ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Δ7 – ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ Z

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ ΣΚΟΔΡΑΣ

2023 - 2024

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ - Ζ

Ευθύς $$X(z) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, z^{-n}$$

Αντίστροφος $$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z)\, z^{n-1}\, dz$$

- Απλοποιεί τη μελέτη της απόκρισης ΓΧΑ συστημάτων σε διάφορα σήματα (αφού η συνέλιξη στο χρόνο ισοδυναμεί σε πολλαπλασιασμό στον χώρο-z).

- Διευκολύνει τον χαρακτηρισμό ΓΧΑ συστημάτων, καθώς και τον υπολογισμό της απόκρισής τους σε διάφορα σήματα, μέσω των θέσεων των πόλων και μηδενικών.

- Αποτελεί, από μαθηματικής απόψεως, έναν εναλλακτικό τρόπο περιγραφής ενός σήματος διακριτού χρόνου (αφού ο εκθέτης του z παρέχει την απαιτούμενη πληροφορία για τον προσδιορισμό της θέσης κάθε δείγματος).

- Παρέχει τη δυνατότητα περιγραφής ενός ΣΔΧ (πεπερασμένης ή άπειρης διάρκειας) με έναν συμπαγή τρόπο, (αφού η πεπερασμένη ή άπειρη σειρά μπορεί να εκφραστεί σε κλειστή μορφή).

Επίσης:

- Περιοχή Σύγκλισης (Region of Convergence - ROC) του X(z) είναι το σύνολο όλων των τιμών του z για τις οποίες το X(z) έχει πεπερασμένη τιμή.

- Κάθε φορά που γράφουμε τον μετασχηματισμό-Z ενός ΣΔΧ, θα πρέπει να γράφουμε επίσης και την περιοχή σύγκλισης αυτού.

ΑΣΚΗΣΗ

Να υπολογιστεί ο ΜΖ του σήματος $x(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$

Λύση

Το σήμα $x(n)$ αποτελείται από ένα άπειρο αριθμό μη μηδενικών δειγμάτων

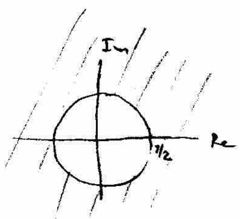
$$x(n)=\left\{1, \left(\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}\right)^2, \left(\frac{1}{2}\right)^3, \ldots, \left(\frac{1}{2}\right)^n, \ldots\right\}$$

Ο ΜΖ είναι μια δυναμοσειρά απείρου μήκους

$$X(z)=1+\frac{1}{2}z^{-1}+\left(\frac{1}{2}\right)^2 z^{-2}+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n}+\ldots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^n$$

$$=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \quad \text{για} \quad \left|\frac{1}{2}z^{-1}\right|<1 \Rightarrow |z|>\frac{1}{2}$$

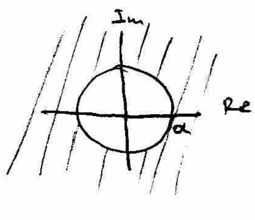


Παρατηρούμε ότι ο ΜΖ μας δίνει τη δυνατότητα εναλλακτικής έκφρασης του σήματος $x(n)$ (σε κλειστή μορφή).

Γενίκευση

$$x(n)=\alpha^n u(n) \overset{z}{\longleftrightarrow} X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha z^{-1})^n=\frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$$

για $|\alpha z^{-1}|<1$ ή $|z|>|\alpha|$



Ειδική Περίπτωση

Για $\alpha=1$ έχουμε τον ΜΖ της βηματικής ακολουθίας $u(n)$

$$x(n)=u(n) \overset{z}{\longleftrightarrow} X(z)=\frac{1}{1-z^{-1}} \quad \text{με ΠΣ} \quad |z|>1$$

Σημείωση: Ένας άλλος τρόπος υπολογισμού του ΜΖ της $u(n)$ είναι μέσω της σχέσης $\delta(n)=u(n)-u(n-1)$ και με χρήση της ιδιότητας ολίσθησης στον χρόνο.

$$Z\{\delta(n)\}=Z\{u(n)\}-Z\{u(n-1)\} \Rightarrow$$

$$1 = U(z)-z^{-1}U(z) \Rightarrow U(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}$$

Άσκηση

Να υπολογιστεί ο ΜΖ του σήματος $x(n) = [3(2^n) - 4(3^n)]u(n)$

Λύση

$$\left.\begin{aligned} x_1(n) &= 2^n u(n) \\ x_2(n) &= 3^n u(n) \end{aligned}\right\} \quad x(n) = 3x_1(n) - 4x_2(n) \xleftrightarrow{z} X(z) = 3X_1(z) - 4X_2(z)$$

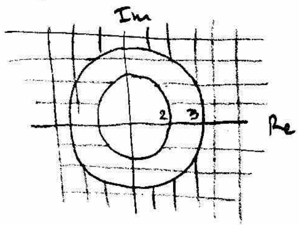
Με βάση τις σχέσεις $\quad \alpha^n u(n) \xleftrightarrow{z} \dfrac{1}{1-\alpha z^{-1}} \quad$ με ΠΣ $|z|>|\alpha|$

και θέτοντας $\alpha=2$ και $\alpha=3$ έχουμε:

$$X_1(z) = \frac{1}{1-2z^{-1}} \qquad \text{με ΠΣ} \quad |z|>2$$

$$X_2(z) = \frac{1}{1-3z^{-1}} \qquad \text{με ΠΣ} \quad |z|>3$$

Η τομή (κοινή περιοχή) των δύο περιοχών σύγκλισης είναι $|z|>3$



Τελικά ο ΜΖ της $x(n)$ είναι:

$$X(z) = \frac{3}{1-2z^{-1}} - \frac{4}{1-3z^{-1}} \qquad \text{με ΠΣ} \quad |z|>3$$

Ασκηση

Να υπολογιστεί ο ΜΖ των σημάτων:

(α) $x(n)=\begin{cases}\left(\frac{1}{2}\right)^n, & n\geq 5\\ 0, & n\leq 4\end{cases}$

(β) $x(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n\left[u(n)-u(n-10)\right]$

Λύση

(α) $X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, z^{-n} = \sum_{n=5}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n} =$

$=\sum_{n=5}^{\infty}\left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^n = \langle$ θέτω $m=n-5 \Rightarrow n=m+5 \rangle =$

$=\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^{m+5} =$

$=\left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^5 \sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^m =$

$=\frac{1}{2^5}z^{-5}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} =$

$=\left(\frac{1}{32}\right)\cdot\frac{z^{-5}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$ με ΠΣ: $|z|>\frac{1}{2}$

(β) $X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n} - \sum_{n=10}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n} =$

$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^n - \sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^{m+10} =$

$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^n - \left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^{10}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^m =$

$=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} - \left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^{10}\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} =$

$=\frac{1-\left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^{10}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$ με ΠΣ όλο το z εκτός $z=0$.

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί ο ΜΖ του σήματος $x(n)=\begin{cases} 1, & 0\le n\le N-1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

ΛΥΣΗ

Α' Τρόπος:

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} 1\cdot z^{-n} = 1+z^{-1}+z^{-2}+\dots+z^{-(N-1)} = \begin{cases} N & \text{εάν } z=1 \\ \dfrac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}} & \text{εάν } z\neq 1 \end{cases}$$

Αφού το σήμα $x(n)$ είναι πεπερασμένης διάρκειας, η ΠΣ θα είναι όλο το επίπεδο-z, εκτός $z=0$.

Β' Τρόπος:

$$x(n)=u(n)-u(n-N) \Rightarrow$$

$$Z\{x(n)\}=Z\{u(n)\}-Z\{u(n-N)\} \Rightarrow$$ <χρήση ιδιότητας γραμμικότητας>

$$X(z)=U(z)-z^{-N}U(z) \Rightarrow$$ <χρήση ιδιότητας ολίσθησης στο χρόνο>

$$X(z)=\left(1-z^{-N}\right)U(z)=\left(1-z^{-N}\right)\frac{1}{1-z^{-1}}=\frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}$$

όπου $U(z)=\dfrac{1}{1-z^{-1}}$ με ΠΣ: $|z|>1$

Παρατήρηση: Εάν ο γραμμικός συνδυασμός πολλών σημάτων καταλήγει σε ένα σήμα πεπερασμένης διάρκειας, τότε η ΠΣ του ΜΖ καθορίζεται αποκλειστικά από τη φύση του πεπερασμένης διάρκειας σήματος, και όχι από τις ΠΣ των επιμέρους ΜΖ.

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί ο ΜΖ των σημάτων:

(α) $x(n) = (\cos \omega_0 n)\, u(n)$ (b) $x(n) = (\sin \omega_0 n)\, u(n)$

ΛΥΣΗ

(α) $x(n) = (\cos \omega_0 n)\, u(n) = \frac{1}{2} e^{j\omega_0 n} u(n) + \frac{1}{2} e^{-j\omega_0 n} u(n)$

Άρα $X(z) = \frac{1}{2} Z\{e^{j\omega_0 n} u(n)\} + \frac{1}{2} Z\{e^{-j\omega_0 n} u(n)\}$

Αλλά $Z\{\alpha^n u(n)\} = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$ με ΠΣ: $|z|>|\alpha|$

Συνεπώς για $\alpha = e^{j\omega_0}$ έχουμε

$$Z\{e^{j\omega_0 n} u(n)\} = \frac{1}{1-e^{j\omega_0} z^{-1}} \quad \text{με ΠΣ: } |z|>|e^{j\omega_0}|=1$$

$$Z\{e^{-j\omega_0 n} u(n)\} = \frac{1}{1-e^{-j\omega_0} z^{-1}} \quad \text{με ΠΣ: } |z|>|e^{-j\omega_0}|=1$$

Τελικά $X(z) = \frac{1}{2} \frac{1}{1-e^{j\omega_0} z^{-1}} + \frac{1}{2} \frac{1}{1-e^{-j\omega_0} z^{-1}}$ με ΠΣ: $|z|>1$

και μετά από πράξεις:

$$X(z) = \frac{1 - z^{-1}\cos\omega_0}{1 - 2z^{-1}\cos\omega_0 + z^{-2}} \quad \text{με ΠΣ: } |z|>1$$

(b) $x(n) = (\sin \omega_0 n)\, u(n) = \frac{1}{2j}\left[e^{j\omega_0 n} - e^{-j\omega_0 n}\right] u(n)$

Άρα $X(z) = \frac{1}{2j}\left[\frac{1}{1-e^{j\omega_0} z^{-1}} - \frac{1}{1-e^{-j\omega_0} z^{-1}}\right]$ με ΠΣ: $|z|>1$

και τελικά

$$X(z) = \frac{z^{-1}\sin\omega_0}{1 - 2z^{-1}\cos\omega_0 + z^{-2}} \quad \text{με ΠΣ: } |z|>1$$

ΑΣΚΗΣΗ

Να υπολογιστεί ο ΜΖ του σήματος $y(n)=\sum_{m=-\infty}^{n} x(m)$

Λύση

Α' τρόπος:

$$y(n)=\sum_{m=-\infty}^{n} x(m)$$

$$y(n-1)=\sum_{m=-\infty}^{n-1} x(m)$$

Αφαιρώ κατά μέλη

$$y(n)-y(n-1)=x(n)$$

Εναλλακτικά: $y(n)=\sum_{m=-\infty}^{n} x(m) = \sum_{m=-\infty}^{n-1} x(m) + x(n) \Rightarrow$

$$y(n)=y(n-1)+x(n)$$

Παίρνω τον ΜΖ και των δύο μελών

$$Z\{y(n)-y(n-1)\}=Z\{x(n)\} \Rightarrow$$

$$Z\{y(n)\}-Z\{y(n-1)\}=Z\{x(n)\} \Rightarrow$$

$$Y(z)-z^{-1}Y(z)=X(z) \Rightarrow$$

$$Y(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}X(z)$$

Β' τρόπος:

$$y(n)=\sum_{m=-\infty}^{n} x(m) =$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\,u(n-m) \quad \leftarrow \text{συνέλιξη}$$

$$= x(n) * u(n)$$

Άρα

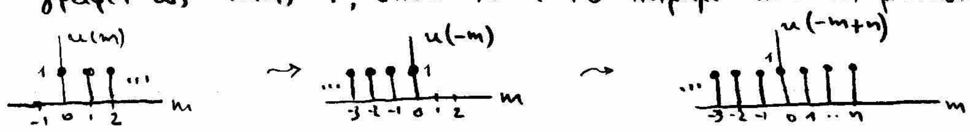
$$Y(z)=X(z)\cdot U(z) \qquad \left\langle \text{όπου } U(z)=Z\{u(n)\}=\frac{1}{1-z^{-1}} \text{ με ΠΣ } |z|>1 \right\rangle$$

$$=X(z)\cdot\frac{1}{1-z^{-1}} \quad \text{με ΠΣ } |z|>1$$

Σημείωση:

- Το $y(n)=\sum_{m=-\infty}^{n} x(m)$ ονομάζεται και συσσωρευτής (accumulator) γιατί υπολογίζει το τρέχον άθροισμα (running sum) όλων των παρελθόντων τιμών του $x(m)$ μέχρι και την παρούσα χρονική στιγμή n.

- Στον Β' τρόπο χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι κάθε δείγμα $x(m)$ μπορεί να γραφεί ως $x(m)\cdot 1$, όπου το 1 το "πήραμε" από τη μοναδιαία βηματική.



ΚΛΙΜΑΚΩΣΗ ΣΤΟΝ ΧΩΡΟ-Z

Εάν $x(n) \xleftrightarrow{z} X(z)$ με ΠΣ: $r_1 < |z| < r_2$

τότε $\alpha^n x(n) \xleftrightarrow{z} X(\alpha^{-1}z)$ με ΠΣ: $|\alpha| r_1 < |z| < |\alpha| r_2$

$\forall$ σταθερά α, πραγματική ή μιγαδική

Απόδειξη: $Z\{\alpha^n x(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha^n x(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) (\alpha^{-1}z)^{-n} = X(\alpha^{-1}z)$

Αφού η ΠΣ του $X(z)$ είναι $r_1 < |z| < r_2$,
η ΠΣ του $X(\alpha^{-1}z)$ θα είναι $r_1 < |\alpha^{-1}z| < r_2 \Rightarrow |\alpha| r_1 < |z| < |\alpha| r_2$

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί ο ΜΖ των σημάτων:

(α) $x(n) = \alpha^n \underbrace{(\cos \omega_0 n)\, u(n)}_{g(n)}$ (β) $x(n) = \alpha^n \underbrace{(\sin \omega_0 n)\, u(n)}_{f(n)}$

Λύση

Σε προηγούμενη άσκηση είχαμε υπολογίσει τους ΜΖ των σημάτων $g(n)$ και $f(n)$.

$$g(n) \xleftrightarrow{z} \frac{1 - z^{-1}\cos\omega_0}{1 - 2z^{-1}\cos\omega_0 + z^{-2}} \quad \text{με ΠΣ: } |z|>1$$

$$f(n) \xleftrightarrow{z} \frac{z^{-1}\sin\omega_0}{1 - 2z^{-1}\cos\omega_0 + z^{-2}} \quad \text{με ΠΣ: } |z|>1$$

Με βάση αυτά και με χρήση της ιδιότητας κλιμάκωσης στον χώρο-Z έχουμε:

(α) $$x(n) = \alpha^n g(n) \xleftrightarrow{z} \frac{1 - (\alpha^{-1}z)^{-1}\cos\omega_0}{1 - 2(\alpha^{-1}z)^{-1}\cos\omega_0 + (\alpha^{-1}z)^{-2}} = \frac{1 - \alpha z^{-1}\cos\omega_0}{1 - 2\alpha z^{-1}\cos\omega_0 + \alpha^2 z^{-2}}$$

(β) $$x(n) = \alpha^n f(n) \xleftrightarrow{z} \frac{(\alpha^{-1}z)^{-1}\sin\omega_0}{1 - 2(\alpha^{-1}z)^{-1}\cos\omega_0 + (\alpha^{-1}z)^{-2}} = \frac{\alpha z^{-1}\sin\omega_0}{1 - 2\alpha z^{-1}\cos\omega_0 + \alpha^2 z^{-2}}$$

Οι ΠΣ και των δύο ΜΖ είναι: $|\alpha^{-1}z| > 1 \Rightarrow |z| > |\alpha|$

ΙΔΙΟΤΗΤΑ ΑΝΑΣΤΡΟΦΗΣ ΧΡΟΝΟΥ (time reversal)

Εάν $x(n) \xleftrightarrow{z} X(z)$ με ΠΣ: $r_1 < |z| < r_2$

τότε $x(-n) \xleftrightarrow{z} X(z^{-1})$ με ΠΣ: $\frac{1}{r_2} < |z| < \frac{1}{r_1}$

Απόδειξη: $Z\{x(-n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(-n)\, z^{-n} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(l)\, z^{l} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(l)\left(z^{-1}\right)^{-l} = X(z^{-1})$

με ΠΣ $\frac{1}{r_2} < |z| < \frac{1}{r_1}$

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί ο ΜΖ του σήματος $x(n) = u(-n)$

Λυση Γνωρίζουμε ότι $u(n) \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1-z^{-1}}$ με ΠΣ: $|z|>1$

Με χρήση της ιδιότητας αναστροφής χρόνου έχουμε:

$$u(-n) \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1-(z^{-1})^{-1}} = \frac{1}{1-z} \quad \text{με ΠΣ: } |z^{-1}|>1 \Rightarrow |z|<1$$

ΙΔΙΟΤΗΤΑ ΔΙΑΦΟΡΙΣΗΣ ΣΤΟΝ ΧΩΡΟ-Ζ

Εάν $\quad x(n) \overset{Z}{\longleftrightarrow} X(z)$

τότε $\quad n\,x(n) \overset{Z}{\longleftrightarrow} -z\,\dfrac{dX(z)}{dz}$

Απόδειξη: $\dfrac{dX(z)}{dz} = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\,(-n)\,z^{-n-1} = -z^{-1}\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\left[n\,x(n)\right]z^{-n} = -z^{-1}\,Z\{n\,x(n)\}$

ΑΣΚΗΣΗ $\quad$ Να υπολογιστεί ο ΜΖ του σήματος $x(n) = n\,\underbrace{a^n u(n)}_{x_1(n)}$

Λύση $\quad$ Γνωρίζουμε ότι

$$x_1(n) = \alpha^n u(n) \overset{Z}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-\alpha z^{-1}} \quad \text{με ΠΣ: } |z| > |\alpha|$$

Με χρήση της ιδιότητας διαφόρισης στον χώρο-Ζ έχουμε:

$$x(n) = n\,x_1(n) \longleftrightarrow -z\,\frac{dX_1(z)}{dz} = \frac{\alpha z^{-1}}{(1-\alpha z^{-1})^2} \quad \text{με ΠΣ: } |z|>|\alpha|$$

Ειδική περίπτωση:

Για $\alpha=1$ έχουμε τον ΜΖ του σήματος μοναδιαίας ράμπας (unit ramp):

$$n\,u(n) \longleftrightarrow \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} \quad \text{με ΠΣ: } |z|>1$$

ΘΕΩΡΗΜΑ ΑΡΧΙΚΗΣ ΤΙΜΗΣ

Εάν $x(n)$ αιτιατό, δηλ. $x(n)=0$ για $n<0$,

τότε $x(0) = \lim_{z\to\infty} X(z)$

Απόδειξη: Αφού $x(n)$ αιτιατό έχουμε

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n} = x(0) + x(1) z^{-1} + x(2) z^{-2} + \dots$$

Από τη σχέση αυτή γίνεται φανερό ότι για $z \to \infty \Rightarrow z^{-n} \to 0$ αφού $n>0$ και άρα $x(0) = \lim_{z\to\infty} X(z)$

ΑΣΚΗΣΗ Δίνεται $x(n) = 7\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n) - 6\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) \xleftrightarrow{Z} \frac{z(z-\frac{3}{2})}{(z-\frac{1}{3})(z-\frac{1}{2})} = X(z)$

Να υπολογιστεί η τιμή του $x(0)$ μέσω των εκφράσεων του χρόνου και του ΜΖ.

ΛΥΣΗ Για $n=0$ έχουμε: $x(0) = 7-6 = 1$

Ο ΜΖ γράφεται: $X(z) = \frac{z(z-\frac{3}{2})}{(z-\frac{1}{3})(z-\frac{1}{2})} = \left\langle \begin{array}{c}\text{Διαιρώντας} \\ \text{αριθμητή και} \\ \text{παρονομαστή} \\ \text{με το } z^2\end{array} \right\rangle = \frac{(1-\frac{3}{2}z^{-1})}{(1-\frac{1}{3}z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})}$

Από το θεώρημα αρχικής τιμής βρίσκουμε:

$$x(0) = \lim_{z\to\infty} X(z) = \frac{(1-0)}{(1-0)(1-0)} = 1$$

ΑΣΚΗΣΗ

Να υπολογιστεί η συνέλιξη των σημάτων $x_1(n)=\{1, -2, 1\}$ και $x_2(n)=\begin{cases} 1 & 0\le n\le 5 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$

ΛΥΣΗ

Από τον ορισμό του ΜΖ έχουμε:

$$X_1(z)=1-2z^{-1}+z^{-2}$$

$$X_2(z)=1+z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}+z^{-4}+z^{-5}$$

Πολλαπλασιάζοντας τις $X_1(z)$ και $X_2(z)$ βρίσκουμε την $X(z)$:

$$X(z)=X_1(z)\cdot X_2(z)=1-z^{-1}-z^{-6}+z^{-7}$$

Ο αντίστροφος ΜΖ μας δίνει την $x(n)$:

$$x(n)=\{\underset{\uparrow}{1}, -1, 0, 0, 0, 0, -1, 1\}$$

Στο ίδιο αποτέλεσμα μπορούμε να καταλήξουμε παρατηρώντας ότι:

$$X_1(z)=(1-z^{-1})^2$$

$$X_2(z)=\frac{1-z^{-6}}{1-z^{-1}}$$

οπότε

$$X(z)=(1-z^{-1})(1-z^{-6})=1-z^{-1}-z^{-6}+z^{-7}$$

Άσκηση

Να λυθεί η εξίσωση διαφορών: $x(n) - \frac{3}{2}x(n-1) + \frac{1}{2}x(n-2) = u(n-2)$

Λύση

Παίρνουμε τον ΜΖ

$$X(z) - \frac{3}{2}z^{-1}X(z) + \frac{1}{2}z^{-2}X(z) = z^{-2}\frac{1}{1-z^{-1}} \Rightarrow$$

$$X(z) = \frac{\frac{z^{-2}}{1-z^{-1}}}{1-\frac{3}{2}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}} = \frac{z^{-2}}{(1-z^{-1})(1+\alpha z^{-1}+\beta z^{-2})} = \langle \text{έθεσα } \alpha = -\tfrac{3}{2},\ \beta = \tfrac{1}{2} \rangle$$

$$= \frac{z}{(z-1)(z^2+\alpha z+\beta)} = \frac{z}{(z-1)(z-1)(z-\frac{1}{2})} = \frac{z}{(z-1)^2(z-\frac{1}{2})} \quad (*)$$

Ανάπτυξη σε μερικά κλάσματα:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{1}{(z-1)^2(z-0.5)} = \frac{A_1}{(z-1)^2} + \frac{A_2}{z-1} + \frac{A_3}{z-0.5} \qquad (\tilde{1})$$

$$A_1 = (z-1)^2\frac{X(z)}{z}\Big|_{z=1} = \frac{1}{z-0.5}\Big|_{z=1} = \frac{1}{0.5} = 2$$

$$A_3 = (z-0.5)\frac{X(z)}{z}\Big|_{z=0.5} = \frac{1}{(z-1)^2}\Big|_{z=0.5} = \frac{1}{(-\frac{1}{2})^2} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$$

Σημείωση: Θα μπορούσαμε να μην κάνουμε αυτούς τους υπολογισμούς, αφού προχωρήσαμε στην επίλυση του συστήματος των εξισώσεων.

Πολλαπλασιάζοντας την $(\tilde{1})$ με τον παρονομαστή $(z-1)^2(z-0.5)$ παίρνουμε:

$$1 = A_1(z-0.5) + A_2(z-1)(z-0.5) + A_3(z-1)^2 =$$

$$= A_1 z - A_1\frac{1}{2} + A_2\left(z^2 - \frac{1}{2}z - z + \frac{1}{2}\right) + A_3(z^2-2z+1) =$$

$$= A_1 z - \frac{1}{2}A_1 + A_2 z^2 - \frac{3}{2}A_2 z + \frac{1}{2}A_2 + A_3 z^2 - 2A_3 z + A_3 \Rightarrow$$

$$1 = \underbrace{(A_2+A_3)}_{0}z^2 + \underbrace{\left(A_1 - \frac{3}{2}A_2 - 2A_3\right)}_{0}z + \underbrace{\left(-\frac{1}{2}A_1 + \frac{1}{2}A_2 + A_3\right)}_{1}$$

(*) Εύρεση ριζών:

$$z^2 - \frac{3}{2}z + \frac{1}{2} = 0 \rightarrow \Delta = \frac{9}{4} - 4\cdot 1\cdot\frac{1}{2} = \frac{9}{4} - 2 = \frac{9}{4} - \frac{8}{4} = \frac{1}{4}$$

$$z_{1,2} = \frac{\frac{3}{2} \pm \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}}{2} = \begin{cases} 1 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$$

Άρα $z^2 - \frac{3}{2}z + \frac{1}{2} = (z-1)(z-\frac{1}{2})$

Εξισώνοντας τους συντελεστές του z του ίδιου βαθμού έχουμε το σύστημα των εξισώσεων:

$$A_2 + A_3 = 0 \quad (1) \quad \rightsquigarrow \quad A_2 = -A_3$$

$$A_1 - \frac{3}{2}A_2 - 2A_3 = 0 \quad (2) \quad \overset{(1)}{\rightsquigarrow} \quad A_1 + \frac{3}{2}A_3 - 2A_3 = 0 \Rightarrow A_1 = \frac{1}{2}A_3 \quad (4)$$

$$-\frac{1}{2}A_1 + \frac{1}{2}A_2 + A_3 = 1 \quad (3) \quad \overset{(4)}{\rightsquigarrow} \quad -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}A_3 + \frac{1}{2}(-A_3) + A_3 = 1 \Rightarrow -\frac{A_3}{4} - \frac{A_3}{2} + A_3 = 1 \Rightarrow A_3 = 4 \quad (5)$$

Τελικά η επίλυση του συστήματος είναι: $A_1 = 2$, $A_2 = -4$, $A_3 = 4$

Άρα η σχέση $\frac{X(z)}{z}$ από την οποία ξεκινήσαμε, γίνεται:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{2}{(z-1)^2} - \frac{4}{z-1} + \frac{4}{z-0.5} \Rightarrow X(z) = 2\cdot\frac{z}{(z-1)^2} - 4\,\frac{z}{z-1} + 4\,\frac{z}{z-0.5}$$

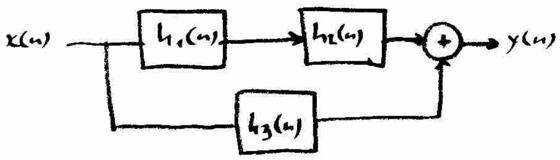
Ο αντίστροφος ΜΖ μας δίνει την $x(n)$:

$$x(n) = 2\cdot\left(n\cdot 1^n u(n)\right) - 4\cdot u(n) + 4\cdot\left(0.5^n u(n)\right) \Rightarrow$$

$$x(n) = \left[2n - 4 + 4\cdot 0.5^n\right] u(n)$$

Άσκηση

Ποια η κρουστική απόκριση του συστήματος;



για

$$h_1(n) = \delta(n-1) + 3\delta(n)$$

$$h_2(n) = \delta(n-2) + 2\delta(n)$$

$$h_3(n) = 6\delta(n-6) + 7\delta(n-4) - 3\delta(n-1) + \delta(n)$$

Λύση

Α' τρόπος:

$$h(n) = \underbrace{h_1(n) * h_2(n)}_{6\delta(n) + 2\delta(n-1) + 3\delta(n-2) + \delta(n-3)} + h_3(n)$$

$$h(n) = 7\delta(n) - \delta(n-1) + 3\delta(n-2) + \delta(n-3) + 7\delta(n-4) + 6\delta(n-6)$$

Β' τρόπος: Με πράξεις στο πεδίο-Z

$$H_1(z) = z^{-1} + 3$$

$$H_2(z) = z^{-2} + 2$$

$$H_3(z) = 6z^{-6} + 7z^{-4} - 3z^{-1} + 1$$

$$H(z) = H_1(z) \cdot H_2(z) + H_3(z) =$$

$$= (z^{-1}+3)(z^{-2}+2) + (6z^{-6} + 7z^{-4} - 3z^{-1} + 1) =$$

$$= z^{-3} + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 6 + 6z^{-6} + 7z^{-4} - 3z^{-1} + 1 =$$

$$= 7 - z^{-1} + 3z^{-2} + z^{-3} + 7z^{-4} + 6z^{-6}$$

Άρα

$$h(n) = 7\delta(n) - \delta(n-1) + 3\delta(n-2) + \delta(n-3) + 7\delta(n-4) + 6\delta(n-6)$$

Άσκηση

Να υπολογιστεί η έξοδος του συστήματος (LTI) για $x(n)=A\,u(n)$ και $h(n)=a^n u(n)$.

$$x(n) \longrightarrow \boxed{h(n)} \longrightarrow y(n)$$

Λύση

Πεδίο χρόνου

$$y(n)=h(n) * x(n) =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)\, x(n-m) =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} a^m u(m)\, A\, u(n-m) =$$

$$= \sum_{m=0}^{n} a^m A = A \sum_{m=0}^{n} a^m =$$

$$= A \cdot \frac{1-a^{n+1}}{1-a} =$$

$$= \frac{A}{1-a} + \frac{Aa}{a-1}\, a^n =$$

$$= C_0 + C_1 a^n$$

όπου $n \geq 0$

Πεδίο-Z

$$Y(z) = H(z)\cdot X(z) =$$

$$= \frac{1}{1-az^{-1}} \cdot \frac{A}{1-z^{-1}} =$$

ΠΣ: $|z|>|a|$ ΠΣ: $|z|>1$

$$= \frac{A z^2}{(z-a)(z-1)} = \frac{k_1}{z-a} + \frac{k_2}{z-1} \Rightarrow$$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{Az}{(z-a)(z-1)} = \frac{K_1}{z-a} + \frac{K_2}{z-1}$$

Υπολογίζουμε τα K_1, K_2:

$$K_1 = \left.\frac{(z-a)\,Y(z)}{z}\right|_{z=a} = \left.\frac{Az}{z-1}\right|_{z=a} = \frac{Aa}{a-1}$$

$$K_2 = \left.\frac{(z-1)\,Y(z)}{z}\right|_{z=1} = \left.\frac{Az}{z-a}\right|_{z=1} = \frac{A}{1-a}$$

Άρα:

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{\frac{Aa}{a-1}}{z-a} + \frac{\frac{A}{1-a}}{z-1} =$$

$$= \frac{A}{1-a}\left(\frac{-a}{z-a} + \frac{1}{z-1}\right) \Rightarrow$$

$$Y(z) = \frac{A}{1-a}\left(\frac{z}{z-1} - \frac{az}{z-a}\right) =$$

$$= \frac{A}{1-a}\left(\frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{a}{1-az^{-1}}\right) =$$

$$= \frac{A}{1-a}\cdot\frac{1}{1-z^{-1}} + \frac{Aa}{a-1}\cdot\frac{1}{1-az^{-1}}$$

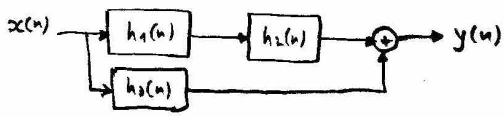
Τελικά: $y(n) = Z^{-1}\{Y(z)\} \Rightarrow$

$$y(n) = \frac{A}{1-a}\cdot u(n) + \frac{Aa}{a-1}\, a^n u(n)$$

ή

$$y(n) = C_0 + C_1 a^n \quad \text{για } n \geq 0$$

ΘΕΜΑ Α1



– ΔΕΔΟΜΕΝΑ 1 –

$h_1(n)=\delta(n)+\delta(n-1) \rightsquigarrow H_1(z)=1+z^{-1}$

$H_2(z)=3+2z^{-1}+z^{-2} \rightsquigarrow h_2(n)=3\delta(n)+2\delta(n-1)+\delta(n-2)$

$h_3(n)=2[u(n-2)-u(n-4)]=2\delta(n-2)+2\delta(n-3)$

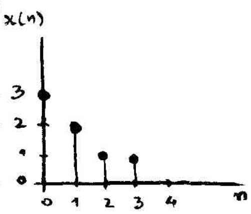
$\rightsquigarrow H_3(z)=2z^{-2}+2z^{-3}$

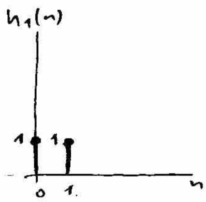
$x(n)=2\delta(n)+\delta(n-1)+u(n)-u(n-4)=$

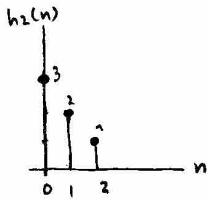
$=2\delta(n)+\delta(n-1)+\delta(n)+\delta(n-1)+\delta(n-2)+\delta(n-3)=$

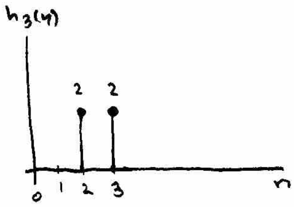
$=3\delta(n)+2\delta(n-1)+\delta(n-2)+\delta(n-3)$

$\rightsquigarrow X(z)=3+2z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}$









Α' τρόπος: Υπολογισμός στο χρόνο

Η συνολική κρουστική απόκριση του συστήματος είναι:

$$h(n)=\big(h_1(n)*h_2(n)\big)+h_3(n)$$

$h_2 \rightsquigarrow$	3	2	1	
$h_1 \rightsquigarrow$			1	1
		3	2	1
	3	2	1	
	3	5	3	1
+ $h_3 \rightsquigarrow$			2	2
$h \rightsquigarrow$	3	5	5	3

– ΔΕΔΟΜΕΝΑ 2 –

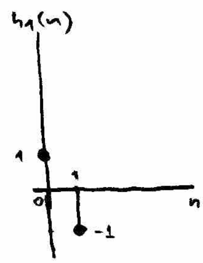
$h_1(n)=\delta(n)-\delta(n-1) \rightsquigarrow H_1(z)=1-z^{-1}$

$H_2(z)=\dots \rightsquigarrow h_2(n)=\dots$

$h_3(n)=\dots$

$x(n)=\dots$

...



... ...

Α' Τρόπος : Υπολογισμός στο χρόνο

$$h(n)=\big(h_1(n)*h_2(n)\big)+h_3(n)$$

$h_2 \rightsquigarrow$	3	2	1	
$h_1 \rightsquigarrow$			1	-1
		-3	-2	-1
	3	2	1	
	3	-1	-1	-1
+ $h_3 \rightsquigarrow$			2	2
$h \rightsquigarrow$	3	-1	1	1

Η έξοδος $y(n)$ του συστήματος υπολογίζεται από τη συνέλιξη της συνολικής κρουστικής $h(n)$ του συστήματος με την είσοδο $x(n)$, δηλ.

$$y(n) = h(n) * x(n)$$

$$\begin{array}{lccccccc}
h \to & & & & 3 & 5 & 5 & 3 \\
x \to & & & & 3 & 2 & 1 & 1 \\
\hline
 & & & & 3 & 5 & 5 & 3 \\
 & & & 3 & 5 & 5 & 3 & \\
 & & 6 & 10 & 10 & 6 & & \\
 & 9 & 15 & 15 & 9 & & & \\
\hline
y \to & 9 & 21 & 28 & 27 & 16 & 8 & 3
\end{array}$$

Η έξοδος $y(n)$ εκφρασμένη ως άθροισμα μοναδιαίων κρουστικών ισούται με:

$$y(n) = 9\,\delta(n) + 21\,\delta(n-1) + 28\,\delta(n-2) + 27\,\delta(n-3) + 16\,\delta(\delta n-4) + 8\,\delta(n-5) + 3\,\delta(n-6)$$

Β' τρόπος: Υπολογισμός στον χώρο Ζ

$$\begin{aligned}
H(z) &= \big(H_1(z) \cdot H_2(z)\big) + H_3(z) = \\
&= (1+z^{-1})(3+2z^{-1}+z^{-2}) + H_3(z) = \\
&= (3+2z^{-1}+z^{-2}+3z^{-1}+2z^{-2}+z^{-3}) + H_3(z) = \\
&= (3+5z^{-1}+3z^{-2}+z^{-3}) + (2z^{-2}+2z^{-3}) = \\
&= 3+5z^{-1}+5z^{-2}+3z^{-3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y(z) &= H(z) \cdot X(z) = \\
&= (3+5z^{-1}+5z^{-2}+3z^{-3})(3+2z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}) = \\
&= 9+15z^{-1}+15z^{-2}+9z^{-3} + \\
&\quad 6z^{-1}+10z^{-2}+10z^{-3}+6z^{-4} + \\
&\quad + 3z^{-2}+5z^{-3}+5z^{-4}+3z^{-5} + \\
&\quad 3z^{-3}+5z^{-4}+5z^{-5}+3z^{-6} = \\
&= 9+21z^{-1}+28z^{-2}+27z^{-3}+16z^{-4}+8z^{-5}+3z^{-6}
\end{aligned}$$

Τελικά, $y(n) = Z^{-1}\{Y(z)\} \Rightarrow$

$$y(n) = 9\,\delta(n)+21\,\delta(n-1)+28\,\delta(n-2)+27\,\delta(n-3) + 16\,\delta(n-4)+8\,\delta(n-5)+3\,\delta(n-6)$$

$$y(n) = h(n) * x(n)$$

$$\begin{array}{lccccccc}
h \to & & & & 3 & -1 & 1 & 1 \\
x \to & & & & 3 & 2 & 1 & 1 \\
\hline
 & & & & 3 & -1 & 1 & 1 \\
 & & & 3 & -1 & 1 & 1 & \\
 & & 6 & -2 & 2 & 2 & & \\
 & 9 & -3 & 3 & 3 & & & \\
\hline
 & 9 & 3 & 4 & 7 & 2 & 2 & 1 \to y
\end{array}$$

Άρα $y(n) = 9\,\delta(n)+3\,\delta(n-1)+4\,\delta(n-2)+7\,\delta(n-3) + 2\,\delta(n-4)+2\,\delta(n-5)+\delta(n-6)$

Β' τρόπος: Υπολογισμός στον χώρο Ζ

$$\begin{aligned}
H(z) &= \big(H_1(z) \cdot H_2(z)\big) + H_3(z) = \\
&= (1-z^{-1})(3+2z^{-1}+z^{-2}) + H_3(z) = \\
&= (3+2z^{-1}+z^{-2}-3z^{-1}-2z^{-2}-z^{-3}) + H_3(z) = \\
&= (3-z^{-1}-z^{-2}-z^{-3}) + (2z^{-2}+2z^{-3}) = \\
&= 3-z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y(z) &= H(z) \cdot X(z) = \\
&= (3-z^{-1}+z^{-2}+z^{-3})(3+2z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}) = \\
&= 9+6z^{-1}+3z^{-2}+3z^{-3}-3z^{-1}-2z^{-2}-z^{-3}-z^{-4} + \\
&\quad + 3z^{-2}+2z^{-3}+z^{-4}+z^{-5}+3z^{-3}+2z^{-4}+z^{-5}+z^{-6} = \\
&= 9+3z^{-1}+4z^{-2}+7z^{-3}+2z^{-4}+2z^{-5}+z^{-6}
\end{aligned}$$

Τελικά, $y(n) = Z^{-1}\{Y(z)\} \Rightarrow$

$$y(n) = 9\,\delta(n)+3\,\delta(n-1)+4\,\delta(n-2)+7\,\delta(n-3)+2\,\delta(n-4) + 2\,\delta(n-5)+\delta(n-6)$$

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΥ ΜΖ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ : Να υπολογιστεί το σήμα $x(n)$ του οποίου ο ΜΖ είναι:

$$X(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)} \quad , \quad |z|>2 \qquad (*)$$

Α' Τρόπος – μέσω ολοκληρωτικών υπολοίπων

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z)\, z^{n-1}\, dz = \sum_{i=1}^{N} \text{Res}\left[X(z)\, z^{n-1}\right]_{z=z_i} = \sum_{i=1}^{N} (z-z_i) X(z)\, z^{n-1}\Big|_{z=z_i}$$

όπου z_i οι πόλοι της $X(z)$

Στην προκειμένη περίπτωση έχουμε δύο πόλους : $z_1 = 1$, $z_2 = 2$

$$\text{Res}\left[X(z)\, z^{n-1}\right]_{z=z_1} = (z-1)\, X(z)\, z^{n-1}\Big|_{z=1} = \frac{z^n}{z-2}\Big|_{z=1} = \frac{1^n}{1-2} = -1$$

$$\text{Res}\left[X(z)\, z^{n-1}\right]_{z=z_2} = (z-2)\, X(z)\, z^{n-1}\Big|_{z=2} = \frac{z^n}{z-1}\Big|_{z=2} = \frac{2^n}{2-1} = 2^n$$

Άρα $x(n) = \left(-1 + 2^n\right) u(n)$

Β' Τρόπος – μέσω ανάπτυξης σε μερικά κλάσματα

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2}$$

$$A = \frac{X(z)}{z}(z-1)\Big|_{z=1} = \frac{1}{z-2}\Big|_{z=1} = -1$$

$$B = \frac{X(z)}{z}(z-2)\Big|_{z=2} = \frac{1}{z-1}\Big|_{z=2} = 1$$

Άρα

$$X(z) = \frac{-z}{z-1} + \frac{z}{z-2} = \frac{-1}{1-z^{-1}} + \frac{1}{1-2z^{-1}}$$

$$\xrightarrow{Z^{-1}} x(n) = -u(n) + 2^n u(n) = \left(-1 + 2^n\right) u(n)$$

(*) Σημείωση: Παρατηρείστε ότι η ROC είναι το εξωτερικό του κύκλου $|z|>2$. Άρα πρόκειται για αιτιατό σήμα.

<u>Γ' Τρόπος</u> - μέσω της πράξης της συνεχούς διαίρεσης (long division)

$$X(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)} = \frac{z}{z^2-3z+2}$$

Διαιρετέος → (αριθμητής)

$$\begin{array}{l|l}
z & z^2-3z+2 \quad \leftarrow \text{διαιρέτης (παρονομαστής)} \\
\underline{z-3+2z^{-1}} & z^{-1}+3z^{-2}+7z^{-3}+\dots \quad \leftarrow \text{πηλίκο} \\
\quad 3-2z^{-1} & \\
\quad \underline{3-9z^{-1}+6z^{-2}} & \\
\qquad 7z^{-1}-6z^{-2} & \\
\qquad \underline{7z^{-1}-21z^{-2}+14z^{-3}} & \\
\qquad\quad 15z^{-2}-14z^{-3} \quad \leftarrow \text{υπόλοιπο} & \\
\qquad\quad \dots &
\end{array}$$

Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε εάν εκφράσουμε την $X(z)$ σε αρνητικές δυνάμεις του z, δηλαδή

$$X(z) = \frac{z^{-1}}{1-3z^{-1}+2z^{-2}}$$

και εκτελέσουμε τη συνεχή διαίρεση.

$$\begin{array}{l|l}
z^{-1} & 1-3z^{-1}+2z^{-2} \\
\underline{z^{-1}-3z^{-2}+2z^{-3}} & z^{-1}+3z^{-2}+7z^{-3}+\dots \\
\quad 3z^{-2}-2z^{-3} & \\
\quad \underline{3z^{-2}-9z^{-3}+6z^{-4}} & \\
\qquad 7z^{-3}-6z^{-4} & \\
\qquad \underline{7z^{-3}-21z^{-4}+14z^{-5}} & \\
\qquad\quad 15z^{-4}-14z^{-5} &
\end{array}$$

Τελικά: $X(z) = z^{-1}+3z^{-2}+7z^{-3}+\dots$

και λαμβάνοντας τον αντίστροφο ΜΖ υπολογίζουμε το σήμα $x(n)$:

$$x(n) = \delta(n-1) + 3\,\delta(n-2) + 7\,\delta(n-3) + \dots$$

ή

$$x(n) = \{\underset{\uparrow}{0}, 1, 3, 7, \dots\}$$

Οι τιμές αυτές συμπίπτουν με εκείνες που προκύπτουν από την $x(n) = (-1+2^n)\,u(n)$ για $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ : Να υπολογιστεί ο αντίστροφος ΜΖ της συνάρτησης

$$X(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z-\frac{1}{2})} \quad \text{όπου} \quad |z|>1$$

Α' Τρόπος - μέσω ολοκληρωτικών υπολοίπων

Εφόσον η συνάρτηση $X(z)$ έχει πόλους πολλαπλότητας 1 (απλούς πόλους), η $x(n)$ μπορεί να εκφραστεί ως

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint_c X(z)\, z^{n-1} dz = \sum_{i=1}^{N} \text{Res}\left[X(z)\, z^{n-1}\right]_{z=z_i} = \sum_{i=1}^{N} (z-z_i)\, X(z)\, z^{n-1}\Big|_{z=z_i}$$

όπου z_i οι πόλοι

Για $z_1 = 1$ έχουμε:

$$\text{Res}\left[X(z)\, z^{n-1}\right]_{z=z_1} = (z-1)\frac{z^2 z^{n-1}}{(z-1)(z-\frac{1}{2})}\Big|_{z=1} = \frac{z^{n+1}}{z-\frac{1}{2}}\Big|_{z=1} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

Για $z_2 = \frac{1}{2}$ έχουμε:

$$\text{Res}\left[X(z)\, z^{n-1}\right]_{z=z_2} = \left(z-\frac{1}{2}\right)\frac{z^2 z^{n-1}}{(z-1)(z-\frac{1}{2})}\Big|_{z=\frac{1}{2}} = \frac{z^{n+1}}{z-1}\Big|_{z=\frac{1}{2}} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{-\frac{1}{2}} = -\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Άρα

$$x(n) = \left[2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] u(n)$$

αφού πρόκειται για αιτιατό σήμα, δεδομένου ότι η περιοχή σύγκλισης είναι το εξωτερικό του κύκλου ακτίνας 1, δηλαδή $|z|>1$.

Β' Τρόπος - μέσω ανάπτυξης σε μερικά κλάσματα

$$X(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z-\frac{1}{2})} \Rightarrow$$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z}{(z-1)(z-\frac{1}{2})} = \frac{A_1}{z-1} + \frac{A_2}{z-\frac{1}{2}}$$

$$A_1 = \frac{X(z)}{z}(z-1)\Big|_{z=1} = \frac{z}{z-\frac{1}{2}}\Big|_{z=1} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$A_2 = \frac{X(z)}{z}(z-\tfrac{1}{2})\Big|_{z=\frac{1}{2}} = \frac{z}{z-1}\Big|_{z=\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} = -1$$

Άρα

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{2}{z-1} - \frac{1}{z-\frac{1}{2}} \Rightarrow X(z) = 2\cdot\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$X(z) = 2\cdot\frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

$$\xrightarrow{Z^{-1}} x(n) = 2\cdot u(n) - \left(\tfrac{1}{2}\right)^n u(n) \Rightarrow$$

$$x(n) = \left[2 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^n\right] u(n)$$

__Γ' Τρόπος__ - διαιρώντας αριθμητή και παρονομαστή με z^2.

Η συνάρτηση που προκύπτει είναι πλέον σε μορφή κατάλληλη για την ανάπτυξη σε μερικά κλάσματα.

$$X(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z-\frac{1}{2})} = \frac{z^2/z^2}{\frac{(z-1)}{z}\cdot\frac{(z-\frac{1}{2})}{z}} = \frac{1}{(1-z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})} = \frac{A}{1-z^{-1}} + \frac{B}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

Υπολογίζουμε τα A, B κατά τα γνωστά:

$$A = (1-z^{-1})\,X(z)\Big|_{z^{-1}=1} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\Big|_{z^{-1}=1} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$B = (1-\frac{1}{2}z^{-1})\,X(z)\Big|_{z^{-1}=2} = \frac{1}{1-z^{-1}}\Big|_{z^{-1}=2} = \frac{1}{1-2} = \frac{1}{-1} = -1$$

Άρα

$$X(z) = \frac{2}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

$$\xrightarrow{z^{-1}}$$

$$x(n) = 2\cdot u(n) - \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) =$$

$$= \left[2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] u(n)$$

Δ' τρόπος – μέσω της πράξης της συνεχούς διαίρεσης (long division)

$$X(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z-\frac{1}{2})} = \frac{z^2}{z^2 - \frac{3}{2}z + \frac{1}{2}}$$

Εκτελούμε τη συνεχή διαίρεση των πολυωνύμων, αφού πρώτα τα διατάξουμε κατά τις φθίνουσες δυνάμεις του z, δεδομένου ότι πρόκειται για αιτιατό σήμα, δηλαδή η περιοχή σύγκλισης είναι το εξωτερικό ενός κύκλου ακτίνας 1 $(|z|>1)$.

Διαιρέτης ⇝

$$
\begin{array}{l|l}
z^2 & z^2 - \frac{3}{2}z + \frac{1}{2} \quad \leftarrow \text{διαιρετέος} \\
\cline{2-2}
z^2 - \frac{3}{2}z + \frac{1}{2} & 1 + \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{7}{4}z^{-2} + \dots \quad \leftarrow \text{πηλίκο} \\
\cline{1-1}
\quad \frac{3}{2}z - \frac{1}{2} & \\
\quad \frac{3}{2}z - \frac{9}{4} + \frac{3}{4}z^{-1} & \\
\cline{1-1}
\qquad \frac{7}{4} - \frac{3}{4}z^{-1} & \\
\qquad \frac{7}{4} - \frac{21}{8}z^{-1} + \frac{7}{8}z^{-2} & \\
\cline{1-1}
\qquad\quad \frac{15}{8}z^{-1} - \frac{7}{8}z^{-2} \quad \leftarrow \text{υπόλοιπο} & \\
\qquad\quad \dots &
\end{array}
$$

Άρα $X(z) = 1 + \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{7}{4}z^{-2} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}$

Δηλαδή $x(n) = \left\{\underset{\uparrow}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \dots\right\}$ ή $x(n) = \delta(n) + \frac{3}{2}\delta(n-1) + \frac{7}{4}\delta(n-2) + \dots$

Εύκολα επαληθεύεται ότι οι τιμές του σήματος $x(n)$ είναι αυτές που προκύπτουν από τη σχέση

$x(n) = \left[2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] u(n)$ για $n = 0, 1, 2, \dots$

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί το δείγμα $x(3)$ αιτιατού σήματος του οποίου ο ΜΖ είναι:

$$X(z) = \frac{1}{1 - 1.5z^{-1} + 0.5z^{-2}}$$

ΛΥΣΗ Πολλαπλασιάζοντας αριθμητή και παρονομαστή επί z^2 έχουμε

$$X(z) = \frac{z^2}{z^2 - 1.5z + 0.5} \Rightarrow \frac{X(z)}{z} = \frac{z}{z^2 - 1.5z + 0.5}$$

Βρίσκουμε τους πόλους, οι οποίοι είναι 1 και 0.5 και αναπτύσσουμε σε μερικά κλάσματα:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z}{(z-1)(z-0.5)} = \frac{A_1}{z-1} + \frac{A_2}{z-0.5}$$

Υπολογίζουμε τα A_1, A_2.

$$A_1 = (z-1)\frac{X(z)}{z}\Big|_{z=1} = \frac{z}{z-0.5}\Big|_{z=1} = \frac{1}{1-0.5} = 2$$

$$A_2 = (z-0.5)\frac{X(z)}{z}\Big|_{z=0.5} = \frac{z}{z-1}\Big|_{z=0.5} = \frac{0.5}{0.5-1} = -1$$

Τελικά

$$X(z) = 2\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-0.5} = 2\frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-0.5z}$$

Παίρνοντας τον αντίστροφο ΜΖ και των δύο μελών έχουμε:

$$x(n) = \left[2 - (0.5)^n\right] u(n)$$

Το ζητούμενο δείγμα $x(3)$ προκύπτει για $n=3$, δηλ. $x(3) = 2 - 0.5^3 = 1.875$

Σημείωση 1. Θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε την τιμή του $x(3)$ εκτελώντας τη συνεχή διαίρεση (long division). Η ζητούμενη τιμή θα ήταν ο συντελεστής του z^{-3}.

Σημείωση 2. Θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε τα A_1, A_2 κάνοντας πράξεις και εξισώνοντας τους συντελεστές του z που είναι του ίδιου βαθμού.

$$\frac{z}{(z-1)(z-0.5)} = \frac{A_1}{z-1} + \frac{A_2}{z-0.5} \Rightarrow z = A_1(z-0.5) + A_2(z-1) \Rightarrow$$

$$z = (A_1 + A_2)z - (A_1 0.5 + A_2) \Rightarrow \begin{cases} A_1 + A_2 = 1 & (1) \\ A_1 0.5 + A_2 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} (2) \rightsquigarrow A_2 = -0.5A_1 \quad (3) \\ (1) \overset{(3)}{\rightsquigarrow} A_1 - 0.5A_1 = 1 \Rightarrow A_1 = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow A_2 = -1$$

Εναλλακτικά, ο υπολογισμός θα μπορούσε να γίνει μέσω της εξίσωσης $z = A_1(z-0.5) + A_2(z-1)$ θέτοντας $z=1$, οπότε υπολογίζεται το A_1 και στη συνέχεια θέτοντας $z=0.5$, οπότε υπολογίζεται το A_2.

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί η αιτιατή ακολουθία $x(n)$ της οποίας ο ΜΖ ισούται με:

$$X(z)=\frac{1+3z^{-1}+\frac{11}{6}z^{-2}+\frac{1}{3}z^{-3}}{1+\frac{5}{6}z^{-1}+\frac{1}{6}z^{-2}}$$

ΛΥΣΗ Η ρητή συνάρτηση $X(z)$ είναι σε μορφή μη κατάλληλη (*), αφού η δύναμη του αριθμητή είναι μεγαλύτερη αυτής του παρονομαστή. Για να απαλοίψουμε τους όρους z^{-2} και z^{-3} από τον αριθμητή, θα εκτελέσουμε τη διαίρεση, διατάσσοντας τα πολυώνυμα κατά ανάστροφη τάξη (reverse order). Στην προκειμένη περίπτωση, διακόπτουμε τη συνεχή διαίρεση όταν η τάξη του υπολοίπου γίνεται z^{-1}.

Διαιρετέος → (Δ)

$$\begin{array}{l|l}
\frac{1}{3}z^{-3}+\frac{11}{6}z^{-2}+3z^{-1}+1 & \frac{1}{6}z^{-2}+\frac{5}{6}z^{-1}+1 \quad \leftarrow \text{Διαιρέτης } (\delta) \\ \cline{2-2}
\frac{2}{6}z^{-3}+\frac{10}{6}z^{-2}+2z^{-1} & 2z^{-1}+1 \quad \leftarrow \text{Πηλίκο } (\pi) \\ \cline{1-1}
0+\frac{1}{6}z^{-2}+z^{-1}+1 & \\
\quad\frac{1}{6}z^{-2}+\frac{5}{6}z^{-1}+1 & \\ \cline{1-1}
\quad 0+\frac{1}{6}z^{-1}+0 \quad \leftarrow \text{Υπόλοιπο } (\upsilon) &
\end{array}$$

$$\Delta=\delta\cdot\pi+\upsilon \Rightarrow \frac{\Delta}{\delta}=\pi+\frac{\upsilon}{\delta}$$

Άρα
$$X(z)=\underbrace{1+2z^{-1}}_{X_1(z)}+\underbrace{\frac{\frac{1}{6}z^{-1}}{1+\frac{5}{6}z^{-1}+\frac{1}{6}z^{-2}}}_{X_2(z)}=X_1(z)+X_2(z)$$

Μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε τον αντίστροφο ΜΖ της $X_1(z)$. Για την $X_2(z)$ όμως θα πρέπει να προχωρήσουμε στην ανάλυση σε μερικά κλάσματα.

$$X_2(z)=\frac{\frac{1}{6}z^{-1}}{1+\frac{5}{6}z^{-1}+\frac{1}{6}z^{-2}}=\left\langle \begin{array}{c}\text{πολ/ντας αριθμητή}\\ \text{και παρονομαστή}\\ \text{επί } z^2\end{array}\right\rangle=\frac{\frac{1}{6}z}{z^2+\frac{5}{6}z+\frac{1}{6}}$$

Οι ρίζες του παρονομαστή, δηλαδή οι πόλοι της συνάρτησης, είναι $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$. Συνεπώς έχουμε:

$$X_2(z)=\frac{\frac{1}{6}z}{z^2+\frac{5}{6}z+\frac{1}{6}}=\frac{\frac{1}{6}z}{(z+\frac{1}{2})(z+\frac{1}{3})} \Rightarrow$$

$$\frac{X_2(z)}{z}=\frac{\frac{1}{6}}{(z+\frac{1}{2})(z+\frac{1}{3})}=\frac{A_1}{z+\frac{1}{2}}+\frac{A_2}{z+\frac{1}{3}}$$

(*) Μια ρητή συνάρτηση με αριθμητή βαθμού M και παρονομαστή βαθμού N είναι σε μορφή κατάλληλη (proper) όταν $M \leq N$, σε μορφή αυστηρά κατάλληλη (strictly proper) όταν $M < N$ και σε μορφή μη κατάλληλη (nonproper) όταν $M > N$. Η ανάπτυξη σε μερικά κλάσματα απαιτεί αυστηρά κατάλληλη μορφή.

$$A_1 = \left(z+\frac{1}{2}\right) \frac{X(z)}{z}\bigg|_{z=-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{6}}{z+\frac{1}{3}}\bigg|_{z=-\frac{1}{2}} = -1$$

$$A_2 = \left(z+\frac{1}{3}\right) \frac{X(z)}{z}\bigg|_{z=-\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{6}}{z+\frac{1}{2}}\bigg|_{z=-\frac{1}{3}} = 1$$

Κατά συνέπεια έχουμε:

$$\frac{X_2(z)}{z} = \frac{-1}{z+\frac{1}{2}} + \frac{1}{z+\frac{1}{3}} \Rightarrow$$

$$X_2(z) = \frac{z}{z+\frac{1}{3}} - \frac{z}{z+\frac{1}{2}} = \frac{1}{1+\frac{1}{3}z^{-1}} - \frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$$

Τελικά η $X(z)$ προκύπτει ίση με

$$X(z) = X_1(z) + X_2(z) \Rightarrow$$

$$X(z) = 1 + 2z^{-1} + \frac{1}{1+\frac{1}{3}z^{-1}} - \frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$$

και ο αντίστροφος ΜΖ και των δύο μελών μας δίνει τη ζητούμενη ακολουθία $x(n)$

$$x(n) = \delta(n) + 2\delta(n-1) + \left[\left(-\frac{1}{3}\right)^n - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right] u(n)$$

<u>Σημείωση 1.</u> Υπολογίσαμε τα A_1, A_2 για τη συνάρτηση $\frac{X_2(z)}{z}$ και όχι για τη συνάρτηση $X_2(z)$, ώστε να διευκολυνθούμε στο τέλος και να έχουμε την $X_2(z)$ σε μορφή που να είναι αντιστρέψιμη με βάση τα γνωστά ζεύγη ΜΖ, δηλαδή

$$X_2(z) = A_1 \frac{z}{z+\frac{1}{2}} + A_2 \frac{z}{z+\frac{1}{3}} = A_1 \frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}} + A_2 \frac{1}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}$$

<u>Σημείωση 2.</u> Ένας άλλος τρόπος για τον υπολογισμό των $X_1(z)$ και $X_2(z)$ αντί για την εκτέλεση της συνεχούς διαίρεσης, είναι να εκφράσουμε το $X(z)$ ως εξής:

$$X(z) = c_0 + c_1 z^{-1} + \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1+\frac{5}{6}z^{-1}+\frac{1}{6}z^{-2}}$$

Γνωρίζουμε όμως ότι $X(z) = \dfrac{1+3z^{-1}+\frac{11}{6}z^{-2}+\frac{1}{3}z^{-3}}{1+\frac{5}{6}z^{-1}+\frac{1}{6}z^{-2}}$

Εξισώνοντας αυτά υπολογίζουμε τους άγνωστους συντελεστές c_0, c_1, b_0, b_1 μέσω της επίλυσης ενός συστήματος 4 εξισώσεων με 4 αγνώστους.

Σημείωση 3. Η $X_2(z) = \dfrac{\frac{1}{6}z}{z^2+\frac{5}{6}z+\frac{1}{6}}$ είναι σε μορφή κατάλληλη, οπότε θα μπορούσαμε να την αναλύσουμε σε απλά κλάσματα, χωρίς πρώτα να διαιρέσουμε με z και να τη φέρουμε στη μορφή $\dfrac{X_2(z)}{z}$.

$$X_2(z) = \frac{\frac{1}{6}z}{z^2+\frac{5}{6}z+\frac{1}{6}} = \frac{\frac{1}{6}z}{\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(z+\frac{1}{3}\right)} = \frac{A}{z+\frac{1}{2}} + \frac{B}{z+\frac{1}{3}}$$

όπου

$$A = \left(z+\frac{1}{2}\right)X_2(z)\Big|_{z=-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{6}z}{z+\frac{1}{3}}\Bigg|_{z=-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)}{-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

$$B = \left(z+\frac{1}{3}\right)X_2(z)\Big|_{z=-\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{6}z}{z+\frac{1}{2}}\Bigg|_{z=-\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{3}\right)}{-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}} = -\frac{1}{3}$$

Άρα

$$X_2(z) = \frac{1/2}{z+\frac{1}{2}} - \frac{1/3}{z+\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{z+\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}\,\frac{1}{z+\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}z^{-1}\frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{1}{3}z^{-1}\frac{1}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}$$

Τελικά

$$X(z) = X_1(z) + X_2(z) = 1 + 2z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-1}\frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{1}{3}z^{-1}\frac{1}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}$$

$$\xrightarrow{Z^{-1}} \quad x(n) = \delta(n) + 2\delta(n-1) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}u(n-1) - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}u(n-1)$$

Οι τιμές των 4 πρώτων δειγμάτων του σήματος $x(n)$ είναι:

$n=0 \rightarrow x(0) = 1$

$n=1 \rightarrow x(1) = 2\cdot 1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^0 - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^0 = 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{13}{6}$

$n=2 \rightarrow x(2) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^1 - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^1 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{9} = -\frac{5}{36}$

$n=3 \rightarrow x(3) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{8} - \frac{1}{27} = \frac{19}{216}$

Παρατηρούμε ότι οι τιμές αυτές είναι ίδιες με τις αντίστοιχες που προκύπτουν από τη σχέση που είχαμε υπολογίσει μέσω του $\dfrac{X_2(z)}{z}$,

$$x(n) = \delta(n) + 2\delta(n-1) + \left[\left(-\frac{1}{3}\right)^n - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]u(n)$$

Σημείωση 4.

$$X(z)=\frac{1+3z^{-1}+\frac{11}{6}z^{-2}+\frac{1}{3}z^{-3}}{1+\frac{5}{6}z^{-1}+\frac{1}{6}z^{-2}}=\frac{z^3+3z^2+\frac{11}{6}z+\frac{1}{3}}{z^3+\frac{5}{6}z^2+\frac{1}{6}z}$$

Προχωρούμε στη διαίρεση των πολυωνύμων ώστε η ρητή συνάρτηση που απομένει να είναι σε μορφή κατάλληλη για ανάπτυξη σε απλά κλάσματα.

$$\Delta \rightarrow z^3+3z^2+\frac{11}{6}z+\frac{1}{3} \quad \Big| \quad z^3+\frac{5}{6}z^2+\frac{1}{6}z \leftarrow \delta$$

$$-\left(z^3+\frac{5}{6}z^2+\frac{1}{6}z\right) \quad \Big| \quad 1 \leftarrow \pi$$

$$\frac{13}{6}z^2+\frac{10}{6}z+\frac{1}{3} \leftarrow \upsilon$$

$$\Delta=\delta.\pi+\upsilon$$

ή $$\frac{\Delta}{\delta}=\pi+\frac{\upsilon}{\delta}$$

Άρα

$$X(z)=1+\underbrace{\frac{\frac{13}{6}z^2+\frac{10}{6}z+\frac{1}{3}}{z^3+\frac{5}{6}z^2+\frac{1}{6}z}}_{X_1(z)}=1+X_1(z)$$

Η ρητή συνάρτηση $X_1(z)$ είναι σε αυστηρά κατάλληλη μορφή και μπορεί να αναπτυχθεί σε μερικά κλάσματα.

$$X_1(z)=\frac{\frac{13}{6}z^2+\frac{10}{6}z+\frac{1}{3}}{z\left(z^2+\frac{5}{6}z+\frac{1}{6}\right)}=\frac{\frac{13}{6}z^2+\frac{10}{6}z+\frac{1}{3}}{z\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(z+\frac{1}{3}\right)}=\frac{A_1}{z}+\frac{A_2}{z+\frac{1}{2}}+\frac{A_3}{z+\frac{1}{3}}$$

Υπολογίζουμε τις τιμές των A_1, A_2, A_3.

$$A_1=zX_1(z)\Big|_{z=0}=\frac{\frac{13}{6}z^2+\frac{10}{6}z+\frac{1}{3}}{\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(z+\frac{1}{3}\right)}\Bigg|_{z=0}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}=2$$

$$A_2=\left(z+\frac{1}{2}\right)X_1(z)\Big|_{z=-\frac{1}{2}}=\frac{\frac{13}{6}z^2+\frac{10}{6}z+\frac{1}{3}}{z\left(z+\frac{1}{3}\right)}\Bigg|_{z=-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$$

$$A_3=\left(z+\frac{1}{3}\right)X_1(z)\Big|_{z=-\frac{1}{3}}=\frac{\frac{13}{6}z^2+\frac{10}{6}z+\frac{1}{3}}{z\left(z+\frac{1}{2}\right)}\Bigg|_{z=-\frac{1}{3}}=-\frac{1}{3}$$

Τελικά η $X(z)$ γίνεται:

$$X(z)=1+X_1(z)=1+\frac{2}{z}+\frac{1/2}{z+\frac{1}{2}}-\frac{1/3}{z+\frac{1}{3}}$$

⇒ ⟨και πολλαπλασιάζοντας κάθε αριθμητή και παρονομαστή με z^{-1}⟩

$$X(z)=1+2\cdot z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-1}\frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}-\frac{1}{3}z^{-1}\frac{1}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}$$

$$\xrightarrow{z^{-1}} \quad x(n)=\delta(n)+2\delta(n-1)+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}u(n-1)-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}u(n-1)$$

Οι πρώτες 4 τιμές της ακολουθίας $x(n)$ είναι:

$n=0 \rightarrow x(0)=1$ [υπάρχει μόνο ο $\delta(n)$, ενώ όλοι οι άλλοι όροι είναι μηδέν]

$n=1 \rightarrow x(1) = 2+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^0 - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^0 = 2+\frac{1}{2}-\frac{1}{3} = \frac{13}{6}$

$n=2 \rightarrow x(2) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^1 - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^1 = -\frac{1}{4}+\frac{1}{9} = -\frac{5}{36}$

$n=3 \rightarrow x(3) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{8}-\frac{1}{27} = \frac{19}{216}$

Παρατηρούμε ότι οι τιμές αυτές είναι ίδιες με εκείνες που υπολογίσαμε στα προηγούμενα. Άλλωστε, εάν προσέξουμε το σήμα $x(n)$ μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$x(n) = \delta(n) + 2\,\delta(n-1) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} u(n-1) - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} u(n-1) =$$

$$= \delta(n) + 2\,\delta(n-1) - \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} u(n-1) + \left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} u(n-1) =$$

$$= \delta(n) + 2\,\delta(n-1) - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n} u(n-1) + \left(-\frac{1}{3}\right)^{n} u(n-1) =$$

$$= \delta(n) + 2\,\delta(n-1) + \left[\left(-\frac{1}{3}\right)^{n} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n}\right] u(n-1) =$$

$$= \delta(n) + 2\,\delta(n-1) + \underbrace{\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^{n} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n}\right] u(n)}$$

Σημειώνεται ότι
$[\alpha^n - \beta^n]u(n) = [\alpha^n - \beta^n]u(n-1)$
αφού για $n=0$ η τιμή της παράστασης $[\alpha^n - \beta^n]u(n)$ ισούται με 0 (μηδέν).

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί το αιτιατό σήμα $x(n)$ του οποίου η συνάρτηση μεταφοράς είναι

$$X(z)=\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}+0.5z^{-2}}$$

Λύση Πολλαπλασιάζοντας αριθμητή και παρονομαστή επί z^2 έχουμε

$$X(z)=\frac{z^2+z}{z^2-z+0.5} \Rightarrow \frac{X(z)}{z}=\frac{z+1}{z^2-z+0.5}$$

Υπολογίζουμε τους πόλους, οι οποίοι προκύπτουν συζυγείς μιγαδικοί.

$$p_1=\frac{1}{2}+j\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(1+j)=\frac{1}{2}\sqrt{2}\,e^{j\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{j\pi/4}\ ,\quad p_2=\frac{1}{2}-j\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-j\pi/4}$$

Οι πόλοι είναι διάφοροι μεταξύ τους, δηλ. $p_1\neq p_2$, οπότε η ανάπτυξη σε μερικά κλάσματα γίνεται κατά τα γνωστά.

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{z+1}{(z-p_1)(z-p_2)}=\frac{A_1}{z-p_1}+\frac{A_2}{z-p_2} \qquad (1)$$

Υπολογίζουμε τα A_1, A_2.

$$A_1=(z-p_1)\frac{X(z)}{z}\Big|_{z=p_1}=\frac{z+1}{z-p_2}\Big|_{z=p_1}=\frac{\frac{1}{2}+j\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{2}+j\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+j\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}-j\frac{3}{2}=\frac{\sqrt{10}}{2}e^{-j1.25}$$

$$A_2=(z-p_2)\frac{X(z)}{z}\Big|_{z=p_2}=\frac{z+1}{z-p_1}=\frac{\frac{1}{2}+j\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{2}-j\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-j\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}+j\frac{3}{2}=\frac{\sqrt{10}}{2}e^{j1.25}$$

Παρατήρηση: Βρήκαμε ότι $A_2=A_1^*$. Αυτό είναι συνέπεια του γεγονότος ότι και οι πόλοι είναι συζυγείς μιγαδικοί, δηλ. $p_2=p_1^*$.

Με άλλα λόγια, συζυγείς μιγαδικοί πόλοι οδηγούν σε συζυγείς μιγαδικούς συντελεστές κατά την ανάπτυξη σε μερικά κλάσματα.

Ο αντίστροφος ΜΖ και των δύο μελών της (1) μας δίνει:

$$x(n)=\left[A_1(p_1)^n+A_2(p_2)^n\right]u(n)=\left[\frac{\sqrt{10}}{2}e^{-j1.25}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n e^{j\frac{\pi}{4}n}+\frac{\sqrt{10}}{2}e^{j1.25}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n e^{-j\frac{\pi}{4}n}\right]u(n)=$$

$$=\frac{\sqrt{10}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\left[e^{j(\frac{\pi}{4}n-1.25)}+e^{-j(\frac{\pi}{4}n-1.25)}\right]u(n)=$$

$$=\frac{\sqrt{10}}{\cancel{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \cancel{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}n-1.25\right)u(n)$$

Σημείωση: Για τη μετατροπή των μιγαδικών από καρτεσιανές σε πολικές συντεταγμένες χρησιμοποιήσαμε τη σχέση: $a+jb=r\cdot e^{j\varphi}$, όπου $r=\sqrt{a^2+b^2}$, $\varphi=\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$. Για παράδειγμα:
$p_1=\frac{1}{2}+j\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(1+j)=\frac{1}{2}\sqrt{2}\,e^{j\pi/4}$ αφού $r=\sqrt{1^2+1^2}$ και $\varphi=\tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right)=\frac{\pi}{4}$ rad

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί το αιτιατό σήμα $x(n)$ που έχει $X(z) = \dfrac{1}{(1+z^{-1})(1-z^{-1})^2}$

ΛΥΣΗ Πολλαπλασιάζοντας αριθμητή και παρονομαστή επί z^3 έχουμε:

$$X(z) = \frac{z^3}{(z+1)(z-1)^2} \Rightarrow \frac{X(z)}{z} = \frac{z^2}{(z+1)(z-1)^2}$$

Η $X(z)$ έχει έναν απλό πόλο $p_1=-1$ και ένα διπλό πόλο $p_2=p_3=1$.
Άρα γράφεται ως:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z^2}{(z+1)(z-1)^2} = \frac{A_1}{z+1} + \frac{A_2}{z-1} + \frac{A_3}{(z-1)^2} \qquad (1)$$

Οι συντελεστές A_1 και A_3 υπολογίζονται κατά τα γνωστά.

$$A_1 = (z+1)\frac{X(z)}{z}\Big|_{z=-1} = \frac{z^2}{(z-1)^2}\Big|_{z=-1} = \frac{1}{4}$$

$$A_3 = (z-1)^2\frac{X(z)}{z}\Big|_{z=1} = \frac{z^2}{z+1}\Big|_{z=1} = \frac{1}{2}$$

Ο συντελεστής A_2 μπορεί να υπολογιστεί βρίσκοντας την παράγωγο και των δύο μελών ως προς z και υπολογίζοντας το αποτέλεσμα στο $z=1$:

$$A_2 = \frac{d}{dz}\left[(z-1)^2\frac{X(z)}{z}\right]_{z=1} = \frac{3}{4}$$

Εναλλακτικά θα μπορούσαμε να κάνουμε τις πράξεις στη (1) και να εξισώσουμε τους συντελεστές του z που έχουν την ίδια δύναμη.

$$z^2 = (z-1)^2A_1 + (z+1)(z-1)A_2 + (z+1)A_3 \Rightarrow$$
$$z^2 = (z^2-2z+1)A_1 + (z^2-1)A_2 + (z+1)A_3 \Rightarrow$$
$$z^2 = A_1z^2 - 2A_1z + A_1 + A_2z^2 - A_2 + A_3z + A_3 \Rightarrow$$
$$z^2 = (A_1+A_2)z^2 + (A_3-2A_1)z + (A_1-A_2+A_3) \Rightarrow \begin{cases} A_1+A_2=1 \Rightarrow A_2 = 1-A_1 = \frac{3}{4} \\ A_3-2A_1=0 \\ A_1-A_2+A_3=0 \end{cases}$$

Σημειώνεται ότι με τον τρόπο αυτό θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε και τους τρεις συντελεστές A_1, A_2, A_3 επιλύοντας το σύστημα των τριών εξισώσεων που προέκυψε.

Τελικά,

$$X(z) = \frac{1}{4}\frac{z}{z+1} + \frac{3}{4}\frac{z}{z-1} + \frac{1}{2}\frac{z}{(z-1)^2} = \frac{1}{4}\frac{1}{1+z^{-1}} + \frac{3}{4}\frac{1}{1-z^{-1}} + \frac{1}{2}\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$$

Ο αντίστροφος ΜΖ και των δύο μελών μας δίνει το ζητούμενο αιτιατό σήμα:

$$x(n) = \frac{1}{4}(-1)^n u(n) + \frac{3}{4}u(n) + \frac{1}{2}n\,u(n) = \left[\frac{1}{4}(-1)^n + \frac{3}{4} + \frac{n}{2}\right]u(n)$$

ΑΣΚΗΣΗ Για το αιτιατό σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών (difference equation)

$$y(n) = 2x(n) + \frac{1}{2} y(n-1)$$

να υπολογιστούν η συνάρτηση του συστήματος (sytem function), καθώς και η απόκριση μοναδιαίου δείγματος (unit sample response), δηλαδή η κρουστική απόκριση.

ΛΥΣΗ <u>Α' τρόπος</u> Λαμβάνοντας τον ΜΖ και των δύο μελών της εξίσωσης έχουμε:

$$Z\{y(n)\} = Z\left\{2x(n) + \frac{1}{2} y(n-1)\right\} \Rightarrow$$

$$Y(z) = 2X(z) + \frac{1}{2} z^{-1} Y(z) \Rightarrow$$

$$Y(z) = \frac{2}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} X(z) \Rightarrow$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} \equiv H(z) = \frac{2}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

Το σύστημα έχει έναν πόλο στο $z = \frac{1}{2}$ και ένα μηδενικό στην αρχή των αξόνων $(z=0)$.

[Διευκρινίζεται ότι για να υπολογίσω τους πόλους και τα μηδενικά, εκφράζω τη σχέση συναρτήσει του z και όχι του z^{-1} που είναι τώρα. Στην προκειμένη περίπτωση πολλαπλασίασα αριθμητή και παρονομαστή επί z.]

Ο αντίστροφος ΜΖ μας δίνει την $h(n)$, δηλαδή

$$y(n) = Z^{-1}\{H(z)\} = Z^{-1}\left\{2\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\right\} = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

<u>Β' τρόπος</u> Κρουστική απόκριση ενός συστήματος είναι η έξοδος αυτού για είσοδο τη μοναδιαία κρούση, δηλαδή για $x(n) = \delta(n)$ έχουμε $y(n) = h(n)$. Συνεπώς η εξίσωση διαφορών γίνεται:

$$h(n) = 2\delta(n) + \frac{1}{2}h(n-1) \Rightarrow h(n) - \frac{1}{2}h(n-1) = 2\delta(n)$$

Εφαρμόζοντας τον ΜΖ και στα δύο μέλη έχουμε:

$$H(z) - \frac{1}{2}z^{-1}H(z) = 2 \cdot 1 \Rightarrow$$

$$H(z) = \frac{2}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \xleftrightarrow{Z^{-1}} h(n) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

ΑΣΚΗΣΗ Ποια η βηματική απόκριση του αιτιατού συστήματος

$$y(n) = \alpha\, y(n-1) + x(n) \qquad |\alpha|<1$$

ΛΥΣΗ Λαμβάνοντας τον ΜΖ και των δύο μελών της εξίσωσης διαφορών έχουμε:

$$Z\{y(n)\} = \alpha Z\{y(n-1)\} + Z\{x(n)\} \Rightarrow$$

$$Y(z) = \alpha z^{-1} Y(z) + X(z) \Rightarrow$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}} \Rightarrow H(z) = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$$

Για είσοδο $x(n) = u(n)$, δηλαδή για $X(z) = U(z) = \dfrac{1}{1-z^{-1}}$ έχουμε:

$$Y(z) = H(z)X(z) = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}} \cdot \frac{1}{1-z^{-1}}$$

Αναλύουμε σε απλά κλάσματα

$$Y(z) = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}} \cdot \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{A_1}{1-\alpha z^{-1}} + \frac{A_2}{1-z^{-1}}$$

Υπολογίζουμε τα A_1, A_2:

$$A_1 = (1-\alpha z^{-1})Y(z)\Big|_{z^{-1}=\frac{1}{\alpha}} = \frac{1}{1-z^{-1}}\Big|_{z^{-1}=\frac{1}{\alpha}} = \frac{1}{1-\frac{1}{\alpha}} = \frac{\alpha}{\alpha-1}$$

$$A_2 = (1-z^{-1})Y(z)\Big|_{z^{-1}=1} = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}}\Big|_{z^{-1}=1} = \frac{1}{1-\alpha}$$

Άρα

$$Y(z) = \frac{\frac{\alpha}{\alpha-1}}{1-\alpha z^{-1}} + \frac{\frac{1}{1-\alpha}}{1-z^{-1}} = -\frac{\alpha}{1-\alpha}\cdot\frac{1}{1-\alpha z^{-1}} + \frac{1}{1-\alpha}\,\frac{1}{1-z^{-1}}$$

Συνεπώς

$$y(n) = Z^{-1}\{Y(z)\} = -\frac{\alpha}{1-\alpha}\alpha^n u(n) + \frac{1}{1-\alpha}u(n) =$$

$$= \frac{1}{1-\alpha}\left(1-\alpha^{n+1}\right)u(n)$$

ΜΟΝΟΠΛΕΥΡΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ – Z

$$X^{+}(z) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

- Χρησιμοποιείται για συστήματα τα οποία περιγράφονται από εξισώσεις διαφορών με μη μηδενικές αρχικές συνθήκες.

- Το κατώτερο όριο του αθροίσματος είναι πάντοτε μηδέν, ανεξάρτητα από το αν το σήμα $x(n)$ είναι μηδέν για $n<0$, δηλαδή αιτιατό.

Λόγω του ότι το κάτω όριο είναι μηδέν, ο μονόπλευρος ΜΖ έχει τα εξής χαρακτηριστικά:

- Δεν περιέχει πληροφορία για το σήμα $x(n)$ για $n<0$.

- Είναι μοναδικός (unique) για αιτιατά σήματα και μόνο, αφού μόνον αυτά είναι μηδέν για $n<0$.

- Ο μονόπλευρος ΜΖ $X^{+}(z)$ του σήματος $x(n)$ ταυτίζεται με τον αμφίπλευρο ΜΖ του σήματος $x(n)u(n)$. Αφού το $x(n)u(n)$ είναι αιτιατό, η ΠΣ του αμφίπλευρου ΜΖ είναι το εξωτερικό ενός κύκλου, όπως και η ΠΣ του $X^{+}(z)$. Συνεπώς, όταν έχουμε μονόπλευρους ΜΖ, δεν είναι απαραίτητο να αναφερόμαστε στην περιοχή σύγκλισής τους.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ μονόπλευρων ΜΖ διαφόρων σημάτων.

$$x_1(n) = \{\underline{1}, 2, 5, 7, 0, 1\} \quad \xleftrightarrow{z^+} \quad X_1^+(z) = 1 + 2z^{-1} + 5z^{-2} + 7z^{-3} + z^{-5}$$

$$x_2(n) = \{1, 2, \underline{5}, 7, 0, 1\} \quad \xleftrightarrow{z^+} \quad X_2^+(z) = 5 + 7z^{-1} + z^{-3}$$

$$x_3(n) = \{\underline{0}, 0, 1, 2, 5, 7, 0, 1\} \quad \xleftrightarrow{z^+} \quad X_3^+(z) = z^{-2} + 2z^{-3} + 5z^{-4} + 7z^{-5} + z^{-7}$$

$$x_4(n) = \{2, 4, \underline{5}, 7, 0, 1\} \quad \xleftrightarrow{z^+} \quad X_4^+(z) = 5 + 7z^{-1} + z^{-3}$$

$$x_5(n) = \delta(n) \quad \xleftrightarrow{z^+} \quad X_5^+(z) = 1$$

$$x_6(n) = \delta(n-m), \ m>0 \quad \xleftrightarrow{z^+} \quad X_6^+(z) = z^{-m}$$

$$x_7(n) = \delta(n+m), \ m>0 \quad \xleftrightarrow{z^+} \quad X_7^+(z) = 0$$

Παρατηρήσεις: 1. Για αντι-αιτιατά σήματα, ο μονόπλευρος ΜΖ είναι πάντοτε 0. Π.χ. $X_7^+(z) = 0$

2. Για μη-αιτιατά σήματα, ο μονόπλευρος ΜΖ <u>δεν</u> είναι μοναδικός (unique). Π.χ. $X_2^+(z) = X_4^+(z)$ αλλά $x_2(n) \neq x_4(n)$.

ΙΔΙΟΤΗΤΑ ΟΛΙΣΘΗΣΗΣ (shifting)

Α. ΚΑΘΥΣΤΕΡΗΣΗ ΣΤΟ ΧΡΟΝΟ (Time Delay)

Εάν $\quad x(n) \overset{z^+}{\longleftrightarrow} X^+(z)$

Τότε $\quad x(n-m) \overset{z^+}{\longleftrightarrow} z^{-m}\left[X^+(z) + \sum_{n=1}^{m} x(-n)\, z^{n}\right] \qquad m>0$

Για αιτιατά σήματα η ιδιότητα αυτή γίνεται

$$x(n-m) \overset{z^+}{\longleftrightarrow} z^{-m} X^+(z)$$

Απόδειξη: $Z^+\{x(n-m)\} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n-m)\, z^{-n} = \langle \text{θέτω } n-m=l \rightarrow n=l+m \rangle =$

$$= z^{-m}\Big[\underbrace{\sum_{l=-m}^{-1} x(l)\, z^{-l}}_{\text{θέτω } l=-n} + \underbrace{\sum_{l=0}^{\infty} x(l)\, z^{-l}}_{X^+(z)}\Big] =$$

$$= z^{-m}\left[\sum_{n=1}^{m} x(-n)\, z^{n} + X^+(z)\right]$$

Παρατήρηση: Η ιδιότητα αυτή μπορεί να γίνει εύκολα αντιληπτή εάν σκεφτούμε ότι η ολίσθηση προς τα δεξιά (καθυστέρηση) εισάγει στον θετικό άξονα των χρόνων νέα δείγματα τα οποία βρισκόντουσαν στον αρνητικό ημιάξονα. Άρα ο συνολικός μετασχηματισμός θα αποτελείται από τα δείγματα που υπήρχαν ήδη και που ολίσθησαν κατά m θέσεις δεξιά $[z^{-m} X^+(z)]$, και από τα νέα δείγματα που προέκυψαν μετά την δεξιά ολίσθηση $\left[z^{-m} \sum_{n=1}^{m} x(-n)\, z^{n}\right]$.

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί ο μονόπλευρος ΜΖ των σημάτων

$x_1(n) = \alpha^n \qquad\qquad x_2(n) = x_1(n-2)$

ΛΥΣΗ $\quad X_1^+(z) = \dfrac{1}{1-\alpha z^{-1}}$

$$X_2^+(z) = z^{-2}\left[X_1^+(z) + x(-1)\, z + x(-2)\, z^2\right]$$

$$= z^{-2}\left[X_1^+(z) + \alpha^{-1} z + \alpha^{-2} z^2\right]$$

$$= z^{-2}\frac{1}{1-\alpha z^{-1}} + \alpha^{-1} z^{-1} + \alpha^{-2}$$

Β. ΠΡΟΗΓΗΣΗ ΣΤΟ ΧΡΟΝΟ (Time Advance)

Εάν $\quad x(n) \xleftrightarrow{z^+} X^+(z)$

τότε $\quad x(n+m) \xleftrightarrow{z^+} z^m \left[X^+(z) - \sum_{n=0}^{m-1} x(n) z^{-n} \right] \qquad m>0$

Απόδειξη: $Z^+\{x(n+m)\} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n+m) z^{-n} = \langle \text{θέτω } n+m=l \rangle = z^m \underbrace{\sum_{l=m}^{\infty} x(l) z^{-l}}$

Αλλά

$$X^+(z) = \sum_{l=0}^{\infty} x(l) \cdot z^{-l} = \sum_{l=0}^{m-1} x(l) z^{-l} + \underbrace{\sum_{l=m}^{\infty} x(l) z^{-l}}$$

Άρα

$$Z^+\{x(n+m)\} = z^m \left[X^+(z) - \sum_{l=0}^{m-1} x(l) z^{-l} \right]$$

Παρατήρηση: Η ιδιότητα αυτή μπορεί εύκολα να γίνει κατανοητή αν σκεφτούμε ότι με την ολίσθηση προς τα αριστερά (προήγηση στο χρόνο) κατά m θέσεις τα δείγματα $x(0), x(1), \ldots, x(m-1)$ "χάνονται" και άρα πρέπει να αφαιρεθούν από τον $X^+(z)$, στον υπολογισμό του οποίου ήδη συμμετείχαν.

ΑΣΚΗΣΗ $\quad$ Να υπολογιστεί ο μονόπλευρος ΜΖ των σημάτων

$$x_1(n) = a^n u(n) \qquad\qquad x_3(n) = x_1(n+2)$$

ΛΥΣΗ $\quad X_1^+(z) = \dfrac{1}{1-az^{-1}}$

$$X_3^+(z) = z^2 \left[X_1^+(z) - x(0) z^0 - x(1) z^{-1} \right] =$$

$$= z^2 X_1^+(z) - x(0) z^2 - x(1) z$$

Αλλά $\quad x(0)=1 \quad , \quad x(1)=a \quad ,$ οπότε

$$X_3^+(z) = \frac{z^2}{1-az^{-1}} - z^2 - az$$

ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΕΛΙΚΗΣ ΤΙΜΗΣ (Final Value Theorem)

Εάν $\quad x(n) \xleftrightarrow{z^+} X^+(z)$

Τότε $\quad \lim_{n\to\infty} x(n) = \lim_{z\to 1} (z-1)X^+(z)$

Σημειώνεται ότι το όριο υπάρχει εάν η ΠΣ του $(z-1)X^+(z)$ περιλαμβάνει τον μοναδιαίο κύκλο.

Το θεώρημα αυτό είναι χρήσιμο για τον υπολογισμό της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς ενός σήματος $x(n)$ για το οποίο γνωρίζουμε τον ΜΖ, αλλά όχι το ίδιο το σήμα.

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί η τιμή της μεταβατικής απόκρισης για $n\to\infty$, ενός ΓΧΑ συστήματος του οποίου η κρουστική απόκριση, σε ηρεμία, είναι $h(n) = a^n u(n)$, $|a|<1$.

ΛΥΣΗ Έχουμε ότι $x(n) = u(n)$ και $y(n) = h(n) * x(n)$

Σημειώνεται ότι η διέγερση ενός αιτιατού συστήματος με ένα αιτιατό σήμα, παράγει μία αιτιατή έξοδο.
Αφού τα $x(n), h(n), y(n)$ είναι αιτιατά, ο μονόπλευρος και ο αμφίπλευρος ΜΖ συμπίπτουν. Άρα η συνέλιξη των σημάτων ισοδυναμεί με πολλαπλασιασμό των ΜΖ.

$$Y(z) = H(z)\cdot X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}\cdot\frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z^2}{(z-1)(z-a)} \quad \text{με ΠΣ: } |z|>|a|$$

Επομένως

$$(z-1)\,Y(z) = \frac{z^2}{z-a} \quad \text{με ΠΣ: } |z|>|a|$$

Αφού $|a|<1$, η ΠΣ του $(z-1)Y(z)$ συμπεριλαμβάνει τον μοναδιαίο κύκλο.

Άρα η ζητούμενη τιμή θα είναι:

$$\lim_{n\to\infty} y(n) = \lim_{z\to 1}\frac{z^2}{z-a} = \frac{1}{1-a}$$

ΑΣΚΗΣΗ Ποια η βηματική απόκριση του συστήματος

$$y(n) = \alpha\, y(n-1) + x(n) \qquad |\alpha|<1$$

όταν η αρχική συνθήκη είναι $y(-1)=1$.

ΛΥΣΗ Λαμβάνοντας τον μονόπλευρο ΜΖ και των δύο μελών της εξίσωσης διαφορών έχουμε:

$$Y^{+}(z) = \alpha\left[z^{-1}Y^{+}(z) + y(-1)\right] + X^{+}(z)$$

Όμως $y(-1)=1$ και $X^{+}(z) = \dfrac{1}{1-z^{-1}}$ οπότε επιλύοντας ως προς $Y^{+}(z)$ παίρνουμε:

$$Y^{+}(z) = \frac{\alpha}{1-\alpha z^{-1}} + \frac{1}{(1-\alpha z^{-1})(1-z^{-1})}$$

Αναλύοντας σε μερικά κλάσματα και λαμβάνοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό έχουμε την ζητούμενη έξοδο του συστήματος:

$$y(n) = \alpha\cdot\alpha^{n}u(n) + \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}u(n) \Rightarrow$$

$$y(n) = \frac{1}{1-\alpha}\left(1-\alpha^{n+2}\right)u(n)$$

Σημείωση: Υπενθυμίζεται ότι στην περίπτωση του αμφίπλευρου ΜΖ, όπου δεν είχαμε αρχικές συνθήκες, είχαμε υπολογίσει

$$y(n) = \frac{1}{1-\alpha}\left(1-\alpha^{n+1}\right)u(n)$$

ΑΣΚΗΣΗ Η σειρά Fibonacci ακεραίων αριθμών προκύπτει υπολογίζοντας κάθε όρο ως το άθροισμα των δύο προηγουμένων. Ορισμένοι από τους όρους της σειράς είναι: $\underline{1}, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$

Να βρεθεί ο n-οστός όρος της σειράς Fibonacci σε κλειστή μορφή.

ΛΥΣΗ Εάν $y(n)$ είναι ο n-οστός όρος της σειράς, τότε αυτός θα υπολογίζεται ως

$$y(n) = y(n-1) + y(n-2) \tag{1}$$

Λαμβάνοντας τον μονόπλευρο ΜΖ και των δύο μελών έχουμε:

$$Y^+(z) = \left[z^{-1}Y^+(z) + y(-1)\right] + \left[z^{-2}Y^+(z) + y(-2) + y(-1)z^{-1}\right] \tag{2}$$

Υπολογίζουμε τις τιμές των $y(-1)$ και $y(-2)$ από την εξίσωση (1).

$$\left.\begin{aligned} &y(0) = y(-1) + y(-2) = 1 \\ &y(1) = y(0) + y(-1) = 1 \Rightarrow 1 = 1 + y(-1) \Rightarrow y(-1) = 0 \end{aligned}\right\} y(-2) = 1$$

Με βάση αυτά από την εξίσωση (2) υπολογίζουμε τον μονόπλευρο ΜΖ

$$Y^+(z) = \frac{1}{1-z^{-1}-z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2-z-1} = \frac{z^2}{(z-p_1)(z-p_2)}$$

Υπολογίζουμε τους πόλους $p_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $p_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ και αναπτύσσουμε σε μερικά κλάσματα.

$$\frac{Y^+(z)}{z} = \frac{z}{(z-p_1)(z-p_2)} = \frac{A_1}{z-p_1} + \frac{A_2}{z-p_2}$$

Προκύπτει ότι $A_1 = p_1/\sqrt{5}$ και $A_2 = -p_2/\sqrt{5}$.

Ο αντίστροφος ΜΖ και των δύο μελών μας δίνει τον ζητούμενο n-οστό όρο $y(n)$:

$$y(n) = \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] u(n)$$

ή ισοδύναμα,

$$y(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\left[(1+\sqrt{5})^{n+1} - (1-\sqrt{5})^{n+1}\right] u(n)$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

- Έκφραση δυναμοσειράς απείρων όρων σε κλειστή μορφή

$$x(n) = \alpha^n u(n) \rightsquigarrow X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n z^{-n} = \dots ? \dots$$

Τρόπος Α

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n z^{-n} =$$

$$= \alpha^0 z^0 + \alpha^1 z^{-1} + \alpha^2 z^{-2} + \dots$$

$$= 1 + \alpha^1 z^{-1} + \alpha^2 z^{-2} + \dots$$

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με τον δεύτερο όρο του δεξιού μέλους:

$$(\alpha^1 z^{-1}) X(z) = (\alpha^1 z^{-1}) + (\alpha^1 z^{-1})(\alpha^1 z^{-1}) + (\alpha^1 z^{-1})(\alpha^2 z^{-2}) + \dots$$

$$= \alpha^1 z^{-1} + \alpha^2 z^{-2} + \alpha^3 z^{-3} + \dots$$

Δηλαδή έχουμε:

$$X(z) = 1 + \cancel{\alpha^1 z^{-1}} + \cancel{\alpha^2 z^{-2}} + \cancel{\alpha^3 z^{-3}} + \dots$$

$$(\alpha^1 z^{-1}) X(z) = \cancel{\alpha^1 z^{-1}} + \cancel{\alpha^2 z^{-2}} + \cancel{\alpha^3 z^{-3}} + \dots$$

οπότε αφαιρώντας κατά μέλη, όλοι οι όροι (πλην ενός) του δεξιού μέλους αναιρούνται:

$$X(z) - \alpha^1 z^{-1} X(z) = 1 \Rightarrow$$

$$X(z)\left(1 - \alpha z^{-1}\right) = 1 \Rightarrow$$

$$X(z) = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}$$

Τρόπος Β

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n z^{-n} =$$

$$= \alpha^0 z^0 + \alpha^1 z^{-1} + \alpha^2 z^{-2} + \dots$$

$$= 1 + \alpha^1 z^{-1} + \alpha^2 z^{-2} + \dots$$

$$= 1 + \alpha^1 z^{-1} \underbrace{\left[1 + \alpha^1 z^{-1} + \alpha^2 z^{-2} + \dots\right]}_{X(z)}$$

$$= 1 + \alpha^1 z^{-1} X(z) \Rightarrow$$

$$X(z) = 1 + \alpha^1 z^{-1} X(z) \Rightarrow$$

$$X(z) = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}$$

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΙΙ
ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

$$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$$

$$2\cos(x)\cos(y) = \cos(x-y) + \cos(x+y)$$

$$2\sin(x)\sin(y) = \cos(x-y) - \cos(x+y)$$

$$2\sin(x)\cos(y) = \sin(x-y) + \sin(x+y)$$

$$2\cos^2(x) = 1 + \cos(2x)$$

$$2\sin^2(x) = 1 - \cos(2x)$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} ar^k = a\,\frac{1-r^n}{1-r}$$

$$\sigma_x^2 = \phi_{xx}(0) - |m_x|^2$$

$$\sigma_y^2 = \sigma_x^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)|^2$$

$$P_{yy}(\omega) = |H(e^{j\omega})|^2 P_{xx}(\omega)$$

$$\underbrace{\Phi_{yx}(e^{j\omega})}_{P_{yx}(\omega)} = H(e^{j\omega})\,\underbrace{\Phi_{xx}(e^{j\omega})}_{P_{xx}(\omega)}$$

Μετασχηματισμοί z μερικών βασικών συναρτήσεων

	Σήμα	Μετασχηματισμός z	Περιοχή σύγ/λισης
1	$\delta(n)$	1	για κάθε $z \neq 0$
2	$u(n)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert > 1$
3	$\delta(n-m)$, $m>0$	z^{-m}	$\lvert z\rvert \neq 0$
4	$a^n u(n)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
5	$na^n u(n)$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
6	$[\cos(\Omega_0 n)]u(n)$	$\frac{1-[\cos\Omega_0]z^{-1}}{1-[2\cos\Omega_0]z^{-1}+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
7	$[\sin(\Omega_0 n)]u(n)$	$\frac{[\sin\Omega_0]z^{-1}}{1-[2\cos\Omega_0]z^{-1}+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
8	$[r^n\cos(\Omega_0 n)]u(n)$	$\frac{1-[r\cos\Omega_0]z^{-1}}{1-[2r\cos\Omega_0]z^{-1}+r^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > r$
9	$[r^n\sin(\Omega_0 n)]u(n)$	$\frac{[r\sin\Omega_0]z^{-1}}{1-[2r\cos\Omega_0]z^{-1}+r^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > r$

Ιδιότητες του μονόπλευρου μετασχηματισμού z

Ιδιότητα	Σήμα	M z	Πεδίο σύγκλισης
Γραμμικότητα.	$a\,x_1(n)+b\,x_2(n)$	$a\cdot X_1^+(z)+b\cdot X_2^+(z)$	$P_1 \cap P_2$
Δεξιά ολίσθηση	$x(n-n_0), n_0 \geq 0$	$z^{-n_0}\left[X^+(z)+\sum_{i=1}^{n_0} x(-i)z^{i}\right]$	R<|z|
Αριστερή ολίσθηση	$x(n+n_0), n_0 \geq 0$	$z^{+n_0}\left[X^+(z)-\sum_{i=0}^{n_0-1} x(+i)z^{-i}\right]$	R<|z|
Συνέλιξη	$x_1(n) * x_2(n)$	$X_1^+(z)\cdot X_2^+(z)$	$P_1 \cap P_2$
Ολίσθησης Συχνότητας	$c^n x(n)$	$X^+\left(\frac{z}{c}\right)$	$\lvert c\rvert R<\lvert z\rvert$
Περιοδικό σήμα	$x(n+N)=x(n)$	$X^+(z)=\frac{1}{1-z^{-N}}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)z^{-n}$	$\lvert z\rvert > 0$
Ιδιότητα της Συζυγίας	$x^*(n)$ $-\Re e\{x(n)\}$ $-\Im m\{x(n)\}$	$X^*(z^*)$ $\frac{1}{2j}[X(z)-X^*(z^*)]$ $\frac{1}{2}[X(z)+X^*(z^*)]$	R<|z|
Θεώρημα αρχικής τιμής	$x(0)=\lim_{z\to\infty} X^+(z)$		
Θεώρημα τελικής τιμής	$\lim_{n\to\infty} x(0)=\lim_{z\to 1}(z-1)X^+(z)$		

Ιδιότητες του μετασχηματισμού z

Ιδιότητα	Σήμα	M z	Πεδίο σύγκλισης
Γραμμικότητα.	$a\,x_1(n)+b\,x_2(n)$	$a\cdot X_1(z)+b\cdot X_2(z)$	Τουλάχιστον $P_1 \cap P_2$
Χρονική ολίσθηση	$x(n+n_0)$	$z^{n_0}\,X(z)$	P
Συνέλιξη	$x_1(n) * x_2(n)$	$X_1(z)\cdot X_2(z)$	Τουλάχιστον $P_1 \cap P_2$
Ολίσθησης Συχνότητας	$c^n x(n)$	$X\left(\frac{z}{c}\right)$	$\lvert c\rvert R^+ < \lvert z\rvert < \lvert c\rvert R^-$
Παραγώγιση στο Χώρο του z	$n\,x(n)$	$-z\frac{dX(z)}{dz}$	$R^+ < \lvert z\rvert < R^-$
Μ z περιοδικών σημάτων.	$x(n+N)=x(n)$	$X(z)=\frac{1}{1-z^{-N}}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)z^{-n}$	P
Ιδιότητα της Συζυγίας	$x^*(n)$ $-\Re e\{x(n)\}$ $-\Im m\{x(n)\}$	$X^*(z^*)$ $\frac{1}{2j}[X(z)-X^*(z^*)]$ $\frac{1}{2}[X(z)+X^*(z^*)]$	P
Αθροίσματος	$\sum_{n=0}^{N-1}x(n)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}X(z)$	Τουλάχιστον $P_1 \cap \lvert z\rvert > 1$
Κατοπτρισμός	$x(-n)$	$X(z^{-1})$	$\frac{1}{R^-} < \lvert z\rvert < \frac{1}{R^+}$