ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Δ4 – ΣΕΙΡΑ FOURIER ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ ΣΚΟΔΡΑΣ

2023 - 2024

DTFS

ΣΕΙΡΑ FOURIER ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ (DTFS - DISCRETE-TIME FOURIER SERIES)

Ορισμοί

$$\alpha_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$ εξίσωση ανάλυσης

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k\, e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$$ εξίσωση σύνθεσης

- Το διακριτού χρόνου σήμα $x(n)$ είναι περιοδικό με περίοδο N, δηλ. $x(n+N) = x(n)\ \forall n$ (Βλ. Σημείωση)

- Υπενθυμίζεται ότι οι συντελεστές Fourier $\{\alpha_k\}$, $k=0,1,\dots,N-1$ περιγράφουν το $x(n)$ στο χώρο των συχνοτήτων, δηλαδή τα α_k αντιπροσωπεύουν το μέτρο και τη φάση που αντιστοιχεί σε κάθε συνιστώσα συχνότητας $e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$.

- Τα $e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$ είναι περιοδικά με περίοδο N, δηλαδή $e^{j\frac{2\pi}{N}k(n+N)} = e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$.
  Άρα και οι συντελεστές Fourier α_k είναι περιοδικοί με περίοδο N.

$$\text{Απόδειξη: } \alpha_{k+N} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, e^{-j\frac{2\pi}{N}k(n+N)} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \alpha_k$$

Συνεπώς το φάσμα ενός περιοδικού ΣΔΧ $x(n)$ με περίοδο N είναι επίσης περιοδικό με περίοδο N.

Με άλλα λόγια, N διαδοχικά δείγματα του σήματος ή του φάσματος παρέχουν μια πλήρη περιγραφή του σήματος στον χρόνο ή στη συχνότητα.

- Για ένα περιοδικό ΣΔΧ, η περιοχή συχνοτήτων $(-\pi,\pi)$ ή $(0,2\pi)$ είναι μοναδική. Ένα ΣΔΧ με θεμελιώδη περίοδο N αποτελείται από συνιστώσες συχνότητας που απέχουν κατά $\frac{2\pi}{N}$ ακτίνια ή $f=\frac{1}{N}$ κύκλους. Συνεπώς, η σειρά Fourier ενός περιοδικού ΣΔΧ θα αποτελείται από N συνιστώσες συχνότητας το πολύ. Αυτή είναι και η κύρια διαφορά μεταξύ των σειρών Fourier για σήματα συνεχούς χρόνου και διακριτού χρόνου.

Σημείωση: Η θεμελιώδης περίοδος N είναι ο μικρότερος θετικός ακέραιος για τον οποίο ισχύει η σχέση $x(n+N) = x(n)$.

Η θεμελιώδης (κυκλική) συχνότητα ισούται με $\omega_0 = \frac{2\pi}{N}$

Απόδειξη DTFS

Έστω η περιοδική ακολουθία $x(n)$ με περίοδο N, δηλ. $x(n+N)=x(n)\ \forall n$.
Η σειρά Fourier της $x(n)$ αποτελείται από N αρμονικά σχετιζόμενα μιγαδικά εκθετικά της μορφής $e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$ όπου $k=0,1,\dots,N-1$ (θυμηθείτε ότι $\omega_0=\frac{2\pi}{N}$ η θεμελιώδης συχνότητα και $k\omega_0=k\frac{2\pi}{N}$ οι αρμονικές) και εκφράζεται ως:

$$x(n)=\sum_{k=0}^{N-1}\alpha_k e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$$

όπου $\{\alpha_k\}$ οι συντελεστές της σειράς.

Οι συντελεστές της σειράς Fourier α_k μπορούν να υπολογιστούν από την παραπάνω σχέση πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της επί $e^{-j\frac{2\pi}{N}nl}$ και αθροίζοντας τα γινόμενα από $n=0$ μέχρι $n=N-1$.

$$\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\,e^{-j\frac{2\pi}{N}nl}=\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{N-1}\alpha_k e^{j\frac{2\pi}{N}n(k-l)}=\sum_{k=0}^{N-1}\alpha_k\sum_{n=0}^{N-1}e^{j\frac{2\pi}{N}n(k-l)}=\sum_{k=0}^{N-1}\alpha_k\begin{Bmatrix}N & \text{για } k=l\\ 0 & \text{για } k\neq l\end{Bmatrix}=N\alpha_l$$

Στο δεξιό μέλος, ο υπολογισμός του αθροίσματος πρώτα για n μας δίνει (βλ. Σημείωση):

$$\sum_{n=0}^{N-1}e^{j\frac{2\pi}{N}n(k-l)}=\begin{cases}N & \text{για } k-l=0,\pm N,\pm 2N,\dots\\ 0 & \text{αλλού}\end{cases}$$

Όλα αυτά ισχύουν σε μία περίοδο, δηλ. για $k\in[0,N-1]$.

Συνεπώς το δεξιό μέλος τελικά ισούται με $N\alpha_l$, οπότε έχουμε:

$$\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\,e^{-j\frac{2\pi}{N}nl}=N\alpha_l \Rightarrow$$

$$\alpha_l=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\,e^{-j\frac{2\pi}{N}nl}\qquad l=0,1,\dots,N-1$$

ο.ε.δ.

Σημείωση:

$$\sum_{n=0}^{N-1}\alpha^n=\begin{cases}N & \text{για } \alpha=1\\ \dfrac{1-\alpha^N}{1-\alpha} & \text{για } \alpha\neq 1\end{cases}$$

Για $\alpha=e^{j\frac{2\pi}{N}k}$ προκύπτει:

$$\sum_{n=0}^{N-1}e^{j\frac{2\pi}{N}kn}=\begin{cases}N & \text{για } k=0,\pm N,\pm 2N,\dots\\ 0 & \text{αλλού}\end{cases}$$

αφού

$$\frac{1-e^{j\frac{2\pi}{\cancel{N}}kn\cancel{N}}}{1-e^{j\frac{2\pi}{N}k}}=\frac{1-e^{j2\pi kn}}{1-e^{j\frac{2\pi}{N}k}}=\frac{1-1}{1-e^{j\frac{2\pi}{N}k}}=0$$

Το αποτέλεσμα αυτό σημαίνει ότι το άθροισμα των τιμών ενός περιοδικού μιγαδικού εκθετικού σε μία περίοδο, ισούται με μηδέν, εκτός εάν το μιγαδικό εκθετικό είναι μία σταθερά.

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί το φάσμα του σήματος $x(n)=\cos\omega_0 n$ όταν (α) $\omega_0=\sqrt{2}\pi$ και (β) $\omega_0=\pi/3$.

ΛΥΣΗ (α) Για $\omega_0=\sqrt{2}\pi \rightsquigarrow f_0=1/\sqrt{2}$. Αφού η συχνότητα f_0 είναι άρρητη, το σήμα δεν είναι περιοδικό και κατά συνέπεια δεν μπορεί να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier.

Φυσικά το σήμα έχει κάποιο φάσμα. Αυτό αποτελείται από μία και μοναδική συνιστώσα συχνότητας στο $\omega=\omega_0=\sqrt{2}\pi$.

(β) Για $\omega_0=\frac{\pi}{3} \rightsquigarrow f_0=\frac{1}{6}$ και συνεπώς το σήμα είναι περιοδικό με περίοδο $N=6$.
Από τον ορισμό της σειράς Fourier ΔΧ έχουμε:

$$\alpha_k=\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{5}x(n)\,e^{-j\frac{2\pi}{6}nk} \qquad k=0,1,2,3,4,5$$

Πριν όμως προχωρήσουμε στον υπολογισμό των συντελεστών με βάση τη σχέση αυτή, παρατηρούμε ότι το σήμα $x(n)$ μπορεί να εκφραστεί ως:

$$x(n)=\cos\frac{2\pi}{6}n=\frac{1}{2}e^{j\frac{2\pi}{6}n}+\frac{1}{2}e^{-j\frac{2\pi}{6}n}$$

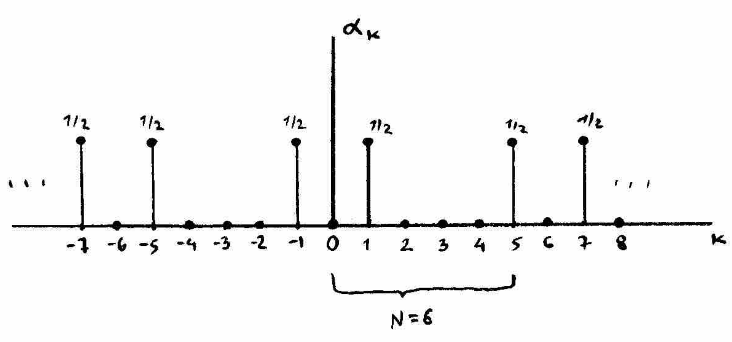
Η σχέση αυτή δεν είναι άλλη από την εξίσωση σύνθεσης της σειράς Fourier ΔΧ, οπότε $\alpha_1=\frac{1}{2}$ και $\alpha_{-1}=\frac{1}{2}$.

Παρατηρούμε ότι για $k=-1$ έχουμε:

$$e^{-j\frac{2\pi}{6}n}=e^{j\frac{2\pi}{6}(5-6)n}=e^{j\frac{2\pi}{6}5n}$$

γεγονός που σημαίνει ότι $\alpha_{-1}=\alpha_5$. Αυτό ήταν αναμενόμενο, αφού οι συντελεστές της σειράς Fourier αποτελούν μια περιοδική ακολουθία με περίοδο N.
Τελικά οι συντελεστές είναι:

$$\alpha_0=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=0 \qquad \text{και} \qquad \alpha_1=\alpha_5=\frac{1}{2}$$



ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστούν οι φασματικοί συντελεστές του σήματος $x(n) = \sin\omega_0 n$.

Λύση Το σήμα αυτό είναι περιοδικό εάν η συχνότητα f είναι ρητός αριθμός. Έστω $f=\frac{1}{N}$, όπου N η περίοδος του σήματος. Άρα $\omega_0 = \frac{2\pi}{N}$.

Αναπτύσσοντας το σήμα ως άθροισμα εκθετικών μιγαδικών, έχουμε:

$$x(n)=\sin\omega_0 n = \sin\frac{2\pi}{N}n = \frac{1}{2j}e^{j\frac{2\pi}{N}n} - \frac{1}{2j}e^{-j\frac{2\pi}{N}n}$$

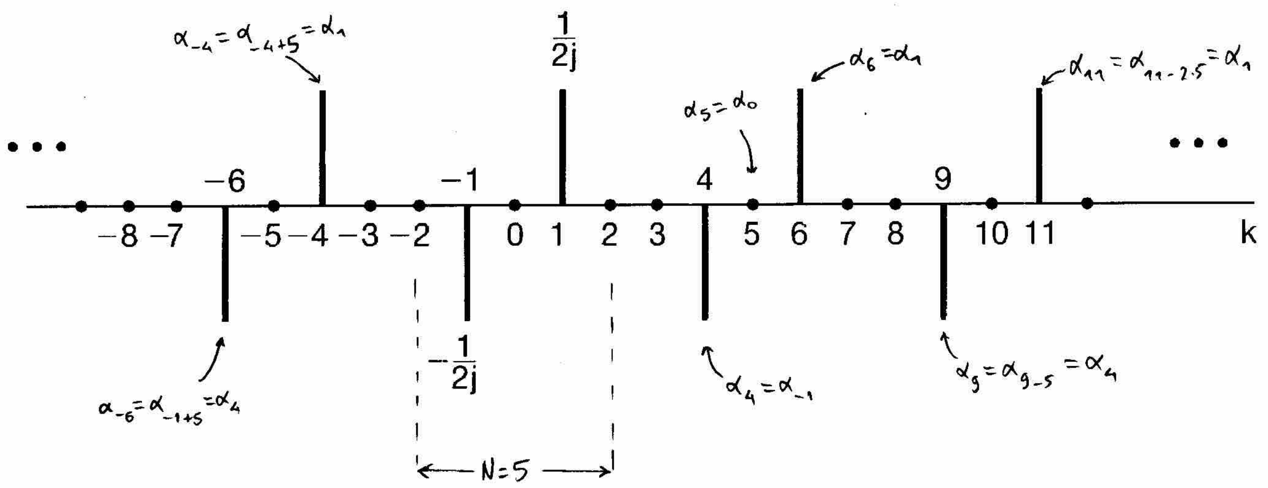
Συγκρίνοντας τη σχέση αυτή με εκείνη της αντίστροφης σειράς Fourier διακριτού χρόνου

$$x(n)=\sum_{n=<N>} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

καταλήγουμε εύκολα στη διαπίστωση ότι $\alpha_1 = \frac{1}{2j}$ και $\alpha_{-1} = -\frac{1}{2j}$, ενώ όλοι οι υπόλοιποι συντελεστές είναι μηδενικοί.

Οι συντελεστές αυτοί επαναλαμβάνονται περιοδικά με περίοδο N. Για παράδειγμα ο συντελεστής $\alpha_{N+1} = \alpha_1 = \frac{1}{2j}$ και ο συντελεστής $\alpha_{N-1} = \alpha_{-1} = -\frac{1}{2j}$.

Στο παρακάτω σχήμα δείχνονται οι φασματικοί συντελεστές του $x(n)=\sin\frac{2\pi}{5}n$.



Παρατηρείστε ότι μόνον δύο φασματικοί συντελεστές είναι μη μηδενικοί μέσα σε κάθε περίοδο του σήματος και συνεπώς η εξίσωση σύνθεσης της σειράς Fourier αποτελείται μόνον από δύο όρους.

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστούν και να σχεδιαστούν οι φασματικοί συντελεστές του σήματος $x(n)=\sin\frac{6\pi}{5}n$.

ΛΥΣΗ Για το σήμα αυτό έχουμε $\omega_0=\frac{6\pi}{5} \Rightarrow 2\pi f=\frac{6\pi}{5} \Rightarrow f=\frac{3}{5}$.

Άρα πρόκειται για περιοδικό σήμα με περίοδο $N=5$.

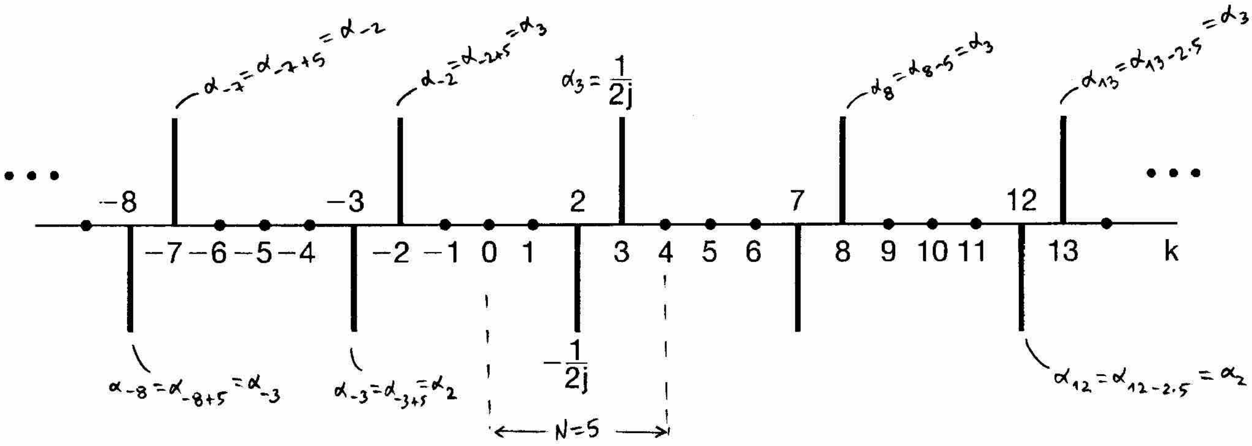
Αναπτύσσοντας αυτό ως άθροισμα μιγαδικών εκθετικών, βάσει της ιδιότητας του Euler, μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε τους φασματικούς συντελεστές, δηλαδή τους συντελεστές της σειράς Fourier διακριτού χρόνου.

$$x(n)=\sin\frac{6\pi}{5}n=\sin 3\frac{2\pi}{5}n=\underbrace{\frac{1}{2j}}_{\alpha_3}e^{j3\frac{2\pi}{5}n}-\underbrace{\frac{1}{2j}}_{\alpha_{-3}}e^{-j3\frac{2\pi}{5}n}$$

Οι δύο μη μηδενικοί συντελεστές είναι ο $\alpha_3=\frac{1}{2j}$ και ο $\alpha_{-3}=-\frac{1}{2j}$.

Παρατηρείστε ότι $\alpha_{-3}=\alpha_{-3+5}=\alpha_2$.

Είναι φανερό ότι σε κάθε περίοδο μόνον δύο συντελεστές είναι μη μηδενικοί και κατά συνέπεια η εξίσωση σύνθεσης της σειράς Fourier αποτελείται από δύο όρους.



ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστούν οι φασματικοί συντελεστές του σήματος

$$x(n) = 1 + \sin\left(\frac{2\pi}{N}n\right) + 3\cos\left(\frac{2\pi}{N}n\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{N}n + \frac{\pi}{2}\right)$$

ΛΥΣΗ Το σήμα είναι περιοδικό με περίοδο N. Αναπτύσσοντας αυτό ως άθροισμα μιγαδικών εκθετικών, έχουμε:

$$x(n) = 1 + \frac{1}{2j}\left(e^{j\frac{2\pi}{N}n} - e^{-j\frac{2\pi}{N}n}\right) + 3\,\frac{1}{2}\left(e^{j\frac{2\pi}{N}n} + e^{-j\frac{2\pi}{N}n}\right) + \frac{1}{2}\left[e^{j\left(\frac{4\pi}{N}n+\frac{\pi}{2}\right)} + e^{-j\left(\frac{4\pi}{N}n+\frac{\pi}{2}\right)}\right] =$$

$$= \underbrace{1}_{\alpha_0} + \underbrace{\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2j}\right)}_{\alpha_1} e^{j\frac{2\pi}{N}n} + \underbrace{\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2j}\right)}_{\alpha_{-1}} e^{-j\frac{2\pi}{N}n} + \underbrace{\left(\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{2}}\right)}_{\alpha_2} e^{j2\cdot\frac{2\pi}{N}n} + \underbrace{\left(\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}}\right)}_{\alpha_{-2}} e^{-j2\frac{2\pi}{N}n}$$

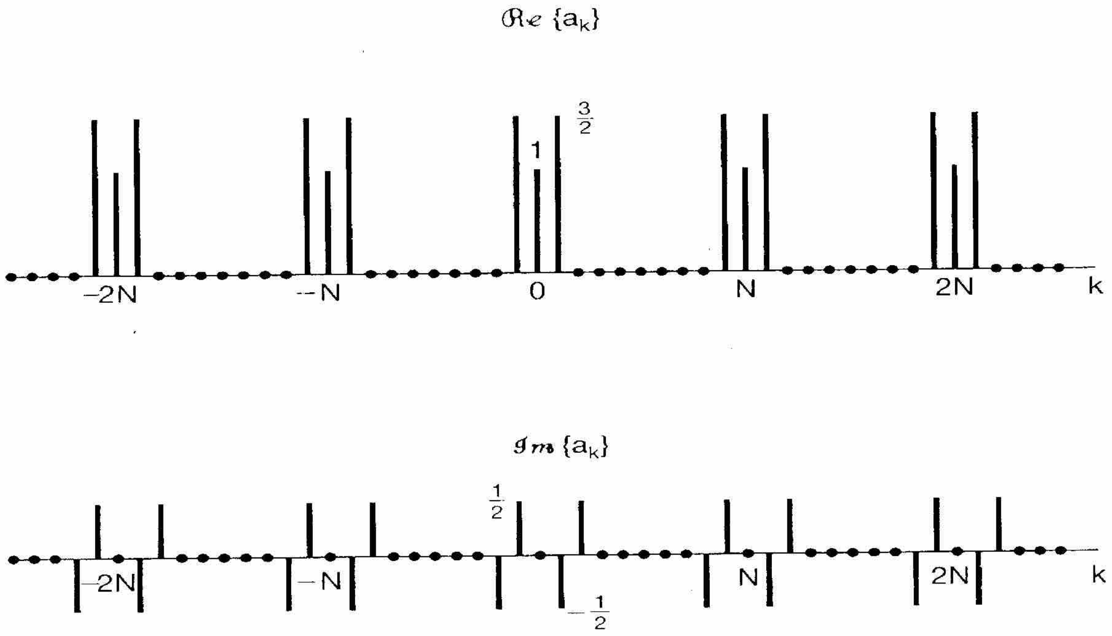
Συνεπώς οι ζητούμενοι συντελεστές είναι:

$$\alpha_0 = 1$$

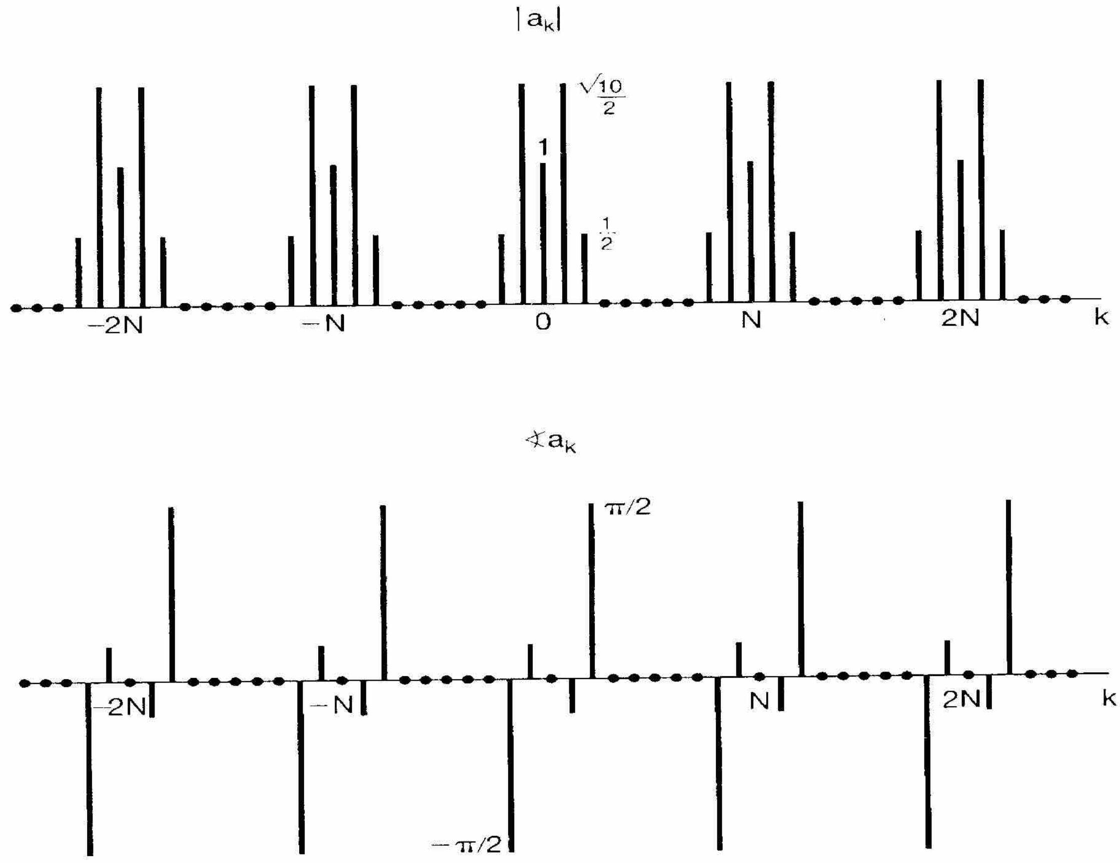
$$\alpha_1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2j} = \frac{3}{2} - j\frac{1}{2} \qquad \alpha_2 = \frac{1}{2}j$$

$$\alpha_{-1} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2j} = \frac{3}{2} + j\frac{1}{2} \qquad \alpha_{-2} = -\frac{1}{2}j$$

Στο σχήμα που ακολουθεί δίνονται οι φασματικοί συντελεστές (πραγματικά & φανταστικά μέρη στο a) και μέτρο & φάση στο b) για την περίπτωση $N=10$.

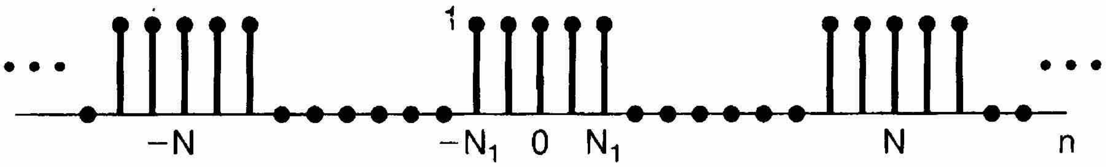

Re {a_k}
3/2
1
−2N
−N
0
N
2N
k
Im {a_k}
1/2
−1/2
−2N
−N
N
2N
k

(a)


|a_k|
√10/2
1
1/2
−2N
−N
0
N
2N
k
∢a_k
π/2
−π/2
−2N
−N
N
2N
k

(b)

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστούν οι φασματικοί συντελεστές του περιοδικού σήματος του σχήματος.



ΛΥΣΗ Πρόκειται για μια περιοδική τετραγωνική κυματομορφή εύρους $2N_1+1$ και περιόδου N.

$$\alpha_k = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x(n)\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{N}\sum_{n=-N_1}^{N_1} 1\cdot e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

Θέτοντας $m=n+N_1$ η τελευταία σχέση γίνεται:

$$\alpha_k = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{2N_1} e^{-jk\frac{2\pi}{N}(m-N_1)} = \frac{1}{N} e^{jk\frac{2\pi}{N}N_1}\sum_{m=0}^{2N_1} e^{-jk\frac{2\pi}{N}m} =$$

$$= \frac{1}{N} e^{jk\frac{2\pi}{N}N_1}\; \frac{1-e^{-jk\frac{2\pi}{N}(2N_1+1)}}{1-e^{-jk\frac{2\pi}{N}}} =$$

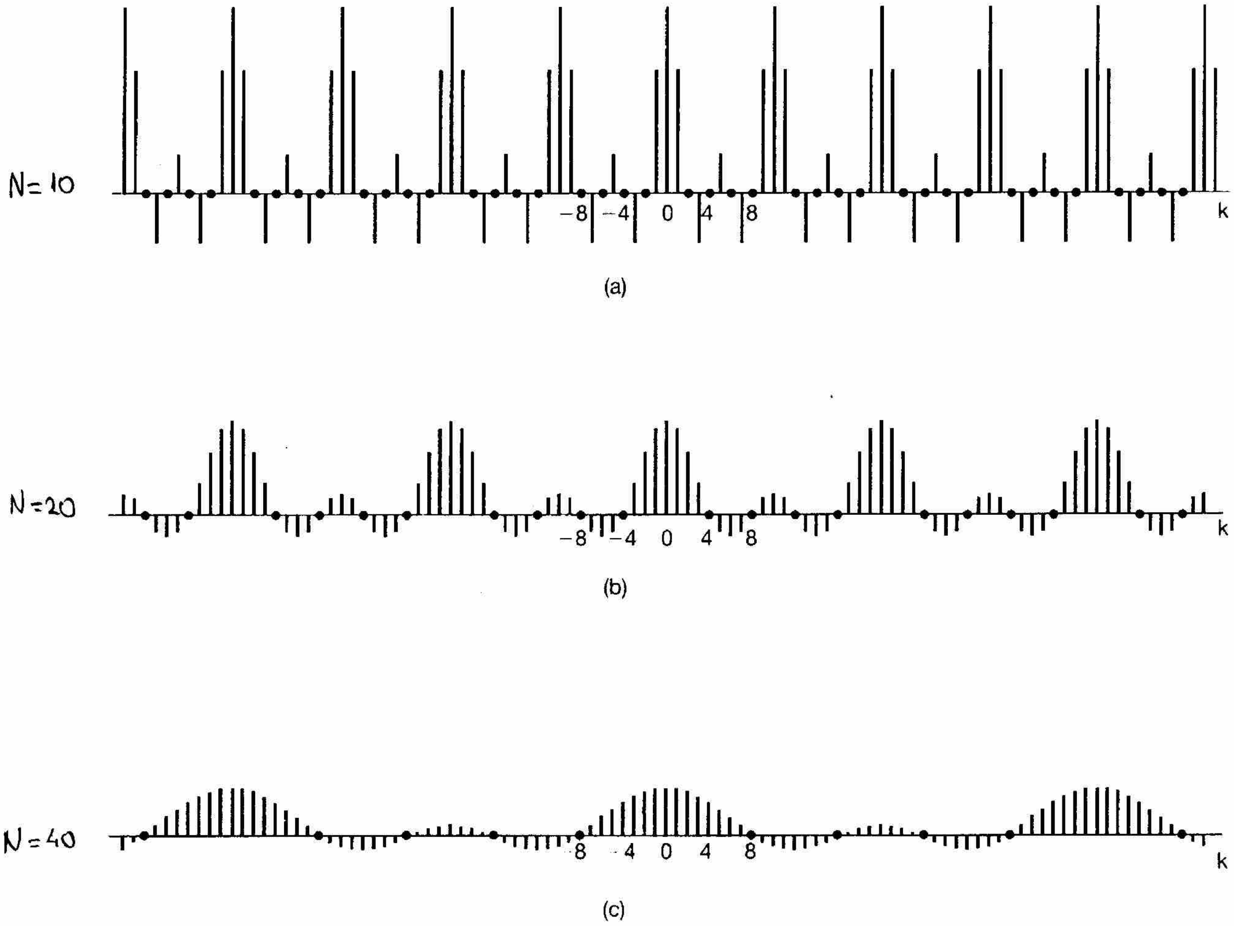
$$= \frac{1}{N} e^{jk\frac{2\pi}{N}N_1}\; \underbrace{\frac{e^{-jk\frac{2\pi}{N}(N_1+\frac{1}{2})}}{e^{-jk\frac{2\pi}{N}\cdot\frac{1}{2}}}}_{1}\; \underbrace{\frac{\left[e^{jk\frac{2\pi}{N}(N_1+\frac{1}{2})} - e^{-jk\frac{2\pi}{N}(N_1+\frac{1}{2})}\right]}{\left[e^{jk\frac{2\pi}{N}\cdot\frac{1}{2}} - e^{-jk\frac{2\pi}{N}\cdot\frac{1}{2}}\right]}}_{\frac{\sin\left[k\frac{2\pi}{N}(N_1+\frac{1}{2})\right]}{\sin\left[k\frac{\pi}{N}\right]}} =$$

$$= \frac{1}{N}\,\frac{\sin\left[k\frac{2\pi}{N}\left(N_1+\frac{1}{2}\right)\right]}{\sin\left(k\frac{\pi}{N}\right)} \quad \text{για } k\neq 0, \pm N, \pm 2N, \ldots$$

και

$$\alpha_k = \frac{2N_1+1}{N} \quad \text{για } k=0, \pm N, \pm 2N, \ldots$$

Οι συντελεστές της σειράς Fourier της περιοδικής τετραγωνικής κυματομορφής για $N_1=2$ και για (α) $N=10$, (b) $N=20$, (c) $N=40$, δείχνονται στο σχήμα που ακολουθεί.

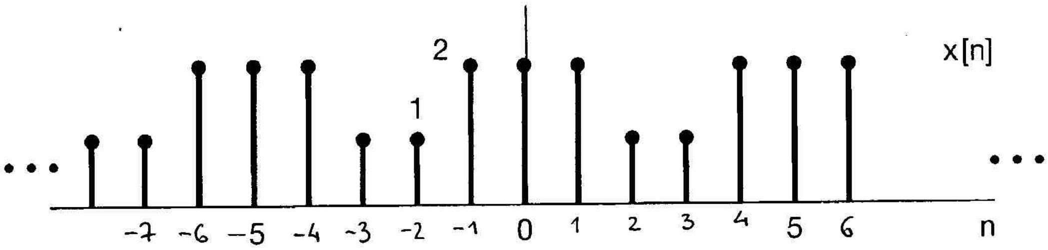


(a) (b) (c)

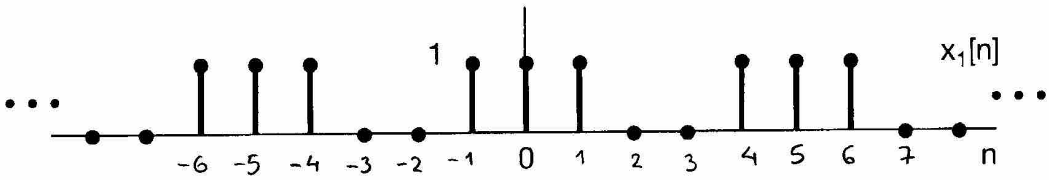
Σημείωση: N είναι η περίοδος και $2N_1+1$ το εύρος του παλμού.

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστούν οι συντελεστές της σειράς Fourier του σήματος $x(n)$ του σχήματος (α).

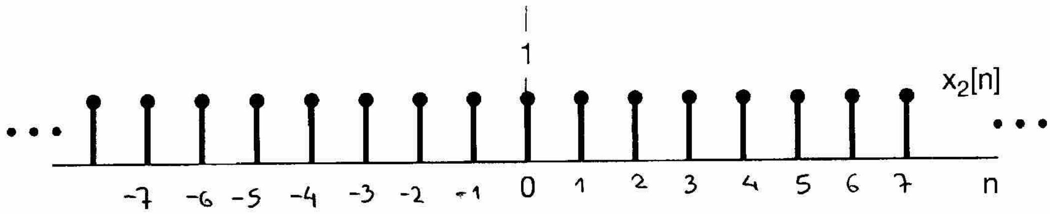
ΛΥΣΗ Παρατηρούμε ότι πρόκειται για ένα περιοδικό σήμα με περίοδο $N=5$, το οποίο μπορεί να εκφραστεί ως άθροισμα δύο άλλων σημάτων, του $x_1(n)$, επίσης περιοδικού με ίδια περίοδο $N=5$ και του $x_2(n)$, δηλαδή της σταθερής τιμής ακολουθίας (dc sequence) πλάτους 1, $x_2(n)=1$.



(a)



(b)



(c)

Λόγω της ιδιότητας της γραμμικότητας θα ισχύει:

$$x(n) = x_1(n) + x_2(n) \xleftrightarrow{F} \alpha_k = b_k + c_k$$

όπου α_k, b_k, c_k οι συντελεστές Fourier των σημάτων $x(n)$, $x_1(n)$, $x_2(n)$ αντίστοιχα.

Οι συντελεστές Fourier της περιοδικής τετραγωνικής κυματομορφής $x_1(n)$ με $N_1=1$ και $N=5$ ισούνται με:

$$b_k = \begin{cases} \dfrac{1}{5}\,\dfrac{\sin(3k\pi/5)}{\sin(k\pi/5)} & \text{για } k \neq 0, \pm 5, \pm 10, \ldots \\[2ex] \dfrac{3}{5} & \text{για } k = 0, \pm 5, \pm 10, \ldots \end{cases}$$

Η σταθερή ακολουθία θα έχει έναν μόνο συντελεστή, αυτόν για συχνότητα ίση με μηδέν:

$$C_0 = \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{4} x_2(n) = \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{4} 1 = \frac{1}{5}\cdot 5 = 1$$

Δεδομένου ότι οι συντελεστές της σειράς Fourier επαναλαμβάνονται περιοδικά με περίοδο N, στην προκειμένη περίπτωση οι συντελεστές C_k θα ισούνται με 1 για k πολλαπλάσια του $N=5$. Όλοι οι υπόλοιποι θα είναι μηδενικοί.

$$C_k = \begin{cases} 0 & \text{για } k \neq 0, \pm 5, \pm 10, \dots \\ 1 & \text{για } k = 0, \pm 5, \pm 10, \dots \end{cases}$$

Τελικά, οι ζητούμενοι συντελεστές α_k θα είναι:

$$\alpha_k = b_k + C_k = \begin{cases} \frac{1}{5}\,\frac{\sin(3k\pi/5)}{\sin(k\pi/5)} = b_k & \text{για } k \neq 0, \pm 5, \pm 10, \dots \\ \frac{8}{5} & \text{για } k = 0, \pm 5, \pm 10, \dots \end{cases}$$

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστούν οι συντελεστές της σειράς Fourier και το φάσμα ενεργειακής πυκνότητας του περιοδικού σήματος $x(n)$ του παρακάτω σχήματος.

ΛΥΣΗ Από την εξίσωση ανάλυσης της σειράς Fourier διακριτού χρόνου έχουμε:

$$\alpha_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{L-1} A\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} \qquad k=0,1,2,\ldots,N-1$$

$$\alpha_k = \frac{A}{N}\sum_{n=0}^{L-1}\left(e^{-j\frac{2\pi k}{N}}\right)^n = \begin{cases} \dfrac{AL}{N} & \text{για } k=0 \\[2ex] \dfrac{A}{N}\,\dfrac{1-e^{-j\frac{2\pi k}{N}L}}{1-e^{-j\frac{2\pi k}{N}}} & \text{για } k=1,2,\ldots,N-1 \end{cases}$$

Η τελευταία έκφραση μπορεί να απλοποιηθεί ως εξής:

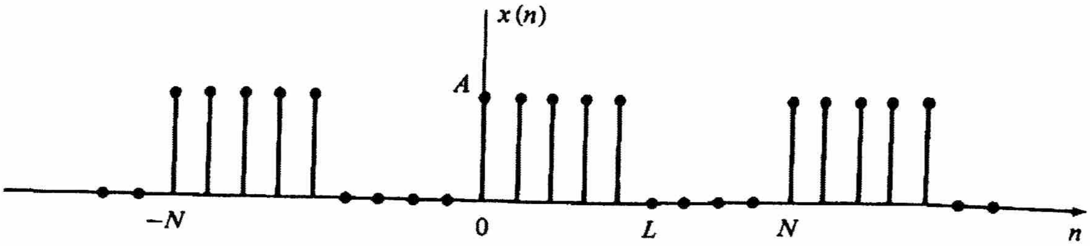
$$\frac{1-e^{-j2\pi kL/N}}{1-e^{-j2\pi k/N}} = \frac{e^{-j\pi kL/N}}{e^{-j\pi k/N}}\cdot\frac{e^{j\pi kL/N}-e^{-j\pi kL/N}}{e^{j\pi k/N}-e^{-j\pi k/N}} = e^{-j\pi k(L-1)/N}\cdot\frac{\sin(\pi kL/N)}{\sin(\pi k/N)}$$

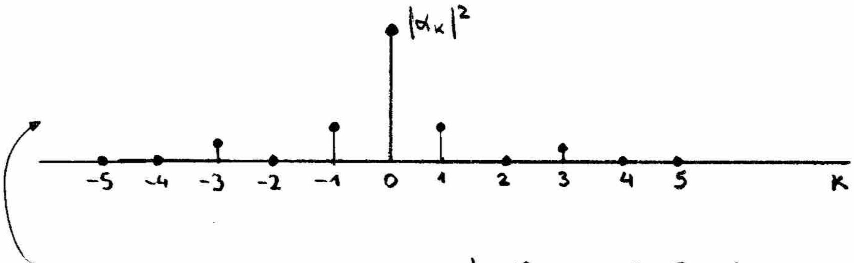
Συνεπώς,

$$\alpha_k = \begin{cases} \dfrac{AL}{N} & \text{για } k=0,\pm N,\pm 2N,\ldots \\[2ex] \dfrac{A}{N}\, e^{-j\pi k(L-1)/N}\,\dfrac{\sin(\pi kL/N)}{\sin(\pi k/N)} & \text{αλλού} \end{cases}$$

Το φάσμα ενεργειακής πυκνότητας ισούται με

$$|\alpha_k|^2 = \begin{cases} \left(\dfrac{AL}{N}\right)^2 & \text{για } k=0,\pm N,\pm 2N,\ldots \\[2ex] \left(\dfrac{A}{N}\right)^2\left(\dfrac{\sin(\pi kL/N)}{\sin(\pi k/N)}\right)^2 & \text{αλλού} \end{cases}$$





Φάσμα ενεργειακής πυκνότητας $|\alpha_k|^2$ για $L=5$, $N=10$, $A=1$

Σημ. $L=2N_1+1$ (Βλ. προηγ. άσκηση για N_1)

PROPERTIES OF DISCRETE-TIME FOURIER SERIES

Property	Periodic Signal	Fourier Series Coefficients
	$\left.\begin{array}{l} x[n] \\ y[n] \end{array}\right\}$ Periodic with period N and fundamental frequency $\omega_0 = 2\pi/N$	$\left.\begin{array}{l} a_k \\ b_k \end{array}\right\}$ Periodic with period N
Linearity	$Ax[n] + By[n]$	$Aa_k + Bb_k$
Time Shifting	$x[n - n_0]$	$a_k e^{-jk(2\pi/N)n_0}$
Frequency Shifting	$e^{jM(2\pi/N)n} x[n]$	a_{k-M}
Conjugation	$x^*[n]$	a^*_{-k}
Time Reversal	$x[-n]$	a_{-k}
Time Scaling	$x_{(m)}[n] = \begin{cases} x[n/m], & \text{if } n \text{ is a multiple of } m \\ 0, & \text{if } n \text{ is not a multiple of } m \end{cases}$ (periodic with period mN)	$\frac{1}{m} a_k \begin{pmatrix}\text{viewed as periodic} \\ \text{with period } mN\end{pmatrix}$
Periodic Convolution	$\sum_{r=\langle N \rangle} x[r]y[n-r]$	$Na_k b_k$
Multiplication	$x[n]y[n]$	$\sum_{l=\langle N \rangle} a_l b_{k-l}$
First Difference	$x[n] - x[n-1]$	$(1 - e^{-jk(2\pi/N)})a_k$
Running Sum	$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \begin{pmatrix}\text{finite valued and periodic only} \\ \text{if } a_0 = 0\end{pmatrix}$	$\left(\frac{1}{(1 - e^{-jk(2\pi/N)})}\right)a_k$
Conjugate Symmetry for Real Signals	$x[n]$ real	$\begin{cases} a_k = a^*_{-k} \\ \Re e\{a_k\} = \Re e\{a_{-k}\} \\ \Im m\{a_k\} = -\Im m\{a_{-k}\} \\ \lvert a_k \rvert = \lvert a_{-k} \rvert \\ \sphericalangle a_k = -\sphericalangle a_{-k} \end{cases}$
Real and Even Signals	$x[n]$ real and even	a_k real and even
Real and Odd Signals	$x[n]$ real and odd	a_k purely imaginary and odd
Even-Odd Decomposition of Real Signals	$\begin{cases} x_e[n] = \mathcal{E}v\{x[n]\} & [x[n] \text{ real}] \\ x_o[n] = \mathcal{O}d\{x[n]\} & [x[n] \text{ real}] \end{cases}$	$\Re e\{a_k\}$ $j\Im m\{a_k\}$

Parseval's Relation for Periodic Signals

$$\frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} |x[n]|^2 = \sum_{k=\langle N \rangle} |a_k|^2$$

DTFT ΠΕΡΙΟΔΙΚΩΝ ΣΗΜΑΤΩΝ

Τα περιοδικά σήματα διακριτού-χρόνου μπορούν να ενταχθούν στο πλαίσιο του DTFT θεωρώντας τον μετασχηματισμό ενός περιοδικού σήματος ως ένα τραίνο κρουστικών (impulse train) στον χώρο της συχνότητας.

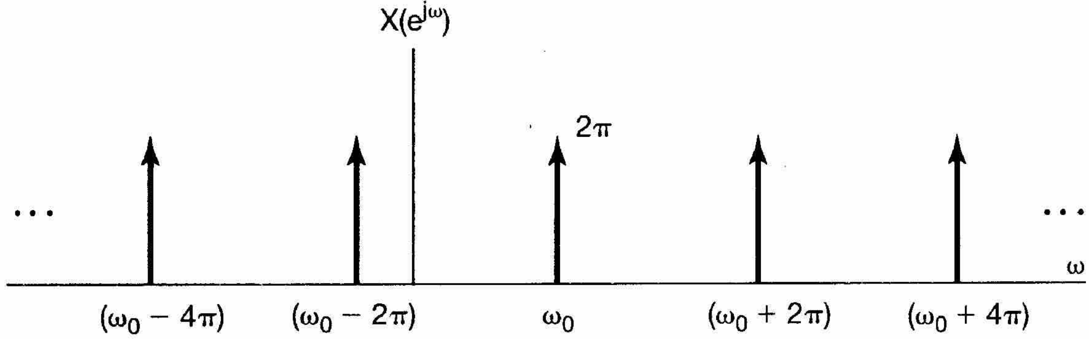
Ας θεωρήσουμε το σήμα $x(n) = e^{j\omega_0 n}$.

Όπως και στην περίπτωση του συνεχούς χρόνου, ο μετασχηματισμός Fourier αντιπροσωπεύεται ως μία κρουστική στη συχνότητα $\omega=\omega_0$.
Στην περίπτωση του διακριτού χρόνου γνωρίζουμε ότι ο μετασχηματισμός Fourier είναι περιοδικός με περίοδο 2π. Συνεπώς θα έχουμε κρουστικές, εκτός της συχνότητας ω_0 και στις συχνότητες $\omega_0 \pm 2\pi$, $\omega_0 \pm 4\pi$, ...
Θα έχουμε δηλαδή ένα τραίνο (συρμό) κρουστικών και ο μετασχηματισμός Fourier του $x(n) = e^{j\omega_0 n}$ μπορεί να γραφεί ως:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} 2\pi\, \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l)$$

Το φάσμα του σήματος $x(n) = e^{j\omega_0 n}$ δείχνεται στο παρακάτω σχήμα.
Παρατηρούμε ότι οποιοδήποτε διάστημα μήκους 2π περιλαμβάνει ακριβώς μία κρουστική. Συνεπώς, ο υπολογισμός του αντίστροφου μετασχηματισμού σε ένα από αυτά τα διαστήματα, έστω το διάστημα που περιλαμβάνει την κρουστική στη συχνότητα $\omega_0 + 2\pi m$, δίνει:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} 2\pi\, \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi m) e^{j\omega n} d\omega = e^{j(\omega_0 + 2\pi m)n} = e^{j\omega_0 n}$$



Γενίκευση: Στη γενική περίπτωση ενός περιοδικού σήματος $x(n)$ με περίοδο N και συντελεστές σειράς Fourier a_k ισχύει:

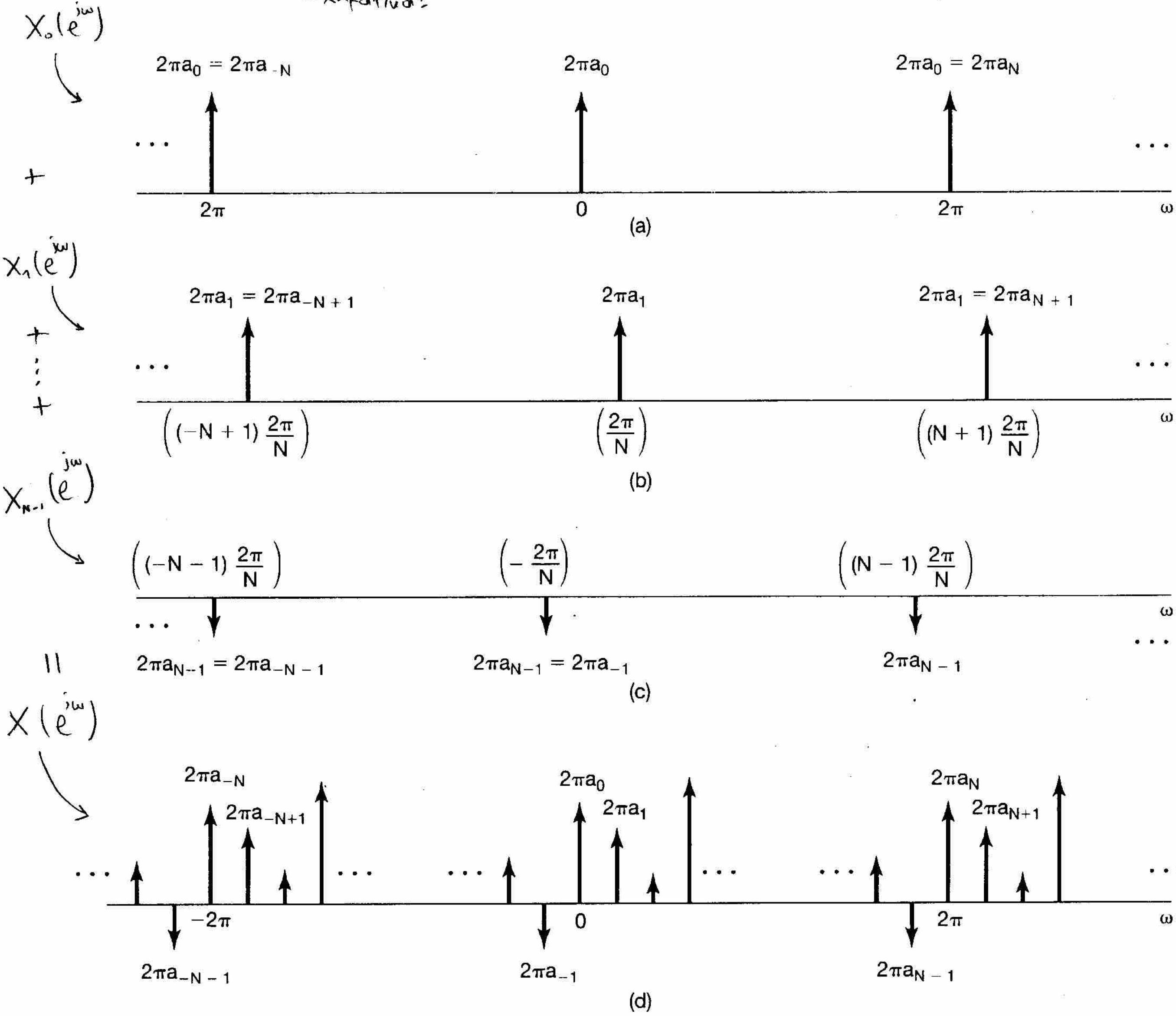
$$x(n) = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k \, e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

Γίνεται φανερό ότι ο μετασχηματισμός Fourier θα δίνεται από τη σχέση:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi \, a_k \, \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right)$$

· Με άλλα λόγια, ο μετασχ. Fourier ενός περιοδικού σήματος διακριτού χρόνου προκύπτει απ' ευθείας από τους συντελεστές Fourier του σήματος.

Σχηματικά:



$$x(n) = a_0 + a_1 e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)n} + a_2 e^{j2\left(\frac{2\pi}{N}\right)n} + \dots + a_{N-1} e^{j(N-1)\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}$$

F

$$X(e^{j\omega}) = X_0(e^{j\omega}) + X_1(e^{j\omega}) + X_2(e^{j\omega}) + \dots + X_{N-1}(e^{j\omega})$$

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί ο DTFT της $x(n) = \cos \omega_0 n$ για $\omega_0 = \frac{2\pi}{5}$

ΛΥΣΗ

$$x(n) = \cos\omega_0 n = \frac{1}{2} e^{j\omega_0 n} + \frac{1}{2} e^{-j\omega_0 n}$$

Συνεπώς

$$X(e^{j\omega}) = \underbrace{\sum_{l=-\infty}^{\infty} \pi\, \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l)}_{1} + \underbrace{\sum_{l=-\infty}^{\infty} \pi\, \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi l)}_{2}$$

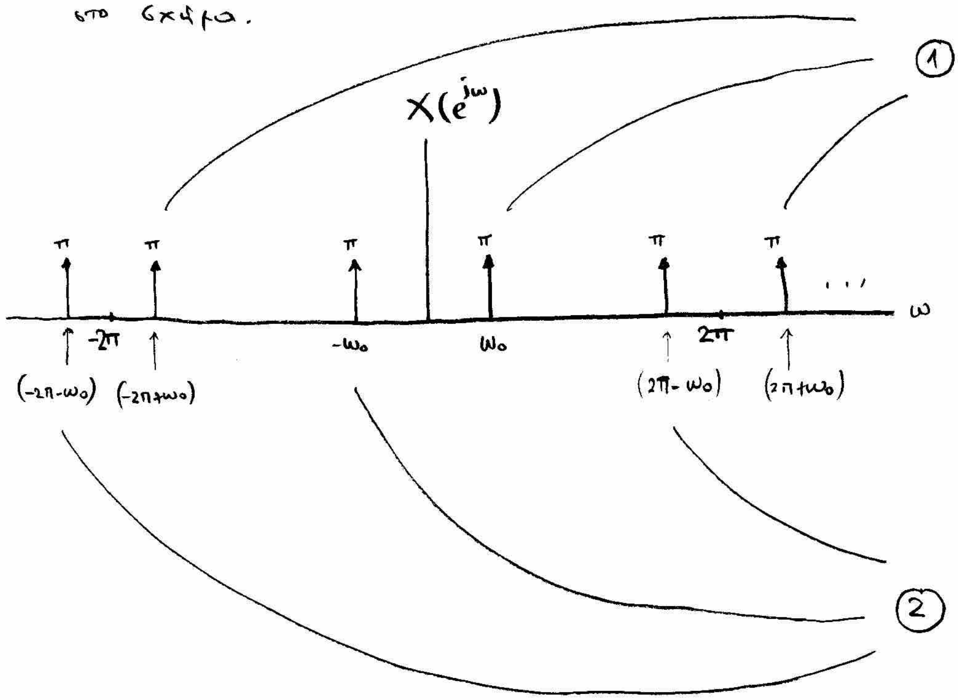
αφού

$$e^{j\omega_0 n} \overset{F}{\longleftrightarrow} \sum_{l=-\infty}^{\infty} 2\pi\, \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l)$$

Για $\omega_0 = \frac{2\pi}{5}$ και για $-\pi \le \omega < \pi$ έχουμε:

$$X(e^{j\omega}) = \pi\, \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{5}\right) + \pi\, \delta\left(\omega + \frac{2\pi}{5}\right)$$

και το $X(e^{j\omega})$ επαναλαμβάνεται περιοδικά με περίοδο 2π, όπως στο σχήμα.



ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί ο DTFT του περιοδικού τραίνου (συρμού) κρουστικών με περίοδο N:

$$x(n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(n-kN)$$

ΛΥΣΗ Οι συντελεστές της σειράς Fourier διακριτού χρόνου (DTFS) του σήματος αυτού είναι:

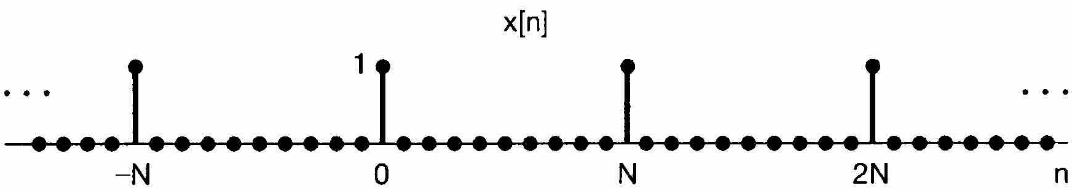
$$\alpha_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x(n)\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

Επιλέγοντας την περίοδο N μεταξύ 0 και $N-1$, δηλαδή $0 \leq n \leq N-1$, βρίσκουμε $\alpha_k = \frac{1}{N}$.

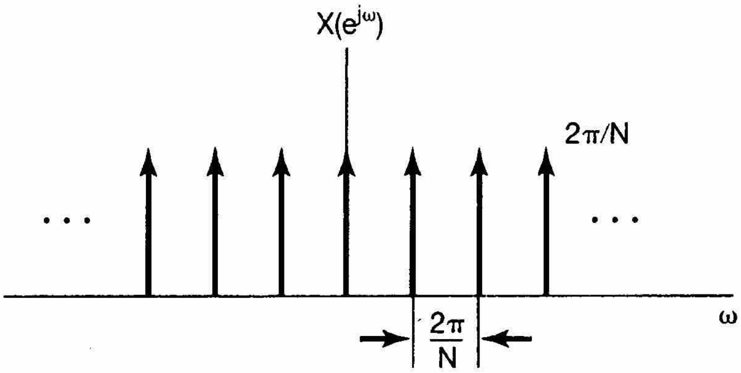
Άρα ο DTFT του σήματος θα είναι:

$$X(e^{j\omega}) = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right)$$

δηλαδή και πάλι ένας συρμός κρουστικών με απόσταση $\frac{2\pi}{N}$ μεταξύ καθεμιάς.



(a)



(b)

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί ο DTFT της βηματικής ακολουθίας $u(n)$.

ΛΥΣΗ Εκφράζουμε την $u(n)$ συναρτήσει της άρτιας και περιττής συνιστώσας της:

$$u(n) = u_e(n) + u_o(n) \qquad (1)$$

όπου

$$u_e(n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\delta(n) \qquad (2)$$

$$u_o(n) = \frac{1}{2}\,\mathrm{sgn}(n) \qquad (3)$$ [$\mathrm{sgn}(n)$ είναι η ακολουθία προσήμου]

Υπολογίζουμε τον DTFT

$$F\{u(n)\} = F\{u_e(n)\} + F\{u_o(n)\} \Rightarrow$$

$$U(e^{j\omega}) = U_e(e^{j\omega}) + U_o(e^{j\omega}) \qquad (4)$$

Αλλά

$$U_e(e^{j\omega}) = F\left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\delta(n)\right\} = \langle \text{λόγω γραμμικότητας} \rangle =$$

$$= F\left\{\frac{1}{2}\right\} + F\left\{\frac{1}{2}\delta(n)\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}F\{1\} + \frac{1}{2}F\{\delta(n)\}$$

Όμως

$$F\{\delta(n)\} = 1 \qquad (5)$$

και

$$F\{1\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\,\delta(\omega - 2\pi k) \qquad (6)$$

όπως προκύπτει από τον DTFT του μιγαδικού εκθετικού $e^{j\omega_0 n}$

$$F\{e^{j\omega_0 n}\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\,\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi k)$$

για $\omega_0 = 0$.

Άρα με βάση τις (5),(6) βρίσκουμε ότι ο DTFT της άρτιας συνιστώσας ισούται με

$$U_e(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\,\delta(\omega - 2\pi k) =$$

$$= \frac{1}{2} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi\,\delta(\omega - 2\pi k) \qquad (7)$$

Ο DTFT της περιττής συνιστώσας υπολογίζεται ως εξής:

$$(1) \rightsquigarrow u(n) = u_e(n) + u_o(n) \Rightarrow$$

$$u_o(n) = u(n) - u_e(n) = u(n) - \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\delta(n)\right] \Rightarrow$$

$$u_o(n) = u(n) - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\delta(n) \qquad (8)$$

και

$$u_o(n-1) = u(n-1) - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\delta(n-1) \qquad (9)$$

Αφαιρώντας κατά μέλη $(8)-(9) \rightsquigarrow$

$$u_o(n) - u_o(n-1) = \left[u(n) - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\delta(n)\right] - \left[u(n-1) - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\delta(n-1)\right] \Rightarrow$$

$$u_o(n) - u_o(n-1) = \underbrace{u(n) - u(n-1)}_{\delta(n)} - \frac{1}{2}\delta(n) + \frac{1}{2}\delta(n-1) =$$

$$= \delta(n) - \frac{1}{2}\delta(n) + \frac{1}{2}\delta(n-1) =$$

$$= \frac{1}{2}\delta(n) + \frac{1}{2}\delta(n-1) \qquad (10)$$

$$(10) \overset{DTFT}{\rightsquigarrow} \quad U_o(e^{j\omega}) - e^{-j\omega}U_o(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-j\omega} \Rightarrow$$

$$U_o(e^{j\omega}) = \frac{\frac{1}{2}\left(1 + e^{-j\omega}\right)}{1 - e^{-j\omega}} \qquad (11)$$

Τέλος, με βάση τα αποτελέσματα των εξισώσεων (7), (11) ο DTFT της (1) γίνεται:

$$(1) \overset{DTFT}{\rightsquigarrow} \quad U(e^{j\omega}) = U_e(e^{j\omega}) + U_o(e^{j\omega}) =$$

$$= \frac{1}{2} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi\,\delta(\omega - 2\pi k) + \frac{1}{2}\,\frac{1 + e^{-j\omega}}{1 - e^{-j\omega}} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1 + e^{-j\omega}}{1 - e^{-j\omega}}\right] + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1 - e^{-j\omega}} + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k) =$$

$$= \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k) \qquad (12)$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Ο υπολογισμός του φάσματος (DTFT) της μοναδιαίας βηματικής ακολουθίας $u(n)$ μπορεί εύκολα να επιτευχθεί μέσω του ορισμού της

$$u(n) = \sum_{m=-\infty}^{n} \delta(m)$$

και της ιδιότητας της συσσώρευσης (accumulation), η οποία είναι η αντίστοιχη της ολοκλήρωσης για τα συνεχούς χρόνου σήματα:

$$\sum_{m=-\infty}^{n} x(m) \overset{F}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-e^{-j\omega}} X(e^{j\omega}) + \pi X(e^{j0}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k).$$

Για $x(n) = \delta(n)$, οπότε $X(e^{j\omega}) = 1$, έχουμε

$$\sum_{m=-\infty}^{n} \delta(m) \overset{F}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-e^{-j\omega}} \cdot 1 + \pi \cdot 1 \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$$

ή

$$u(n) \overset{F}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-e^{-j\omega}} + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$$

Τέλος, όταν $\omega \in [-\pi, \pi]$ έχουμε $\delta(\omega - 2\pi k) = \delta(\omega)$ οπότε η τελευταία σχέση γίνεται:

$$u(n) \overset{F}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-e^{-j\omega}} + \pi \delta(\omega)$$

BASIC DISCRETE-TIME FOURIER TRANSFORM PAIRS

Signal	Fourier Transform	Fourier Series Coefficients (if periodic)
$\sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk(2\pi/N)n}$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$	a_k
$e^{j\omega_0 n}$	$2\pi \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l)$	(a) $\omega_0 = \frac{2\pi m}{N}$ $a_k = \begin{cases} 1, & k = m, m \pm N, m \pm 2N, \ldots \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$ (b) $\frac{\omega_0}{2\pi}$ irrational $\Rightarrow$ The signal is aperiodic
$\cos \omega_0 n$	$\pi \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \{\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l) + \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi l)\}$	(a) $\omega_0 = \frac{2\pi m}{N}$ $a_k = \begin{cases} \frac{1}{2}, & k = \pm m, \pm m \pm N, \pm m \pm 2N, \ldots \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$ (b) $\frac{\omega_0}{2\pi}$ irrational $\Rightarrow$ The signal is aperiodic
$\sin \omega_0 n$	$\frac{\pi}{j} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \{\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l) - \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi l)\}$	(a) $\omega_0 = \frac{2\pi r}{N}$ $a_k = \begin{cases} \frac{1}{2j}, & k = r, r \pm N, r \pm 2N, \ldots \\ -\frac{1}{2j}, & k = -r, -r \pm N, -r \pm 2N, \ldots \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$ (b) $\frac{\omega_0}{2\pi}$ irrational $\Rightarrow$ The signal is aperiodic
$x[n] = 1$	$2\pi \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - 2\pi l)$	$a_k = \begin{cases} 1, & k = 0, \pm N, \pm 2N, \ldots \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$
Periodic square wave $x[n] = \begin{cases} 1, & \|n\| \leq N_1 \\ 0, & N_1 < \|n\| \leq N/2 \end{cases}$ and $x[n + N] = x[n]$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$	$a_k = \frac{\sin[(2\pi k/N)(N_1 + \frac{1}{2})]}{N \sin[2\pi k/2N]}, \quad k \neq 0, \pm N, \pm 2N, \ldots$ $a_k = \frac{2N_1 + 1}{N}, \quad k = 0, \pm N, \pm 2N, \ldots$
$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n - kN]$	$\frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$	$a_k = \frac{1}{N}$ for all k
$a^n u[n], \quad \|a\| < 1$	$\frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$	—
$x[n] \begin{cases} 1, & \|n\| \leq N_1 \\ 0, & \|n\| > N_1 \end{cases}$	$\frac{\sin[\omega(N_1 + \frac{1}{2})]}{\sin(\omega/2)}$	—
$\frac{\sin Wn}{\pi n} = \frac{W}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{Wn}{\pi}\right)$ $0 < W < \pi$	$X(\omega) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \|\omega\| \leq W \\ 0, & W < \|\omega\| \leq \pi \end{cases}$ $X(\omega)$ periodic with period 2π	—
$\delta[n]$	1	—
$u[n]$	$\frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \pi\delta(\omega - 2\pi k)$	—
$\delta[n - n_0]$	$e^{-j\omega n_0}$	—
$(n + 1)a^n u[n], \quad \|a\| < 1$	$\frac{1}{(1 - ae^{-j\omega})^2}$	—
$\frac{(n + r - 1)!}{n!(r - 1)!} a^n u[n], \quad \|a\| < 1$	$\frac{1}{(1 - ae^{-j\omega})^r}$	—