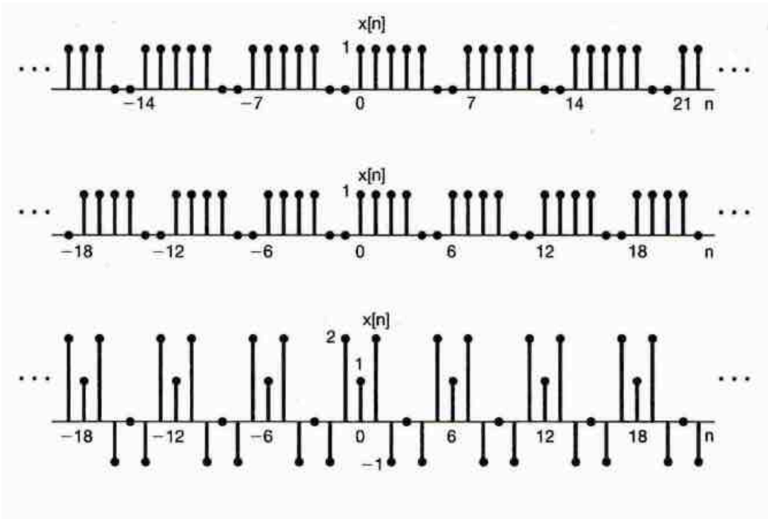
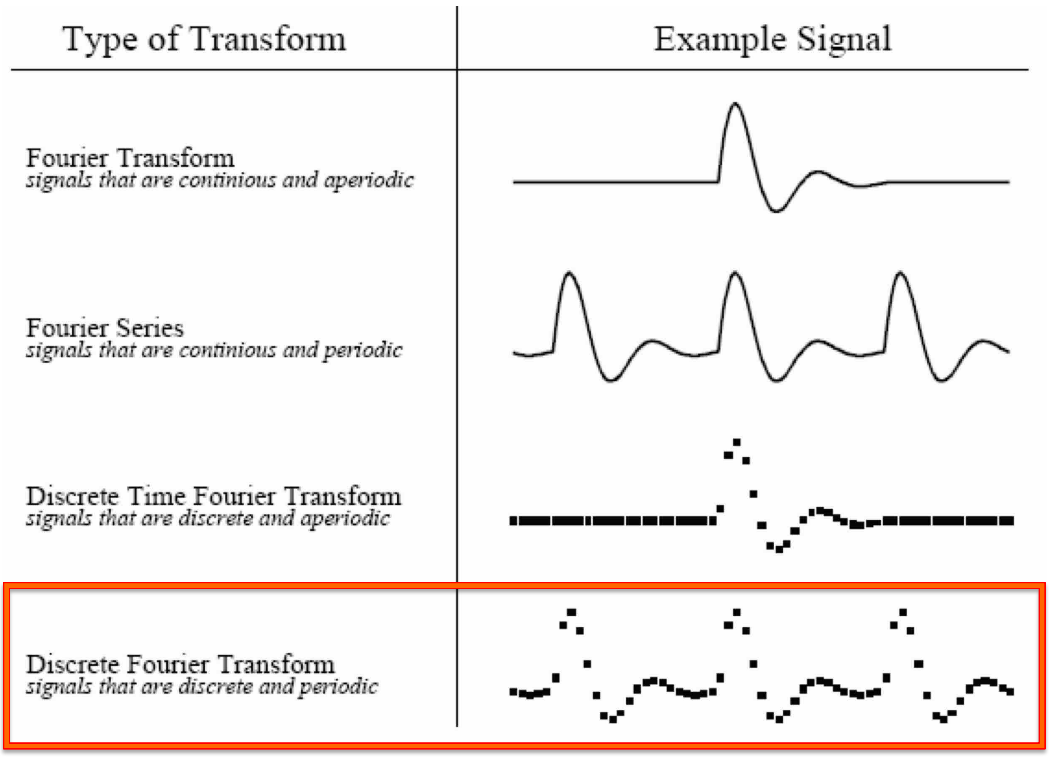
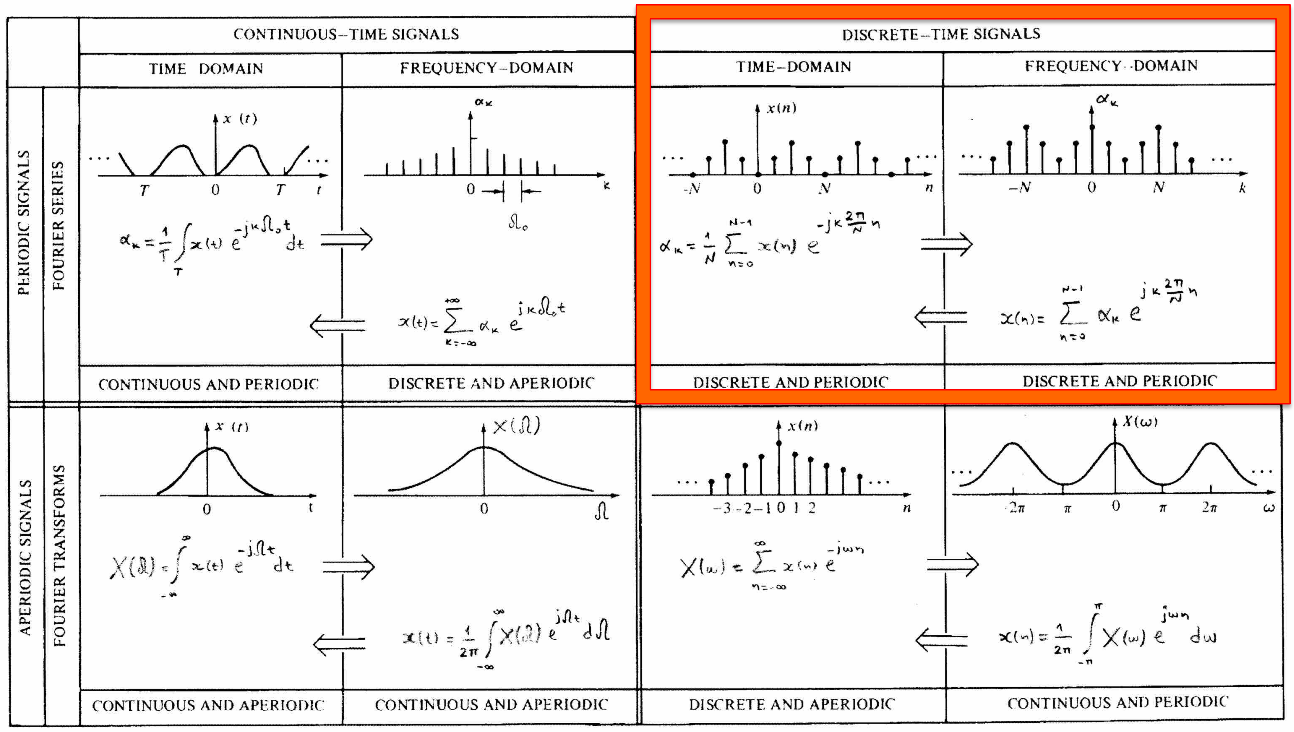
ΣΕΙΡΑ FOURIER
ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ



Διαφορετικοί Τύποι Μετασχηματισμού Fourier





Σημ.: 1. $\omega = \Omega T$
2. $X(\omega) \triangleq X(e^{j\omega})$

DTFS

Discrete Time Fourier Series (DTFS)

Σειρά Fourier Διακριτού Χρόνου (DTFS - Discrete-Time Fourier Series)

Ορισμοί

$$\alpha_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$ εξίσωση ανάλυσης

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k\, e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$$ εξίσωση σύνθεσης

- Το διακριτού χρόνου σήμα $x(n)$ είναι περιοδικό με περίοδο N, δηλ. $x(n+N) = x(n)\ \forall n$
- Υπενθυμίζεται ότι οι συντελεστές Fourier $\{\alpha_k\}$, $k=0,1,\dots,N-1$ περιγράφουν το $x(n)$ στο χώρο των συχνοτήτων, δηλαδή τα α_k αντιπροσωπεύουν το μέτρο και τη φάση που αντιστοιχεί σε κάθε συνιστώσα συχνότητας $e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$

DTFS

- Τα $e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$ είναι περιοδικά με περίοδο N, δηλαδή $e^{j\frac{2\pi}{N}k(n+N)} = e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$.

Άρα και οι συντελεστές Fourier α_k είναι περιοδικοί με περίοδο N.

Απόδειξη: $\alpha_{k+N} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}k(n+N)} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \alpha_k$

Συνεπώς το φάσμα ενός περιοδικού ΣΔΧ $x(n)$ με περίοδο N είναι επίσης περιοδικό με περίοδο N.

Με άλλα λόγια, N διαδοχικά δείγματα του σήματος ή του φάσματος παρέχουν μια πλήρη περιγραφή του σήματος στον χρόνο ή στη συχνότητα.

Για ένα περιοδικό ΣΔΧ, η περιοχή συχνοτήτων $(-\pi, \pi)$ ή $(0, 2\pi)$ είναι μοναδική. Ένα ΣΔΧ με θεμελιώδη περίοδο N αποτελείται από συνιστώσες συχνότητας που απέχουν κατά $\frac{2\pi}{N}$ ακτίνια ή $f = \frac{1}{N}$ κύκλους. Συνεπώς, η σειρά Fourier ενός περιοδικού ΣΔΧ θα αποτελείται από N συνιστώσες συχνότητας το πολύ. Αυτή είναι και η κύρια διαφορά μεταξύ των σειρών Fourier για σήματα συνεχούς χρόνου και διακριτού χρόνου.

DTFS

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί το φάσμα του σήματος $x(n) = \cos \omega_0 n$ όταν (α) $\omega_0 = \sqrt{2}\pi$ και (β) $\omega_0 = \pi/3$.

ΛΥΣΗ (α) Για $\omega_0 = \sqrt{2}\pi \rightsquigarrow f_0 = 1/\sqrt{2}$. Αφού η συχνότητα f_0 είναι άρρητη, το σήμα δεν είναι περιοδικό και κατά συνέπεια δεν μπορεί να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier.

Φυσικά το σήμα έχει κάποιο φάσμα. Αυτό αποτελείται από μία και μοναδική συνιστώσα συχνότητας στο $\omega = \omega_0 = \sqrt{2}\pi$.

(β) Για $\omega_0 = \frac{\pi}{3} \rightsquigarrow f_0 = \frac{1}{6}$ και συνεπώς το σήμα είναι περιοδικό με περίοδο $N=6$. Από τον ορισμό της σειράς Fourier ΔΧ έχουμε:

$$\alpha_k = \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{5} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{6}nk} \qquad k=0,1,2,3,4,5$$

Πριν όμως προχωρήσουμε στον υπολογισμό των συντελεστών με βάση τη σχέση αυτή, παρατηρούμε ότι το σήμα $x(n)$ μπορεί να εκφραστεί ως:

$$x(n) = \cos\frac{2\pi}{6}n = \frac{1}{2}e^{j\frac{2\pi}{6}n} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{2\pi}{6}n}$$

DTFS

$$x(n) = \cos\frac{2\pi}{6}n = \frac{1}{2}e^{j\frac{2\pi}{6}n} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{2\pi}{6}n}$$

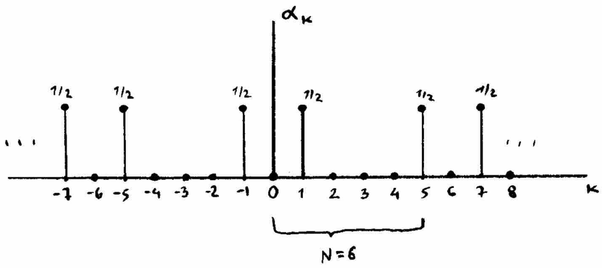
Η σχέση αυτή δεν είναι άλλη από την εξίσωση σύνθεσης της σειράς Fourier ΔΧ, οπότε $\alpha_1 = \frac{1}{2}$ και $\alpha_{-1} = \frac{1}{2}$.

Παρατηρούμε ότι για $k=-1$ έχουμε:

$$e^{-j\frac{2\pi}{6}n} = e^{j\frac{2\pi}{6}(5-6)n} = e^{j\frac{2\pi}{6}5n}$$

γεγονός που σημαίνει ότι $\alpha_{-1} = \alpha_5$. Αυτό ήταν αναμενόμενο, αφού οι συντελεστές της σειράς Fourier αποτελούν μια περιοδική ακολουθία με περίοδο N.
Τελικά οι συντελεστές είναι:

$$\alpha_0 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0 \quad \text{και} \quad \alpha_1 = \alpha_5 = \frac{1}{2}$$



DTFS

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστούν οι φασματικοί συντελεστές του σήματος $x(n) = \sin\omega_0 n$.

ΛΥΣΗ Το σήμα αυτό είναι περιοδικό εάν η συχνότητα f είναι ρητός αριθμός. Έστω $f = \frac{1}{N}$, όπου N η περίοδος του σήματος. Άρα $\omega_0 = \frac{2\pi}{N}$.

Αναπτύσσοντας το σήμα ως άθροισμα εκθετικών μιγαδικών, έχουμε:

$$x(n) = \sin\omega_0 n = \sin\frac{2\pi}{N}n = \frac{1}{2j}e^{j\frac{2\pi}{N}n} - \frac{1}{2j}e^{-j\frac{2\pi}{N}n}$$

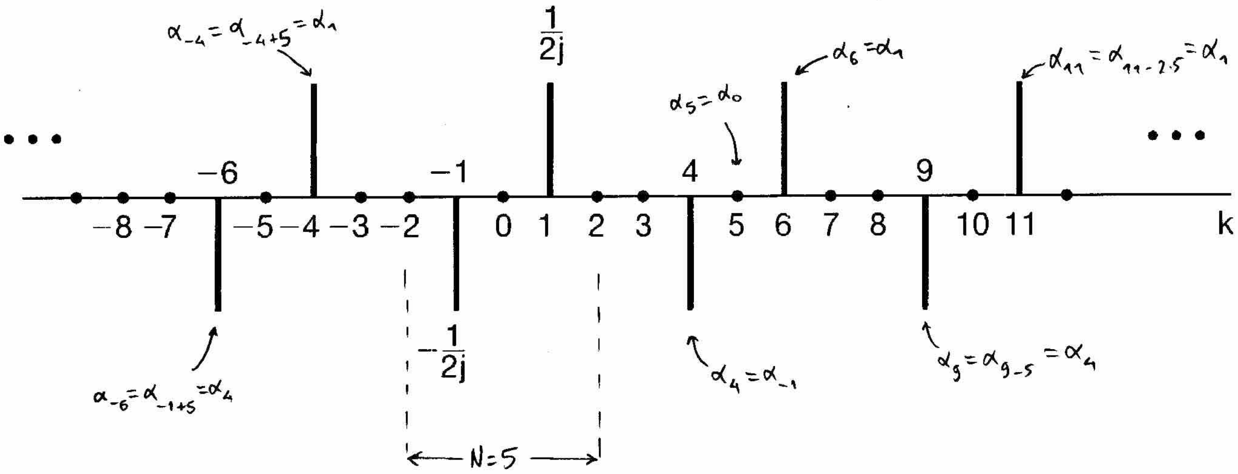
Συγκρίνοντας τη σχέση αυτή με εκείνη της αντίστροφης σειράς Fourier διακριτού χρόνου

$$x(n) = \sum_{n=\langle N\rangle} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

καταλήγουμε εύκολα στη διαπίστωση ότι $\alpha_1 = \frac{1}{2j}$ και $\alpha_{-1} = -\frac{1}{2j}$, ενώ όλοι οι υπόλοιποι συντελεστές είναι μηδενικοί.
Οι συντελεστές αυτοί επαναλαμβάνονται περιοδικά με περίοδο N. Για παράδειγμα ο συντελεστής $\alpha_{N+1} = \alpha_1 = \frac{1}{2j}$ και ο συντελεστής $\alpha_{N-1} = \alpha_{-1} = -\frac{1}{2j}$.

DTFS

Στο παρακάτω σχήμα δείχνονται οι φασματικοί συντελεστές του $x(n) = \sin\frac{2\pi}{5}n$.



Παρατηρείστε ότι μόνον δύο φασματικοί συντελεστές είναι μη μηδενικοί μέσα σε κάθε περίοδο του σήματος και συνεπώς η εξίσωση σύνθεσης της σειράς Fourier αποτελείται μόνον από δύο όρους.

DTFS

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστούν οι φασματικοί συντελεστές του σήματος

$$x(n) = 1 + \sin\left(\frac{2\pi}{N}n\right) + 3\cos\left(\frac{2\pi}{N}n\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{N}n + \frac{\pi}{2}\right)$$

ΛΥΣΗ Το σήμα είναι περιοδικό με περίοδο N. Αναπτύσσοντας αυτό ως άθροισμα μιγαδικών εκθετικών, έχουμε:

$$x(n) = 1 + \frac{1}{2j}\left(e^{j\frac{2\pi}{N}n} - e^{-j\frac{2\pi}{N}n}\right) + 3\,\frac{1}{2}\left(e^{j\frac{2\pi}{N}n} + e^{-j\frac{2\pi}{N}n}\right) + \frac{1}{2}\left[e^{j\left(\frac{4\pi}{N}n + \frac{\pi}{2}\right)} + e^{-j\left(\frac{4\pi}{N}n + \frac{\pi}{2}\right)}\right] =$$

$$= \underbrace{1}_{\alpha_0} + \underbrace{\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2j}\right)}_{\alpha_1} e^{j\frac{2\pi}{N}n} + \underbrace{\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2j}\right)}_{\alpha_{-1}} e^{-j\frac{2\pi}{N}n} + \underbrace{\left(\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{2}}\right)}_{\alpha_2} e^{j2\frac{2\pi}{N}n} + \underbrace{\left(\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}}\right)}_{\alpha_{-2}} e^{-j2\frac{2\pi}{N}n}$$

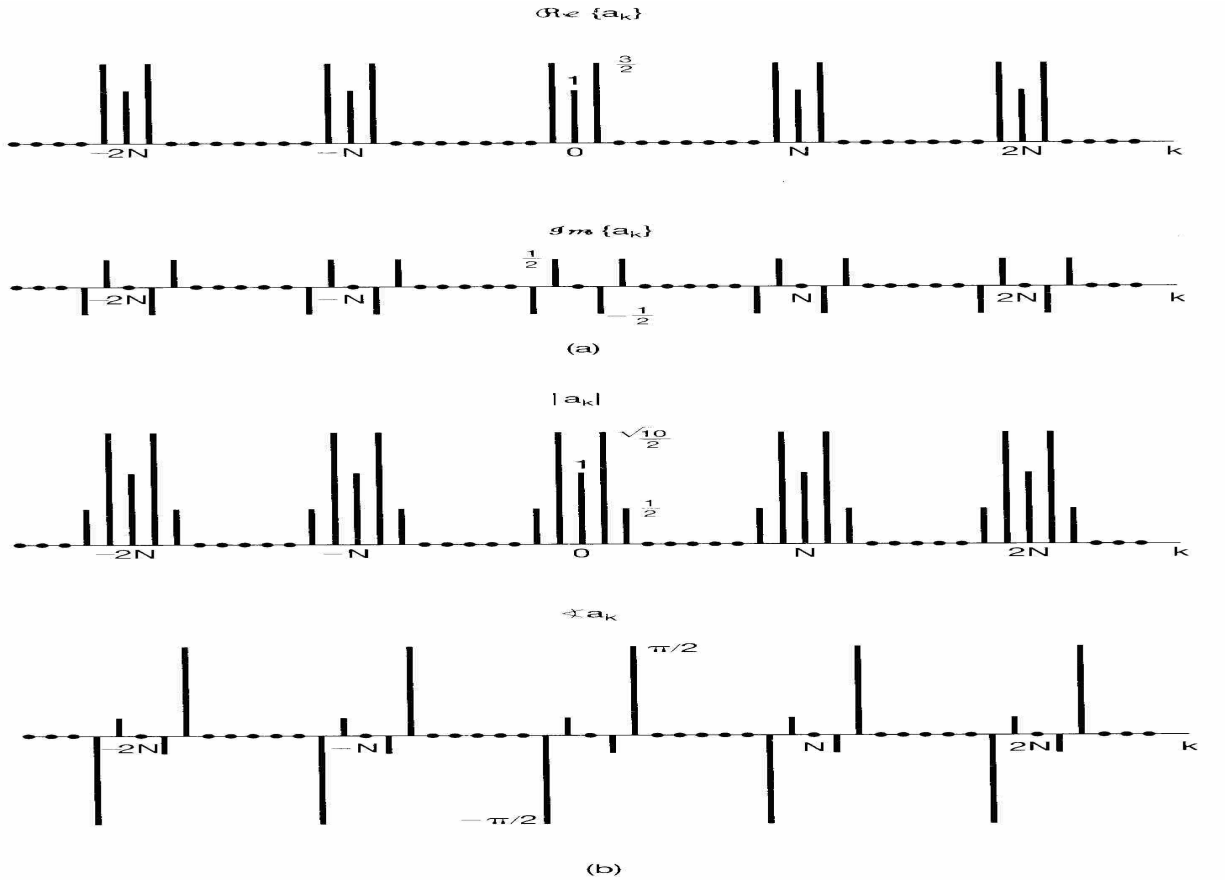
Συνεπώς οι ζητούμενοι συντελεστές είναι:

$\alpha_0 = 1$

$\alpha_1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2j} = \frac{3}{2} - j\frac{1}{2}$ $\qquad \alpha_2 = \frac{1}{2}j$

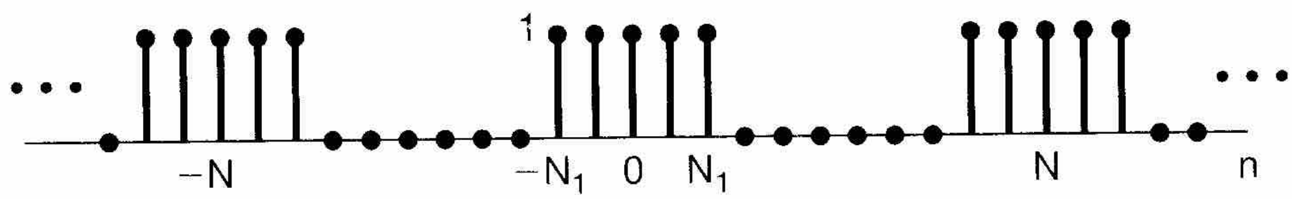
$\alpha_{-1} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2j} = \frac{3}{2} + j\frac{1}{2}$ $\qquad \alpha_{-2} = -\frac{1}{2}j$

DTFS Φασματικοί συντελεστές για N=10



DTFS

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστούν οι φασματικοί συντελεστές του περιοδικού σήματος του σχήματος.



DTFS

ΛΥΣΗ Πρόκειται για μια περιοδική τετραγωνική κυματομορφή εύρους $2N_1+1$ και περιόδου N.

$$\alpha_k = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x(n)\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{N}\sum_{n=-N_1}^{N_1} 1\cdot e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

Θέτοντας $m=n+N_1$ η τελευταία σχέση γίνεται:

$$\alpha_k = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{2N_1} e^{-jk\frac{2\pi}{N}(m-N_1)} = \frac{1}{N} e^{jk\frac{2\pi}{N}N_1}\sum_{m=0}^{2N_1} e^{-jk\frac{2\pi}{N}m} =$$

$$= \frac{1}{N} e^{jk\frac{2\pi}{N}N_1}\,\frac{1-e^{-jk\frac{2\pi}{N}(2N_1+1)}}{1-e^{-jk\frac{2\pi}{N}}} =$$

$$= \frac{1}{N} e^{jk\frac{2\pi}{N}N_1}\,\underbrace{\frac{e^{-jk\frac{2\pi}{N}(N_1+\frac{1}{2})}}{e^{-jk\frac{2\pi}{N}\cdot\frac{1}{2}}}}_{1}\;\underbrace{\frac{\left[e^{jk\frac{2\pi}{N}(N_1+\frac{1}{2})} - e^{-jk\frac{2\pi}{N}(N_1+\frac{1}{2})}\right]}{\left[e^{jk\frac{2\pi}{N}\frac{1}{2}} - e^{-jk\frac{2\pi}{N}\frac{1}{2}}\right]}}_{\frac{\sin[k\frac{2\pi}{N}(N_1+\frac{1}{2})]}{\sin[k\frac{\pi}{N}]}} =$$

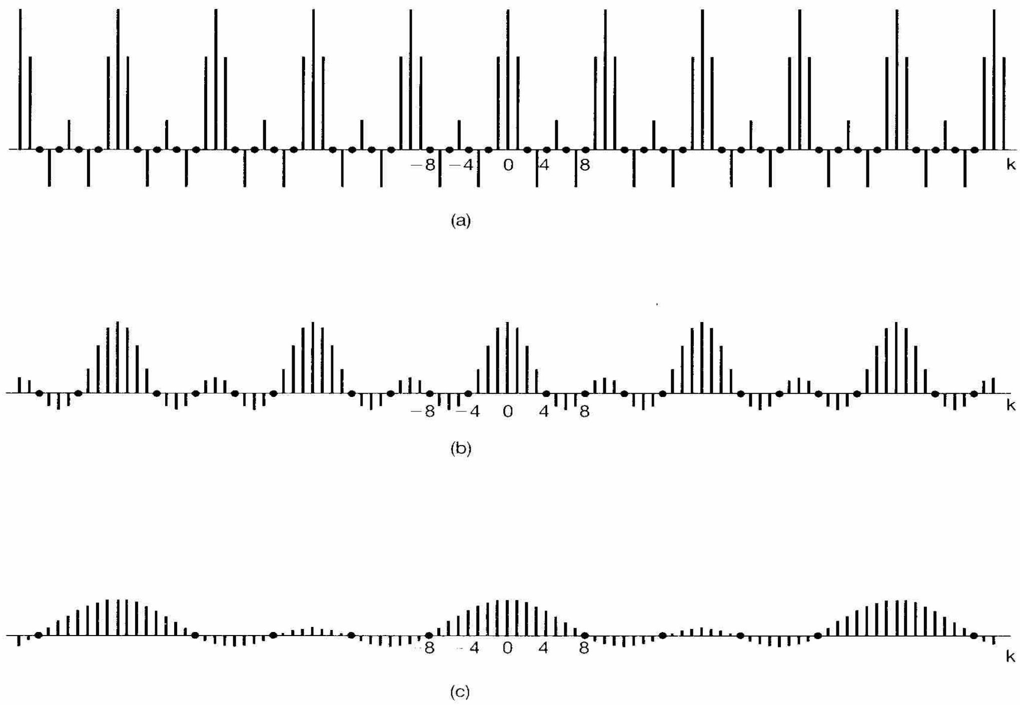
$$= \frac{1}{N}\,\frac{\sin[k\frac{2\pi}{N}(N_1+\frac{1}{2})]}{\sin(k\frac{\pi}{N})} \quad \text{για } k\neq 0, \pm N, \pm 2N, \ldots$$

και

$$\alpha_k = \frac{2N_1+1}{N} \quad \text{για } k=0, \pm N, \pm 2N, \ldots$$

DTFS

Οι συντελεστές της σειράς Fourier της περιοδικής τετραγωνικής κυματομορφής για $N_1=2$ και για (α) $N=10$, (b) $N=20$, (c) $N=40$, δείχνονται στο σχήμα που ακολουθεί.



Πανόραμα Μετασχηματισμών Fourier

	ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΧΡΟΝΟΥ	ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ
ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ	Σειρά Fourier $x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\Omega_0 t}$ $a_k=\frac{1}{T}\int_T x(t)\, e^{-jk\Omega_0 t}\, dt$	Σειρά Fourier $x(n)=\sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$ $a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$
ΜΗ-ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ	Μετασχηματισμός Fourier $x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega)\, e^{j\Omega t}\, d\Omega$ $X(\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\Omega t}\, dt$	Μετασχηματισμός Fourier $x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})\, e^{j\omega n}\, d\omega$ $X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, e^{-j\omega n}$

https://www.youtube.com/watch?v=OMdUYrKMZjE https://www.youtube.com/watch?v=pwnI72A4vCE