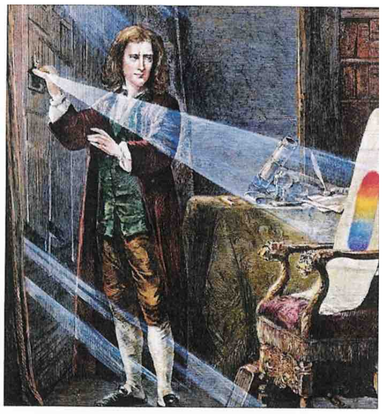
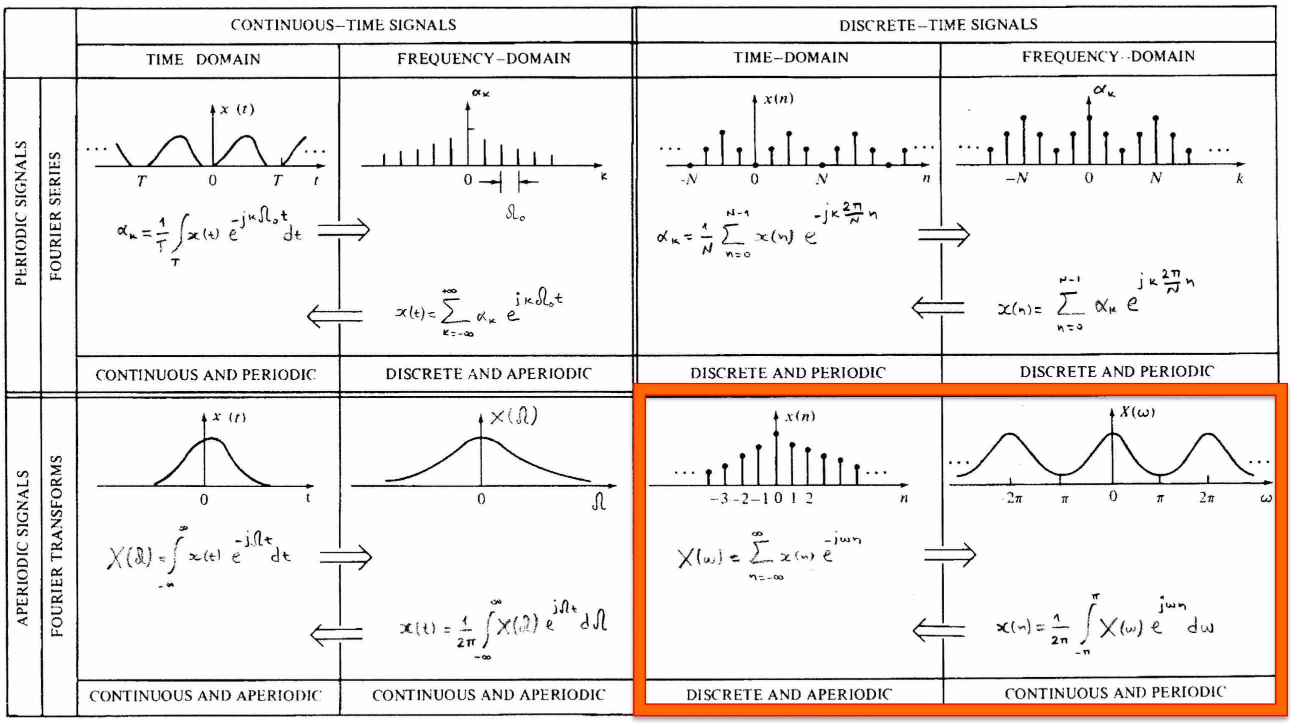
ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ FOURIER
ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ



Sir Isaac Newton disperses sunlight through a prism. The white light separates into its underlying components—the colors of the rainbow.

Διαφορετικοί Τύποι Μετασχηματισμού Fourier

Type of Transform	Example Signal
Fourier Transform *signals that are continious and aperiodic*	
Fourier Series *signals that are continious and periodic*	
Discrete Time Fourier Transform *signals that are discrete and aperiodic*	
Discrete Fourier Transform *signals that are discrete and periodic*	



Σημ.: 1. $\omega = \Omega T$
2. $X(\omega) \triangleq X(e^{j\omega})$

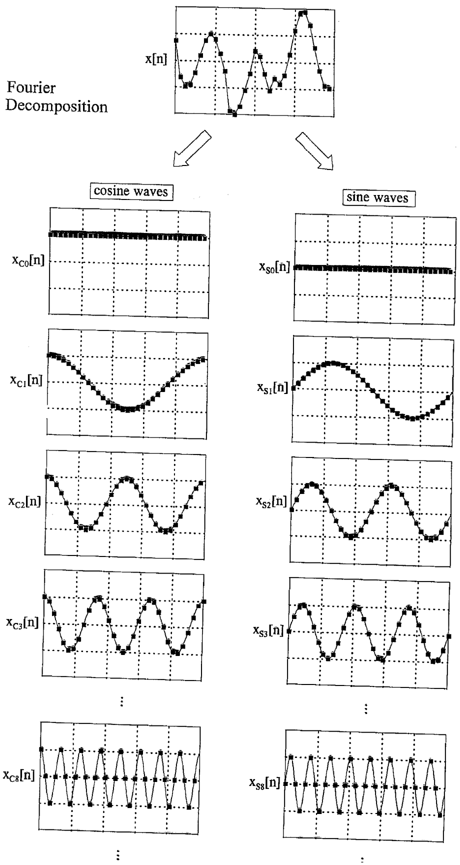
ΕΙΣΑΓΩΓΗ

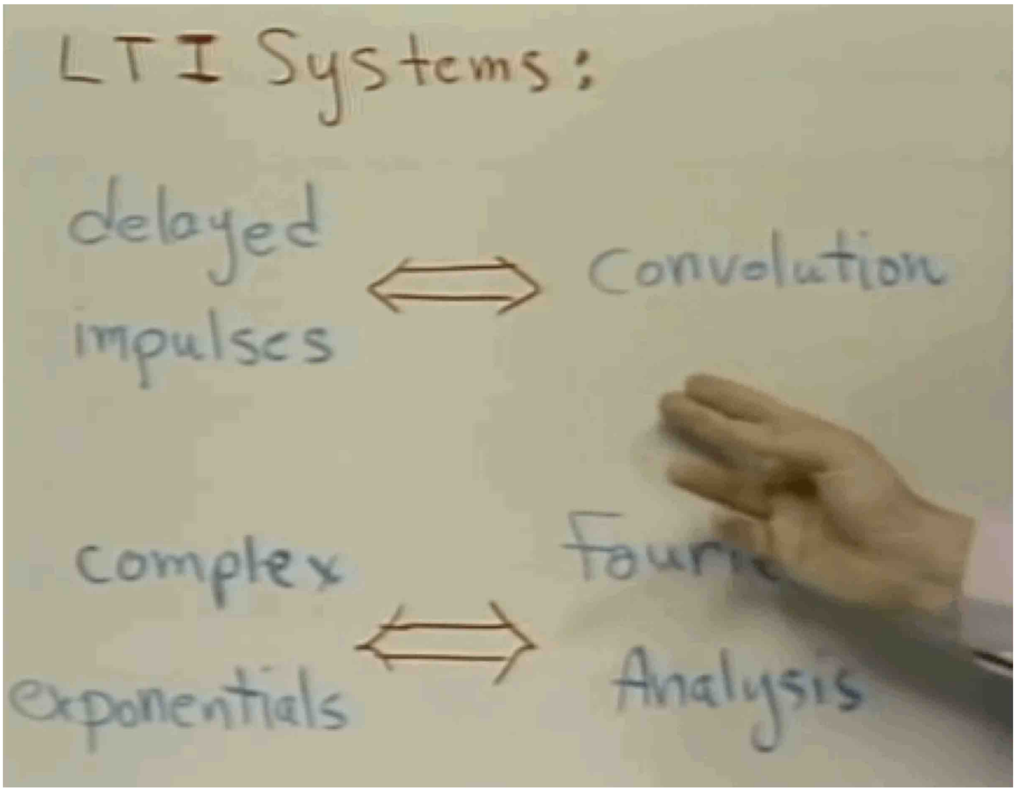
Τι είδαμε:

Στα προηγούμενα είδαμε ότι κάθε σήμα διακριτού χρόνου μπορεί να εκφραστεί στο πεδίο του χρόνου ως ένας **γραμμικός συνδυασμός σταθμισμένων ολισθημένων κρουστικών** {δ(n-m) }.

Τι θα δούμε:

Εδώ θα γνωρίσουμε μια εναλλακτική περιγραφή μιας ακολουθίας (δηλ. ενός σήματος διακριτού χρόνου) ως συνδυασμού **μιγαδικών εκθετικών** $\{e^{j\omega n}\}$.





DTFT

Discrete Time Fourier Transform (DTFT)

Ανάλυση (**Ευθύς** Μετασχηματισμός)

$$\boxed{X(e^{j\omega}) \equiv F\{x(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}}$$

Σύνθεση (**Αντίστροφος** Μετασχηματισμός)

$$\boxed{x(n) \equiv F^{-1}\{X(e^{j\omega})\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega}$$

$X(e^{j\omega})$ μιγαδικός:

$$X(e^{j\omega}) = X_r(e^{j\omega}) + jX_i(e^{j\omega})$$

$$X(e^{j\omega}) = \left|X(e^{j\omega})\right| e^{j\theta(\omega)}$$

$$\left|X(e^{j\omega})\right| = \sqrt{X_r^2(e^{j\omega}) + X_i^2(e^{j\omega})}$$

$$\theta(\omega) = \arg\left\{X(e^{j\omega})\right\} = \tan^{-1}\left[\frac{X_i(e^{j\omega})}{X_r(e^{j\omega})}\right]$$

DTFT

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ FOURIER ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ (DTFT - DISCRETE-TIME FOURIER TRANSFORM)

Ορισμοί

$$\boxed{\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\, e^{-j\omega n} \\ x(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega})\, e^{j\omega n}\, d\omega \end{aligned}}$$

ευθύς μετασχηματισμός ή εξίσωση ανάλυσης

αντίστροφος μετ/μός ή εξίσωση σύνθεσης

- Η εξίσωση ανάλυσης γράφεται ως άθροισμα απείρων όρων. Για να συγκλίνει πρέπει

  είτε η $x(n)$ να είναι αθροίσιμη κατ' απόλυτη τιμή $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)| < \infty$

  είτε η $x(n)$ να είναι πεπερασμένης ενέργειας (*) $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2 < \infty$

- Για την εξίσωση σύνθεσης δεν τίθεται θέμα σύγκλισης, αφού πρόκειται για ορισμένο ολοκλήρωμα.

- Η εξίσωση σύνθεσης εκφράζει το πως ένα μη-περιοδικό ΣΔΧ (δηλ. μια μη-περιοδική ακολουθία) μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός μιγαδικών εκθετικών.

DTFT

- Τα μιγαδικά εκθετικά διακριτού χρόνου είναι περιοδικά με περίοδο 2π.

  Απόδειξη: $e^{-j(\omega+2k\pi)n} = e^{-j\omega n}\, e^{-j2k\pi n} = e^{-j\omega n}$

- Ο DTFT $X(e^{j\omega})$ της ακολουθίας $x(n)$ είναι μια συνεχής και περιοδική συνάρτηση του ω με περίοδο ίση με 2π, δηλαδή

$$X(e^{j(\omega+2k\pi)}) = X(e^{j\omega})$$

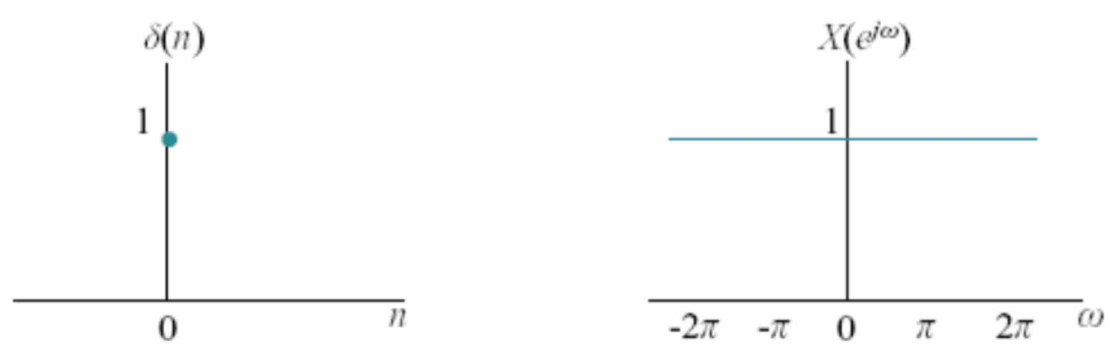
Απόδειξη:

$$\begin{aligned} X(e^{j(\omega+2k\pi)}) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\, e^{-j(\omega+2k\pi)n} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\, e^{-j\omega n}\, e^{-j2k\pi n} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\, e^{-j\omega n} = \\ &= X(e^{j\omega}) \end{aligned}$$

DTFT

Παράδειγμα: ***x(n) = δ(n)***

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n)e^{-j\omega n} = 1 \cdot e^{-j\omega 0} = 1$$

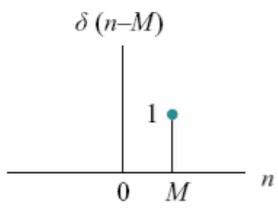


ΟΛΕΣ οι συχνότητες συνεισφέρουν **ισότιμα** για να πάρουμε την μοναδιαία κρουστική, δηλαδή ΟΛΕΣ οι συχνότητες είναι παρούσες!

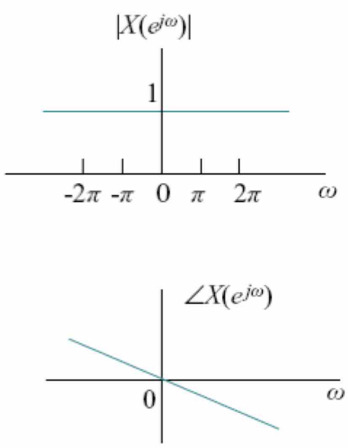
DTFT

Παράδειγμα: $x(n) = \delta(n\text{–}M)$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n-M)e^{-j\omega n} = e^{-j\omega M}$$



(α)



(β)

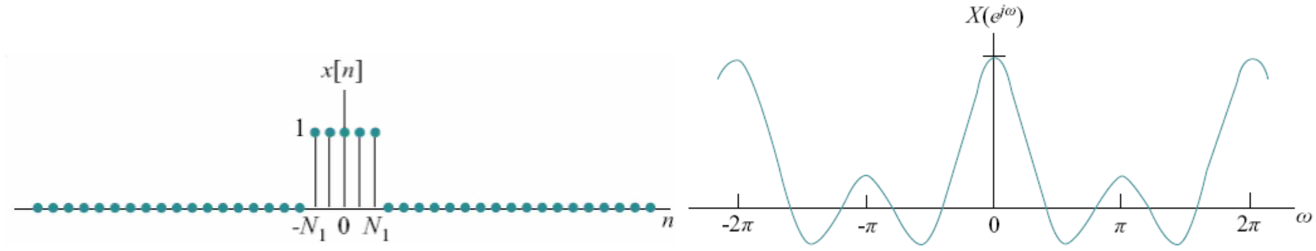
‘Ιδιο μέτρο – Διαφορετική φάση!

DTFT

Παράδειγμα: $x(n)=\begin{cases}1, & |n|\le 2\\ 0, & |n|>2\end{cases}$

$$x(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\delta(n-m)=1\cdot\left[\delta(n+2)+\delta(n+1)+\delta(n)+\delta(n-1)+\delta(n-2)\right]$$

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}1\cdot\left[\delta(n+2)+\delta(n+1)+\delta(n)+\delta(n-1)+\delta(n-2)\right]e^{-j\omega n}=$$
$$=1\cdot\left[e^{j\omega 2}+e^{j\omega}+e^{j\omega 0}+e^{-j\omega}+e^{-j\omega 2}\right]=1\cdot\left[1+(e^{j\omega}+e^{-j\omega})+(e^{j2\omega}+e^{-j2\omega})\right]=$$
$$=1+2\cos(\omega)+2\cos(2\omega)$$



DTFT

Ένας διαφορετικός τρόπος υπολογισμού

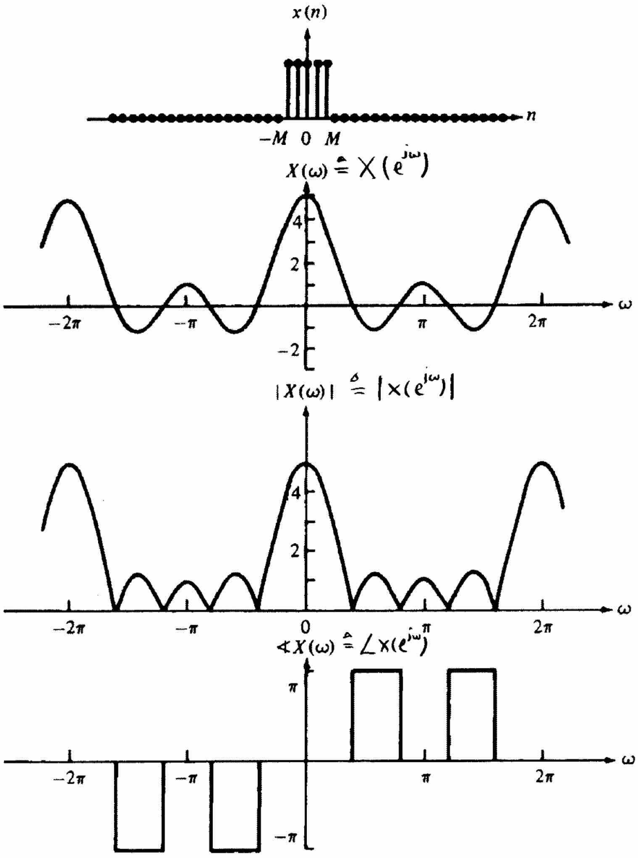
$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}=\sum_{n=-2}^{2}1\cdot e^{-j\omega n}=\sum_{m=0}^{4}e^{-j\omega(m-2)}=e^{j\omega 2}\sum_{m=0}^{4}\left(e^{-j\omega}\right)^{m}=$$

$<$ όπου $m=n+2\Rightarrow n=m-2$ $>$

$$=e^{j\omega 2}\frac{1-e^{-j\omega 5}}{1-e^{-j\omega}}=e^{j\omega 2}\frac{e^{-j\omega 5/2}\left(e^{j\omega 5/2}-e^{-j\omega 5/2}\right)}{e^{-j\omega/2}\left(e^{j\omega/2}-e^{-j\omega/2}\right)}=$$

$$=e^{j\omega 2}e^{j\omega/2}e^{-j\omega 5/2}\frac{2j\sin(\omega 5/2)}{2j\sin(\omega/2)}=\frac{\sin(5\omega/2)}{\sin(\omega/2)}$$

DTFT



$$|X(e^{j\omega})| = \left| A \frac{\sin[\omega(M+\frac{1}{2})]}{\sin(\frac{\omega}{2})} \right|$$

$$\angle X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 0 & \text{εάν } X(e^{j\omega}) > 0 \\ \pi & \text{εάν } X(e^{j\omega}) < 0 \end{cases}$$

DTFT

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί ο μετασχ. Fourier και το φάσμα ενεργειακής πυκνότητας της ακολουθίας

$$x(n) = \begin{cases} A & 0 \le n \le L-1 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

ΛΥΣΗ Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι η ακολουθία είναι αθροίσιμη κατ' απόλυτη τιμή:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| = \sum_{n=0}^{L-1} |A| = |A|L < \infty$$

Άρα ο μετασχηματισμός Fourier υπάρχει. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι το σήμα είναι πεπερασμένης ενέργειας: $E_x = |A|^2 L$.

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{L-1} A e^{-j\omega n} = A \frac{1-e^{-j\omega L}}{1-e^{-j\omega}} = A e^{-j\frac{\omega}{2}(L-1)} \frac{\sin(\frac{\omega L}{2})}{\sin(\frac{\omega}{2})}$$

Για $\omega = 0 \rightsquigarrow X(e^{j\omega}) = AL$ (χρήση l'Hospital)

Το μέτρο ισούται με

$$|X(e^{j\omega})| = \begin{cases} |A|L & \text{για } \omega = 0 \\ |A| \left| \frac{\sin(\frac{\omega L}{2})}{\sin(\frac{\omega}{2})} \right| & \text{αλλού} \end{cases}$$

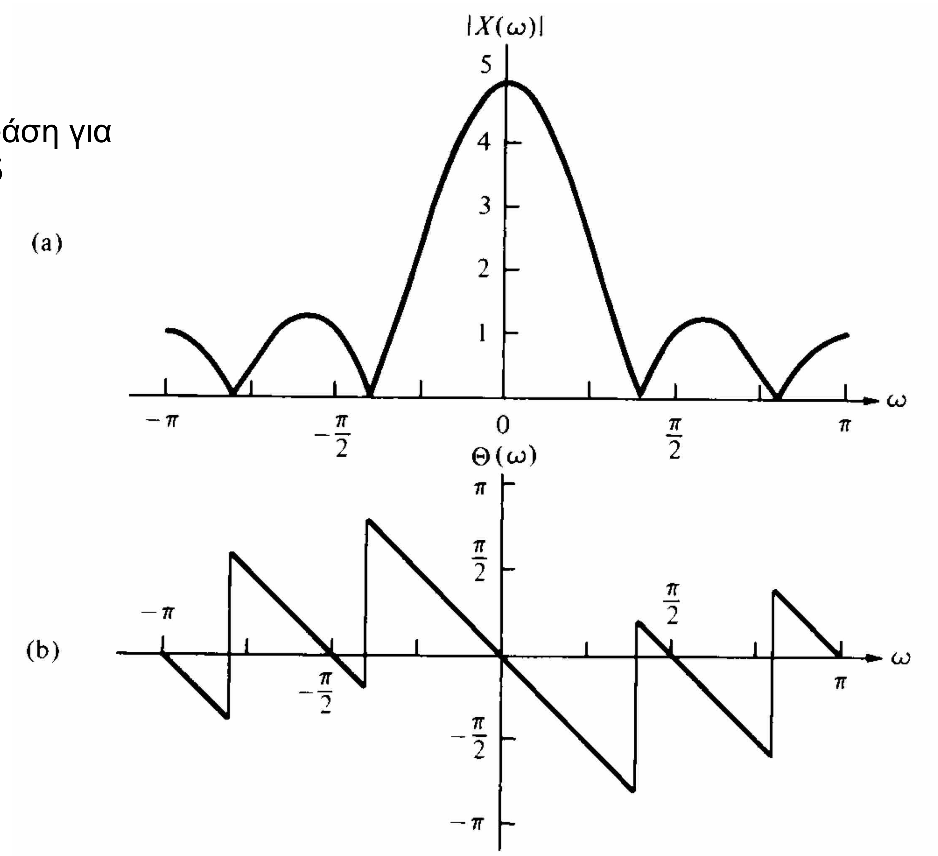
και η φάση ισούται με

$$\angle X(e^{j\omega}) = \angle A - \frac{\omega}{2}(L-1) + \angle \frac{\sin(\frac{\omega L}{2})}{\sin(\frac{\omega}{2})}$$

Το φάσμα ενεργ. πυκνότητος ισούται με το τετράγωνο του μέτρου.

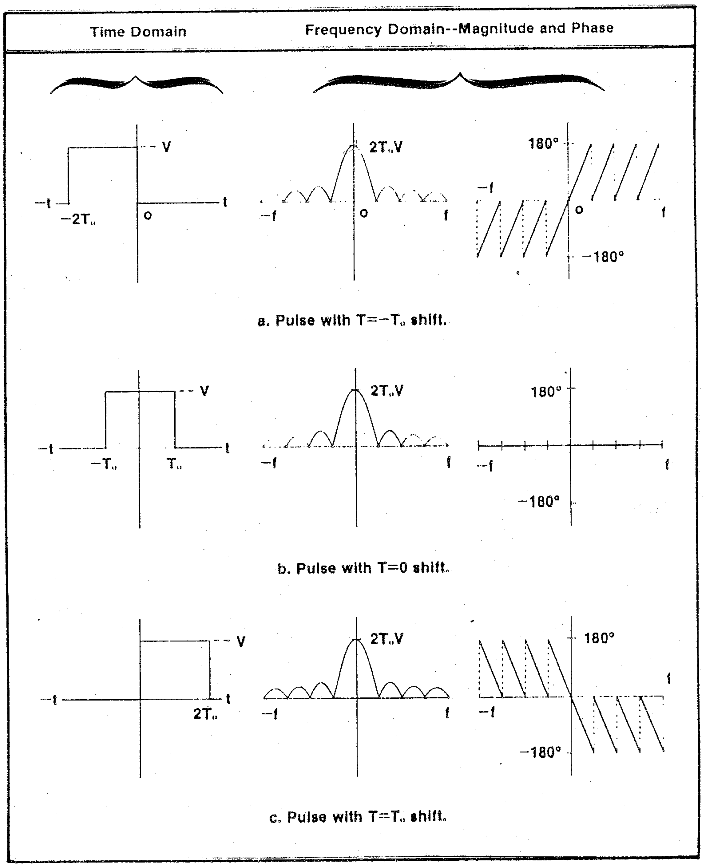
DTFT

Μέτρο και φάση για
A=1 και L=5



Θυμηθείτε, όπως και στην περίπτωση των σημάτων συνεχούς χρόνου …

… η ολίσθηση στον χρόνο επηρεάζει μόνον τη φάση!



https://www.youtube.com/watch?v=6DDpjBTFnd0

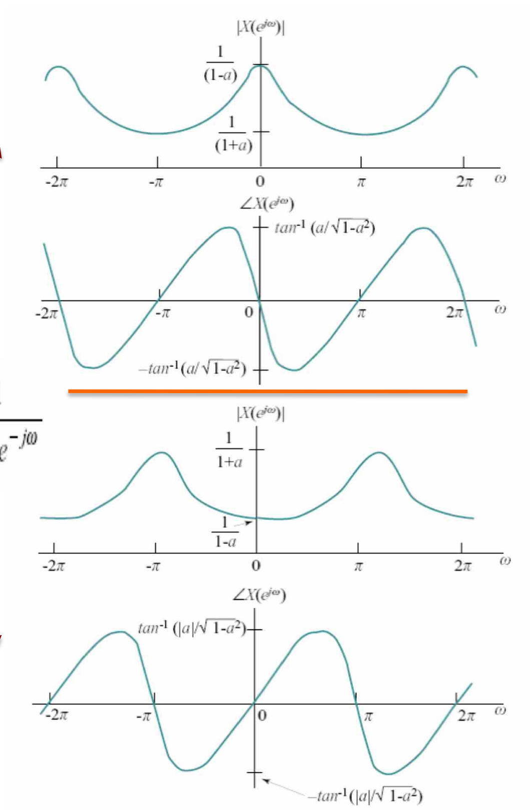
DTFT

Παράδειγμα: $x(n) = a^n u(n)$

$|a| < 1$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j\omega})^n = \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$$

α > 0



α < 0

DTFT

ΑΣΚΗΣΗ Ποιο το σήμα που αντιστοιχεί στο φάσμα $X(e^{j\omega})=\begin{cases}1 & |\omega|\le\omega_c\\ 0 & \text{αλλού}\end{cases}$

Λύση Από την εξίσωση σύνθεσης του DTFT, δηλ. από την εξίσωση του αντίστροφου DTFT, έχουμε:

$$x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})\,e^{j\omega n}\,d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}e^{j\omega n}\,d\omega=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{jn}\,e^{j\omega n}\Big|_{-\omega_c}^{\omega_c}=\frac{1}{2\pi jn}\left(e^{j\omega_c n}-e^{-j\omega_c n}\right)=\frac{1}{\pi n}\sin\omega_c n=$$

$$=\frac{\omega_c}{\pi}\,\frac{\sin\omega_c n}{\omega_c n}\qquad n\neq 0$$

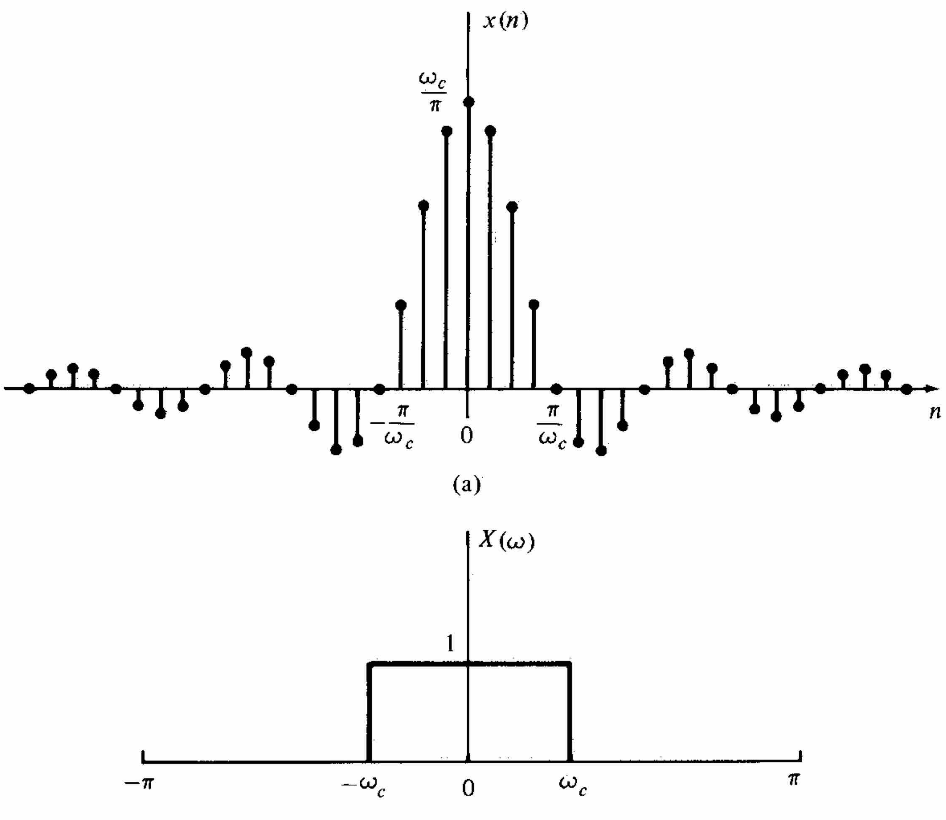
Για $n=0$ έχουμε

$$x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}d\omega=\frac{\omega_c}{\pi}$$

Τελικά το ζητούμενο σήμα είναι: $x(n)=\begin{cases}\dfrac{\omega_c}{\pi} & \text{για } n=0\\[2mm] \dfrac{\omega_c}{\pi}\,\dfrac{\sin\omega_c n}{\omega_c n} & \text{για } n\neq 0\end{cases}$

Παρατήρηση: Η ακολουθία $x(n)$ έχει πεπερασμένη ενέργεια $E_x=\frac{\omega_c}{\pi}$, αλλά δεν είναι αθροίσιμη κατ' απόλυτη τιμή.

DTFT

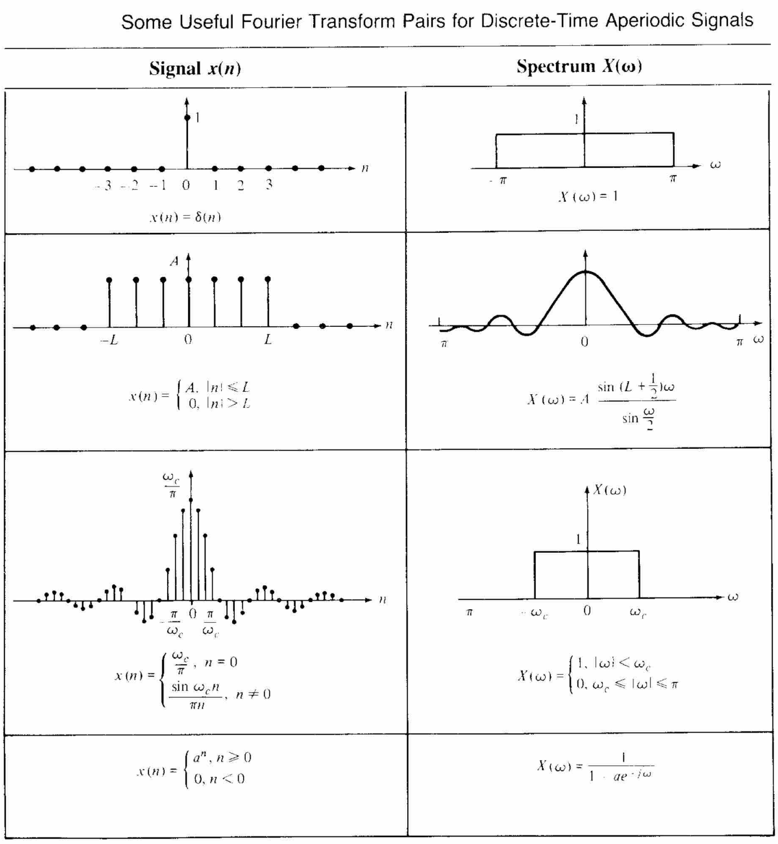


(a)

(b)

DTFT

Ζεύγη DTFT για μη περιοδικά σήματα διακριτού χρόνου

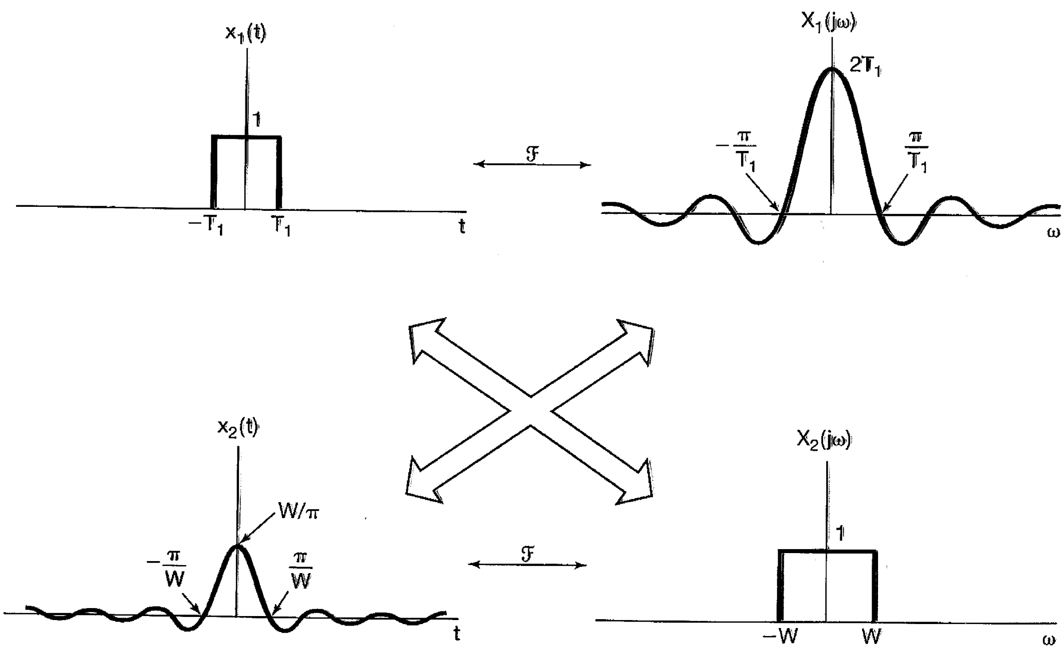


Some Useful Fourier Transform Pairs for Discrete-Time Aperiodic Signals

Signal $x(n)$	Spectrum $X(\omega)$
$x(n)=\delta(n)$	$X(\omega)=1$
$x(n)=\begin{cases}A, & \lvert n\rvert\leq L\\ 0, & \lvert n\rvert>L\end{cases}$	$X(\omega)=A\dfrac{\sin(L+\frac{1}{2})\omega}{\sin\frac{\omega}{2}}$
$x(n)=\begin{cases}\dfrac{\omega_c}{\pi}, & n=0\\ \dfrac{\sin\omega_c n}{\pi n}, & n\neq 0\end{cases}$	$X(\omega)=\begin{cases}1, & \lvert\omega\rvert<\omega_c\\ 0, & \omega_c\leq\lvert\omega\rvert\leq\pi\end{cases}$
$x(n)=\begin{cases}a^n, & n\geq 0\\ 0, & n<0\end{cases}$	$X(\omega)=\dfrac{1}{1-ae^{-j\omega}}$

DTFT

Θυμηθείτε την δυϊκότητα από τον συνεχή χώρο !



DTFT

Ζεύγη DTFT

Σήμα	Μετασχηματισμός
$\delta(n)$	$1, -\infty < \omega < \infty$
$\delta(n-M)$	$e^{-j\omega M}$
$u(n)$	$\frac{1}{1-e^{-j\omega}} + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$
$\alpha^n u(n), \lvert\alpha\rvert < 1$	$\frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}$
$e^{j\omega_0 n}$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0 + 2\pi k)$
$\sin(\omega_0 n)$	$\frac{\pi}{j} \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\delta(\omega - \omega_0 + 2\pi k) - \delta(\omega + \omega_0 + 2\pi k)]$
$\cos(\omega_0 n)$	$\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\delta(\omega - \omega_0 + 2\pi k) + \delta(\omega + \omega_0 + 2\pi k)]$
$u(n) - u(n-M)$	$\frac{\sin(\omega M/2)}{\sin(\omega/2)} e^{-j\omega(M-1)/2}$

DTFT

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί η συνέλιξη των ακολουθιών

$$x_1(n) = x_2(n) = \{1, \underset{\uparrow}{1}, 1\}$$

Λυση

Α' τρόπος

$X_1(e^{j\omega}) = X_2(e^{j\omega}) = 1 + 2\cos\omega$

Άρα

$X(e^{j\omega}) = X_1(e^{j\omega}) \cdot X_2(e^{j\omega}) =$

$= (1+2\cos\omega)^2 =$

$= 3 + 4\cos\omega + 2\cos 2\omega =$

$= 3 + 2(e^{j\omega} + e^{-j\omega}) + (e^{j2\omega} + e^{-j2\omega})$

Ο αντίστροφος DTFT του $X(e^{j\omega})$ θα μας δώσει το ζητούμενο αποτέλεσμα:

$x(n) = \{1, 2, \underset{\uparrow}{3}, 2, 1\}$

Β' τρόπος

$x_1(n) = \delta(n+1) + \delta(n) + \delta(n-1) = x_2(n)$

Ο DTFT των $x_1(n)$ και $x_2(n)$ ισούται

$X_1(e^{j\omega}) = X_2(e^{j\omega}) = e^{j\omega} + 1 + e^{-j\omega}$

Άρα $X(e^{j\omega}) = X_1(e^{j\omega}) \cdot X_2(e^{j\omega}) =$

$= (1 + e^{j\omega} + e^{-j\omega})^2 =$

$= 1 + e^{j2\omega} + e^{-j2\omega} + 2e^{j\omega} +$

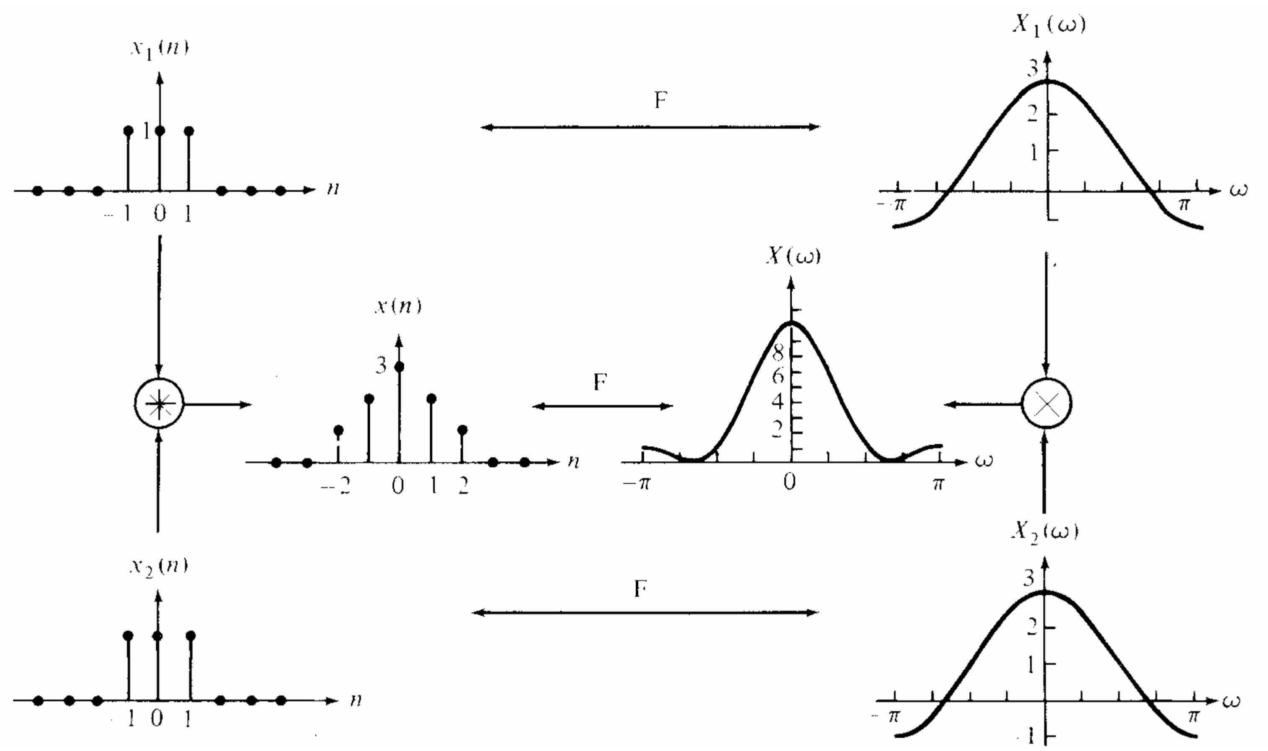
$+ 2e^{-j\omega} + 2\underbrace{e^{j\omega} e^{-j\omega}}_{1} =$

$= 3 + 2(e^{j\omega} + e^{-j\omega}) + (e^{j2\omega} + e^{-j2\omega})$

οπότε τελικά:

$x(n) = \{1, 2, \underset{\uparrow}{3}, 2, 1\}$

DTFT



DTFT

Ιδιότητες DTFT

Γραμμικότητα

$$x_1(n) \xleftrightarrow{F} X_1(e^{j\omega})$$

$$x_2(n) \xleftrightarrow{F} X_2(e^{j\omega})$$

$$a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n) \xleftrightarrow{F} a_1 X_1(e^{j\omega}) + a_2 X_2(e^{j\omega})$$

Ολίσθηση στον χρόνο

$$x(n) \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega})$$

$$x(n-n_0) \xleftrightarrow{F} e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$$

Proof

$$g(n) = x(n-n_0)$$

$$G(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n-n_0) e^{-j\omega n}$$

$$G(e^{j\omega}) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} x(q) e^{-j\omega(q+n_0)} = e^{-j\omega n_0} \sum_{q=-\infty}^{\infty} x(q) e^{-j\omega q} = e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$$

DTFT

Παράδειγμα

$$g(n)=\begin{cases}1, & 0\le n<5\\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon}\end{cases}$$

$$G(e^{j\omega})=F\{g(n)\}=F\{x(n-2)\}=e^{-j\omega 2}X(e^{j\omega})=e^{-j2\omega}\frac{\sin(\frac{5\omega}{2})}{\sin(\frac{\omega}{2})}$$

Γενικά:

$$u(n)-u(n-M) \longleftrightarrow \frac{\sin(\omega M/2)}{\sin(\omega/2)}e^{-j\omega(M-1)/2}$$

Η ολίσθηση επηρεάζει μόνον τη φάση!

DTFT

Ολίσθηση στη συχνότητα

$$x(n)\xleftrightarrow{F}X(e^{j\omega})$$

$$e^{j\omega_0 n}x(n)\xleftrightarrow{F}X(e^{j(\omega-\omega_0)})$$

Συνέλιξη

$$x_1(n)\xleftrightarrow{F}X_1(e^{j\omega})$$

$$x_2(n)\xleftrightarrow{F}X_2(e^{j\omega})$$

$$x(n)=x_1(n)*x_2(n)\xleftrightarrow{F}X(e^{j\omega})=X_1(e^{j\omega})\cdot X_2(e^{j\omega})$$

Proof

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}[x_1(n)*x_2(n)]e^{-j\omega n}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}[\sum_{m=-\infty}^{\infty}x_1(m)x_2(n-m)]e^{-j\omega n}$$

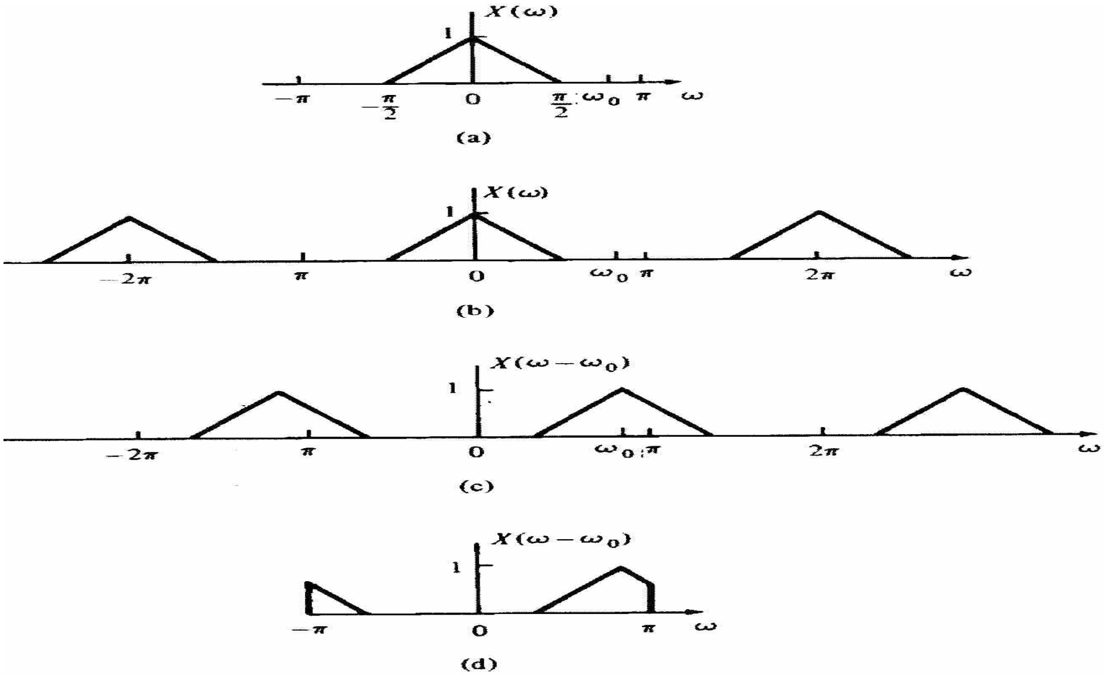
$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x_1(m)\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_2(n-m)e^{-j\omega n}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x_1(m)\sum_{q=-\infty}^{\infty}x_2(q)e^{-j\omega(q+m)}$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x_1(m)e^{-j\omega m}\sum_{q=-\infty}^{\infty}x_2(q)e^{-j\omega q}=X_1(e^{j\omega})X_2(e^{j\omega})$$

Ολίσθηση στη συχνότητα

$x(n) \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega})$ $e^{j\omega_0 n}x(n) \xleftrightarrow{F} X(e^{j(\omega-\omega_0)})$

Παράδειγμα



ΙΔΙΟΤΗΤΑ ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗΣ: $x(n)\cos\omega_0 n \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2}X(e^{j(\omega+\omega_0)}) + \frac{1}{2}X(e^{j(\omega-\omega_0)})$

Η ιδιότητα αυτή μπορεί εύκολα να αποδειχθεί εκφράζοντας το σήμα $\cos\omega_0 n$ ως

$$\cos\omega_0 n = \frac{1}{2}\left(e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n}\right)$$

και εφαρμόζοντας ακολούθως την ιδιότητα της ολίσθησης στη συχνότητα.

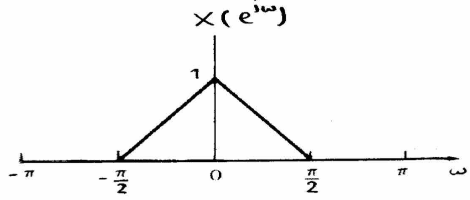
Ασκηση Να σχεδιαστούν τα φάσματα των σημάτων $y_1(n) = x(n)\cos 0{,}5\pi n$ και $y_2(n) = x(n)\cos\pi n$, όταν το φάσμα του σήματος $x(n)$ έχει τη μορφή του σχήματος (a).

DTFT

ΛΥΣΗ

$$Y_1(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} X(e^{j(\omega+\frac{\pi}{2})}) + \frac{1}{2} X(e^{j(\omega-\frac{\pi}{2})})$$

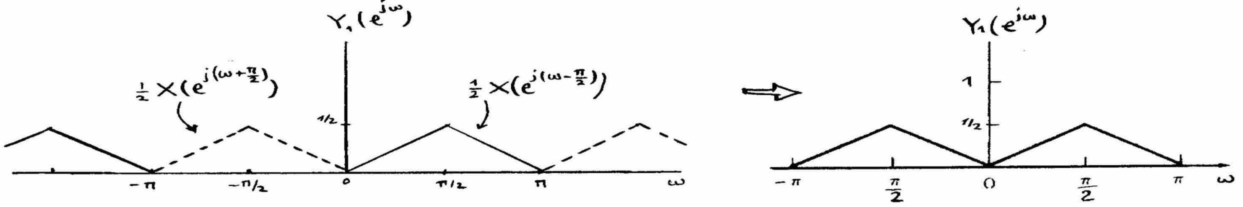
αφού $\omega_0 = \frac{\pi}{2}$ στην περίπτωση αυτή.



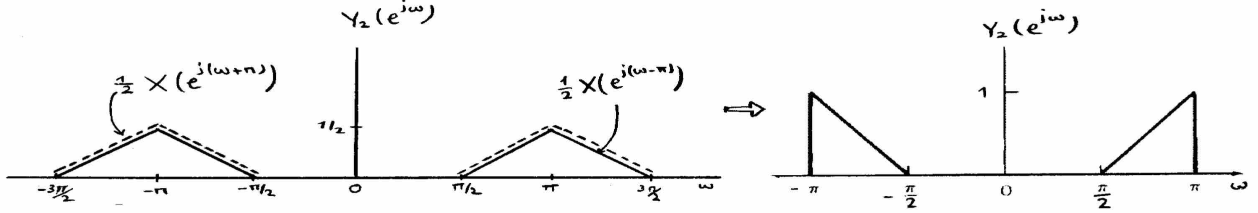
(a)

Για τον υπολογισμό του φάσματος του $y_2(n)$ έχουμε $\omega_0=\pi$ και συνεπώς:

$$Y_2(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} X(e^{j(\omega+\pi)}) + \frac{1}{2} X(e^{j(\omega-\pi)})$$



(b)

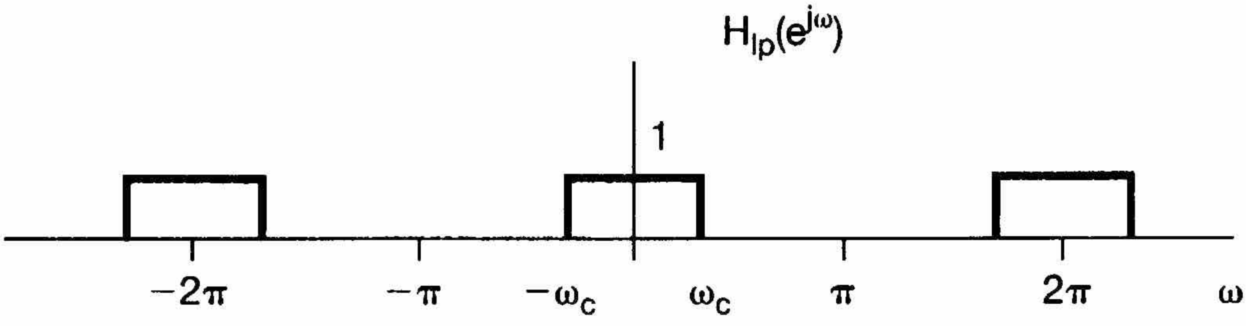


(c)

Θυμηθείτε ότι η $X(e^{j\omega})$, όπως και οι μετατοπισμένες $X(e^{j(\omega+\omega_0)})$ είναι περιοδικές με περίοδο 2π.

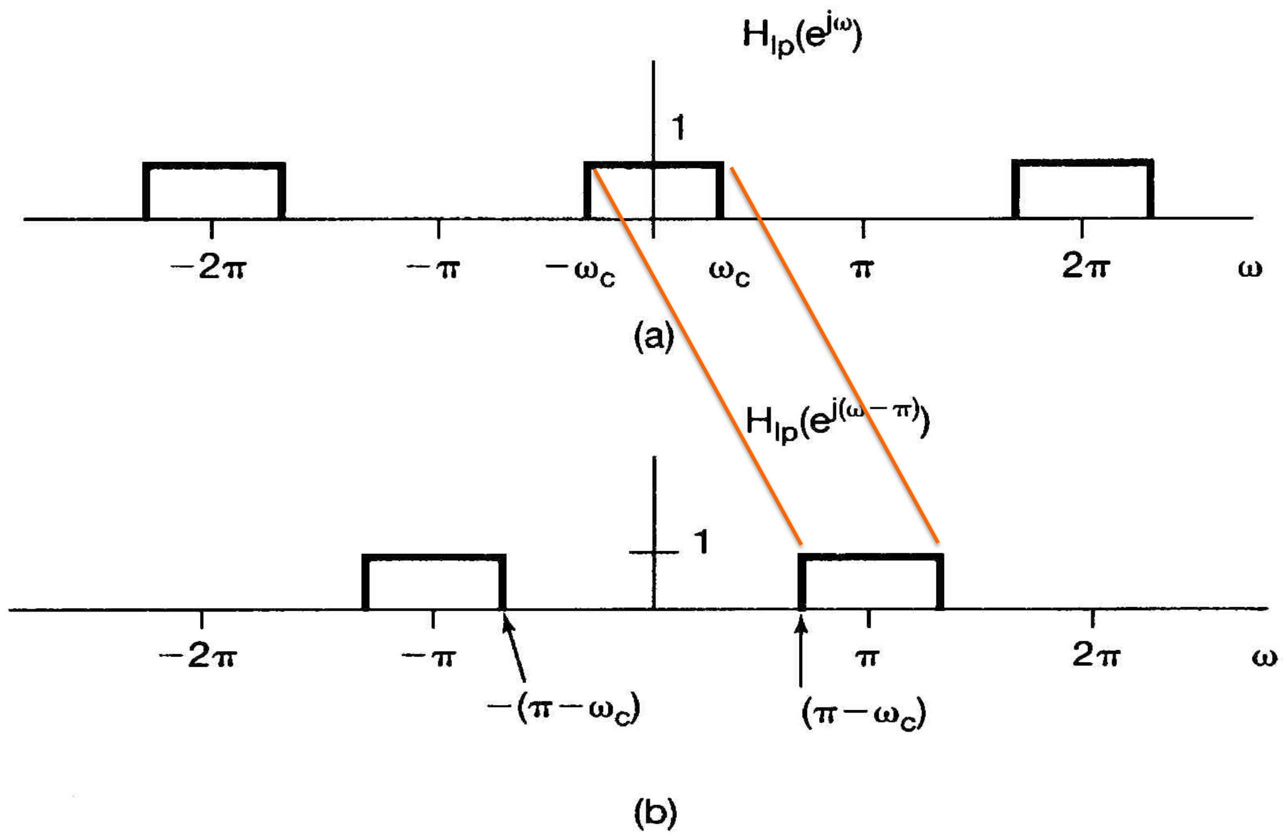
DTFT

ΑΣΚΗΣΗ Έστω ιδανικό βαθυπερατό (lowpass) φίλτρο με συχνότητα αποκοπής ω_c (σχήμα α). Η απόκριση συχνότητας αυτού είναι $H_{lp}(e^{j\omega})$ και η κρουστική του απόκριση $h_{lp}(n)$. Ισχύει ότι $h_{lp}(n) \xleftrightarrow{F} H_{lp}(e^{j\omega})$.
Να υπολογιστεί η κρουστική απόκριση του υψιπερατού (highpass) φίλτρου με συχνότητα αποκοπής $\pi-\omega_c$.



(a)

DTFT

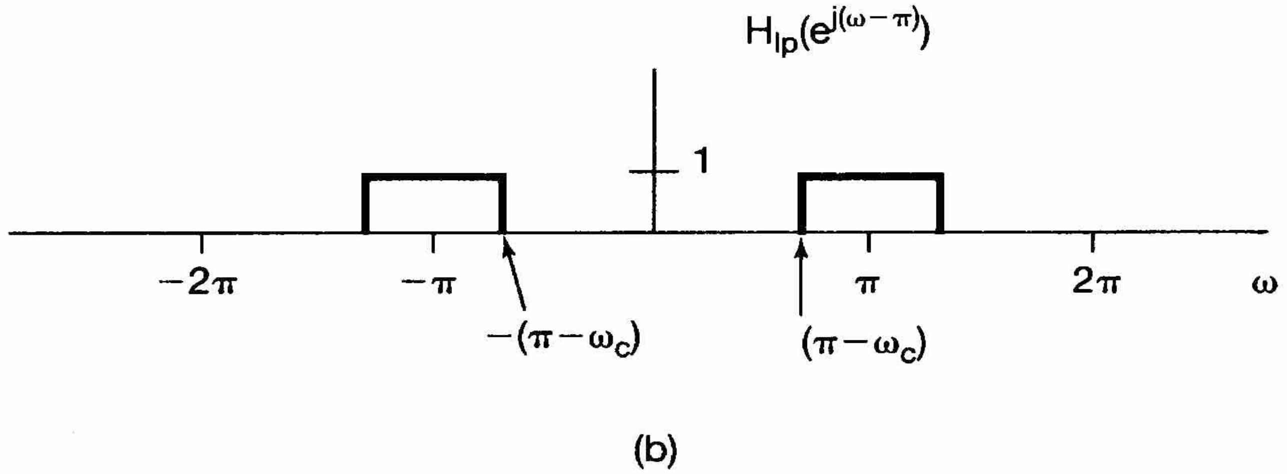


DTFT

Λυση Η απόκριση συχνότητας του υψιπερατού προκύπτει από την απόκριση συχνότητας του βαθυπερατού φίλτρου με ολίσθηση στη συχνότητα κατά π. (Βλ. σχ. b).

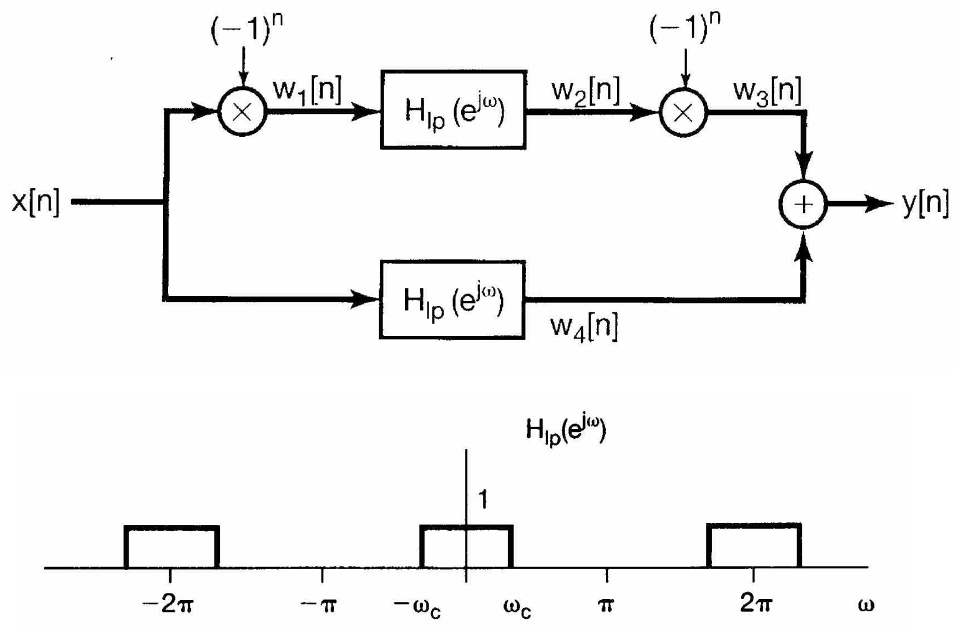
Δηλαδή $H_{hp}(e^{j\omega}) = H_{lp}(e^{j(\omega-\pi)})$

Από την ιδιότητα της ολίσθησης στη συχνότητα καταλαβαίνουμε ότι στο πεδίο του χρόνου θα έχουμε: $h_{hp}(n) = e^{j\pi n} h_{lp}(n) = (-1)^n h_{lp}(n)$



DTFT

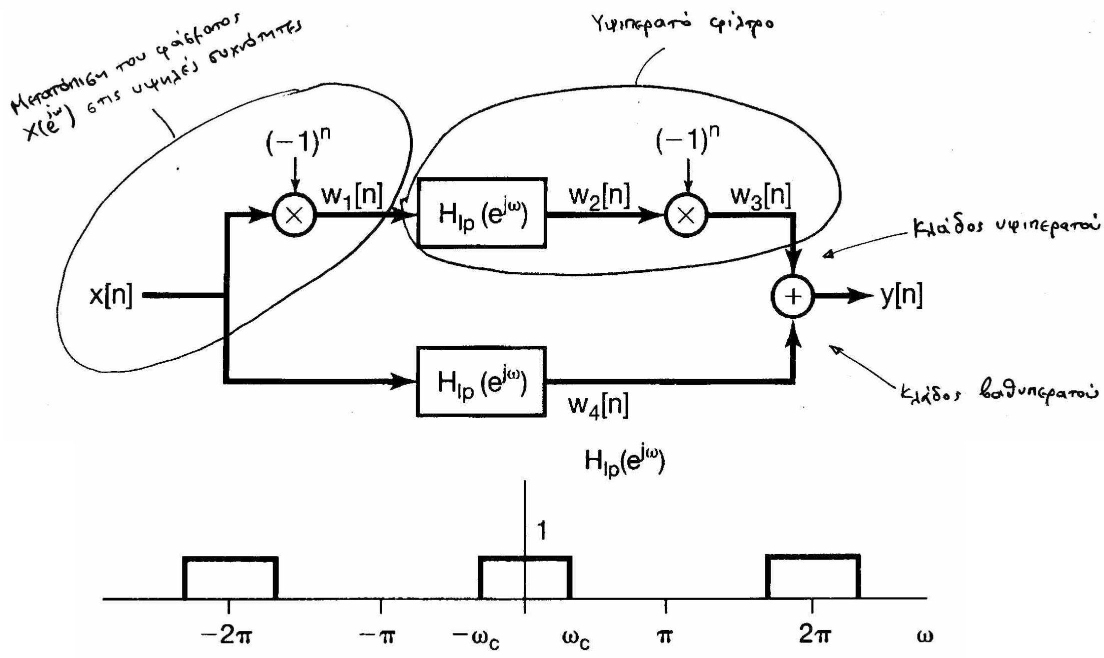
ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί η συνολική απόκριση συχνότητας του συστήματος του σχήματος (α), όταν $H_{lp}(e^{j\omega})$ είναι ΓΧΑ βαθυπερατά συστήματα (φίλτρα) με συχνότητα αποκοπής $\omega_c = \frac{\pi}{4}$.



(a)

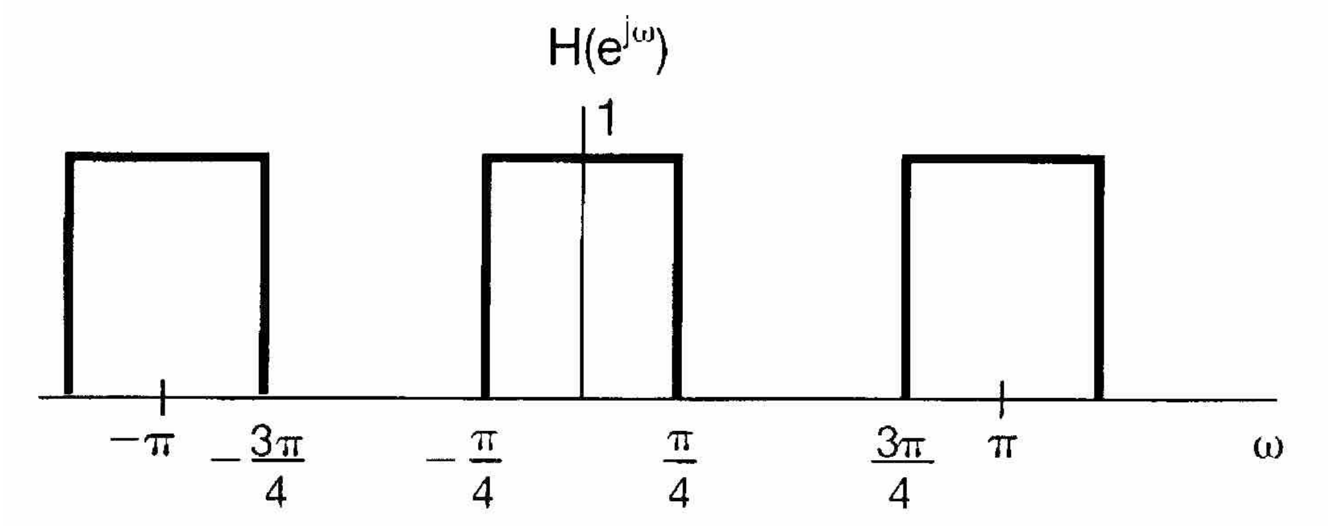
DTFT

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί η συνολική απόκριση συχνότητας του συστήματος του σχήματος (α), όταν $H_{lp}(e^{j\omega})$ είναι ΓΧΑ βαθυπερατά συστήματα (φίλτρα) με συχνότητα αποκοπής $\omega_c = \frac{\pi}{2}$.



(a)

DTFT



DTFT

Θεώρημα Parseval

$$x(n) \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega})$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

Απόδειξη

$$\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega})X^*(e^{j\omega})d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} \Big(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}\Big)X^*(e^{j\omega})d\omega =$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X^*(e^{j\omega})e^{-j\omega n}d\omega = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)x^*(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2$$

ΘΕΩΡΗΜΑ PARSEVAL

Για το μη-περιοδικό πεπερασμένης ενέργειας ΣΔΧ ισχύει:

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 \, d\omega$$

Απόδειξη: Η ενέργεια του ΣΔΧ $x(n)$ ορίζεται ως $E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 \Rightarrow$

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, x^*(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X^*(e^{j\omega})\, e^{-j\omega n}\, d\omega\right]$$

και εναλλάσσοντας την σειρά της ολοκλήρωσης με την άθροιση έχουμε:

$$E_x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X^*(e^{j\omega}) \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, e^{-j\omega n}\right] d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X^*(e^{j\omega}) \cdot X(e^{j\omega})\, d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 \, d\omega$$

ΦΑΣΜΑ ΕΝΕΡΓΕΙΑΚΗΣ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑΣ

Το φάσμα $X(e^{j\omega})$, γενικά, είναι μια μιγαδική συνάρτηση της συχνότητας και μπορεί να εκφραστεί ως

$$X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})|\, e^{j\theta(\omega)}$$

όπου $\theta(\omega) = \angle X(e^{j\omega})$ η φάση του φάσματος και $|X(e^{j\omega})|$ το μέτρο του.

Όπως και στην περίπτωση των ΣΣΧ, η ποσότητα

$$S_{xx}(\omega) = |X(e^{j\omega})|^2$$

αντιπροσωπεύει την κατανομή της ενέργειας ως συνάρτηση της συχνότητας και ονομάζεται φάσμα ενεργειακής πυκνότητας. Η $S_{xx}(\omega)$ δεν περιέχει πληροφορία για τη φάση.

DTFT

Φάσμα Ενεργειακής Πυκνότητας (συνέχεια ...)

Όταν το ΣΔΧ $x(n)$ είναι πραγματικό, τότε $X^*(e^{j\omega}) = X(e^{-j\omega})$

ή ισοδύναμα $|X(e^{-j\omega})| = |X(e^{j\omega})|$ → άρτια συμμετρία

και $\angle X(e^{-j\omega}) = -\angle X(e^{j\omega})$ → περιττή συμμετρία

και άρα $S_{xx}(-\omega) = S_{xx}(\omega)$ → άρτια συμμετρία

Από τα παραπάνω διαπιστώνουμε ότι η περιγραφή ενός πραγματικού ΣΔΧ στον χώρο των συχνοτήτων, καθορίζεται πλήρως από το φάσμα του στην περιοχή $0 \le \omega \le \pi$ ή ισοδύναμα $0 \le F \le F_s/2$.

DTFT

Άσκηση Να υπολογιστεί και να σχεδιαστεί το φάσμα ενεργειακής πυκνότητας $S_{xx}(\omega)$ του ΣΔΧ $x(n) = \alpha^n u(n)$ $-1 < \alpha < 1$ για $\alpha = -0.5$ και $\alpha = 0.5$.

Λύση Αφού $|\alpha| < 1$, η ακολουθία $x(n)$ είναι αθροίσιμη κατ' απόλυτη τιμή:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| = \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha|^n = \frac{1}{1-|\alpha|} < \infty$$

Ο DTFT της ακολουθίας $x(n)$ υπάρχει και ισούται με:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (a e^{-j\omega})^n = \frac{1}{1 - a e^{-j\omega}}$$

αφού $|a e^{-j\omega}| = |a| < 1$

Το φάσμα ενεργειακής πυκνότητας είναι:

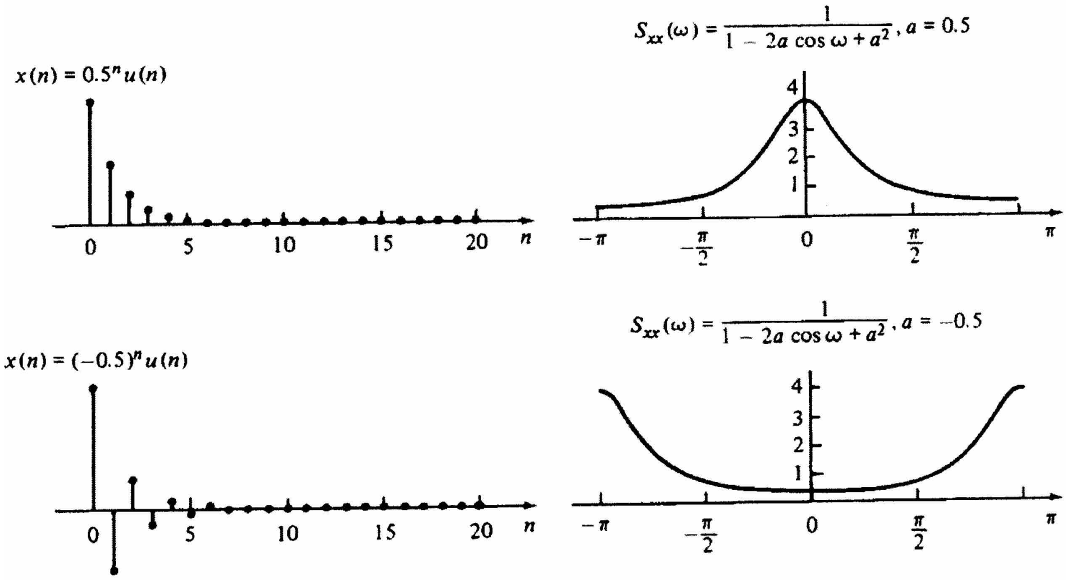
$$S_{xx}(\omega) = |X(e^{j\omega})|^2 = X(e^{j\omega}) X^*(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - a e^{-j\omega}} \cdot \frac{1}{1 - a e^{j\omega}} = \frac{1}{1 - 2a\cos\omega + a^2}$$

Σημειώστε ότι ισχύει: $S_{xx}(-\omega) = S_{xx}(\omega)$

DTFT

Στο παρακάτω σχήμα δείχνονται τα σήματα για $\alpha=0.5$ και $\alpha=-0.5$ καθώς και τα αντίστοιχα φάσματα ενεργειακής πυκνότητας.

Παρατήρηση: Για $\alpha=-0.5$ το σήμα παρουσιάζει πολύ μεγαλύτερες εναλλαγές και κατά συνέπεια το φάσμα του έχει ισχυρότερες υψηλές συχνότητες!



DTFT

Ιδιότητες του DTFT

Ιδιότητα	Μη Περιοδικό Σήμα	Μετασχηματισμός Fourier
	$x_1(n)$, $x_2(n)$	$X_1(e^{j\omega})$, $X_2(e^{j\omega})$ περιοδικές συναρτήσεις με περίοδο 2π
Γραμμικότητα	$a_1x_1(n) + a_2x_2(n)$	$a_1X_1(e^{j\omega}) + a_2X_2(e^{j\omega})$
Μετατόπιση στο χρόνο	$x(n-n_0)$	$e^{-j\omega n_0}X(e^{j\omega})$
Μετατόπιση στη συχνότητα	$e^{j\omega_0 n}x(n)$	$X(e^{j(\omega-\omega_0)})$
Συζυγής ακολουθία	$x^*(n)$	$X^*(e^{-j\omega})$
Κατοπτρισμός στο χρόνο	$x(-n)$	$X(e^{-j\omega})$
Επέκταση χρόνου	$x(n/k)$ για n πολλαπλάσιο του k	$X(e^{jk\omega})$
Συνέλιξη	$x_1(n)*x_2(n)$	$X_1(e^{j\omega})X_2(e^{j\omega})$

DTFT

Πολλαπλασιασμός	$x_1(n)x_2(n)$	$\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X_1(e^{j\theta})X_2(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$
Διαφόριση στη συχνότητα	$nx(n)$	$j\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$
Συζυγής συμμετρία για πραγματικά σήματα	$x(n)$ πραγματική	$\begin{cases} X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega}) \\ \mathrm{Re}\{X(e^{j\omega})\} = \mathrm{Re}\{X(e^{-j\omega})\} \\ \mathrm{Im}\{X(e^{j\omega})\} = -\mathrm{Im}\{X(e^{-j\omega})\} \\ \lvert X(e^{j\omega})\rvert = \lvert X(e^{-j\omega})\rvert \\ \angle X(e^{j\omega}) = -\angle X(e^{-j\omega}) \end{cases}$
Συμμετρία για πραγματικά και άρτια σήματα	$x(n)$ πραγματική και άρτια	$X(e^{j\omega})$ πραγματική και άρτια
Συμμετρία για πραγματικά και περιττά σήματα	$x(n)$ πραγματική και περιττή	$X(e^{j\omega})$ φανταστική και περιττή
Θεώρημα του Parseval	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \lvert x(n)\rvert^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} \lvert X(e^{j\omega})\rvert^2 d\omega$	