαδικό επίπεδο-z του πόλου στο σημείο  $z = 0,5$  (σύμβολο x) και του μηδενικού στο σημείο  $z = -0,5$  (σύμβολο •), όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.10α. Στη συνέχεια, για κάθε γωνία  $\omega$  υπολογίζουμε το μέτρο  $V$  και την φάση  $\theta$ . Το μέτρο και η φάση της απόκρισης συχνότητας του συγκεκριμένου συστήματος δείχνονται στο Σχήμα 3.10ε και 3.10στ αντίστοιχα.





**Σχήμα 3.10**

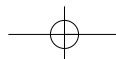
Γεωμετρικός προσδιορισμός της απόκρισης συχνότητας του Παραδείγματος 3.9: (α)–(δ) διάγραμμα πόλων–μηδενικών για διαφορετικές συχνότητες, (ε)–(στ) μέτρο και φάση της απόκρισης

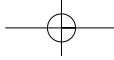


Οι υπολογισμοί αυτοί επιβεβαιώνονται εύκολα με τη βοήθεια των σχημάτων 3.10β–3.10δ. Έτσι, για γωνία ίση με 0 (Σχήμα 3.10β)  $C = 1,5, D = 0,5, \alpha = \beta = 0$  και, κατά συνέπεια,  $V = 3$  και  $\Theta = 0$ . Για γωνία ίση με  $\pi/2$  (Σχήμα 3.10γ)  $C = D, \alpha < \beta$  και άρα  $V = 1$  και  $\Theta < 0$ . Για γωνία ίση με  $\pi$  (Σχήμα 3.10δ)  $C = 0,5, D = 1,5, \alpha = \beta = \pi$  και άρα  $V = 1/3$  και  $\Theta = 0$ . Παρατηρούμε ότι πρόκειται για ένα βαθυπερατό φίλτρο. Είναι σημαντικό να τονίσουμε ότι το μέτρο της απόκρισης συχνότητας  $|H(e^{j\omega})|$  είναι συμμετρική συνάρτηση γύρω από το σημείο  $\omega = \pi$ , ενώ η φάση είναι αντι-συμμετρική γύρω από το ίδιο σημείο. Επιπλέον, επιβεβαιώνεται ότι η απόκριση συχνότητας είναι περιοδική.

### Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 3.5

Η κρουστική απόκριση ενός ευσταθούς LTI συστήματος διακριτού χρόνου δίνεται από τη σχέση  $h(n) = a^n u(n)$  με  $a = 0,5$ . Να σχεδιαστεί η απόκριση συχνότητας του συστήματος.





### Παράδειγμα 3.10

Να σχεδιαστεί ψηφιακό φίλτρο το οποίο να αποκόπτει τη συχνότητα  $\omega_0$ .

#### Λύση

Τα φίλτρα αυτής της κατηγορίας ονομάζονται *φίλτρα αποκοπής ή απόρριψης συχνότητας* (notch filters). Τέτοια φίλτρα είναι συνήθως πολύ χρήσιμα σε όργανα ή συστήματα εγγραφής στα οποία θέλουμε να αποκόψουμε τη συχνότητα των 50 Hz της γραμμής τροφοδοσίας που παρεισδύει σ' αυτά.

Για να δημιουργήσουμε ένα μηδενικό στην απόκριση συχνότητας για μια συγκεκριμένη συχνότητα  $\omega_0$ , απλώς εισάγουμε ένα ζεύγος συζυγών μιγαδικών μηδενικών πάνω στο μοναδιαίο κύκλο και σε μία γωνία  $\omega_0$ , δηλαδή  $z_{1,2} = 1e^{\pm j\omega_0}$  (Βλ. Σχήμα 3.11α). Κατά συνέπεια, η συνάρτηση μεταφοράς του FIR φίλτρου που προκύπτει είναι:

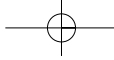
$$H(e^{j\omega}) = b_0(1 - e^{j\omega_0} z^{-1})(1 - e^{-j\omega_0} z^{-1}) = b_0(1 - 2\cos\omega_0 z^{-1} + z^{-2})$$

Σχεδιάζοντας την απόκριση συχνότητας του συστήματος αυτού παρατηρούμε ότι αυτό μηδενίζει τη συχνότητα  $\omega_0$ , ταυτόχρονα όμως, εξασθενίζει σημαντικά και τις συχνότητες γύρω από την  $\omega_0$ . (Στο Σχήμα 3.11α φαίνεται η απόκριση συχνότητας για  $\omega_0 = \pi/4$ ). Για να μειώσουμε το εύρος των συχνοτήτων που επηρεάζονται, θα πρέπει να καταφύγουμε σε τεχνικές σχεδιασμού FIR φίλτρων μεγαλύτερης τάξης, όπως αυτές παρουσιάζονται στο επόμενο κεφάλαιο. Μια διαφορετική προσέγγιση είναι αυτή της εισαγωγής πόλων στη συνάρτηση του συστήματος. Έστω, λοιπόν, ότι τοποθετούμε ένα ζεύγος συζυγών μιγαδικών πόλων στα σημεία  $p_{1,2} = re^{\pm j\omega_0}$ ,  $0 < r < 1$ , δηλαδή στην ίδια γωνία (συχνότητα) που βρίσκονται και τα μηδενικά (Βλ. Σχήμα 3.11β). Το αποτέλεσμα των πόλων είναι η εισαγωγή συντονισμού στην περιοχή γύρω από τα μηδενικά και συνεπώς η ελάττωση του εύρους των συχνοτήτων που επηρεάζονται. Η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος γίνεται τώρα:

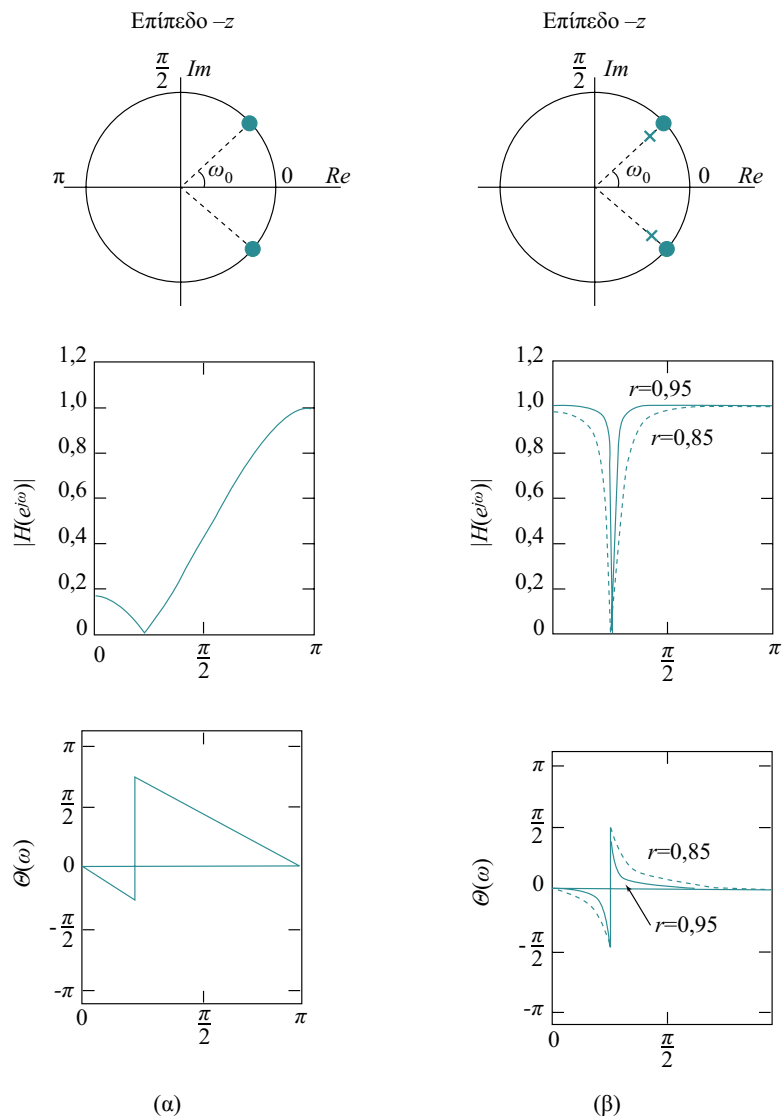
$$H(e^{j\omega}) = b_0 \frac{(1 - e^{j\omega_0} z^{-1})(1 - e^{-j\omega_0} z^{-1})}{(1 - re^{j\omega_0} z^{-1})(1 - re^{-j\omega_0} z^{-1})} = b_0 \frac{1 - 2\cos\omega_0 z^{-1} + z^{-2}}{1 - 2r\cos\omega_0 z^{-1} + r^2 z^{-2}}$$

Η απόκριση συχνότητας του συστήματος φαίνεται στο Σχήμα 3.11β για  $\omega_0 = \pi/4$  και  $r = 0,85$  ή  $r = 0,95$  και  $b_0 = 1$ . Συγκρίνοντας αυτή με την απόκριση του FIR φίλτρου του Σχήματος 3.11α, παρατηρούμε ότι το αποτέλεσμα της εισαγωγής των πόλων ήταν η σημαντική μείωση του εύρους των συχνοτήτων γύρω από τη συχνότητα  $\omega_0$ .

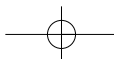
Τέλος, η σύγκριση της τελευταίας συνάρτησης μεταφοράς με εκείνη της σχέσης (3.60) μας οδηγεί στην εύρεση των τιμών των συντελεστών του φίλτρου, δηλαδή  $a_0$



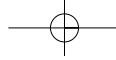
$= 1, a_1 = -2\cos\omega_0, a_2 = 1, b_1 = -2r\cos\omega_0, b_2 = r^2$ . Για παράδειγμα, στην περίπτωση που  $\omega_0 = \pi/4$  και  $r = 0,85$  οι συντελεστές αυτοί είναι αντίστοιχα:  $a_0 = 1, a_1 = -1,41, a_2 = 1, b_1 = -1,2, b_2 = 0,72$ . Συνεπώς, η πραγματοποίηση του δεύτερης τάξης φίλτρου το οποίο εξετάζουμε, μπορεί να γίνει με μία από τις άμεσες μορφές τύπου-1 ή τύπου-2 του Σχήματος 3.5, με τιμές συντελεστών αυτές που μόλις υπολογίσαμε.



**Σχήμα 3.11**  
 Διάγραμμα πόλων  
 – μηδενικών και  
 απόκριση συχνό-  
 τητας (α) του FIR  
 και (β) του IIR  
 φίλτρου του  
 Παραδείγματος  
 3.10.







### Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 3.6

Ποια η έξοδος του συστήματος  $y(n) = \frac{5}{6}y(n-1) - \frac{1}{6}y(n-2) + x(n)$ , όταν η είσοδος είναι  $x(n) = \delta(n) - (1/3)\delta(n-1)$ ;

### Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 3.7

Η συνάρτηση μεταφοράς ενός αιτιατού LTI συστήματος διακριτού χρόνου ισούται με  $H(z) = 1/(1 + 0,5z^{-1})$ . Εξετάστε αν το σύστημα είναι ευσταθές και σχεδιάστε τη δομή πραγματοποίησης του συστήματος καθώς και την απόκριση συχνότητας αυτού.

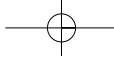
#### Σύνοψη ενότητας

Στην αυτή ενότητα ασχοληθήκαμε με την ανάλυση συστημάτων βασιζόμενοι στον Μ.Ζ. Είδαμε ότι από τη συνάρτηση μεταφοράς ενός συστήματος μπορούμε άμεσα να εξάγουμε συμπεράσματα για την αιτιατότητα και την ευστάθεια αυτού. Είδαμε επίσης ότι από τη συνάρτηση μεταφοράς ενός συστήματος μπορούμε εύκολα να προσδιορίσουμε την αντίστοιχη εξίσωση διαφορών αυτού, όπως και το αντίστροφο. Γνωρίσαμε τις δομές πραγματοποίησης των συστημάτων διακριτού χρόνου και αναφερθήκαμε στην αναγκαιότητα πραγματοποίησης δομών υψηλής τάξης με δομή πρώτης ή / και δεύτερης τάξης σε σειρά ή παράλληλα. Τέλος, μελετήσαμε την απόκριση συχνότητας των συστημάτων διακριτού χρόνου και ασχοληθήκαμε με το γεωμετρικό (γραφικό) προσδιορισμό αυτής. Είδαμε ότι η απόκριση συχνότητας προκύπτει από τη συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος, υπολογίζοντας αυτή πάνω στο μοναδιαίο κύκλο.

#### Σύνοψη κεφαλαίου

Στο Κεφάλαιο αυτό ασχοληθήκαμε με το Μ.Ζ. σημάτων διακριτού χρόνου, και διαπιστώσαμε ότι πρόκειται για ένα ισχυρό μαθηματικό εργαλείο στη μελέτη διακριτών σημάτων και συστημάτων, αντίστοιχο του μετασχηματισμού Laplace για σήματα και συστήματα συνεχούς-χρόνου. Είδαμε ότι:

Η συνέλιξη δύο ακολουθιών ισοδυναμεί με τον πολλαπλασιασμό των αντίστοιχων Μ.Ζ. τους.



Ο καθορισμός της Π.Σ. του Μ.Ζ. είναι πάντοτε απαραίτητος.

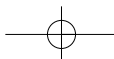
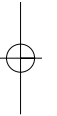
Η Π.Σ. αιτιατής ακολουθίας εκτείνεται στο εξωτερικό ενός κύκλου ακτίνας ίσης με το μέτρο του πλέον απομακρυσμένου πόλου του Μ.Ζ. από την αρχή των αξόνων του μιγαδικού επιπέδου- $z$ .

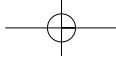
Τα ΛΤΙ συστήματα, τα οποία περιγράφονται από εξισώσεις διαφορών με σταθερούς συντελεστές, έχουν ρητές συναρτήσεις μεταφοράς.

Ο μονόπλευρος Μ.Ζ. μας λύνει το πρόβλημα του υπολογισμού της απόκρισης διακριτών συστημάτων με μη μηδενικές αρχικές συνθήκες.

Από τη συνάρτηση μεταφοράς  $H(z)$  ενός συστήματος διακριτού χρόνου, μπορούμε άμεσα να εξάγουμε συμπεράσματα για την αιτιατότητα και ευστάθεια του συστήματος. Επίσης, εύκολα προσδιορίζουμε την εξίσωση διαφορών του συστήματος και τη δομή πραγματοποίησης αυτού.

Η απόκριση συχνότητας ενός ευσταθούς συστήματος προσδιορίζεται από τη συνάρτηση μεταφοράς αυτού για  $z = e^{j\omega}$ , δηλαδή για τις τιμές του  $z$  που βρίσκονται πάνω στο μοναδιαίο κύκλο. Η χρήση του διαγράμματος πόλων-μηδενικών οδηγεί σε εύκολο γεωμετρικό (γραφικό) προσδιορισμό της απόκρισης συχνότητας ενός συστήματος.



**Βιβλιογραφία κεφαλαίου***ΕΛΛΗΝΟΓΛΩΣΣΗ*

Σ.Θεοδωρίδης, Κ.Μπερμπερίδης, *Εισαγωγή στη Θεωρία Σημάτων & Συστημάτων*, Τυπωθήτω Γ. Δαρδανός, Αθήνα, 1998.

Ν.Καλουπτσίδης, *Σήματα, Συστήματα και Αλγόριθμοι* Εκδόσεις Δίαυλος, Αθήνα, 1993.

*ΞΕΝΟΓΛΩΣΣΗ*

E.C.Ifeachor, B.W. Jervis, *Digital Signal Processing: A Practical Approach*, Second Edition, Pearson Education Limited, 2002.

S.K.Mitra, *Digital Signal Processing: A computer-Based Approach*, Second Edition, McGraw Hill, 2001.

S.J.Orfanidis, *Introduction to Signal Processing*, Prentice-Hall, 1996.

A.V.Oppenheim, A.S.Willsky, *Signals & Systems*, Second Edition, Prentice-Hall, 1997.

J.P.Proakis, D.G.Manolakis, *Digital Signal Processing: Principles, Algorithms and Applications*, Third Edition, Prentice Hall, 1996.

R.D.Strum, D.E.Kirk, *First Principles of Discrete Systems and Digital Signal Processing*, Addison-Wesley Publishing Company, 1988 .

*ΟΔΗΓΟΣ ΠΕΡΑΙΤΕΡΩ ΜΕΛΕΤΗΣ*

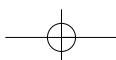
Σ.Θεοδωρίδης, Κ.Μπερμπερίδης, *Εισαγωγή στη Θεωρία Σημάτων & Συστημάτων*, Τυπωθήτω Γ. Δαρδανός, 1998.

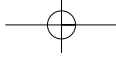
Το Κεφάλαιο 5 αναφέρεται σε σήματα και συστήματα διακριτού χρόνου. Γίνεται αναλυτική αναφορά στις ιδιότητες του μετασχηματισμού- $z$  και δίνονται παραδείγματα και ασκήσεις.

S.K.Mitra, *Digital Signal Processing: A computer-Based Approach*, Second Edition, McGraw Hill, 2001.

Στο Κεφάλαιο 3 γίνεται μια σχετικά σύντομη αναφορά στο μετασχηματισμό- $z$ , στις ιδιότητες και στις εφαρμογές του. Περιέχονται πολλά παραδείγματα τα οποία υλοποιούνται σε Matlab.

A.V.Oppenheim, A.S.Willsky, *Signals & Systems*, Second Edition, Prentice-Hall, 1997.

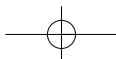
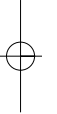


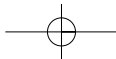


Εκτενής αναφορά στο μετασχηματισμό-z, με πολλά παραδείγματα και με αυστηρή μαθηματική θεμελίωση γίνεται στο Κεφάλαιο 10 του βιβλίου. Υπάρχουν επίσης πολλές ασκήσεις με τις απαντήσεις τους.

J.P.Proakis, D.G.Manolakis, *Digital Signal Processing: Principles, Algorithms and Applications*, Third Edition, Prentice Hall, 1996.

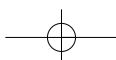
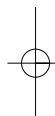
Το Κεφάλαιο 3 του βιβλίου αναφέρεται στο M.Z. Εξαιρετική παρουσίαση με πολλά παραδείγματα και ασκήσεις.

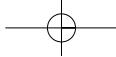




### Απόδοση αγγλικών όρων στην ελληνική

absolutely summable	αθροίσιμος κατ' απόλυτη τιμή
bandpass filter	ζωνοδιαβατό ή ζωνοπερατό φίλτρο
bandstop filter	φίλτρο απόρριψης ζώνης
bilateral transform	αμφίπλευρος μετασχηματισμός
cascade realisation	πραγματοποίηση σε σειρά
cutoff frequency	συχνότητα αποκοπής
difference equation	εξίσωση διαφορών
feedback	ανάδραση, ανατροφοδότηση
frequency response	απόκριση συχνότητας
highpass filter	υψηπερατό φίλτρο
left-sided	αριστερόπλευρος
long division	συνεχής διαίρεση
lowpass filter	βαθυπερατό φίλτρο
magnitude response	απόκριση μέτρου
notch filter	φίλτρο αποκοπής (απόρριψης) συχνότητας
passband	ζώνη διέλευσης
phase response	απόκριση φάσης
recursive	επαναληπτικός, αναδρομικός
right-sided	δεξιόπλευρος
ring	δακτύλιος
ROC	Π.Σ., περιοχή σύγκλισης
stopband	ζώνη απόρριψης ή αποκοπής
system function	συνάρτηση συστήματος
transfer function	συνάρτηση μεταφοράς
transition band	ζώνη μετάβασης
two-sided	αμφίπλευρος
unilateral transform	μονόπλευρος μετασχηματισμός
unit circle	μοναδιαίος κύκλος
unit delay	μοναδιαία καθυστέρηση
$z$ -plane	επίπεδο- $z$





### 3.1

Μία από τις πιο σημαντικές ιδιότητες του Μ.Ζ. είναι αυτή της συνέλιξης. Ας δούμε την ευκολία που μας παρέχει υπολογίζοντας τη συνέλιξη  $y(n) = h(n)*x(n)$ , όπου  $h(n) = \{1, 2, 3\}$  και  $x(n) = \{3, 4, 5, 2\}$ . Βρίσκουμε τους Μ.Ζ. των συναρτήσεων και υπολογίζουμε την  $Y(z) = H(z)X(z)$ . Η  $y(n)$  θα προκύψει από τον αντίστροφο Μ.Ζ. της  $H(z)$ . Έχουμε επομένως:

$$H(z) = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} \quad X(z) = 3 + 4z^{-1} + 5z^{-2} + 2z^{-3}$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τα πολυώνυμα αυτά παίρνουμε την  $Y(z)$ :

$$Y(z) = 3 + 10z^{-1} + 22z^{-2} + 24z^{-3} + 19z^{-4} + 6z^{-5}$$

Η  $Y(z)$  εκφράζεται ως δυναμοσειρά και συνεπώς οι συντελεστές αυτής αποτελούν στην πράξη και τα δείγματα εξόδου  $y(n)$ :

$$y(n) = \{3, 10, 22, 24, 19, 6\}$$

Παρατηρούμε ότι το αποτέλεσμα αυτό συμφωνεί με τα αντίστοιχα των Παραδειγμάτων 6 και 7 του Κεφαλαίου 1.

### 3.2

Ο υπολογισμός του Μ.Ζ. του σήματος  $x(n)$ , το οποίο είναι πεπερασμένης διάρκειας, μπορεί να γίνει απευθείας από τον ορισμό (3.1). Η Π.Σ. του Μ.Ζ. θα είναι όλο το επίπεδο- $z$  εκτός της τιμής  $z = 0$ , αφού η  $x(n)$  είναι δεξιόπλευρη ακολουθία πεπερασμένου μήκους με  $n \geq 0$ . Αυτός ο τρόπος υπολογισμού αφήνεται ως άσκηση στον αναγνώστη. Σημειώστε μόνο ότι για  $z = 1$  ο  $X(z) = N$ , αφού  $X(z) = 1 + z^{-1} + \dots + z^{-(N-1)}$ .

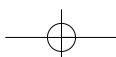
Εναλλακτικά, ο ίδιος υπολογισμός θα μπορούσε να γίνει με βάση τις ιδιότητες της γραμμικότητας και της ολίσθησης. Παρατηρήστε ότι το σήμα  $x(n)$  μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός δύο μοναδιαίων βηματικών ακολουθιών άπειρου μήκους, δηλαδή  $x(n) = u(n) - u(n-N)$  (Βλ. άσκηση αυτοαξιολόγησης 1.1). Συνεπώς

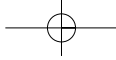
$$Z\{x(n)\} = Z\{u(n)\} - Z\{u(n-N)\}$$

$$\text{ή } X(z) = Z\{u(n)\} - z^{-N}Z\{u(n)\} = (1 - z^{-N})Z\{u(n)\} = (1 - z^{-N}) \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}}, |z| > 1$$

όπου από τον Πίνακα 3.1, χρησιμοποιήσαμε ότι  $Z\{u(n)\} = \frac{1}{1 - z^{-1}}$  με Π.Σ.  $|z| > 1$ .

Αξίζει να σημειώσουμε ότι η Π.Σ. του  $X(z)$  είναι, όπως ήδη αναφέραμε, ολόκληρο το επίπεδο- $z$  εκτός της τιμής  $z = 0$ . Με άλλα λόγια, εάν ο γραμμικός συνδυασμός πολλών σημάτων έχει ως αποτέλεσμα ένα σήμα πεπερασμένης διάρκειας, τότε η Π.Σ.





του  $M.Z.$  καθορίζεται αποκλειστικά και μόνο από τη φύση τού πεπερασμένης διάρκειας σήματος και όχι από τις Π.Σ. των επιμέρους  $M.Z.$  Αυτό ουσιαστικά είναι συνέπεια του γεγονότος ότι πόλοι απαλείφονται από αντίστοιχα μηδενικά, όπως είναι η περίπτωση του παραδείγματος.

### 3.3

(α) Αφού η Π.Σ. είναι το εξωτερικό ενός κύκλου, συμπεραίνουμε ότι το σήμα  $x(n)$  θα είναι αιτιατό. Άρα ψάχνουμε για μια δυναμοσειρά με αρνητικές δυνάμεις του  $z$ . Εκτελούμε λοιπόν τη συνεχή διαίρεση του αριθμητή με τον παρονομαστή και έχουμε:

$$\begin{array}{r}
 z^{-1} + 0,9 z^{-2} + 0,87 z^{-3} + \dots \\
 \hline
 z^{-1} \\
 \hline
 z^{-1,9} + 0,84z^{-1} \\
 \hline
 0,9 - 0,846z^{-1} \\
 \hline
 0,9 - 1,71z^{-1} + 0,756z^{-2} \\
 \hline
 0,87z^{-1} - 0,756z^{-2} \\
 \hline
 0,87z^{-1} - 1,653z^{-2} + 0,7308z^{-3} \\
 \hline
 0,897z^{-2} - 0,7308 z^{-3} \\
 \hline
 \dots\dots\dots
 \end{array}$$

Επομένως η  $X(z)$  μπορεί να εκφραστεί ως δυναμοσειρά:

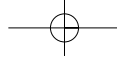
$$X(z) = z^{-1} + 0,9z^{-2} + 0,87z^{-3} + \dots$$

Κατά συνέπεια, μπορούμε άμεσα να συμπεράνουμε ότι

$$\{x(n)\} = \{0, 1, 0,9, 0,87, \dots\}$$

Περισσότερα δείγματα της  $x(n)$  μπορούμε να έχουμε συνεχίζοντας τη διαίρεση. Σημειώστε ότι για τη διαδικασία της συνεχούς διαίρεσης γράψαμε τον αριθμητή και τον παρονομαστή της  $X(z)$  κατά τις φθίνουσες δυνάμεις του  $z$ .

(β) Στην περίπτωση αυτή η Π.Σ. του  $M.Z.$   $X(z)$  ορίζεται στο εσωτερικό ενός κύκλου. Επομένως, το αντίστοιχο σήμα  $x(n)$  θα είναι αντι-αιτιατό (anticausal). Άρα ψάχνουμε για μια δυναμοσειρά με θετικές δυνάμεις του  $z$ . Εκτελούμε και πάλι τη συνεχή διαίρεση, διατάσσοντας όμως την φορά αυτή αριθμητή και παρονομαστή κατά τις αύξουσες δυνάμεις του  $z$ . Έχουμε λοιπόν:



$$\begin{array}{r}
 0,84 - 1,9z + z^2 \quad \left\{ \begin{array}{l} -1,1905 - 1,5023z + 1,9807z^2 + \dots \\ -1 + z \\ -1 + 2,2619z - 1,1905z^2 \\ -1,2619z + 1,1905z^2 \\ -1,2619z + 2,8543z^2 - 1,5023z^3 \\ -1,6638z^2 + 1,5023z^3 \\ \dots \end{array} \right.
 \end{array}$$

Άρα  $X(z) = -1,1905 - 1,5023z - 1,9807z^2 + \dots$

και κατά συνέπεια  $\{x(n)\} = \{\dots, -1,9807, -1,5023, \underline{-1,1905}\}$ ,

δηλαδή  $x(-2) = -1,9807$ ,  $x(-1) = -1,5023$ ,  $x(0) = -1,1905$ .

### 3.4

Η διαδικασία της ανάπτυξης σε μερικά κλάσματα είναι παρόμοια εκείνης του Παραδείγματος 3.7. Αυτό που πρέπει να διερευνήσουμε εκτενέστερα εδώ είναι το θέμα της ζητούμενης ακολουθίας, αφού δεν μας δίνεται το εάν πρόκειται για αιτιατό ή μη-αιτιατό σήμα. Αρχίζουμε λοιπόν από την ανάπτυξη σε μερικά κλάσματα και συνεχίζουμε με τη μελέτη των Π.Σ. της  $X(z)$ .

$$X(z) = \frac{6 + z^{-1}}{1 - 0,25z^{-2}} = \frac{6z^2 + z}{z^2 - 0,25}$$

και επομένως

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{6z + 1}{(z - 0,5)(z + 0,5)} = \frac{A_1}{z - 0,5} + \frac{A_2}{z + 0,5}$$

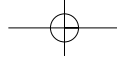
Οι πόλοι της  $X(z)$  βρέθηκαν ίσοι με  $p_1 = 0,5$  και  $p_2 = -0,5$ . Υπολογίζουμε τώρα τα  $A_1, A_2$ .

$$A_1 = (z - 0,5) \frac{X(z)}{z} \Big|_{z=0,5} = \frac{6z + 1}{z + 0,5} \Big|_{z=0,5} = 4$$

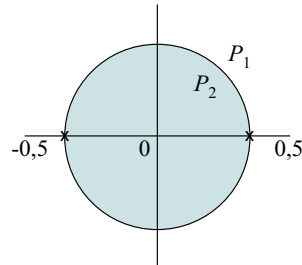
$$A_2 = (z + 0,5) \frac{X(z)}{z} \Big|_{z=-0,5} = \frac{6z + 1}{z - 0,5} \Big|_{z=-0,5} = 2$$

Άρα,  $\frac{X(z)}{z} = \frac{4}{z - 0,5} + \frac{2}{z + 0,5}$  και  $X(z) = 4 \frac{1}{1 - 0,5z^{-1}} + 2 \frac{1}{1 + 0,5z^{-1}}$



**Σχήμα 3.12**

Περιοχές σύγκλισης στο επίπεδο- $z$ .



Μέχρι το σημείο αυτό, πιστεύουμε πως φτάσατε σχετικά εύκολα. Αν όχι, προσπαθήστε και πάλι ακολουθώντας το Παράδειγμα 3.7. Εκείνο που ίσως δε σκεφτήκατε να κάνετε, είναι μία μικρή διερεύνηση σχετικά με τις διαφορετικές περιοχές σύγκλισης του Μ.Ζ., ώστε να προτείνετε την αντίστοιχη ακολουθία.

Οι δύο πόλοι βρίσκονται στα σημεία  $\pm 0,5$  και έχουν το ίδιο μέτρο. Επομένως χωρίζουν το επίπεδο σε δύο Π.Σ. την  $P_1$  εκτός του κύκλου  $|z| = 0,5$  και την  $P_2$  εντός του ίδιου κύκλου. Για την Π.Σ.  $P_1$  ( $|z| > 0,5$ ) και τα δύο μερικά κλάσματα αντιστοιχούν σε δεξιόπλευρες ακολουθίες δίνοντας:

$$x(n) = 4(0,5)^n u(n) + 2(-0,5)^n u(n).$$

Επειδή η Π.Σ.  $P_1$  περιλαμβάνει το μοναδιαίο κύκλο, το σήμα  $x(n)$  θα είναι ευσταθές.

Για την Π.Σ.  $P_2$  ( $|z| < 0,5$ ) και τα δύο μερικά κλάσματα αντιστοιχούν σε αριστερόπλευρες ακολουθίες δίνοντας:

$$x(n) = -4(0,5)^n u(-n-1) - 2(-0,5)^n u(-n-1)$$

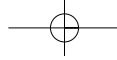
Στην περίπτωση αυτή το σήμα  $x(n)$  είναι ασταθές, αφού ο μοναδιαίος κύκλος δεν περιέχεται στην Π.Σ.

**3.5**

Υπολογίζουμε τη συνάρτηση μεταφοράς και από αυτή μπορούμε εύκολα να προσδιορίσουμε γεωμετρικά την απόκριση συχνότητας.

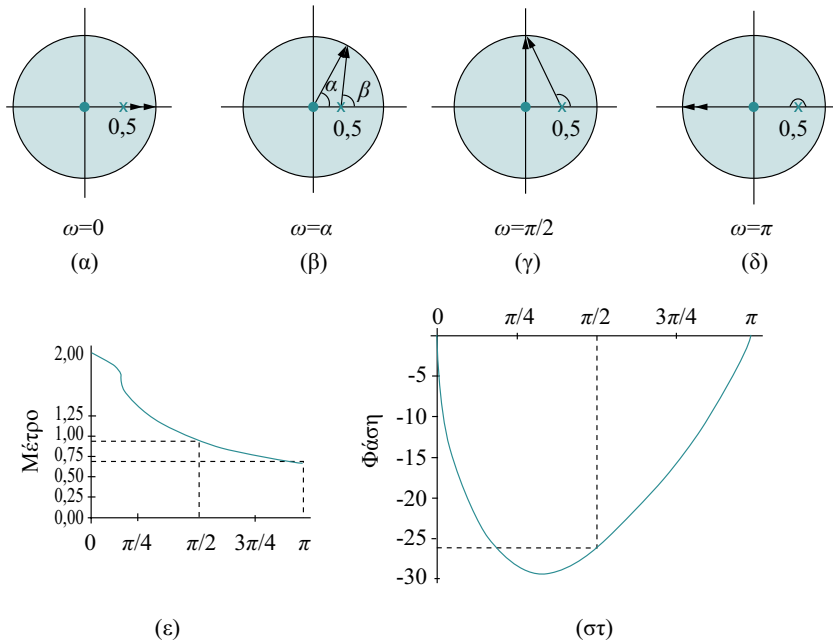
$$H(z) = Z\{h(n)\} = \frac{1}{1 - 0,5z^{-1}} \text{ με Π.Σ. } |z| > 0,5$$

Ο πόλος  $z = 0,5$  προσδιορίζει και την Π.Σ. της  $H(z)$ , η οποία ορίζεται στο εξωτερικό του κύκλου ακτίνας  $|z| = 0,5$ . Ο μοναδιαίος κύκλος εμπεριέχεται στην Π.Σ. και επομένως, το σύστημα είναι ευσταθές. Η απόκριση συχνότητας μπορεί να υπολογιστεί από την  $H(z)$  για  $z = e^{j\omega}$ . Έχουμε:



$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - 0,5e^{-j\omega}} = \frac{e^{j\omega}}{e^{j\omega} - 0,5} = \frac{Ce^{j\alpha}}{De^{j\beta}} = Ve^{j\theta}$$

όπου  $V = C/D = 1/D$  και  $\theta = \alpha - \beta$ . Η συνάρτηση έχει ένα πόλο στο σημείο  $z = 0,5$ . Ο γεωμετρικός προσδιορισμός της απόκρισης συχνότητας γίνεται με τη βοήθεια των διαγραμμάτων του Σχήματος 3.13α-δ. Για διαφορετικές γωνίες  $\omega$ , δηλαδή για διαφορετικές συχνότητες, υπολογίζουμε το μέτρο  $V$  και την φάση  $\theta$  της απόκρισης συχνότητας. Οι αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις δίνονται από το Σχ. 3.13ε-στ. Παρατηρούμε ότι πρόκειται για ένα σύστημα το οποίο επιτρέπει στις χαμηλές συχνότητες να «περάσουν» από αυτό, ενώ εξασθενεί τις υψηλές συχνότητες. Δηλαδή, πρόκειται για ένα βαθυπερατό φίλτρο.



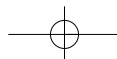
**Σχήμα 3.13**

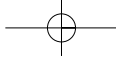
Γεωμετρικός προσδιορισμός της απόκρισης συχνότητας: (α)–(δ) διάγραμμα πόλων – μηδενικών για διαφορετικές συχνότητες, (ε)–(στ) μέτρο και φάση της απόκρισης.

### 3.6

Για να απαντήσουμε στο ερώτημα αυτό θα πρέπει να δούμε το σύστημα από την πλευρά του Μ.Ζ. αυτού. Μόνο έτσι θα μπορέσουμε εύκολα να το αναλύσουμε και να προσδιορίσουμε τη συμπεριφορά του.

Από την εξίσωση διαφορών που μας δίνεται μπορούμε να υπολογίσουμε τη συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος  $H(z)$ . Αναλυτικά έχουμε:





$$y(n) = \frac{5}{6}y(n-1) - \frac{1}{6}y(n-2) + x(n)$$

$$\text{και } Z\{y(n)\} = \frac{5}{6}Z\{y(n-1)\} - \frac{1}{6}Z\{y(n-2)\} + Z\{x(n)\}$$

$$\text{ή } Y(z) = \frac{5}{6}z^{-1}Y(z) - \frac{1}{6}z^{-2}Y(z) + X(z)$$

$$\text{ή } H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}} = \frac{1}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - \frac{1}{3}z^{-1})}$$

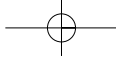
Παρατηρούμε ότι το σύστημα αυτό έχει δύο πόλους στα σημεία  $z = 1/2$  και  $z = 1/3$ . Στην είσοδο του συστήματος εφαρμόζεται το σήμα  $x(n) = \delta(n) - (1/3)\delta(n-1)$ . Ο Μ.Ζ. αυτού είναι  $X(z) = 1 - (1/3)z^{-1}$ . Βλέπουμε επομένως, ότι το σήμα εισόδου περιέχει ένα μηδενικό στο σημείο  $z = 1/3$ . Το μηδενικό αυτό εξουδετερώνει τον πόλο  $z = 1/3$  του συστήματος. Δηλαδή,  $Y(z) = H(z)X(z)$  ή  $Y(z) = \frac{1}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})}$ .

Κατά συνέπεια, η απόκριση του συστήματος για τη συγκεκριμένη είσοδο  $x(n)$  θα ισούται με  $y(n) = Z^{-1}\{Y(z)\} = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$ .

### 3.7

Είδαμε ότι, γνωρίζοντας τη συνάρτηση μεταφοράς ενός συστήματος, μπορούμε άμεσα να ελέγξουμε την BIBO ευστάθεια αυτού, να σχεδιάσουμε τη δομή του, που θα μας οδηγήσει τελικά στην πιο κατάλληλη υλοποίηση και να βρούμε την απόκριση συχνότητας του συστήματος. Ας εξετάσουμε τη συνάρτηση μεταφοράς του αιτιατού συστήματος  $H(z) = 1/(1 + 0,5z^{-1}) = z/(z + 0,5)$ . Βλέπουμε ότι αυτή έχει ένα μηδενικό στο σημείο  $z = 0$  και έναν πόλο στο σημείο  $z = -0,5$ . Αφού ο πόλος βρίσκεται εντός του μοναδιαίου κύκλου, το σύστημα είναι ευσταθές. Από την  $H(z)$  μπορούμε εύκολα να προσδιορίσουμε με το γεωμετρικό (γραφικό) τρόπο την απόκριση συχνότητας. Τα διαγράμματα πόλων-μηδενικών για τις πλέον χαρακτηριστικές περιπτώσεις, δηλαδή  $\omega = 0$ ,  $\omega = \pi/2$  και  $\omega = \pi$  φαίνονται στο Σχήμα 3.14α-γ. Η αντίστοιχη απόκριση συχνότητας (μέτρο και φάση) δίνεται από το Σχήμα 3.14δ-ε. Παρατηρούμε ότι το σύστημα αυτό εξασθενίζει τις χαμηλές και «ευνοεί» τις υψηλές συχνότητες. Άρα, το σύστημα είναι ένα υπερπυκνωτικό φίλτρο.

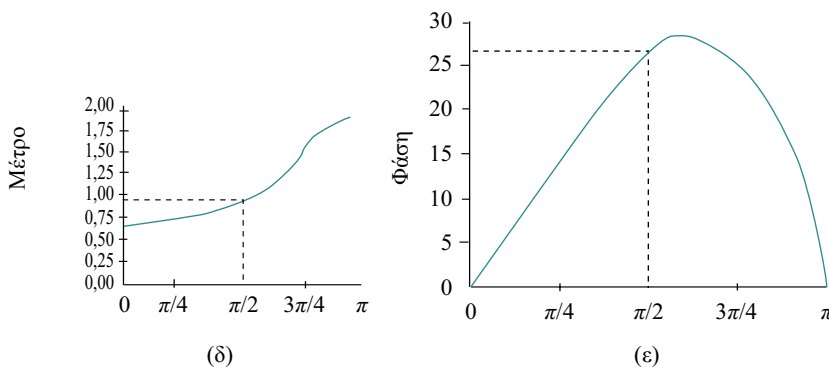
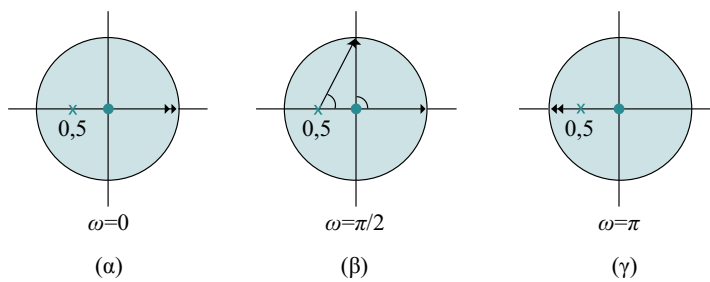
Η δομή πραγματοποίησης του συστήματος αποτελεί ουσιαστικά την άμεση απεικόνιση



νιση της εξίσωσης διαφορών αυτού (Σχήμα 3.15). Η εξίσωση διαφορών προκύπτει εύκολα από τη συνάρτηση μεταφοράς, δηλαδή:

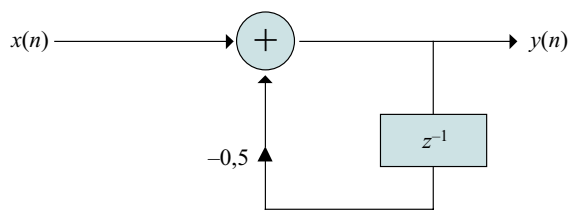
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 + 0.5z^{-1}} \Rightarrow Y(z)(1 + 0.5z^{-1}) = X(z) \Rightarrow Y(z) = X(z) - 0.5z^{-1}Y(z)$$

Παίρνοντας τον αντίστροφο Μ.Ζ. και λαμβάνοντας υπόψη τις ιδιότητες της γραμμικότητας και της ολίσθησης, καταλήγουμε στη σχέση:  $y(n] = x(n] - 0,5y(n-1)$ .



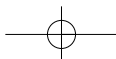
**Σχήμα 3.14**

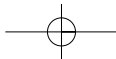
Γεωμετρικός προσδιορισμός της απόκρισης συχνότητας: (α)–(γ) διάγραμμα πόλων – μηδενικών για διαφορετικές συχνότητες, (δ)–(ε) μέτρο και φάση της απόκρισης.



**Σχήμα 3.15**

Δομή πραγματοποίησης συστήματος.





Αξιίζει να σημειώσουμε εδώ τα εξής:

- Το σύστημα που μόλις εξετάσαμε είναι ένα φίλτρο πρώτης τάξης. (Θυμηθείτε ότι ο βαθμός του πολωνύμου του παρανομαστή της  $H(z)$  καθορίζει και την τάξη του συστήματος).
- Το φίλτρο είναι επαναληπτικό, αφού δείγματα της εξόδου ανατροφοδοτούνται στο σύστημα.
- Συγκρίνοντας την  $H(z)$  του συστήματος αυτού με εκείνη της άσκησης αυτοαξιολόγησης 3.5, παρατηρούμε ότι η μόνη διαφορά που υπάρχει είναι στο πρόσημο του συντελεστή της  $z^{-1}$  του παρανομαστή, δηλαδή στον πόλο της συνάρτησης. Αυτή η διαφορά έχει ως συνέπεια να αλλάξει ριζικά η συμπεριφορά του συστήματος και από βαθυπερατό φίλτρο στη μία περίπτωση να γίνει υψηπερατό στην άλλη.

#### 4.1

α. Σωστό.

β. Λάθος (5).

γ. Λάθος (Τιμή συντελεστή 0,2)

δ. Σωστό.

ε. Λάθος (Καθυστέρηση  $2T_s = 1/44100 = 45,3 \text{ } \mu\text{sec}$ )

Αν έχετε απαντήσει σωστά, τότε μπράβο σας! Έχετε καταλάβει τις βασικές έννοιες στα FIR φίλτρα, τα οποία με τη σειρά τους αποτελούν ουσιαστικό εργαλείο στην ψηφιακή επεξεργασία σήματος.

Αν έχετε μερικές από τις απαντήσεις λάθος μην απογοητευτείτε. Διαβάστε πάλι την ενότητα 4.1, δίνοντας έμφαση στην υποενότητα 4.1.1.

#### 4.2

Η συχνότητα αποκοπής πρέπει να είναι μικρότερη από την  $\pi$ , αφού η περιοχή ενδιαφέροντος στα ψηφιακά φίλτρα είναι  $[-\pi, \pi]$ .

Αν απαντήσατε σωστά, συγχαρητήρια. Έχετε κατανοήσει δύο πράγματα. Τον τρόπο που ενεργούν στις συχνότητες τα διάφορα φίλτρα (υψηπερατά, βαθυπερατά κτλ.), καθώς επίσης και το γεγονός ότι η απόκρισή τους στη συχνότητα είναι περιοδική με περίοδο  $2\pi$ .

Στην περίπτωση που έχετε κάνει λάθος, θα πρέπει να εστιάσετε την προσοχή σας