1.1 Ψηφιακή επεξεργασία σήματος

Η *ψηφιακή επεξεργασία σήματος* ασχολείται με την ψηφιακή αναπαράσταση των σημάτων και την ανάλυση, τροποποίηση και εξαγωγή πληροφοριών από αυτά, με τη βοήθεια ψηφιακών επεξεργαστών. Περιπτώσεις κατά τις οποίες θέλουμε να αφαιρέσουμε τον θόρυβο από ένα σήμα ή να βρούμε το μετασχηματισμό Fourier κάποιων δεδομένων ή να δώσουμε σ' ένα σήμα μορφή πιο κατάλληλη για επεξεργασία και ανάλυση της πληροφορίας που εμπεριέχει, αποτελούν παραδείγματα της ψηφιακής επεξεργασίας σήματος. Αυτή χρησιμοποιείται όλο και περισσότερο σε πολλές περιοχές εφαρμογών όπου παραδοσιακά χρησιμοποιούνταν αναλογικές μορφές επεξεργασίας, αλλά και σε νέες εφαρμογές στις οποίες οι αναλογικές μέθοδοι είναι δύσκολο ή και αδύνατον να χρησιμοποιηθούν. Το γεγονός αυτό οφείλεται στα πλεονεκτήματα που παρουσιάζει η ψηφιακή επεξεργασία σήματος.

Υπάρχουν πολλοί λόγοι για τους οποίους θα προτιμούσαμε την ψηφιακή επεξεργασία ενός σήματος έναντι της αναλογικής. Κατά πρώτιστο λόγο, ένα ψηφιακό προγραμματιζόμενο σύστημα παρουσιάζει μεγάλη ευελιξία στην τροποποίηση των πράξεων ψηφιακής επεξεργασίας με μια απλή μετατροπή του προγράμματος. Μια τέτοια τροποποίηση ενός αναλογικού συστήματος συνεπάγεται την επανασχεδίαση του κυκλώματος και συνεπακόλουθο έλεγχο και επιβεβαίωση (testing and verification) της ορθής λειτουργίας του.

Η ακρίβεια (accuracy) παίζει επίσης πολύ σπουδαίο ρόλο. Η ανοχή των στοιχείων των αναλογικών κυκλωμάτων καθιστά δύσκολο τον προσδιορισμό της ακρίβειας ενός αναλογικού συστήματος επεξεργασίας. Στην περίπτωση ενός ψηφιακού συστήματος, ο έλεγχος της πιστότητας των προδιαγραφών είναι πολύ πιο εύκολος.

Τα ψηφιακά σήματα αποθηκεύονται σε μαγνητικά ή οπτικά μέσα (λ.χ. μαγνητικούς ή οπτικούς δίσκους, ταινίες, κ.ά.) χωρίς υποβάθμιση της πιστότητάς τους, πέραν αυτής που υπεισήλθε στη διαδικασία μετατροπής τους από αναλογικά σε ψηφιακά. Έτσι, δίνεται η δυνατότητα μεταφοράς και επεξεργασίας τέτοιων σημάτων σε μη πραγματικό χρόνο. Επιπλέον, δίνεται η δυνατότητα εφαρμογής πιο περίπλοκων αλγορίθμων επεξεργασίας σήματος. Συνήθως η υλοποίηση μαθηματικών πράξεων μεγάλης ακρίβειας είναι δύσκολο να γίνει σε σήματα τα οποία βρίσκονται σε αναλογική μορφή, πράγμα όμως που είναι συνηθισμένο και εύκολο να γίνει σε ένα ψηφιακό σήμα το οποίο επεξεργαζόμαστε με έναν υπολογιστή και με κατάλληλο λογισμικό.

Σε πολλές περιπτώσεις, η ψηφιακή επεξεργασία ενός σήματος έχει χαμηλότερο κόστος από την αντίστοιχη αναλογική. Αυτό μπορεί να οφείλεται είτε στο ότι το υλικό (hardware) σήμερα είναι φθηνότερο είτε στην ευελιξία που παρέχεται λόγω της ψηφιακής υλοποίησης.

Αποτέλεσμα των πλεονεκτημάτων της ψηφιακής επεξεργασίας σήματος είναι η διαρκώς αυξανόμενη χρήση της σε όλο και περισσότερους τομείς εφαρμογών, όπως στην επεξεργασία ομιλίας, στη μετάδοση σήματος σε τηλεφωνικά κανάλια, στη σεισμολογία, στη γεωφυσική, στην ιατρική, στην εξερεύνηση του διαστήματος, στη μετεωρολογία, κ.ά.

Φυσικά, η ψηφιακή επεξεργασία σήματος έχει και τα όριά της, τα οποία οφείλονται στους περιορισμούς που τίθενται στην ταχύτητα λειτουργίας των μετατροπέων αναλογικού σήματος σε ψηφιακό, καθώς και στους ίδιους τους ψηφιακούς επεξεργαστές σήματος. Έτσι, σήματα με εξαιρετικά μεγάλο εύρος συχνοτήτων, για παράδειγμα, σήματα με εύρος συχνοτήτων της τάξεως των 100 MHz, υφίστανται επεξεργασία ακόμα και σήμερα με αναλογικές μεθόδους.

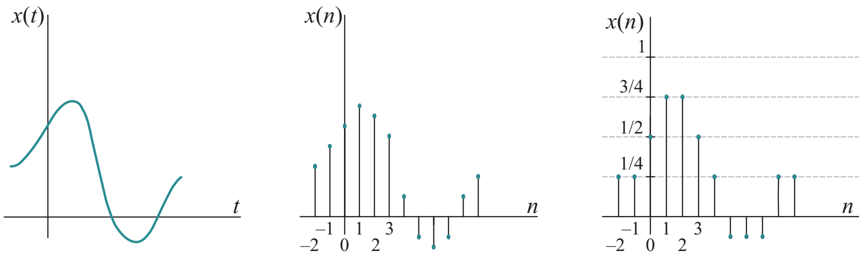
1.2 Τύποι σημάτων

Τα σήματα ταξινομούνται σε δύο μεγάλες κατηγορίες: στα *σήματα συνεχούς χρόνου* και στα *σήματα διακριτού χρόνου*. Συνήθως, ως ανεξάρτητη μεταβλητή χρησιμοποιείται ο χρόνος, χωρίς όμως να αποκλείεται η ανεξάρτητη μεταβλητή να είναι κάποιο άλλο φυσικό μέγεθος, όπως για παράδειγμα η απόσταση, η θερμοκρασία ή η πίεση. Παρ' όλα αυτά έχει επικρατήσει να μιλάμε για σήματα διακριτού χρόνου.

Στα σήματα *συνεχούς χρόνου* (continuous time) η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι συνεχής, δηλαδή τα σήματα αυτά ορίζονται για οποιαδήποτε τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής. Η εξαρτημένη μεταβλητή, δηλαδή το πλάτος (amplitude) του σήματος, είναι και αυτή συνεχής. Γι' αυτό και τα σήματα αυτά αναφέρονται και ως *σήματα συνεχούς χρόνου συνεχούς πλάτους* ή *αναλογικά* σήματα (Σχήμα 1.2α). Παραδείγματα τέτοιων σημάτων είναι η ομιλία ως συνάρτηση του χρόνου ή η ατμοσφαιρική πίεση ως συνάρτηση του ύψους. Ένα αναλογικό σήμα περιγράφεται από μια συνάρτηση $x(t)$, όπου t πραγματικός αριθμός.

Στα σήματα *διακριτού χρόνου* (discrete time) η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι διακριτή, δηλαδή τα σήματα αυτά ορίζονται μόνο για συγκεκριμένες τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής. Με άλλα λόγια, η ανεξάρτητη μεταβλητή παίρνει τιμές από ένα διακριτό σύνολο τιμών. Η εξαρτημένη μεταβλητή, δηλαδή το πλάτος του σήματος, είναι συνεχής. Γι' αυτό και τα σήματα αυτά αναφέρονται και ως σήματα *διακριτού χρόνου συνεχούς πλάτους* (Σχήμα 1.2β). Παραδείγματα τέτοιων σημάτων είναι ο δείκτης Dow–Jones ως συνάρτηση του χρόνου (λ.χ. ανά ημέρα) ή το κατά κεφαλήν εισόδημα ως συνάρτηση του τόπου διαμονής. Στη περίπτωση που και η εξαρτημένη μεταβλητή παίρνει διακριτές τιμές, τότε μιλάμε για *σήματα διακριτού χρόνου διακριτού πλάτους* ή *ψηφιακά* σήματα (Σχήμα 1.2γ). Ένα σήμα διακριτού χρόνου συμβολίζεται συνήθως ως $x(n)$, όπου n ακέραιος. Πρόκειται για μία ακολουθία (sequence) αριθμών, γι' αυτό συχνά αναφερόμαστε στο σήμα αυτό και ως *ακολουθία*.

Πριν προχωρήσουμε στη μελέτη των βασικών σημάτων διακριτού χρόνου, θα ήταν καλό να γνωρίσουμε την έννοια της συχνότητας τόσο για τα σήματα συνεχούς χρόνου όσο και για τα σήματα διακριτού χρόνου.



Σχήμα 1.2
Τύποι σημάτων: (α) αναλογικό, (β) διακριτού χρόνου, (γ) ψηφιακό

1.2.1 Η έννοια της συχνότητας στα σήματα

Η έννοια της συχνότητας είναι βασική και γνωστή σε όλους μας. Την έχουμε συναντήσει στο ραδιοφωνικό δέκτη που χρησιμοποιούμε ή στο στερεοφωνικό σύστημα που έχουμε ή στο φίλτρο που πρέπει να βάλουμε στη φωτογραφική μας μηχανή. Από τη φυσική γνωρίζουμε ότι η συχνότητα σχετίζεται με έναν τύπο περιοδικής κίνησης, η οποία ονομάζεται *αρμονική ταλάντωση*, και η οποία περιγράφεται από ημιτονοειδείς συναρτήσεις. Η έννοια της συχνότητας σχετίζεται άμεσα με την έννοια του χρόνου, αφού η διάσταση αυτής είναι το αντίστροφο του χρόνου. Κατά συνέπεια, η φύση του χρόνου (συνεχής ή διακριτή) αναμένουμε να επηρεάζει τη φύση της συχνότητας.

ΗΜΙΤΟΝΟΕΙΔΗ ΣΗΜΑΤΑ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΧΡΟΝΟΥ

Μία απλή αρμονική ταλάντωση ορίζεται μαθηματικά από το ημιτονοειδές σήμα συνεχούς χρόνου:

$$x_\alpha(t) = A\cdot\cos(\Omega t + \theta),\ -\infty < t < \infty \tag{1.1}$$

όπου A το *πλάτος* (amplitude) του ημιτονοειδούς, Ω η *συχνότητα* σε ακτίνια ανά δευτερόλεπτο (rad/s) και θ η φάση σε ακτίνια (Σχήμα 1.3) Η σχέση (1.1) μπορεί να γραφεί και ως:

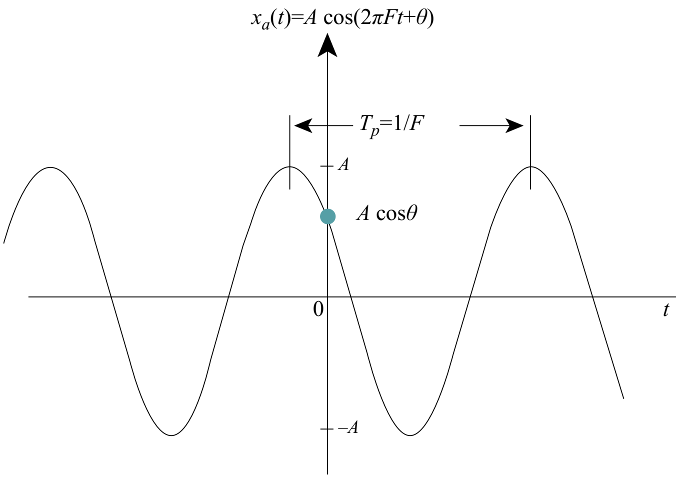
$$x_\alpha(t) = A\cdot\cos(2\pi F t + \theta),\ -\infty < t < \infty \tag{1.2}$$

όταν θέσουμε

$$\Omega = 2\pi F \tag{1.3}$$

όπου F η συχνότητα σε κύκλους ανά δευτερόλεπτο ή hertz (Hz). Το αναλογικό αυτό σήμα παρουσιάζει τις εξής ιδιότητες:

- Είναι περιοδικό: Πράγματι, για οποιαδήποτε τιμή της συχνότητας F, η συνάρτηση $x_\alpha(t)$ είναι περιοδική, δηλαδή $x_\alpha(t + T_p) = x_\alpha(t)$, όπου $T_p = 1/F$ είναι η βασική περίοδος του ημιτονοειδούς σήματος.
- Για διαφορετικές συχνότητες έχουμε διαφορετικά σήματα.
- Αύξηση της συχνότητας F συνεπάγεται αντίστοιχη αύξηση του ρυθμού ταλάντωσης του σήματος, δηλαδή περισσότερες περίοδοι εμπεριέχονται σε ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα.



Σχήμα 1.3
Παράδειγμα αναλογικού ημιτονοειδούς σήματος

Σημαντική Παρατήρηση

Η συχνότητα είναι από τη φύση της θετική ποσότητα. Αυτό είναι προφανές, αφού η συχνότητα σε ένα περιοδικό σήμα εκφράζει τον αριθμό των κύκλων στη μονάδα του χρόνου. Σε ορισμένες περιπτώσεις όμως, για λόγους ευκολίας από μαθηματικής απόψεως, απαιτείται η εισαγωγή αρνητικών συχνοτήτων. Αυτό γίνεται κατανοητό αν θυμηθούμε ότι το ημιτονοειδές σήμα (σχέση 1.1) μπορεί να γραφεί και ως:

$$x_\alpha(t) = A\cos(\Omega t + \theta) = \frac{A}{2}e^{j(\Omega t+\theta)} + \frac{A}{2}e^{-j(\Omega t+\theta)} \tag{1.4}$$

βασιζόμενοι στην ταυτότητα του Euler $e^{\pm j\varphi} = \cos\varphi \pm j\sin\varphi$. Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι το ημιτονοειδές σήμα μπορεί να προέλθει από την πρόσθεση δύο συζυγών μιγαδικών εκθετικών σημάτων ίσου πλάτους. Τα μιγαδικά εκθετικά σήματα συνηθίζουμε να τα παριστάνουμε ως διανύσματα πάνω στο μιγαδικό επίπεδο, τα οποία ονομάζουμε *φάσορες* (phasors). Οι φάσορες της σχέσης (1.4) περιστρέφονται με γωνιακές συχνότητες $\pm\Omega$ rad/sec. Η θετική συχνότητα αντιστοιχεί σε ομοιόμορφη περιστροφή του φάσορα με φορά αντίθετη της κίνησης των δεικτών του ρολογιού (αριστερόστροφη περιστροφή). Κατά συνέπεια, η αρνητική συχνότητα αντιστοιχεί σε ομοιόμορφη περιστροφή του φάσορα κατά τη φορά της κίνησης των δεικτών του ρολογιού (δεξιόστροφη περιστροφή).

Όπως λοιπόν αναφέραμε, για λόγους ευκολίας από (μαθηματικής απόψεως) θα χρησιμοποιούμε θετικές και αρνητικές συχνότητες σε όλη την έκταση αυτού του βιβλίου. Αυτό σημαίνει ότι η περιοχή συχνοτήτων των αναλογικών σημάτων θα είναι $-\infty < F < \infty$.

ΗΜΙΤΟΝΟΕΙΔΗ ΣΗΜΑΤΑ ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ

Ένα ημιτονοειδές σήμα διακριτού χρόνου μπορεί να εκφραστεί ως:

$$x(n) = A\cos(\omega n + \theta),\ -\infty < n < \infty \tag{1.5}$$

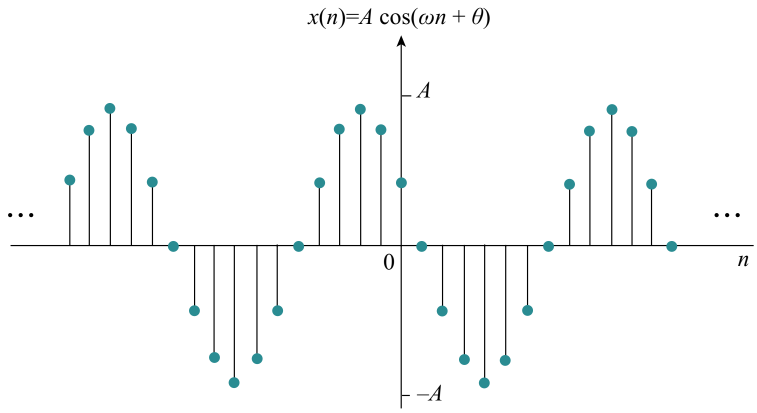
όπου n ακέραιη μεταβλητή, η οποία αντιπροσωπεύει τον αριθμό (τη θέση) του δείγματος, A το πλάτος του σήματος, ω η συχνότητα του σήματος σε ακτίνια ανά δείγμα και θ η φάση σε ακτίνια (Σχήμα 1.4). Η σχέση (1.5) μπορεί να γραφεί και ως:

$$x(n) = A\cos(2\pi f n + \theta),\ -\infty < n < \infty \tag{1.6}$$

όταν θέσουμε

$$\omega = 2\pi f \tag{1.7}$$

όπου f η συχνότητα σε κύκλους ανά δείγμα.



Σχήμα 1.4

Παράδειγμα ενός ημιτονοειδούς σήματος διακριτού χρόνου με $\omega = \pi/6$ και $\theta = \pi/3$

Σε αντίθεση με ένα ημιτονοειδές σήμα συνεχούς χρόνου, ένα ημιτονοειδές διακριτού χρόνου παρουσιάζει τις ακόλουθες ιδιότητες:

- Είναι περιοδικό μόνο όταν η συχνότητα του f είναι ρητός αριθμός.
- Τα ημιτονοειδή σήματα διακριτού χρόνου των οποίων οι συχνότητες διαφέρουν κατά ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π είναι ίδια (ταυτίζονται).
- Ο μέγιστος ρυθμός ταλάντωσης ενός ημιτονοειδούς διακριτού χρόνου επιτυγχάνεται για $\omega = \pi$ (ή $\omega = -\pi$) ή ισοδύναμα για $f = \frac{1}{2}$ (ή $f = -\frac{1}{2}$).

Παράδειγμα 1.1

Να αποδειχτεί ότι ένα ημιτονοειδές διακριτού χρόνου είναι περιοδικό μόνο όταν η συχνότητά του f είναι ρητός αριθμός.

Λύση:

Ένα σήμα διακριτού χρόνου $x(n)$ είναι περιοδικό με περίοδο N ($N > 0$) εάν και μόνον εάν

$$x(n + N) = x(n) \text{ για όλα τα } n \tag{1.8}$$

Η μικρότερη τιμή του N για την οποία επαληθεύεται η σχέση αυτή, ονομάζεται *βασική περίοδος* (fundamental period).

Για να είναι περιοδικό ένα ημιτονοειδές σήμα διακριτού χρόνου με συχνότητα f, θα πρέπει να ισχύει η σχέση $\cos(2\pi f(N + n) + \theta) = \cos(2\pi fn + \theta)$. Η σχέση αυτή αληθεύει εάν και μόνο εάν υπάρχει ακέραιος m τέτοιος ώστε $2\pi fN = 2m\pi$ ή ισοδύναμα $f = \frac{m}{N}$, δηλαδή εάν και μόνο εάν η συχνότητα f μπορεί να γραφεί ως πηλίκο δύο ακέραιων αριθμών.

Παράδειγμα 1.2

Να αποδείξετε ότι ημιτονοειδή σήματα διακριτού χρόνου, των οποίων οι συχνότητες διαφέρουν κατά ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π, ταυτίζονται.

Λύση:

Έστω το σήμα $x(n) = A\cos(\omega n + \theta)$ με συχνότητα ω, και το σήμα $x_1(n) = A\cos[(\omega + 2\pi)n + \theta]$ με συχνότητα $\omega + 2\pi$. Αποδεικνύεται πολύ εύκολα ότι:

$$x_1(n) = A\cos[(\omega + 2\pi)n + \theta] = A\cos(\omega n + \theta + 2\pi n) = A\cos(\omega n + \theta) = x(n)$$

Γενικά, όλα τα ημιτονοειδή σήματα διακριτού χρόνου $x_k(n) = A\cos(\omega_k n + \theta)$,

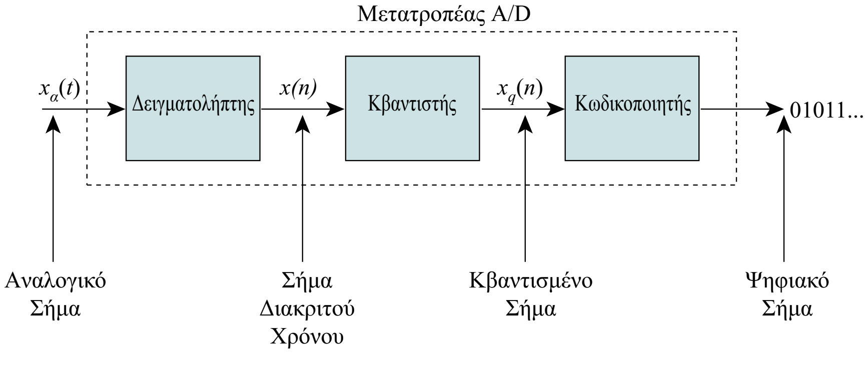
$k = 0,1,2, \ldots$ με $\omega_k = \omega + 2k\pi$, $-\pi \le \omega \le \pi$ ταυτίζονται. Μόνο τα ημιτονοειδή σήματα διακριτού χρόνου των οποίων οι συχνότητες βρίσκονται στην περιοχή $-\pi \le \omega \le \pi$ ή $-\frac{1}{2} \le f \le \frac{1}{2}$ είναι διαφορετικά, δηλαδή μοναδικά.

Μπορούμε, επομένως, να παρατηρήσουμε την ουσιαστική διαφορά μεταξύ των ημιτονοειδών διακριτού χρόνου και των ημιτονοειδών συνεχούς χρόνου. Στα ημιτονοειδή συνεχούς χρόνου έχουμε διαφορετικά σήματα για οποιαδήποτε συχνότητα Ω (ή F) στην περιοχή $-\infty < \Omega < \infty$ (ή $-\infty < F < \infty$), ενώ στα ημιτονοειδή διακριτού χρόνου έχουμε διαφορετικά σήματα για οποιαδήποτε συχνότητα ω (ή f) στην περιοχή $-\pi \le \omega \le \pi$ (ή $-\frac{1}{2} \le f \le \frac{1}{2}$).

1.2.2 Μετατροπή σήματος από αναλογικό–σε–ψηφιακό και από ψηφιακό–σε–αναλογικό

Τα περισσότερα σήματα που παρουσιάζουν πρακτικό ενδιαφέρον, όπως για παράδειγμα η ομιλία, τα βιολογικά σήματα, τα σεισμικά σήματα, κ.ά., είναι αναλογικά. Για να επεξεργαστούμε αναλογικά σήματα με ψηφιακά μέσα, απαιτείται η μετατροπή αυτών σε ψηφιακή μορφή, δηλαδή η μετατροπή τους σε μία ακολουθία αριθμών πεπερασμένης ακρίβειας. Η διαδικασία αυτή ονομάζεται *μετατροπή αναλογικού–σε–ψηφιακό* (analog–to–digital conversion, A/D) και τα αντίστοιχα κυκλώματα ονομάζονται «μετατροπείς αναλογικού–σε–ψηφιακό» (analog–to–digital converters, ADCs). Η αντίστροφη διαδικασία της μετατροπής ενός ψηφιακού σήματος σε αναλογικό είναι γνωστή ως *μετατροπή ψηφιακού–σε–αναλογικό* (digital–to–analog conversion, D/A) και γίνεται με τη βοήθεια κυκλωμάτων τα οποία ονομάζονται μετατροπείς «ψηφιακού–σε–αναλογικό» (digital–to–analog converters, DACs).

Η διαδικασία της μετατροπής ενός αναλογικού σήματος σε ψηφιακό γίνεται σε τρία στάδια, όπως δείχνουμε στο Σχήμα 1.5.



Σχήμα 1.5
Βασικά τμήματα ενός μετατροπέα αναλογικού–σε–ψηφιακό

1. *Δειγματοληψία* (sampling): Αυτή είναι η διαδικασία μετατροπής ενός σήματος συνεχούς χρόνου σε σήμα διακριτού χρόνου, παίρνοντας δείγματα του σήματος συνεχούς χρόνου σε διακριτές στιγμές του χρόνου. Έτσι, αν $x_\alpha(t)$ είναι η είσοδος στο δειγματολήπτη, τότε η έξοδος αυτού είναι $x_\alpha(nT) \equiv x(n)$, όπου T η περίοδος δειγματοληψίας.
2. *Κβάντιση* (quantisation): Πρόκειται για τη διαδικασία μετατροπής ενός σήματος διακριτού χρόνου συνεχών τιμών σε σήμα διακριτού χρόνου διακριτών τιμών (ψηφιακό). Το κάθε δείγμα του σήματος αντιπροσωπεύεται από μία τιμή η οποία επιλέγεται από ένα πεπερασμένο σύνολο πιθανών τιμών. Η διαφορά μεταξύ του αρχικού μη κβαντισμένου δείγματος $x(n)$ και της κβαντισμένης εξόδου $x_q(n)$ αποτελεί το λεγόμενο σφάλμα κβάντισης.
3. *Κωδικοποίηση* (coding): Κατά τη διαδικασία της κωδικοποίησης, κάθε διακριτή τιμή $x_q(n)$ αντιπροσωπεύεται από έναν αριθμό αποτελούμενο από b–bits.

Ας εξετάσουμε ξεχωριστά καθένα από αυτά τα τρία στάδια:

ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑ ΑΝΑΛΟΓΙΚΩΝ ΣΗΜΑΤΩΝ

Η δειγματοληψία ενός αναλογικού σήματος $x_\alpha(t)$ επιτυγχάνεται παίρνοντας δείγματα αυτού ανά T δευτερόλεπτα, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.6. Η διαδικασία αυτή περιγράφεται από τη σχέση:

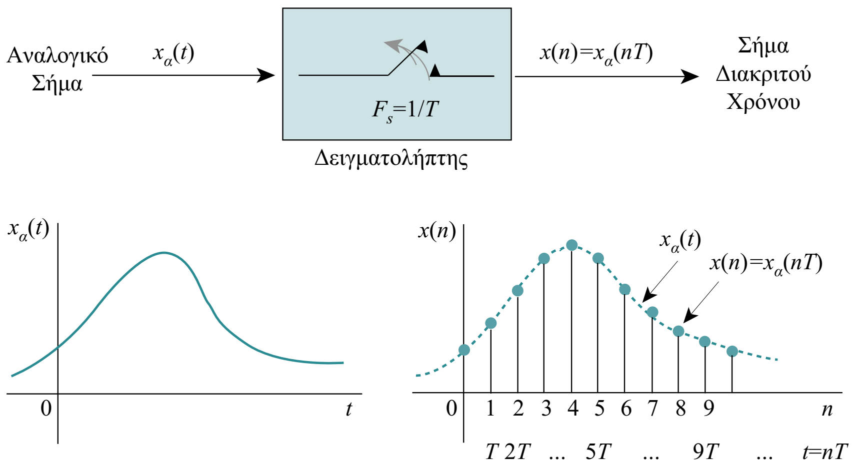
$$x(n) = x_\alpha(nT), -\infty < n < \infty \tag{1.9}$$

όπου $x(n)$ είναι το σήμα διακριτού χρόνου που προκύπτει. Το χρονικό διάστημα T μεταξύ των διαδοχικών δειγμάτων ονομάζεται *περίοδος δειγματοληψίας* και το αντίστροφο του $\frac{1}{T} = F_s$ αποτελεί το *ρυθμό δειγματοληψίας* (sampling rate) σε δείγματα ανά δευτερόλεπτο ή αλλιώς τη *συχνότητα δειγματοληψίας* (sampling frequency) σε Hz.

Οι μεταβλητές χρόνου t και n για τα σήματα συνεχούς χρόνου και διακριτού χρόνου αντίστοιχα, συνδέονται γραμμικά μέσω της περιόδου δειγματοληψίας T ή ισοδύναμα μέσω του ρυθμού δειγματοληψίας $F_s = \frac{1}{T}$ ως εξής:

$$t = nT = \frac{n}{F_s} \tag{1.10}$$

Επομένως, αναμένουμε να υπάρχει κάποια σχέση που να συνδέει τη συχνότητα F (ή Ω) των αναλογικών σημάτων με τη συχνότητα f (ή ω) των σημάτων διακριτού χρόνου. Για να βρούμε αυτή τη σχέση, ξεκινούμε από την (1.9) και αντικαθιστούμε το



Σχήμα 1.6

Ομοιόμορφη δειγματοληψία αναλογικού σήματος.

$x_\alpha(t)$ με τη συνάρτηση του ημιτονοειδούς σήματος της εξίσωσης (1.2). Έτσι έχουμε:

$$x(n) = x_\alpha(nT) = A\cos(2\pi FnT + \theta) = A\cos(2\pi n \frac{F}{F_s} + \theta) \tag{1.11}$$

Συγκρίνοντας την (1.11) με την αντίστοιχη σχέση (1.6) για το ημιτονοειδές σήμα διακριτού χρόνου, διαπιστώνουμε ότι:

$$f = \frac{F}{F_s} \tag{1.12}$$

ή ισοδύναμα:

$$\omega = \Omega T \tag{1.13}$$

Από τη σχέση (1.12) παρατηρούμε ότι η συχνότητα f είναι μία *κανονικοποιημένη* ή *σχετική συχνότητα* (normalized or relative frequency). Κατά συνέπεια, *για να προσδιορίσουμε την F Hz, όταν μας δίνεται η f, πρέπει απαραίτητα να γνωρίζουμε τη συχνότητα δειγματοληψίας F_s.*

Είδαμε στο προηγούμενο Παράδειγμα 1.2, ότι η περιοχή συχνοτήτων F ή Ω των ημιτονοειδών συνεχούς χρόνου είναι:

$$-\infty < F < \infty \text{ ή } -\infty < \Omega < \infty \tag{1.14}$$

Για τα ημιτονοειδή διακριτού χρόνου είδαμε ότι μόνο οι συχνότητες f ή ω που βρίσκονται στο διάστημα:

$$-\frac{1}{2} \le f \le \frac{1}{2} \text{ ή } -\pi \le \omega \le \pi \tag{1.15}$$

είναι διαφορετικές. Αντικαθιστώντας στην τελευταία σχέση τις μεταβλητές f και ω με τις ισοδύναμές τους από τις σχέσεις (1.12) και (1.13), βρίσκουμε ότι η συχνότητα του ημιτονοειδούς συνεχούς χρόνου, όταν παίρνουμε δείγματά του με ρυθμό $F_s = 1/T$, θα πρέπει να βρίσκεται στην περιοχή:

$$-\frac{1}{2T} = -\frac{F_s}{2} \leq F \leq \frac{F_s}{2} = \frac{1}{2T} \tag{1.16}$$

ή

$$-\frac{\pi}{T} = -\pi F_s \leq \Omega \leq \pi F_s = \frac{\pi}{T} \tag{1.17}$$

Παρατηρούμε, επομένως, ότι η βασική διαφορά μεταξύ των σημάτων συνεχούς χρόνου και διακριτού χρόνου βρίσκεται στην περιοχή τιμών των μεταβλητών συχνότητας F και f ή Ω και ω. Η περιοδική δειγματοληψία ενός σήματος συνεχούς χρόνου οδηγεί στην απεικόνιση της απείρου εύρους περιοχής συχνοτήτων F (ή Ω), στην πεπερασμένου εύρους περιοχή συχνοτήτων f (ή ω). Και αφού η μέγιστη συχνότητα σ' ένα σήμα διακριτού χρόνου είναι $f = \frac{1}{2}$ ή $\omega = \pi$, συνεπάγεται ότι για ένα ρυθμό δειγματοληψίας F_s, η αντίστοιχη μέγιστη τιμή της F ή Ω θα ισούται με:

$$F_{\max} = \frac{F_s}{2} = \frac{1}{2T} \text{ ή } \Omega_{\max} = \pi F_s = \frac{\pi}{T} \tag{1.18}$$

Με άλλα λόγια, η δειγματοληψία εισάγει ασάφεια, αφού η μέγιστη συχνότητα ενός σήματος συνεχούς χρόνου, η οποία μπορεί να αναπαρασταθεί σωστά, είναι $F_{max} = F_s/2$, όταν λαμβάνονται δείγματα του σήματος αυτού με ρυθμό $F_s = 1/T$. Πριν όμως προχωρήσουμε σε κάποια παραδείγματα που θα μας δείξουν τι συμβαίνει όταν οι συχνότητες του αναλογικού σήματος είναι μεγαλύτερες από $F_s/2$, ας δούμε το θεώρημα της δειγματοληψίας, το οποίο απαντά στο εξής ερώτημα: Ποιος ο ρυθμός δειγματοληψίας F_s για τη σωστή αναπαράσταση ενός αναλογικού σήματος, το οποίο μας δίνεται; Δηλαδή, πόσο συχνά πρέπει να παίρνουμε δείγματα ώστε να έχουμε ένα πιστό αντίγραφο του αναλογικού σήματος; Η απάντηση σ' αυτό το ερώτημα δόθηκε αρχικά από τον Nyquist (1928) και στη συνέχεια από τον Shannon (1949) και αποτελεί το λεγόμενο ***θεώρημα δειγματοληψίας*** ή ***θεώρημα του Shannon–*** διατυπώνεται δε ως εξής:

> *Η συχνότητα F_s, με την οποία λαμβάνονται τα δείγματα ενός σήματος, πρέπει να είναι τουλάχιστον διπλάσια από την υψηλότερη συχνότητα F_{max} που περιέχεται στο σήμα,* δηλαδή
>
> $$F_s \geq 2F_{max} \tag{1.19}$$

Με άλλα λόγια, το θεώρημα δειγματοληψίας μας λέει πως για να μη χαθεί πληροφορία θα πρέπει να παίρνουμε τουλάχιστον δύο δείγματα ανά περίοδο (της υψηλότερης συχνότητας του σήματος). Για παράδειγμα, αν θελήσουμε να ψηφιοποιήσουμε ένα σήμα ομιλίας και χρησιμοποιούμε μικρόφωνο το οποίο λειτουργεί για συχνότητες μεταξύ 300 Hz και 3 kHz, τότε η μικρότερη συχνότητα δειγματοληψίας που πρέπει να χρησιμοποιήσουμε είναι 6 kHz. Ας δούμε τώρα τι θα συμβεί αν το θεώρημα δειγματοληψίας δε γίνει σεβαστό.

Παράδειγμα 1.3

Δίνονται τα αναλογικά σήματα $x_1(t)=\sin 2\pi\left(\frac{1}{8}\right)t$ και $x_2(t)=\sin 2\pi\left(-\frac{7}{8}\right)t$.

Ποια τα σήματα διακριτού χρόνου που θα προκύψουν μετά τη δειγματοληψία αυτών με ρυθμό $F_s = 1$ Hz;

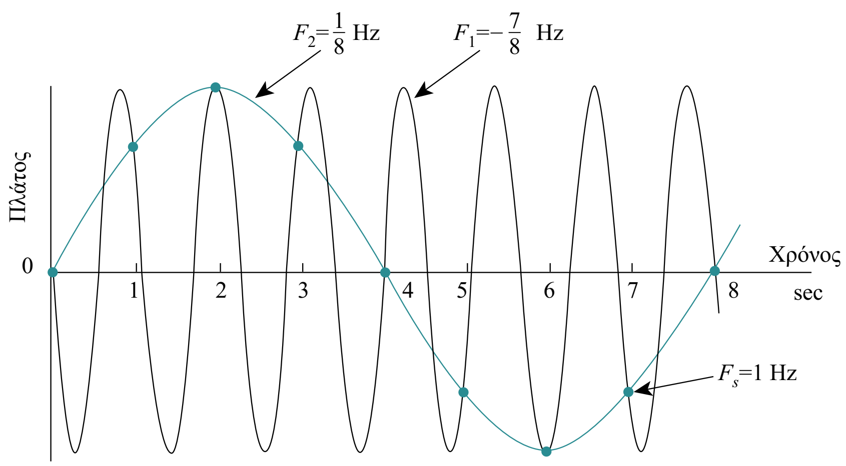
Λύση:

Τα αντίστοιχα σήματα διακριτού χρόνου (ακολουθίες) είναι:

$$x_1(n)=\sin 2\pi\left(\frac{1}{8}\right)nT=\sin 2\pi\left(\frac{1}{8}\right)n=\sin\frac{\pi}{4}n$$

$$x_2(n)=\sin 2\pi\left(-\frac{7}{8}\right)nT=\sin 2\pi\left(-\frac{7}{8}\right)n=\sin\frac{-7\pi}{4}n=\sin\left(-\frac{8\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)n=$$
$$=\sin\left(-2\pi n+\frac{\pi}{4}n\right)=\sin\frac{\pi}{4}n=x_1(n)$$

Παρατηρούμε, επομένως, ότι τα δύο ημιτονοειδή σήματα δεν ξεχωρίζουν μετά τη δειγματοληψία τους με ρυθμό 1 Hz (Σχήμα 1.7).



Σχήμα 1.7
Δειγματοληψία αναλογικών σημάτων συχνότητας $F_1 = \frac{1}{8}$ Hz, $F_2 = -\frac{7}{8}$ Hz με ρυθμό F_s = 1 Hz

Αν μας δώσουν μόνο τα δείγματα (κουκίδες του Σχήματος 1.7) τα οποία αντιστοιχούν στις τιμές του $\sin\frac{\pi}{4}n$, υπάρχει ασάφεια στο να πούμε αν αυτά τα δείγματα αντιστοιχούν σε τιμές του αναλογικού σήματος $x_1(t)$ ή $x_2(t)$. Επειδή το $x_2(t)$ δίνει ακριβώς τα ίδια δείγματα με το $x_1(t)$, για δειγματοληψία με ρυθμό $F_s = 1$ δείγματος ανά δευτερόλεπτο ($F_s = 1$ Hz), λέμε ότι η συχνότητα $F_2 = -\frac{7}{8}$ Hz είναι ένα *ψευδές αντίγραφο* (alias) της συχνότητας $F_1 = \frac{1}{8}$ Hz για το ρυθμό δειγματοληψίας του 1 Hz. Μάλιστα, είναι σημαντικό να δούμε ότι η F_2 δεν αποτελεί το μοναδικό ψευδές αντίγραφο της F_1. Πράγματι, για το ρυθμό δειγματοληψίας $F_s = 1$ Hz, η συχνότητα $F_3 = \frac{9}{8}$ Hz είναι επίσης ψευδές αντίγραφο της F_1, όπως και η συχνότητα $F_4 = \frac{17}{8}$ Hz, και γενικά όλες οι συχνότητες $F_1 + k1$ ή γενικότερα $F_1 + kF_s$, όπου $k = 1,2,\ldots$ Συνεπώς, όλες αυτές οι συχνότητες είναι ψευδή αντίγραφα (aliases) της συχνότητας $F_1 = \frac{1}{8}$ Hz.

Γενικά, η δειγματοληψία του ημιτονοειδούς σήματος συνεχούς χρόνου

$$x_a(t) = A\cos(2\pi F_0 t + \theta) \tag{1.20}$$

με ρυθμό δειγματοληψίας $F_s = 1/T$, μας δίνει το διακριτού χρόνου σήμα:

$$x(n) = A\cos(2\pi f_0 n + \theta) \tag{1.21}$$

όπου $f_0 = F_0/F_s$ είναι η σχετική συχνότητα του ημιτονοειδούς. Αν θεωρήσουμε ότι $-\frac{F_s}{2} \le F_0 \le \frac{F_s}{2}$, η συχνότητα f_0 του $x(n)$ βρίσκεται στην περιοχή $-\frac{1}{2} \le f_0 \le \frac{1}{2}$, η οποία αντιπροσωπεύει τη βασική περιοχή συχνοτήτων των σημάτων διακριτού χρόνου. Στην περίπτωση αυτή, η απεικόνιση της F_0 στην f_0 είναι ένα–προς–ένα, κι έτσι είναι δυνατή η εύρεση (ανακατασκευή) του αναλογικού σήματος $x_a(t)$ από τα δείγματα $x(n)$.

Από την άλλη πλευρά, εάν τα αναλογικά ημιτονοειδή:

$$x_a(t) = A\cos(2\pi F_k t + \theta) \tag{1.22}$$

όπου

$$F_k = F_0 + kF_s,\ k = \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{1.23}$$

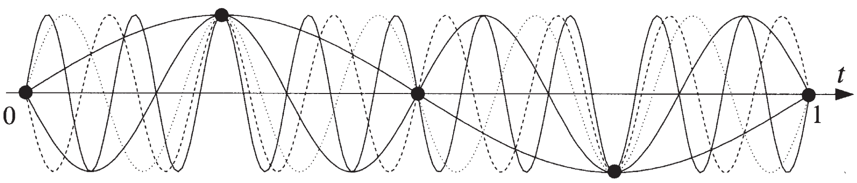
υποστούν δειγματοληψία με ρυθμό F_s, είναι φανερό ότι η συχνότητα F_k βρίσκεται εκτός της βασικής περιοχής συχνοτήτων $-\frac{F_s}{2} \le F \le \frac{F_s}{2}$ [1]. Συνεπώς το σήμα που προήλθε από δειγματοληψία ισούται με:

$$
\begin{aligned}
x(n) \equiv x_\alpha(nT) &= A\cos\left(2\pi \frac{F_0+kF_s}{F_s} n + \theta\right) = \\
&= A\cos\left(2\pi n \frac{F_0}{F_s} + \theta + 2\pi k n\right) = \\
&= A\cos(2\pi f_0 n + \theta)
\end{aligned}
\tag{1.24}
$$

το οποίο συμπίπτει με το διακριτού χρόνου σήμα της σχέσης (1.21) που προήλθε από την δειγματοληψία του αναλογικού σήματος (1.20). Επομένως, ένας άπειρος αριθμός ημιτονοειδών συνεχούς χρόνου αντιπροσωπεύεται από το ίδιο σύνολο δειγμάτων (Σχήμα 1.8). Για παράδειγμα οι συχνότητες (F_k) 2,5 kHz, 5,5 kHz, 8,5 kHz, …, 30,5 kHz, … δεν ξεχωρίζουν από τη συχνότητα (F_0) 500Hz για συχνότητα δειγματοληψίας (F_s) ίση με 3 kHz.

Σχήμα 1.8

Διαφορετικά ημιτονικά σήματα αντιπροσωπεύονται από τα ίδια δείγματα



Άρα, αν δίνεται το σύνολο των δειγμάτων $x(n)$, υπάρχει ασάφεια ως προς το ποιο αναλογικό σήμα $x_\alpha(t)$ αντιπροσωπεύουν αυτά τα δείγματα. Με άλλα λόγια, μπορούμε να πούμε ότι οι συχνότητες $F_k = F_0 + kF_s$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$ δεν μπορούν να διακριθούν από την συχνότητα F_0 μετά τη δειγματοληψία και συνεπώς όλες αυτές είναι ψευδή αντίγραφα (aliases) της F_0. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται *φαινόμενο χαμηλού (ανεπαρκούς) ρυθμού δειγματοληψίας* (aliasing), ή *φαινόμενο φασματικής επικάλυψης* (spectral overlap). Το φαινόμενο αυτό μας είναι γνωστό από τις κινηματογραφικές ταινίες, στις οποίες πολλές φορές παρατηρούμε τους τροχούς μίας άμαξας να περιστρέφονται αντίθετα προς την κατεύθυνση κίνησης της άμαξας. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι ο ρυθμός λήψης των «καρέ» (ρυθμός δειγματοληψίας) είναι μικρότερος απ' όσο πρέπει για να «προλάβουμε» την περιστροφή των τροχών.

---

[1] Η συχνότητα $F_s/2$ (ή αντίστοιχα $\omega = \pi$) ονομάζεται *συχνότητα αναδίπλωσης* (folding frequency).

Παράδειγμα 1.4

Δίνεται το αναλογικό σήμα $x_\alpha(t) = 2\cos 100\pi t$. (α) Να προσδιορίσετε την ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας που απαιτείται, ώστε να αποφύγουμε το φαινόμενο της χαμηλού ρυθμού δειγματοληψίας (aliasing). (β) Θεωρήστε ότι λαμβάνονται δείγματα του σήματος με ρυθμό $F_s = 200$ Hz. Ποιο το σήμα διακριτού χρόνου το οποίο θα προκύψει μετά τη δειγματοληψία; (γ) Επαναλάβετε το ερώτημα (β) για ρυθμό δειγματοληψίας $F_s = 75$ Hz. (δ) Για $F_s = 75$ Hz, ποια η συχνότητα F_0, όπου $-\frac{F_s}{2} \le F_0 \le \frac{F_s}{2}$, του ημιτονοειδούς το οποίο δίνει τα ίδια ακριβώς δείγματα με εκείνα που πήραμε στην περίπτωση (γ);

Λύση

(α) Η συχνότητα του αναλογικού σήματος είναι $F = 50$ Hz. Άρα η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας που απαιτείται, για να αποφύγουμε το φαινόμενο aliasing θα πρέπει να είναι $F_s = 2F = 100$ Hz.

(β) Όταν $F_s = 200$ Hz, τότε το σήμα διακριτού χρόνου που παίρνουμε είναι:

$$x(n) = 2\cos\frac{100\pi}{200}n = 2\cos\frac{\pi}{2}n$$

(γ) Ο ρυθμός δειγματοληψίας των 75 Hz είναι μικρότερος αυτού που απαιτείται για να αποφύγουμε το φαινόμενο aliasing. Το σήμα διακριτού χρόνου που παίρνουμε είναι στην περίπτωση αυτή:

$$x(n) = 2\cos\frac{100\pi}{75}n = 2\cos\frac{4\pi}{3}n = 2\cos\left(2\pi - \frac{2\pi}{3}\right)n = 2\cos\frac{2\pi}{3}n$$

Η συχνότητα του σήματος είναι $f = 1/3$, δηλαδή $F/F_s = 1/3$ ή $F = 25$ Hz αφού $F_s = 75$ Hz.

(δ) Από τη σχέση (1.23) γνωρίζουμε τη συχνότητα $F_k = F$ (που στην προκειμένη περίπτωση είναι 50 Hz), τη συχνότητα δειγματοληψίας F_s (που στην προκειμένη περίπτωση είναι 75 Hz) και ζητούμε να προσδιορίσουμε τη συχνότητα F_0 της *βασικής περιοχής συχνοτήτων*. Έτσι, έχουμε $F_0 = F_k – kF_s = 50–1·75 = –25$ Hz.

(Διαλέξαμε $k = 1$ γιατί μόνο αυτή η τιμή δίνει $-\frac{F_s}{2} \le F_0 \le \frac{F_s}{2}$). Άρα, για το ρυθμό δειγματοληψίας των 75 Hz, η συχνότητα $F = 50$ Hz είναι ένα ψευδές αντίγραφο της συχνότητας των 25 Hz.

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 1.1

Από αναλογικό σήμα συχνότητας 100 Hz λαμβάνουμε δείγματα με συχνότητες (α) 75 Hz και (β) 150 Hz. Σε ποιες συχνότητες θα αντιστοιχούν τα δείγματα που θα προκύψουν;

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 1.2

Θεωρήστε τα αναλογικά σήματα $x_1(t) = \cos(60\pi t)$, $x_2(t) = \cos(140\pi t)$, $x_3(t) = \cos(260\pi t)$, τα οποία υφίστανται ομοιόμορφα δειγματοληψία με συχνότητα 100 Hz. Ποια είναι τα εξαγόμενα σήματα διακριτού χρόνου;

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 1.3

Ο ρυθμός δειγματοληψίας του σήματος $x(t) = \sin(\pi t) + 4\sin(3\pi t)\cos(2\pi t)$ είναι 3 kHz. Σε ποιες συχνότητες θα αντιστοιχούν τα δείγματα που θα προκύψουν;

Δραστηριότητα 1.1

Προτείνετε δύο συχνότητες οι οποίες να δίνουν τα ίδια δείγματα με αυτά του σήματος $x(t)$ της άσκησης αυτοαξιολόγησης 1.3, όταν ο ρυθμός δειγματοληψίας είναι 3 kHz.

ΚΒΑΝΤΙΣΗ ΣΗΜΑΤΩΝ ΣΥΝΕΧΟΥΣ–ΠΛΑΤΟΥΣ

Κβάντιση (quantisation) ονομάζεται η διαδικασία της μετατροπής ενός σήματος διακριτού χρόνου συνεχούς–πλάτους σε ψηφιακό σήμα, εκφράζοντας την τιμή κάθε δείγματος ως ένα αριθμό με πεπερασμένο πλήθος ψηφίων (αντί για άπειρο πλήθος ψηφίων που απαιτείται για κάθε συνεχούς–πλάτους τιμή).

Το σφάλμα που υπεισέρχεται από την αναπαράσταση του σήματος συνεχών–τιμών με ένα πεπερασμένο πλήθος διακριτών–τιμών, ονομάζεται *σφάλμα κβάντισης* (quantisation error) ή *θόρυβος κβάντισης* (quantisation noise). Αν $x(n)$ είναι τα δείγματα εισόδου στον κβαντιστή και $x_q(n)$ η ακολουθία των κβαντισμένων δειγμάτων της εξόδου του κβαντιστή, τότε το σφάλμα κβάντισης είναι η ακολουθία $e_q(n)$, η οποία ορίζεται ως η διαφορά της πραγματικής τιμής από την κβαντισμένη τιμή, δηλαδή $e_q(n) = x(n)–x_q(n)$. Στο Σχήμα 1.9 φαίνεται παραστατικά το αποτέλεσμα της κβάντισης των δειγμάτων ενός αναλογικού σήματος, καθώς και το σφάλμα κβάντισης.

Για τον περιορισμό κάθε δείγματος στο επιθυμητό πλήθος ψηφίων, χρησιμοποιήσαμε τη μέθοδο της *στρογγυλοποίησης* (rounding) και όχι της *αποκοπής* (truncation). Οι τιμές τις οποίες επιτρέπεται να παίρνει ένα ψηφιακό σήμα, αποτελούν τα λεγόμενα *επίπεδα κβάντισης* (quantisation levels), ενώ η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών επιπέδων κβάντισης ονομάζεται *βήμα κβάντισης* (quantisation step) ή *διακριτική ικανότητα* ή *ανάλυση* (resolution). Κατά τη στρογγυλοποίηση, ο κβαντιστής αποδίδει στη συνεχή τιμή $x(n)$ την τιμή του πλησιέστερου επιπέδου κβάντισης. Έτσι, το σφάλμα κβάντισης $e_q(n)$ κυμαίνεται στην περιοχή μεταξύ $–\Delta/2$ και $\Delta/2$, δηλαδή $–\Delta/2 \le e_q(n) \le \Delta/2$. Το βήμα κβάντισης Δ ορίζεται ως $\Delta = (x_{max}–x_{min})/(L–1)$, όπου x_{max}, x_{min} είναι η μεγαλύτερη και μικρότερη τιμή του $x(n)$ αντίστοιχα, και L το πλήθος των επιπέδων κβάντισης. Η διαφορά $x_{max}–x_{min}$ αποτελεί τη *δυναμική περιοχή* (dynamic range) του σήματος. Στην περίπτωση του Σχήματος 1.9 έχουμε $x_{max} = 7$, $x_{min} = 0$, $L = 8$ και άρα $\Delta = 1$. Παρατηρήστε ότι, αν η δυναμική περιοχή του σήματος είναι καθορισμένη, τότε αύξηση του πλήθους των επιπέδων κβάντισης L, συνεπάγεται μείωση του βήματος κβάντισης. Επομένως, το σφάλμα κβάντισης μειώνεται, δηλαδή, αυξάνει η ακρίβεια του κβαντιστή. Τα επίπεδα κβάντισης L είναι συνάρτηση του πλήθους b των δυαδικών ψηφίων (bits) της λέξης που χρησιμοποιούμε για την αναπαράσταση κάθε δείγματος, όπως θα δούμε στο αμέσως επόμενο εδάφιο του κωδικοποιητή. Αποδεικνύεται ότι για ημιτονοειδή σήματα, ο λόγος του σήματος προς το θόρυβο κβάντισης αυξάνεται κατά περίπου 6dB[2] για κάθε επιπλέον bit που προστίθεται στο μήκος λέξης, δηλαδή για κάθε διπλασιασμό των επιπέδων κβάντισης.

Από τα παραπάνω γίνεται φανερό ότι η κβάντιση αναλογικών σημάτων οδηγεί πάντοτε σε απώλεια πληροφορίας, εξαιτίας της ασάφειας που αυτή εισάγει. Πράγματι, η κβάντιση είναι μία μη αντιστρεπτή διαδικασία, αφού όλα τα δείγματα σε απόσταση $\Delta/2$ γύρω από ένα επίπεδο κβάντισης, αντιπροσωπεύονται από την ίδια τιμή. Συνεπώς, δεν μπορούμε ποτέ να εξαλείψουμε το θόρυβο κβάντισης, παρά μόνο να τον μειώσουμε αυξάνοντας τα επίπεδα κβάντισης L.

---

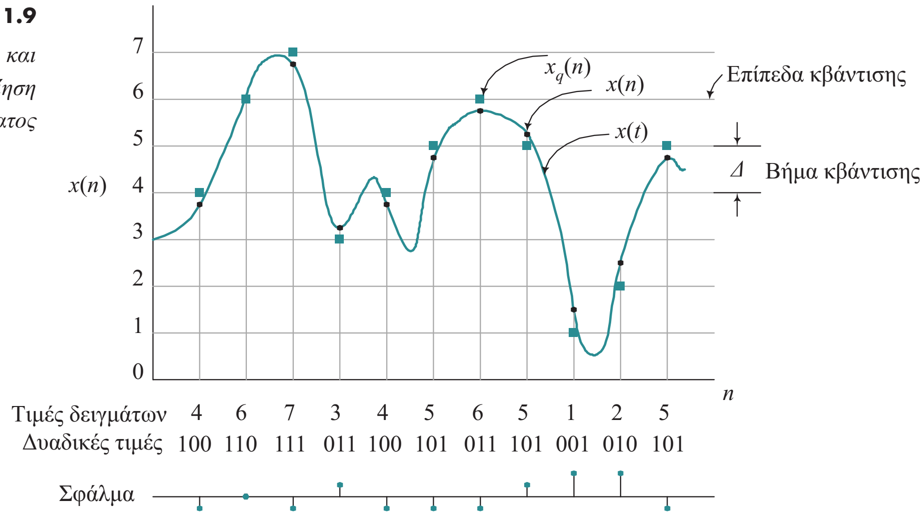
[2] Υπενθυμίζεται ότι το dB (decibel) ορίζεται ως $10 \log_{10}(P_2/P_1) = 20 \log_{10}(V_2/V_1)$, όπου με P, V συμβολίζουμε την ισχύ και την τάση ενός σήματος αντίστοιχα. Το dB αντιστοιχεί στο 1/10 του Bell, μονάδα η οποία ορίστηκε και καθιερώθηκε από τον Alexander Graham Bell, ο οποίος ανακάλυψε ότι το ανθρώπινο αυτί αποκρίνεται λογαριθμικά στις διαφορές ισχύος. Έτσι, 3dB σημαίνει ότι έχουμε διπλασιασμό της ισχύος ($P_2 = 2P_1$), ενώ –3dB σημαίνει ότι έχουμε υποδιπλασιασμό αυτής ($P_2 = P_1/2$). Αναφερόμενοι στην τάση, 6dB σημαίνει διπλασιασμό της τάσης ($V_2 = 2V_1$), ενώ –6dB σημαίνει ότι έχουμε υποδιπλασιασμό αυτής ($V_2 = V_1/2$).

ΚΩΔΙΚΟΠΟΙΗΣΗ ΤΩΝ ΚΒΑΝΤΙΣΜΕΝΩΝ ΔΕΙΓΜΑΤΩΝ

Κατά τη διαδικασία της κωδικοποίησης σ' ένα μετατροπέα αναλογικού–σε–ψηφιακό, ένας μοναδικός δυαδικός αριθμός εκχωρείται σε κάθε επίπεδο κβάντισης. Αν έχουμε L επίπεδα κβάντισης, χρειαζόμαστε τουλάχιστον L διαφορετικούς δυαδικούς αριθμούς. Με ένα μήκος λέξης b bits μπορούμε να έχουμε 2^b διαφορετικούς δυαδικούς αριθμούς. Άρα, πρέπει $2^b \geq L$ ή ισοδύναμα $b \geq \log_2 L$. Στο παράδειγμα του Σχήματος 1.9 χρησιμοποιήσαμε έναν κωδικοποιητή με $b = 3$ bits. Στο εμπόριο υπάρχουν διαθέσιμοι μετατροπείς A/D με ακρίβεια μέχρι και $b = 24$ bits. Χαρακτηριστική είναι η περίπτωση των μουσικών CDs, όπου χρησιμοποιούνται μετατροπείς A/D ακριβείας 16 bits.

Σχήμα 1.9

Κβάντιση και κωδικοποίηση σήματος



Σύνοψη ενότητας

Στην ενότητα αυτή γνωρίσαμε τους διάφορους τύπους σημάτων. Είδαμε τις διαφορές μεταξύ των αναλογικών σημάτων, των σημάτων διακριτού χρόνου και των ψηφιακών σημάτων, και ασχοληθήκαμε διεξοδικά με τη μετατροπή ενός αναλογικού σήματος σε ψηφιακό. Έγινε φανερό ότι η μετατροπή αυτή απαρτίζεται από δύο κύριες, αλλά ανεξάρτητες μεταξύ τους, διαδικασίες: τη *δειγματοληψία*, η οποία έχει σχέση με το πόσο συχνά παίρνουμε τα δείγματα, και τη *κβάντιση*, η οποία έχει σχέση με την ακρίβεια αναπαράστασης του πλάτους κάθε δείγματος. Με άλλα λόγια, η δειγματοληψία έχει να κάνει με τη *συχνότητα* του σήματος, ενώ η κβάντιση με το *πλάτος* του σήματος.

- Το θεώρημα δειγματοληψίας μας λέει ότι η συχνότητα δειγματοληψίας πρέπει να είναι τουλάχιστον διπλάσια της μέγιστης συχνότητας που περιέχεται στο σήμα από το οποίο θέλουμε να λάβουμε δείγματα. Αν αυτό δε συμβαίνει, τότε παρουσιάζεται το φαινόμενο της χαμηλού ρυθμού δειγματοληψίας (aliasing).

- Η ψηφιοποίηση του πλάτους ενός σήματος εισάγει ένα θόρυβο, το λεγόμενο θόρυβο κβάντισης, ο οποίος, όσο περισσότερα επίπεδα κβάντισης χρησιμοποιούμε, δηλαδή όσο περισσότερα bits χρησιμοποιούμε για την αναπαράσταση της κάθε τιμής του πλάτους, τόσο μικρότερος γίνεται.

1.3 Σήματα διακριτού χρόνου

Στην ενότητα αυτή θα ασχοληθούμε με τα σήματα διακριτού χρόνου. Θα γνωρίσουμε τα πιο βασικά σήματα διακριτού χρόνου, καθώς και τις στοιχειώδεις πράξεις που εφαρμόζονται σε τέτοιου είδους σήματα. Όλα αυτά θα αποτελέσουν τα εργαλεία τα απαραίτητα για τη μελέτη των συστημάτων και την ανάλυση των σημάτων που θα μας απασχολήσουν σε όλη την έκταση αυτού του βιβλίου.

1.3.1 Βασικά σήματα διακριτού χρόνου

Τα σήματα που περιγράφονται στη συνέχεια θεωρούνται ως τα βασικά (στοιχειώδη) σήματα διακριτού χρόνου.

α) *Μοναδιαίο δείγμα* (unit sample) ή *μοναδιαία κρουστική ακολουθία* (unit impulse sequence): Είναι το πλέον βασικό σήμα διακριτού χρόνου το οποίο ορίζεται ως:

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \tag{1.25}$$

β) *Μοναδιαία βηματική ακολουθία* (unit step sequence): Ορίζεται ως:

$$u(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \tag{1.26}$$

γ) *Σταθερή ακολουθία* (constant sequence):

$$x(n) = A, \qquad -\infty < n < \infty \tag{1.27}$$

δ) *Γραμμική ακολουθία* (linear sequence):

$$x(n) = An, \qquad -\infty < n < \infty \tag{1.28}$$

Οι κυματομορφές όλων των παραπάνω σημάτων φαίνονται στα Σχήματα 1.10 έως και 1.13.

ε) *Εκθετική ακολουθία* (exponential sequence):

$$x(n) = a^n, \qquad -\infty < n < \infty \tag{1.29}$$

Η ακολουθία αυτή παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Η μορφή της εξαρτάται από

Απαντήσεις Ασκήσεων Αυτοαξιολόγησης

1.1

Γνωρίζοντας, πλέον, το θεώρημα δειγματοληψίας, μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε αν θα παρουσιαστεί το φαινόμενο της χαμηλού ρυθμού δειγματοληψίας. Και αν παρουσιαστεί, τότε μπορούμε με βάση τη σχέση $F_0 = F_k – kF_s$, να υπολογίσουμε τη συχνότητα στην οποία αντιστοιχούν τα δείγματα που πήραμε. Έτσι, η συχνότητα του αναλογικού σήματος είναι $F = 100$ Hz. Για να αντιπροσωπευθεί σωστά το σήμα αυτό στον ψηφιακό χώρο πρέπει να λάβουμε δείγματά του με συχνότητα τουλάχιστον $2F = 2·100 = 200$ Hz. Άρα, και στις δύο περιπτώσεις δε θα αποφύγουμε το φαινόμενο της χαμηλού (ανεπαρκούς) ρυθμού δειγματοληψίας (φαινόμενο φασματικής επικάλυψης).

(α) Για $F_s = 75$ Hz τα δείγματα που θα πάρουμε θα αντιστοιχούν στη δειγματοληψία του ημιτονοειδούς της βασικής περιοχής συχνοτήτων ($–F_s/2 \le F_0 \le F_s/2$) με συχνότητα ίση προς $F_o = F_k – kF_s = 100 – 1·75 = 25$ Hz.

(β) Για $F_s = 150$ Hz τα δείγματα που θα πάρουμε θα αντιστοιχούν στη δειγματοληψία του ημιτονοειδούς της βασικής περιοχής συχνοτήτων ($–F_s/2 \le F_0 \le F_s/2$) με συχνότητα ίση προς $F_0 = F_k – kF_s = 100 – 1·150 = –50$ Hz.

Αυτή ήταν μία εύκολη άσκηση. Αν τα καταφέρατε, σημαίνει πως έχετε κατανοήσει το φαινόμενο της χαμηλού (ανεπαρκούς) ρυθμού δειγματοληψίας. Συνεχίστε στις επόμενες ασκήσεις. Αν όχι, τότε επαναλάβετε τα Παραδείγματα 1.3 και 1.4 και ξαναπροσπαθήστε. Χρειάζεται κάποιος χρόνος μέχρι να εξοικειωθείτε με τις ιδιαιτερότητες των σημάτων που προέρχονται από δειγματοληψία.

1.2

Υπάρχουν δύο τρόποι για να λύνουμε αυτού του είδους τις ασκήσεις, δηλαδή τις ασκήσεις στις οποίες μας ζητείται να δώσουμε τα σήματα διακριτού χρόνου και όχι μόνο τις συχνότητές τους.

Ο πρώτος είναι αυτός κατά τον οποίο, ξεκινώντας από τον ορισμό της δειγματοληψίας, αντικαθιστούμε τη μεταβλητή t με nT, και εκτελούμε τις όποιες τριγωνομετρικές πράξεις.

Ο δεύτερος είναι εκείνος κατά τον οποίο υπολογίζουμε πρώτα τις συχνότητες που θα προκύψουν από τη δειγματοληψία (όπως κάναμε και στην άσκηση αυτοαξιολόγησης 1.1), και μετά προσδιορίζουμε τις αντίστοιχες σχέσεις για τα σήματα διακριτού χρόνου. Όποιον από τους τρόπους και αν επιλέξετε, θα πρέπει να βρείτε το ίδιο αποτέλεσμα, το οποίο στην προκειμένη περίπτωση είναι $x_1(n) = x_2(n) = x_3(n) = \cos(0{,}6\pi n)$. Ας τα πάρουμε όμως από την αρχή.

Η περίοδος δειγματοληψίας ισούται με $T = 1/F_s = 1/100$ Hz $= 0{,}01$ sec. Άρα, οι ακολουθίες που θα προκύψουν θα είναι οι εξής:

$x_1(n) = \cos(60\pi nT) = \cos(0{,}6\pi n)$

$x_2(n) = \cos(140\pi nT) = \cos(1{,}4\pi n) = \cos[(2\pi – 0{,}6\pi)n] = \cos(0{,}6\pi n)$

$x_3(n) = \cos(260\pi nT) = \cos(2{,}6\pi n) = \cos[(2\pi + 0{,}6\pi)n] = \cos(0{,}6\pi n)$

Συμπεραίνουμε, επομένως, ότι η δειγματοληψία των τριών αναλογικών σημάτων, διαφορετικής συχνότητας το καθένα, οδήγησε τελικά στο ίδιο σήμα διακριτού χρόνου $\cos(0{,}6\pi n)$.

Όπως αναφέραμε προηγουμένως, στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε αν εφαρμόσουμε την σχέση $F_0 = F_k – kF_s$ για καθεμιά από τις συχνότητες. Δηλαδή, η συχνότητα του σήματος $x_1(t)$ είναι $F_1 = 30$ Hz και, κατά συνέπεια, δε θα παρουσιαστεί το φαινόμενο της χαμηλού ρυθμού δειγματοληψίας, αφού $F_1 < F_s/2 = 50$ Hz. Άρα, $x_1(n) = \cos[2\pi(F_1/F_s)n] = \cos[2\pi(30/100)n] = \cos(0{,}6\pi n)$. Η συχνότητα του σήματος $x_2(t)$ είναι $F_2 = F_k = 70$ Hz και τα δείγματα που θα πάρουμε θα αντιστοιχούν στη δειγματοληψία ενός ημιτονοειδούς συχνότητας $F_0 = F_k – kF_s = 70 – 100 = –30$Hz. Άρα $x_2(n) = \cos[2\pi(F_2/F_s)n] = \cos[2\pi(–30/100)n] = \cos(–0{,}6\pi n) = \cos(0.6\pi n)$.Τέλος, η συχνότητα του σήματος $x_3(t)$ είναι $F_3 = 130$Hz και τα δείγματα που θα πάρουμε θα αντιστοιχούν στη δειγματοληψία ενός ημιτονοειδούς συχνότητας $F_0 = F_k – kF_s = 130 – 100 = 30$ Hz. Άρα $x_3(n) = x_1(n)$. Συνεπώς, και τα τρία αναλογικά $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ σήματα αντιπροσωπεύονται από τα ίδια δείγματα μετά τη δειγματοληψία τους με ρυθμό 100Hz.

Αν και εσείς καταλήξατε στο ίδιο αποτέλεσμα, τότε προχωράτε πολύ καλά. Συνεχίστε με την επόμενη άσκηση αυτοαξιολόγησης. Αν δεν τα καταφέρατε, μελετήστε και πάλι τα Παραδείγματα 1.3 και 1.4 και ξαναπροσπαθήστε.

1.3

Στην άσκηση αυτή θα πρέπει να προσέξετε το γινόμενο του ημιτόνου με το συνημίτονο. Αυτό είναι το συνηθισμένο λάθος που γίνεται στην περίπτωση αυτή. Παρατηρήστε ότι σ' όλες τις προηγούμενες ασκήσεις είχαμε μόνο αθροίσματα (ή διαφορές) ημιτονοειδών, και εξετάζοντας κάθε όρο του αθροίσματος χωριστά, μπορούσαμε να προσδιορίσουμε τη συχνότητα του κάθε ημιτονοειδούς. Για να εκφράσουμε το γινόμενο της άσκησης αυτής ως άθροισμα ημιτονοειδών, θα χρησιμοποιήσουμε την σχέση $2\sin A\cos B = \sin(A + B) + \sin(A–B)$. Επομένως, έχουμε:

$$x(t) = \sin(\pi t) + 4\sin(3\pi t)\cos(2\pi t) = \sin(\pi t) + 2[\sin(3\pi t + 2\pi t) + \sin(3\pi t–2\pi t)] =$$

$$\sin(\pi t) + 2\sin(5\pi t) + 2\sin(\pi t) = 3\sin(\pi t) + 2\sin(5\pi t) = 3\sin(2\pi \frac{1}{2} t) + 2\sin(2\pi \frac{5}{2} t)$$

Βλέπουμε ότι το αναλογικό σήμα $x(t)$ αποτελείται από δύο συχνότητες,

την $F_1 = \frac{1}{2}$ kHz και την $F_2 = \frac{5}{2}$ kHz.

Η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας για την F_1 είναι $2F_1 = 2(1/2) = 1$ kHz, ενώ για την F_2 είναι $2F_2 = 2(5/2) = 5$ kHz. Συνεπώς, λαμβάνοντας δείγματα του σήματος με ρυθμό 3 kHz, για την F_1 δε θα υπάρξει πρόβλημα και τα δείγματα που θα πάρουμε θα αντιστοιχούν σ΄ αυτή. Για το ημιτονοειδές όμως με συχνότητα F_2, θα παρουσιαστεί πρόβλημα, εξαιτίας της χαμηλού ρυθμού δειγματοληψίας, αφού για να το αναπαραστήσουμε σωστά θα έπρεπε να λαμβάνουμε δείγματα με συχνότητα τουλάχιστον 5 kHz. Έτσι, τα δείγματα που θα προκύψουν θα αντιστοιχούν σ' ένα ημιτονοειδές συχνότητας

$F_0 = F_k–kF_s = \frac{5}{2}–k3 = –\frac{1}{2}$ kHz, όπου $F_k = F_2 = \frac{5}{2}$ kHz και $k = 1$,

αφού η τιμή F_0 που προέκυψε ανήκει στο διάστημα $[–F_s/2, F_s/2]$. Τελικά, ως συμπέρασμα προκύπτει ότι τα δείγματα που θα πάρουμε από τη δειγματοληψία του $x(t)$, θα αντιστοιχούν σ' ένα και μόνο ημιτονοειδές συχνότητας $\frac{1}{2}$ kHz.

Επισημαίνεται ότι στο ίδιο αποτέλεσμα θα είχαμε καταλήξει αν εργαζόμασταν μόνο με τη σχέση $x(t) = 3\sin(\pi t) + 2\sin(5\pi t)$, και αντικαθιστούσαμε $t = nT$, όπου $T = 1/F_s = 1/3$ msec. Επαληθεύστε το.

1.4

Είναι εύκολο να δούμε ότι η ακολουθία $p(n)$ μπορεί να εκφραστεί ως διαφορά δύο βηματικών ακολουθιών, από τις οποίες η μία είναι ολισθημένη ως προς την άλλη κατά 4 μονάδες (δείγματα). Έχουμε, δηλαδή, $p(n) = u(n)–u(n–4)$, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 1.30. Αν πάλι δεν το σκεφτήκατε έτσι και κάνατε χρήση της μοναδιαίας κρουστικής $\delta(n)$, τότε θα καταλήξατε στο σωστό αποτέλεσμα, αλλά λίγο πιο επίπονα. Παρατηρείτε, δηλαδή, ότι $p(n) = \delta(n) + \delta(n–1) + \delta(n–2) + \delta(n–3)$. Αλλά, με βάση τη σχέση (1.33) έχουμε