ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ

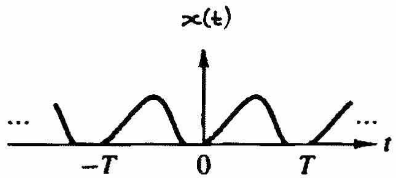
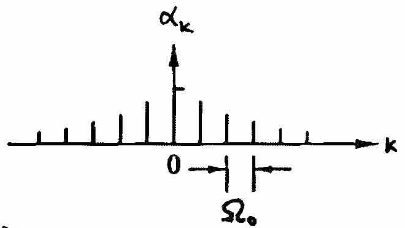
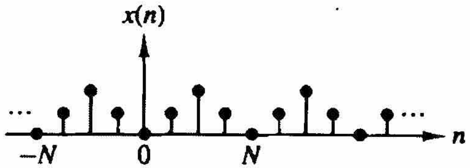
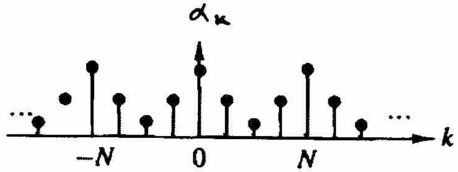
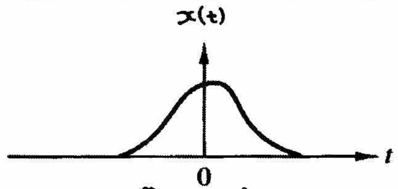
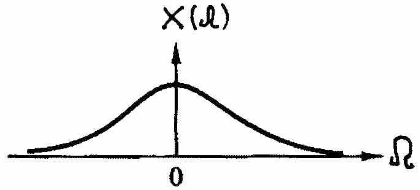
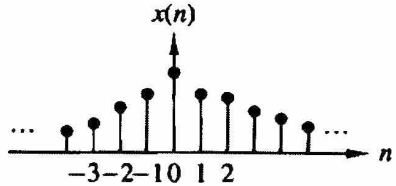
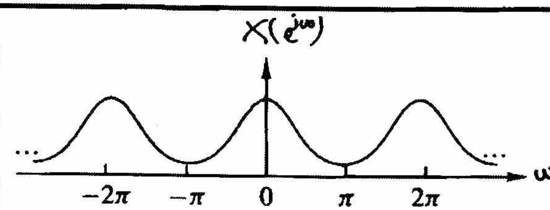
ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Δ3 – ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ FOURIER ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ ΣΚΟΔΡΑΣ

2023 - 2024

		Continuous-time signals		Discrete-time signals	
		Time-domain	Frequency-domain	Time-domain	Frequency-domain
Periodic signals	Fourier series	 $\alpha_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)\, e^{-jk\Omega_0 t}\, dt \Rightarrow$	 $\Leftarrow x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k\, e^{jk\Omega_0 t}$	 $\alpha_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} \Rightarrow$	 $\Leftarrow x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k\, e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$
		Continuous and periodic	Discrete and aperiodic	Discrete and periodic	Discrete and periodic
Aperiodic signals	Fourier transforms	 $X(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\Omega t}\, dt \Rightarrow$	 $\Leftarrow x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega)\, e^{j\Omega t}\, d\Omega$	 $X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, e^{-j\omega n} \Rightarrow$	 $\Leftarrow x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})\, e^{j\omega n}\, d\omega$
		Continuous and aperiodic	Continuous and aperiodic	Discrete and aperiodic	Continuous and periodic

Σημείωση: $\omega = \Omega T$

	ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΧΡΟΝΟΥ	ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ
ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ	Σειρά Fourier $x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\alpha_k e^{jk\Omega_0 t}$ $\alpha_k=\frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\Omega_0 t}dt$	Σειρά Fourier $x(n)=\sum_{k=0}^{N-1}\alpha_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$ $\alpha_k=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$
ΜΗ-ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ	Μετασχηματισμός Fourier $x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega$ $X(\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\Omega t}dt$	Μετασχηματισμός Fourier $x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$ $X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}$

DTFT

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ FOURIER ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ (DTFT - DISCRETE-TIME FOURIER TRANSFORM)

ΟΡΙΣΜΟΙ

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\, e^{-j\omega n}$$ ευθύς μετασχηματισμός ή εξίσωση ανάλυσης

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega})\, e^{j\omega n}\, d\omega$$ αντίστροφος μετ/μός ή εξίσωση σύνθεσης

- Η εξίσωση ανάλυσης γράφεται ως άθροισμα απείρων όρων. Για να συγκλίνει πρέπει

  είτε η $x(n)$ να είναι αθροίσιμη κατ' απόλυτη τιμή $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)| < \infty$

  είτε η $x(n)$ να είναι πεπερασμένης ενέργειας (*) $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2 < \infty$

- Για την εξίσωση σύνθεσης δεν τίθεται θέμα σύγκλισης, αφού πρόκειται για ορισμένο ολοκλήρωμα.

- Η εξίσωση σύνθεσης εκφράζει το πως ένα μη-περιοδικό ΣΔΧ (δηλ. μια μη-περιοδική ακολουθία) μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός μιγαδικών εκθετικών.

- Τα μιγαδικά εκθετικά διακριτού χρόνου είναι περιοδικά με περίοδο 2π.

  Απόδειξη: $e^{-j(\omega+2k\pi)n} = e^{-j\omega n}\, e^{-j2k\pi n} = e^{-j\omega n}$

- Ο DTFT $X(e^{j\omega})$ της ακολουθίας $x(n)$ είναι μια συνεχής και περιοδική συνάρτηση του ω με περίοδο ίση με 2π, δηλαδή

$$X(e^{j(\omega+2k\pi)}) = X(e^{j\omega})$$

Ο συμβολισμός $X(e^{j\omega})$, αντί του απλούστερου $X(\omega)$, χρησιμοποιείται ακριβώς για να δείξει ότι πρόκειται για περιοδική συνάρτηση με περίοδο 2π. Επίσης, όπως θα δούμε σε επόμενη ενότητα, $X(e^{j\omega}) = X(z)\big|_{z=e^{j\omega}}$

Απόδειξη:

$$X(e^{j(\omega+2k\pi)}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\, e^{-j(\omega+2k\pi)n} =$$

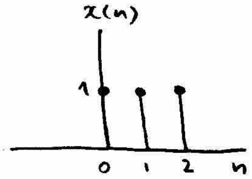
$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\, e^{-j\omega n}\, e^{-j2k\pi n} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\, e^{-j\omega n} =$$

$$= X(e^{j\omega})$$

(*) Σημείωση: Μια ακολουθία αθροίσιμη κατ' απόλυτη τιμή είναι και πεπερασμένης ενέργειας. Το αντίθετο δεν ισχύει. Για παράδειγμα η πεπερασμένης ενέργειας $x(n) = \begin{cases} 1/n, & n \geq 1 \\ 0, & n \leq 0 \end{cases}$ δεν είναι αθροίσιμη κατ' απόλυτη τιμή.

ΑΣΚΗΣΗ Υπολογίστε και σχεδιάστε τα φάσματα των σημάτων $x(n)=\{\underset{\uparrow}{1},1,1\}$ και $g(n)=\{1,\underset{\uparrow}{1},1\}$.



Α' Τρόπος

Έχουμε:

$$x(n)=\delta(n)+\delta(n-1)+\delta(n-2)$$

Ο DTFT της $x(n)$ ισούται με:

$$X(e^{j\omega})=1+e^{-j\omega}+e^{-j2\omega} \qquad (1)$$

Β' Τρόπος

$$x(n)=u(n)-u(n-3) \rightsquigarrow$$

$$X(e^{j\omega})=e^{-j\frac{3-1}{2}\omega}\frac{\sin\frac{3\omega}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}}=e^{-j\omega}\frac{\sin\frac{3\omega}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}} \qquad (2)$$

Σημείωση: Οι σχέσεις (1) και (2) είναι ισοδύναμες:

$$(1)\rightsquigarrow X(e^{j\omega})=1+e^{-j\omega}+e^{-j2\omega}=e^{-j\omega}\left(e^{j\omega}+1+e^{-j\omega}\right)=$$

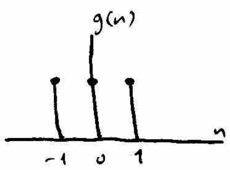
$$=e^{-j\omega}\left(1+e^{j\omega}+e^{-j\omega}\right)=$$

$$=e^{-j\omega}\left(1+2\cos\omega\right) \qquad (3)$$

$$(2)\rightarrow X(e^{j\omega})=e^{-j\omega}\frac{\sin\frac{3\omega}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}}=e^{-j\omega}\frac{\frac{1}{2j}\left(e^{j\frac{3\omega}{2}}-e^{-j\frac{3\omega}{2}}\right)}{\frac{1}{2j}\left(e^{j\frac{\omega}{2}}-e^{-j\frac{\omega}{2}}\right)}=$$

$$=e^{-j\omega}\frac{e^{j\frac{3\omega}{2}}\left(1-e^{-j\frac{6\omega}{2}}\right)}{e^{j\frac{\omega}{2}}\left(1-e^{-j\frac{2\omega}{2}}\right)}=\frac{\left(1-e^{-j3\omega}\right)}{\left(1-e^{-j\omega}\right)}= \text{<άθροισμα όρων γεωμετρ. προόδου>}$$

$$=\sum_{m=0}^{2}\left(e^{-j\omega}\right)^m=e^{0}+e^{-j\omega}+e^{-j\omega 2}=1+e^{-j\omega}+e^{-j2\omega} \quad \text{ο.ε.δ.}$$



Α' Τρόπος

$$g(n)=\delta(n+1)+\delta(n)+\delta(n-1) \rightsquigarrow G(e^{j\omega})=e^{j\omega}+1+e^{-j\omega}=1+2\cos\omega$$

Β' Τρόπος

$$g(n)=x(n+1) \rightsquigarrow G(e^{j\omega})=e^{-j\omega(-1)}X(e^{j\omega})=$$

$$=e^{j\omega}\cdot\left(1+e^{-j\omega}+e^{-j2\omega}\right)=$$

$$=e^{j\omega}+1+e^{-j\omega}$$

Το $X(e^{j\omega})$ είναι μιγαδικός αριθμός, άρα θα πρέπει να υπολογίσουμε το μέτρο και την φάση.

$$|X(e^{j\omega})| = \left|e^{-j\omega}\,\frac{\sin\frac{3\omega}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}}\right| = \left|e^{-j\omega}\right|\,\left|\frac{\sin\frac{3\omega}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}}\right| = 1\cdot\left|\frac{\sin\frac{3\omega}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}}\right| = \left|\frac{\sin\frac{3\omega}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}}\right| \quad (4)$$

Εναλλακτικά

$$|X(e^{j\omega})| = \left|e^{-j\omega}(1+2\cos\omega)\right| = \left|e^{-j\omega}\right|\,\left|1+2\cos\omega\right| = 1\cdot\left|1+2\cos\omega\right| = \left|1+2\cos\omega\right| \quad (5)$$

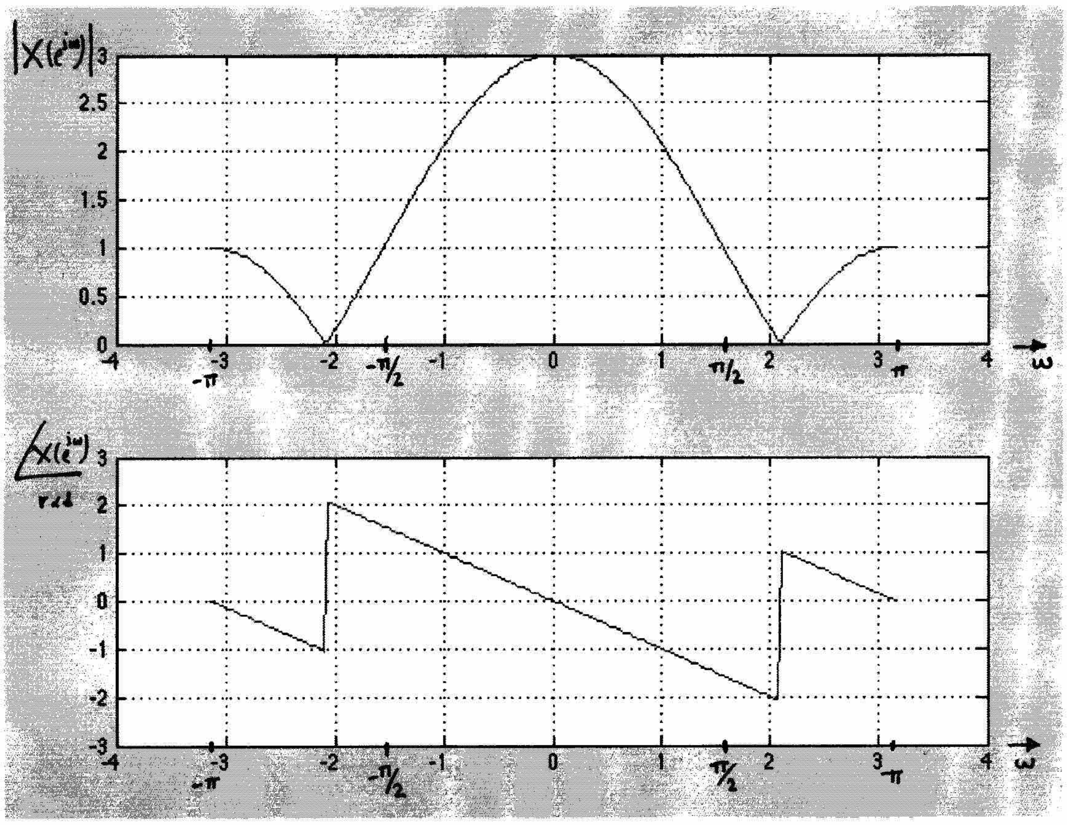
Από την (5) βρίσκουμε εύκολα ότι για $\omega=0$ έχουμε $|X(e^{j0})|=3$

Το φάσμα του μέτρου για κυκλικές συχνότητες $[-\pi,\pi]$ δείχνεται στο σχήμα παρακάτω.

Η φάση βλέπουμε ότι είναι γραμμική, ανάλογη του $-\omega$. Προσοχή όμως χρειάζεται για εκείνες τις τιμές του ω στις οποίες παρουσιάζεται ασυνέχεια λόγω του $\frac{\sin\frac{3\omega}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}}$.

Το φάσμα της φάσης φαίνεται στο δεύτερο σχήμα της σελίδας.

Το φάσμα μέτρου του $G(e^{j\omega})$ είναι ίδιο με αυτό του $X(e^{j\omega})$, ενώ η φάση του είναι μηδέν για $X(e^{j\omega})>0$ και π ή $-\pi$ για $X(e^{j\omega})<0$.



ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί και να σχεδιαστεί ο ΜF του σήματος $x(n)=\begin{cases} A & -M\leq n\leq M \\ 0 & \text{αλλού}\end{cases}$

ΛΥΣΗ Το σήμα $x(n)$ είναι πραγματικό και άρτιο, $x(n)=x(-n)$.

$$X_R(e^{j\omega})=X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)\,e^{-j\omega n}=\sum_{n=-M}^{M}A\,e^{-j\omega n}=A\sum_{n=-M}^{M}e^{-j\omega n}$$

Α' τρόπος:

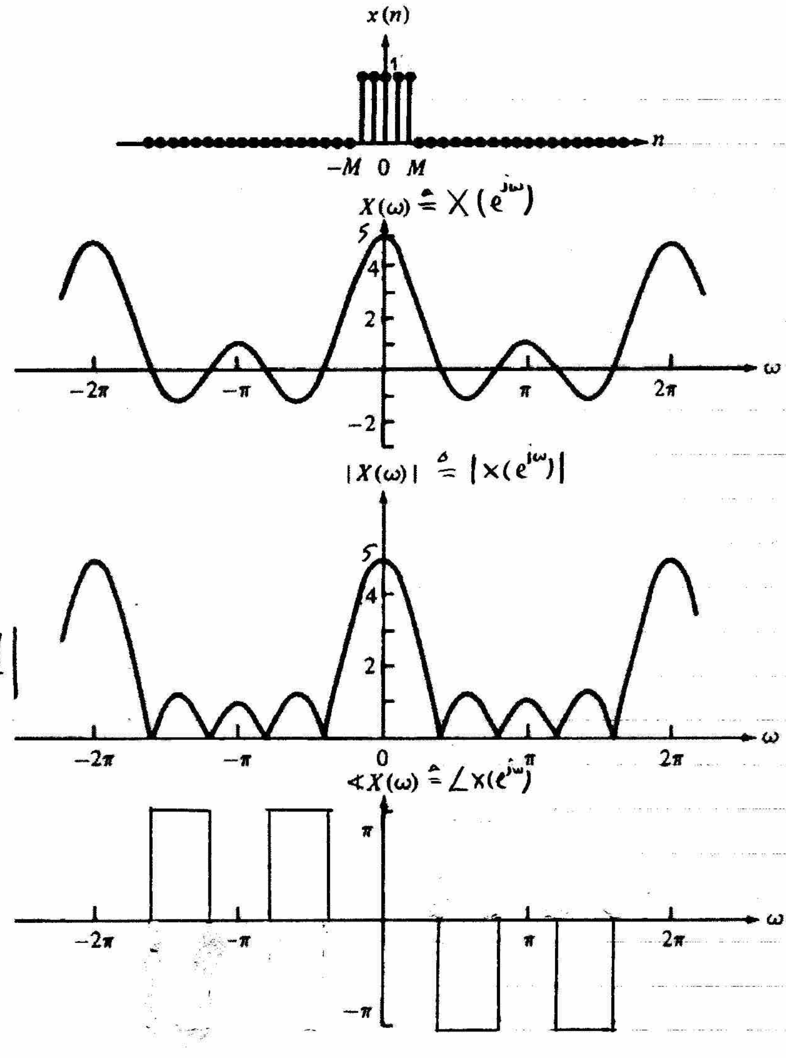
$$X(e^{j\omega})=\underbrace{A\sum_{n=-M}^{-1}e^{-j\omega n}}_{X_1(e^{j\omega})}+\underbrace{A\sum_{n=0}^{M}e^{-j\omega n}}_{X_2(e^{j\omega})}=X_1(e^{j\omega})+X_2(e^{j\omega})$$

$$X_1(e^{j\omega})=A\sum_{n=-M}^{-1}e^{-j\omega n}=\langle \text{θέτω } n=-l\rangle=A\sum_{l=1}^{M}e^{j\omega l}=A\left(\sum_{l=0}^{M}e^{j\omega l}-1\right)=$$

$$=A\cdot\left(\frac{1-e^{j\omega(M+1)}}{1-e^{j\omega}}-1\right)=A\cdot\frac{\cancel{1}-e^{j\omega(M+1)}-\cancel{1}+e^{j\omega}}{1-e^{j\omega}}=Ae^{j\omega}\,\frac{1-e^{j\omega M}}{1-e^{j\omega}}$$

$$X_2(e^{j\omega})=A\sum_{n=0}^{M}e^{-j\omega n}=A\cdot\frac{1-e^{-j\omega(M+1)}}{1-e^{-j\omega}}$$

Παράδειγμα για $A=1$, $M=2$



$$\left|X(e^{j\omega})\right|=\left|A\,\frac{\sin\left[(2M+1)\frac{\omega}{2}\right]}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}\right|=$$

ή

$$\left|X(e^{j\omega})\right|=\begin{cases}(2M+1)\,|A| & \text{για } \omega=0\\ (2M+1)\,|A|\left|\dfrac{\sin\left[(2M+1)\frac{\omega}{2}\right]}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}\right| & \text{για } \omega\neq 0\end{cases}$$

$$\angle X(e^{j\omega})=\begin{cases}0 & \text{εάν } X(e^{j\omega})>0\\ \pi \text{ ή } -\pi & \text{εάν } X(e^{j\omega})<0\end{cases}$$

Άρα $X(e^{jw}) = X_1(e^{jw}) + X_2(e^{jw}) = A\, e^{jw} \dfrac{1-e^{jwM}}{1-e^{jw}} + A \dfrac{1-e^{-jw(M+1)}}{1-e^{-jw}} =$

$$= A \cdot \frac{e^{jw}(1-e^{jwM})(1-e^{-jw}) + (1-e^{-jw(M+1)})(1-e^{jw})}{(1-e^{jw})(1-e^{-jw})} =$$

$$= A \frac{e^{jw}(1-e^{jwM}-e^{-jw}+e^{jwM}e^{-jw}) + 1 - e^{-jw(M+1)} - e^{jw} + e^{-jw(M+1)}e^{jw}}{1-e^{jw}-e^{-jw}+e^{-jw}e^{jw}} =$$

$$= A \frac{\cancel{e^{jw}} - e^{jw(M+1)} - \cancel{1} + e^{jwM} + \cancel{1} - e^{-jw(M+1)} - \cancel{e^{jw}} + e^{-jwM}}{2-(e^{jw}+e^{-jw})} =$$

$$= A \frac{(e^{jwM}+e^{-jwM}) - (e^{jw(M+1)}+e^{-jw(M+1)})}{2-(e^{jw}+e^{-jw})} =$$

$$= A \frac{2\cos(wM) - 2\cos[w(M+1)]}{2 - 2\cos(w)} = A \frac{\cos(wM) - \cos[w(M+1)]}{1-\cos(w)} = \quad (*)$$

$$= A \frac{\cos(wM) - [\cos(wM)\cos(w) - \sin(wM)\sin(w)]}{2\sin^2(\frac{w}{2})} =$$

$$= A \frac{\cos(wM)[1-\cos(w)] + \sin(wM)\cdot[2\cdot\sin(\frac{w}{2})\cos(\frac{w}{2})]}{2\sin^2(\frac{w}{2})} =$$

$$= A \frac{\cos(wM)\, 2\sin^2(\frac{w}{2}) + \sin(wM)\, 2\sin(\frac{w}{2})\cos(\frac{w}{2})}{2\sin^2(\frac{w}{2})} =$$

$$= A \frac{\cancel{2\sin(\frac{w}{2})}\,[\cos(wM)\sin(\frac{w}{2}) + \sin(wM)\cos(\frac{w}{2})]}{2\sin^{2}(\frac{w}{2})} =$$

$$= A \frac{\sin(wM+\frac{w}{2})}{\sin(\frac{w}{2})} =$$

$$= A \frac{\sin[w(M+\frac{1}{2})]}{\sin(\frac{w}{2})}$$

← Η συνάρτηση αυτή είναι περιοδική με περίοδο 2π και αποτελεί την ψηφιακή sinc συνάρτηση. Τα ονόματα με τα οποία απαντάται στη διεθνή βιβλιογραφία είναι: periodic sinc, digital sinc, aliased sinc, Dirichlet sinc.

(*) Σημείωση: Από το σημείο αυτό θα μπορούσατε να φτάνετε πιο γρήγορα στη λύση εάν εκφράζατε τον αριθμητή ως: $\cos[\underbrace{w(M+\frac{1}{2})}_{x} - \underbrace{w\frac{1}{2}}_{y}] - \cos[w(M+\frac{1}{2}) + w\frac{1}{2}]$

Με βάση την τριγωνομετρική ταυτότητα $\cos(x-y) - \cos(x+y) = 2\cdot\sin(x)\cdot\sin(y)$ θα βρίσκατε: $2\cdot\sin(w(M+\frac{1}{2}))\cdot\sin(\frac{w}{2})$ και άρα πολύ εύκολα την τελική σχέση.

Β' τρόπος: Ένας πιο σύντομος τρόπος υπολογισμού είναι εκφράζοντας την ακολουθία x(n) ως σταθμισμένο άθροισμα κρουστικών και με βάση την ιδιότητα της γραμμικότητας να υπολογίσουμε το τελικό αποτέλεσμα. Συγκεκριμένα:

$$x(n)=\sum_{n_0=-M}^{M} A\,\delta(n-n_0) \quad \xleftrightarrow{F} \quad X(e^{j\omega})=\sum_{n_0=-M}^{M} A\, e^{-j\omega n_0}$$

$$\left[\text{Θυμηθείτε ότι} \quad F\{\delta(n-n_0)\}=e^{-j\omega n_0}\right]$$

Γράφοντας αναλυτικά την τελευταία σχέση έχουμε:

$$X(e^{j\omega})=A\sum_{n_0=-M}^{M} e^{-j\omega n_0}=A\left(e^{j\omega M}+\dots+e^{j\omega 2}+e^{j\omega 1}+e^{j\omega 0}+e^{-j\omega 1}+e^{-j\omega 2}+\dots+e^{-j\omega M}\right)=$$

$$=A\left[\left(e^{j\omega M}+e^{-j\omega M}\right)+\dots+\left(e^{j\omega 2}+e^{-j\omega 2}\right)+\left(e^{j\omega 1}+e^{-j\omega 1}\right)+e^{j\omega 0}\right]=$$

$$=A\left[2\cos(\omega M)+\dots+2\cos(2\omega)+2\cos(\omega)+1\right]=$$

$$=A\left[1+2\sum_{n=1}^{M}\cos(\omega n)\right]$$

Σημείωση: Ο τρόπος αυτός θα μπορούσε να εφαρμοστεί και απ' ευθείας στον ορισμό του DTFT, δηλαδή $X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)\,e^{-j\omega n}\Rightarrow$

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-M}^{M}A\,e^{-j\omega n}=A\sum_{n=-M}^{M}e^{-j\omega n}=A\left[1+2\sum_{n=1}^{M}\cos(\omega n)\right]$$

Γ' τρόπος: Ξεκινώντας και πάλι από τον ορισμό του DTFT έχουμε:

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)\,e^{-j\omega n}=A\sum_{n=-M}^{M}e^{-j\omega n}=\langle \text{θέτω } n+M=m\Rightarrow n=m-M\rangle=$$

$$=A\sum_{m=0}^{2M}e^{-j\omega(m-M)}=A\,e^{j\omega M}\sum_{m=0}^{2M}e^{-j\omega m}=$$

$$=A\,e^{j\omega M}\,\frac{1-e^{-j\omega(2M+1)}}{1-e^{-j\omega}}=A\,e^{j\omega M}\,\frac{e^{-j\omega\frac{2M+1}{2}}\left[e^{j\omega\frac{2M+1}{2}}-e^{-j\omega\frac{2M+1}{2}}\right]}{e^{-j\omega\frac{1}{2}}\left[e^{j\omega\frac{1}{2}}-e^{-j\omega\frac{1}{2}}\right]}=$$

$$=A\,e^{j\omega M}\,\frac{e^{-j\omega(M+\frac{1}{2})}}{e^{-j\frac{\omega}{2}}}\,\frac{\cancel{2j}\sin\left[\omega(M+\frac{1}{2})\right]}{\cancel{2j}\sin\left[\frac{\omega}{2}\right]}=$$

$$=A\,\frac{\sin\left[\omega(M+\frac{1}{2})\right]}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Βλέπουμε ότι ισχύει: $\quad 1+2\sum_{n=1}^{M}\cos(\omega n)=\dfrac{\sin\left[\omega(M+\frac{1}{2})\right]}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$

Δ' τρόπος: Κάνοντας χρήση της σχέσης που ισχύει για σειρές (γεωμετρικής προόδους) με πεπερασμένους όρους

$$\sum_{n=\ell}^{m} \alpha^n = \frac{\alpha^\ell - \alpha^{m+1}}{1-\alpha} \quad \text{όπου } m \geq \ell \geq 0 \quad \text{(Βλ. σημείωση)}$$

έχουμε:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=-M}^{M} A\, e^{-j\omega n} = A \sum_{n=-M}^{M} e^{-j\omega n} = \langle \text{για } \alpha = e^{-j\omega} \rangle =$$

$$= A \cdot \frac{\left(e^{-j\omega}\right)^{-M} - \left(e^{-j\omega}\right)^{M+1}}{1 - e^{-j\omega}} = A \, \frac{e^{j\omega M} - e^{-j\omega(M+1)}}{1 - e^{-j\omega}} =$$

$$= A \cdot e^{j\omega M} \, \frac{1 - e^{-j\omega(2M+1)}}{1 - e^{-j\omega}} =$$

$$= A \cdot e^{j\omega M} \, \frac{e^{-j\omega\frac{2M+1}{2}} \left[e^{j\omega\frac{2M+1}{2}} - e^{-j\omega\frac{2M+1}{2}} \right]}{e^{-j\omega\frac{1}{2}} \left[e^{j\omega\frac{1}{2}} - e^{-j\omega\frac{1}{2}} \right]} =$$

$$= \underbrace{A \cdot e^{j\omega M} \, e^{-j\omega\frac{2M+1}{2}} \, e^{j\omega\frac{1}{2}}}_{1} \, \frac{\cancel{2j} \sin\left(\omega \frac{2M+1}{2}\right)}{\cancel{2j} \sin\left(\omega \frac{1}{2}\right)} =$$

$$= A \cdot \frac{\sin\left(\omega \frac{2M+1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} = A \cdot \frac{\sin\left[\omega\left(M+\frac{1}{2}\right)\right]}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$

<u>Σημείωση:</u> Η απόδειξη της σχέσης αυτής μπορεί να γίνει βασιζόμενοι στο άθροισμα των N πρώτων όρων της γεωμετρικής προόδου

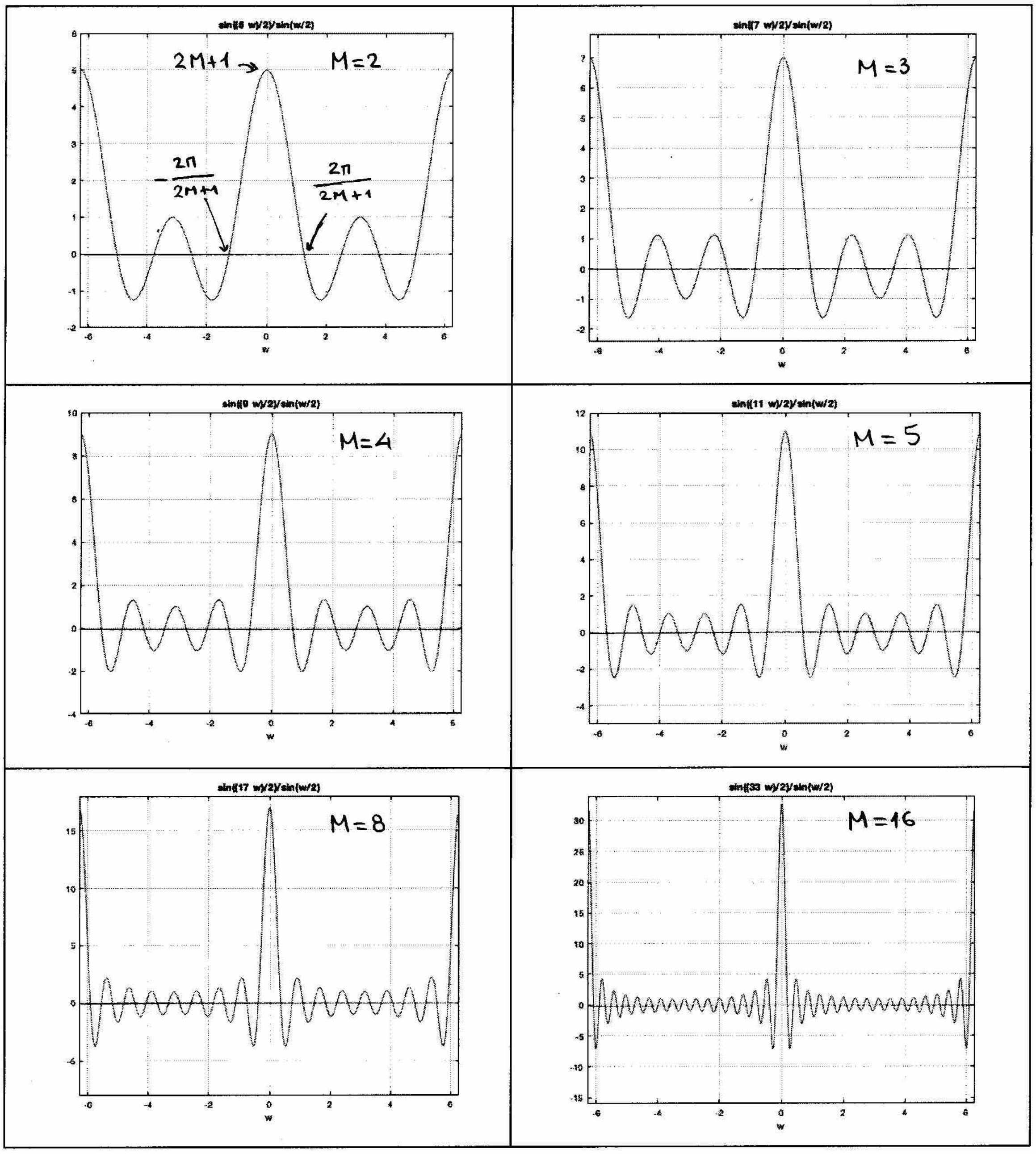
$$\sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n = \frac{1-\alpha^N}{1-\alpha}, \quad \text{όπου } \alpha \neq 1.$$

Έτσι, με δεδομένο ότι $m \geq \ell \geq 0$

$$\sum_{n=\ell}^{m} \alpha^n = \sum_{n=0}^{m} \alpha^n - \sum_{n=0}^{\ell-1} \alpha^n = \frac{1-\alpha^{m+1}}{1-\alpha} - \frac{1-\alpha^\ell}{1-\alpha} = \frac{\alpha^\ell - \alpha^{m+1}}{1-\alpha}$$

Σημείωση: Το φάσμα του σήματος $x(n) = \begin{cases} 1 & \text{για } -M \le n \le M \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$ ισούται με $X(e^{j\omega}) = \dfrac{\sin\left[(M+\frac{1}{2})\omega\right]}{\sin(\frac{\omega}{2})}$.

Στα παρακάτω σχήματα δίνεται η γραφική παράσταση του φάσματος για διαφορετικά M.



Παρατηρούμε ότι:

α. Το μέγιστο πλάτος του φάσματος ισούται με $2M+1$.

β. Τα σημεία μηδενισμού βρίσκονται στις συχνότητες $\frac{2\pi l}{2M+1}$, όπου $l \in Z - \{0\}$.

γ. Το πλήθος των μεγίστων και ελαχίστων σε μία περίοδο 2π ισούται με $2M+1$.

δ. Το εύρος ζώνης (bandwidth) του κύριου λοβού εκτείνεται από $\frac{-2\pi}{2M+1}$ έως $\frac{2\pi}{2M+1}$, δηλαδή ισούται με $2 \cdot \frac{2\pi}{2M+1}$.

Καθώς το M αυξάνεται, το εύρος του λοβού μειώνεται. Στην οριακή περίπτωση που $M \to \infty$, το εύρος του κύριου λοβού τείνει στο μηδέν, δηλαδή έχουμε την κρουστική.

ΑΣΚΗΣΗ Ποιο το σήμα που αντιστοιχεί στο φάσμα $X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & |\omega| \le \omega_c \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$

Το $X(e^{j\omega})$ είναι περιοδικό με περίοδο 2π.

Λύση Από την εξίσωση σύνθεσης του DTFT, δηλ. από την εξίσωση του αντίστροφου DTFT, έχουμε:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})\, e^{j\omega n}\, d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega n}\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{jn}\, e^{j\omega n}\Big|_{-\omega_c}^{\omega_c} = \frac{1}{2\pi j n}\left(e^{j\omega_c n} - e^{-j\omega_c n}\right) = \frac{1}{\pi n}\sin\omega_c n =$$

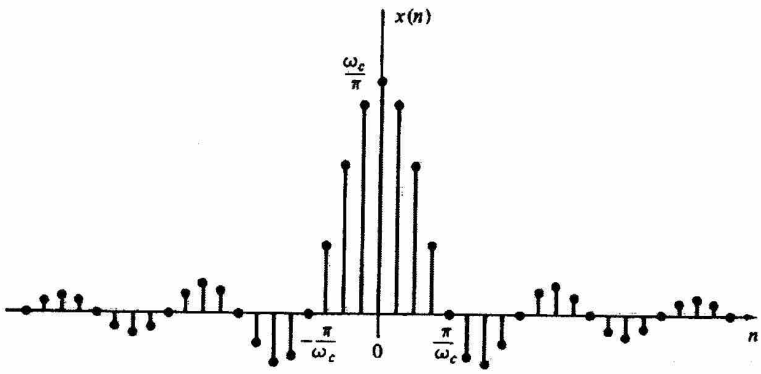
$$= \frac{\omega_c}{\pi}\,\frac{\sin\omega_c n}{\omega_c n} \qquad n \ne 0$$

Για $n=0$ έχουμε

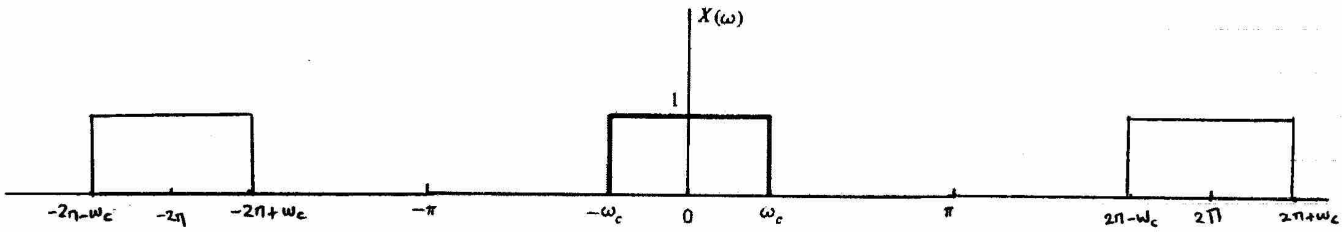
$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} d\omega = \frac{\omega_c}{\pi}$$

Τελικά το ζητούμενο σήμα είναι: $x(n) = \begin{cases} \dfrac{\omega_c}{\pi} & \text{για } n=0 \\ \dfrac{\omega_c}{\pi}\,\dfrac{\sin\omega_c n}{\omega_c n} & \text{για } n \ne 0 \end{cases}$

Παρατήρηση: Η ακολουθία $x(n)$ έχει πεπερασμένη ενέργεια $E_x = \frac{\omega_c}{\pi}$, αλλά δεν είναι αθροίσιμη κατ' απόλυτη τιμή.

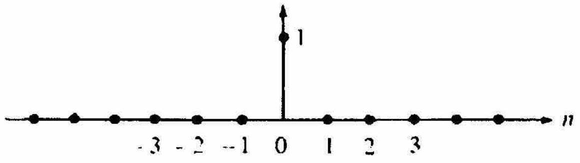
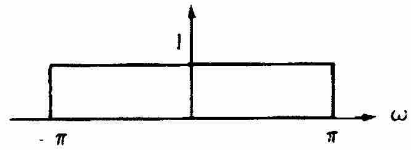
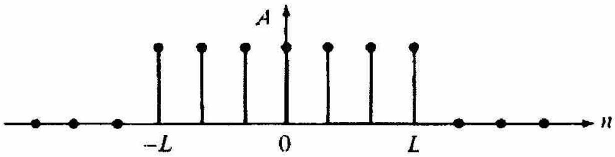
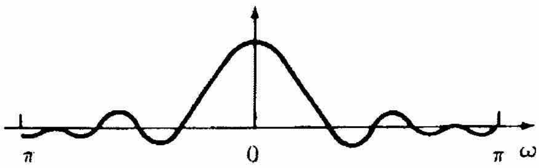
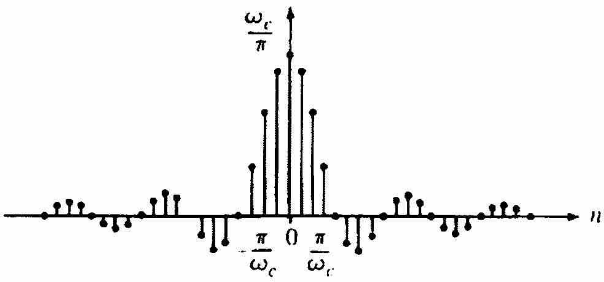
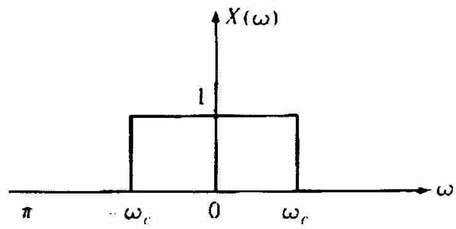


(a)



(b)

Some Useful Fourier Transform Pairs for Discrete-Time Aperiodic Signals

Signal $x(n)$	**Spectrum $X(\omega)$**
 $x(n)=\delta(n)$	 $X(\omega)=1$
 $x(n)=\begin{cases}A, & \lvert n\rvert \leqslant L\\ 0, & \lvert n\rvert > L\end{cases}$	 $X(\omega)=A\dfrac{\sin(L+\frac{1}{2})\omega}{\sin\frac{\omega}{2}}$
 $x(n)=\begin{cases}\dfrac{\omega_c}{\pi}, & n=0\\ \dfrac{\sin\omega_c n}{\pi n}, & n\neq 0\end{cases}$	 $X(\omega)=\begin{cases}1, & \lvert\omega\rvert<\omega_c\\ 0, & \omega_c\leqslant\lvert\omega\rvert\leqslant\pi\end{cases}$
$x(n)=\begin{cases}a^n, & n\geqslant 0\\ 0, & n<0\end{cases}$	$X(\omega)=\dfrac{1}{1-ae^{-j\omega}}$

-ΓΡΑΜΜΙΚΟΤΗΤΑ-

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί ο μετασχ. Fourier του σήματος $x(n)=\alpha^{|n|}$ $\quad -1<\alpha<1$

ΛΥΣΗ Παρατηρούμε ότι $x(n)=x_1(n)+x_2(n)$ όπου

$$x_1(n)=\begin{cases}\alpha^n & n\geq 0\\ 0 & n<0\end{cases} \qquad x_2(n)=\begin{cases}\alpha^{-n} & n<0\\ 0 & n\geq 0\end{cases}$$

Από τον ορισμό του DTFT έχουμε:

$$X_1(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_1(n)e^{-j\omega n}=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n e^{-j\omega n}=\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha e^{-j\omega})^n=\frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}$$

Σημειώνεται ότι η γεωμετρική σειρά συγκλίνει αφού $|\alpha e^{-j\omega}|=|\alpha|\,|e^{-j\omega}|=|\alpha|<1$

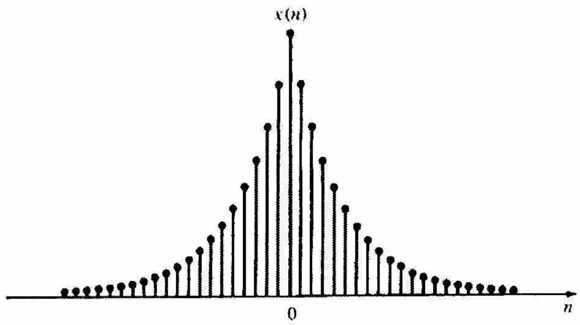
$$X_2(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_2(n)e^{-j\omega n}=\sum_{n=-\infty}^{-1}\alpha^{-n}e^{-j\omega n}=\sum_{n=-\infty}^{-1}(\alpha e^{j\omega})^{-n}=\sum_{\ell=1}^{\infty}(\alpha e^{j\omega})^{\ell}=$$

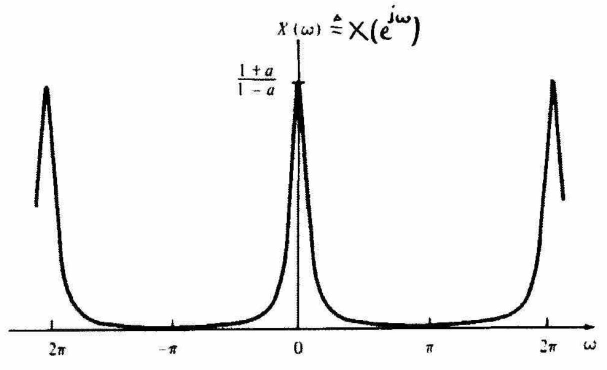
$$=\sum_{\ell=0}^{\infty}(\alpha e^{j\omega})^{\ell}-(\alpha e^{j\omega})^{0}=\frac{1}{1-\alpha e^{j\omega}}-1=\frac{\alpha e^{j\omega}}{1-\alpha e^{j\omega}}$$

Συνδυάζοντας τα δύο αποτελέσματα βρίσκουμε ότι

$$X(e^{j\omega})=X_1(e^{j\omega})+X_2(e^{j\omega})=\frac{1-\alpha^2}{1-2\alpha\cos\omega+\alpha^2}$$

Στο σχήμα δείχνονται οι κυματομορφές $x(n)$ και $X(e^{j\omega})$ για $\alpha=0.8$





ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί ο DTFT του σήματος $x(n) = -\frac{1}{4}\left[\delta(n+2) - 2\delta(n) + \delta(n-2)\right]$

ΛΥΣΗ

Εφαρμόζουμε τον DTFT και στα δύο μέλη της σχέσης.

$$F\{x(n)\} = F\left\{-\frac{1}{4}\left[\delta(n+2) - 2\delta(n) + \delta(n-2)\right]\right\} \Rightarrow$$

$$X(e^{j\omega}) = -\frac{1}{4}\left[F\{\delta(n+2)\} - 2F\{\delta(n)\} + F\{\delta(n-2)\}\right] \qquad (1)$$

Αλλά

$$F\{\delta(n)\} = 1 \quad , \quad F\{\delta(n-2)\} = e^{-j\omega 2} F\{\delta(n)\} = e^{-j\omega 2}$$

$$F\{\delta(n+2)\} = e^{j\omega 2}$$

οπότε η σχέση (1) γίνεται:

$$X(e^{j\omega}) = -\frac{1}{4}\left(e^{j\omega 2} - 2 + e^{-j\omega 2}\right) =$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\underbrace{e^{j\omega 2} + e^{-j\omega 2}} - 2\right) =$$

$$= -\frac{1}{4}\left(2\cdot\cos 2\omega - 2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \cos 2\omega\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 - (1 - 2\sin^2\omega)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\cancel{1} - \cancel{1} + 2\sin^2\omega\right] =$$

$$= \sin^2\omega$$

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί το σήμα του οποίου ο ΜF είναι $X(e^{j\omega}) = \sin^2\omega$

ΛΥΣΗ $X(e^{j\omega}) = \sin^2\omega$

$$= \left(\frac{e^{j\omega} - e^{-j\omega}}{2j}\right)^2$$

$$= -\frac{1}{4}\left(e^{j2\omega} - 2 + e^{-j2\omega}\right)$$

Γνωρίζουμε ότι $F\{\delta(n-n_0)\} = e^{-j\omega n_0}$

Με βάση την ιδιότητα της γραμμικότητας συνάγεται απ' ευθείας ότι:

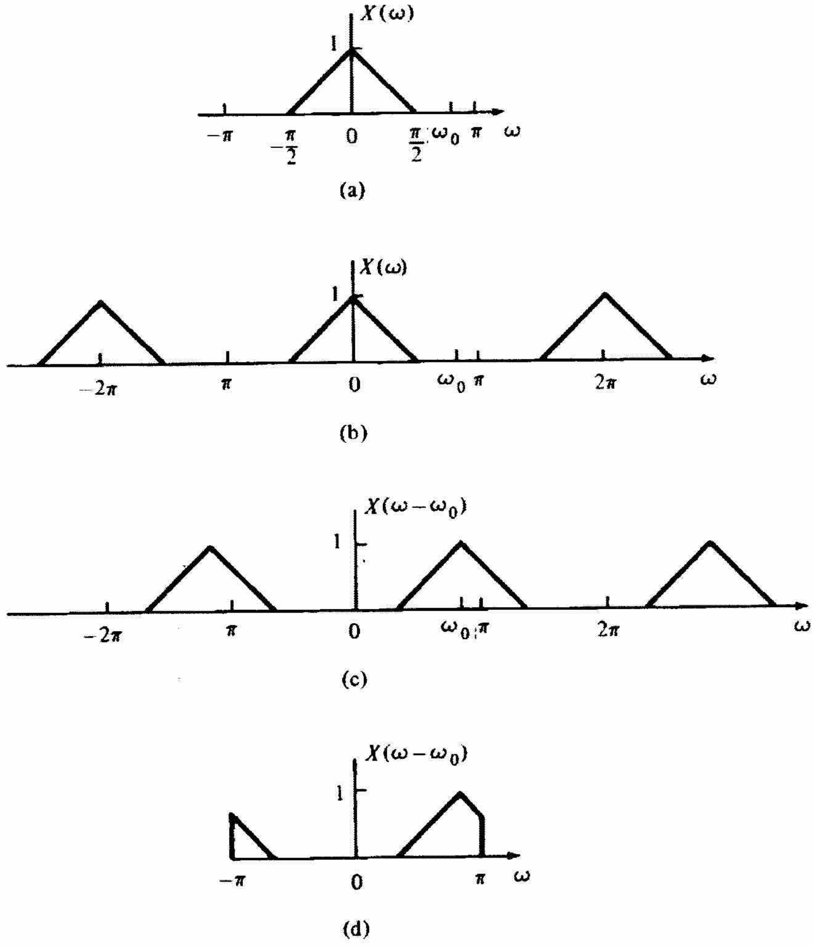
$$x(n) = -\frac{1}{4}\left[\delta(n+2) - 2\delta(n) + \delta(n-2)\right]$$

ΙΔΙΟΤΗΤΑ ΟΛΙΣΘΗΣΗΣ ΣΤΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ: $x(n) \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega}) \rightarrow e^{j\omega_0 n}\, x(n) \xleftrightarrow{F} X(e^{j(\omega-\omega_0)})$

Σύμφωνα με την ιδιότητα αυτή, ο πολλαπλασιασμός ενός σήματος $x(n)$ επί $e^{j\omega_0 n}$ ισοδυναμεί με την μετατόπιση του φάσματος $X(e^{j\omega})$ κατά ω_0.

Στο σχήμα που ακολουθεί δείχνεται το παράδειγμα ενός φάσματος και της μετατόπισής του κατά ω_0. Αφού το φάσμα είναι περιοδικό, η μετατόπιση κατά ω_0 εφαρμόζεται σε κάθε περίοδο αυτού.

Σημείωση: Στο σχήμα χρησιμοποιήθηκε ο συμβολισμός $X(\omega)$ και $X(\omega-\omega_0)$ αντί για $X(e^{j\omega})$ και $X(e^{j(\omega-\omega_0)})$ αντίστοιχα.



DTFT

ΙΔΙΟΤΗΤΑ ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗΣ: $x(n)\cos\omega_0 n \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2}X(e^{j(\omega+\omega_0)}) + \frac{1}{2}X(e^{j(\omega-\omega_0)})$

Η ιδιότητα αυτή μπορεί εύκολα να αποδειχθεί εκφράζοντας το σήμα $\cos\omega_0 n$ ως

$$\cos\omega_0 n = \frac{1}{2}\left(e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n}\right)$$

και εφαρμόζοντας ακολούθως την ιδιότητα της ολίσθησης στη συχνότητα.

ΑΣΚΗΣΗ Να σχεδιαστούν τα φάσματα των σημάτων $y_1(n) = x(n)\cos 0.5\pi n$ και $y_2(n) = x(n)\cos\pi n$, όταν το φάσμα του σήματος $x(n)$ έχει τη μορφή του σχήματος (a).

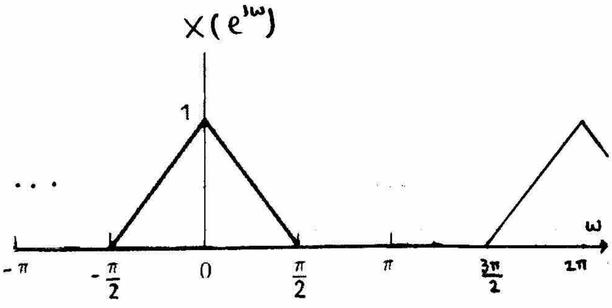
ΛΥΣΗ

$$Y_1(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}X(e^{j(\omega+\frac{\pi}{2})}) + \frac{1}{2}X(^{j(\omega-\frac{\pi}{2})})$$

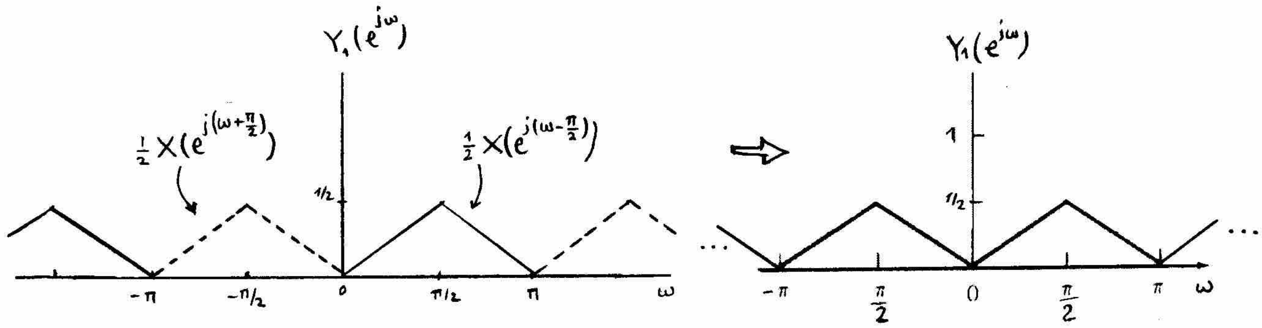
αφού $\omega_0 = \frac{\pi}{2}$ στην περίπτωση αυτή.

Για τον υπολογισμό του φάσματος του $y_2(n)$ έχουμε $\omega_0=\pi$ και συνεπώς:

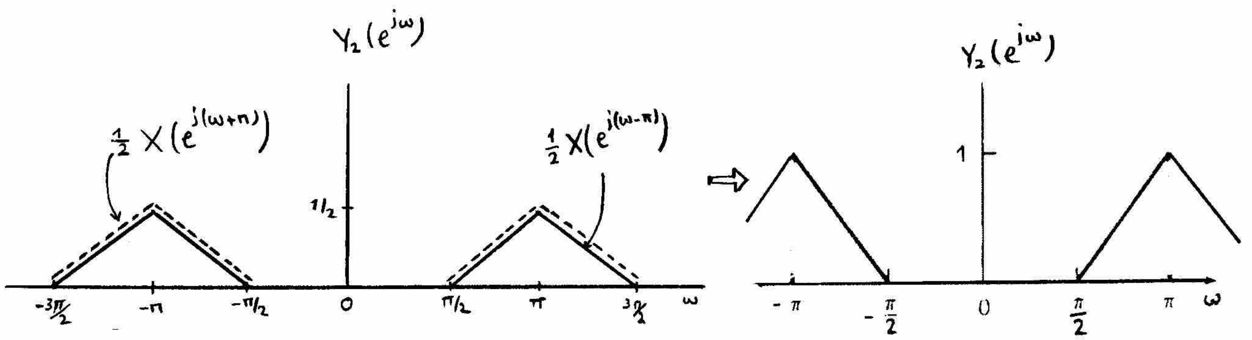
$$Y_2(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}X(e^{j(\omega+\pi)}) + \frac{1}{2}X(e^{j(\omega-\pi)})$$



(a)



(b)



(c)

Θυμηθείτε ότι η $X(e^{j\omega})$, όπως και οι μετατοπισμένες $X(e^{j(\omega+\omega_0)})$ είναι περιοδικές με περίοδο 2π.

DTFT

$$\boxed{\text{Ιδιότητα Συνέλιξης: } y(n) = x(n) * h(n) \xleftrightarrow{F} Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \cdot H(e^{j\omega})}$$

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί η έξοδος $y(n)$ ΓΧΑ συστήματος διακριτού χρόνου του οποίου η κρουστική απόκριση είναι $h(n) = \alpha^n u(n)$, $|\alpha|<1$ και στο οποίο εφαρμόζεται η είσοδος $x(n) = b^n u(n)$, $|b|<1$, όπου $\alpha \neq b$.

ΛΥΣΗ

$$x(n) \longrightarrow \boxed{h(n)} \longrightarrow y(n) \quad \xleftrightarrow{F} \quad X(e^{j\omega}) \longrightarrow \boxed{H(e^{j\omega})} \longrightarrow Y(e^{j\omega})$$

$$y(n) = x(n) * h(n) \qquad\qquad Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \cdot H(e^{j\omega})$$

Έχουμε ήδη υπολογίσει τον DTFT των σημάτων $x(n)$ και $h(n)$:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}} \qquad\qquad X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-b e^{-j\omega}}$$

Συνεπώς

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) \cdot X(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1-\alpha e^{-j\omega})(1-b e^{-j\omega})} \qquad (1)$$

Για να υπολογίσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό του $Y(e^{j\omega})$ είναι προτιμότερο να το αναλύσουμε σε μερικά κλάσματα.

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{A}{1-\alpha e^{-j\omega}} + \frac{B}{1-b e^{-j\omega}} \qquad (2)$$

Εξισώνοντας τα δεξιά μέλη των (1) και (2) βρίσκουμε ότι:

$$A = \frac{\alpha}{\alpha - b}, \qquad B = \frac{-b}{\alpha - b}$$

Με βάση την ιδιότητα της γραμμικότητας υπολογίζουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό:

$$y(n) = A\,\alpha^n u(n) + B\, b^n u(n) =$$

$$= \frac{1}{\alpha - b}\left[\alpha^{n+1} u(n) - b^{n+1} u(n)\right] =$$

$$= \frac{\alpha}{\alpha - b}\, \alpha^n u(n) - \frac{b}{\alpha - b}\, b^n u(n)$$

Παρατήρηση: Παρατηρούμε ότι η έξοδος του συστήματος περιέχει όρους της ίδιας αλγεβρικής μορφής με τους όρους της εισόδου και της κρουστικής του συστήματος.

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί ο DTFT ενός ΣΔΧ του οποίου η κρουστική απόκριση ισούται με $h(n) = \delta(n-n_0)$.

ΛΥΣΗ Από τον ορισμό του DTFT βρίσκουμε ότι:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n-n_0) e^{-j\omega n} = e^{-j\omega n_0}$$

Συνεπώς $Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) \cdot X(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$

Παρατήρηση: 1. Το αποτέλεσμα που υπολογίσαμε είναι αναμενόμενο, αφού στο πεδίο του χρόνου η συνέλιξη οποιουδήποτε σήματος $x(n)$ με την $\delta(n-n_0)$ δίνει $y(n) = x(n-n_0)$, οπότε από την ιδιότητα της ολίσθησης στον χρόνο: $x(n-n_0) \longleftrightarrow e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$

2. Παρατηρούμε επίσης ότι η απόκριση συχνότητας $H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_0}$ που αντιστοιχεί σε μια καθαρή ολίσθηση, έχει μέτρο ίσο με τη μονάδα για <u>όλες</u> τις συχνότητες και φάση που μεταβάλλεται γραμμικά με τη συχνότητα ω, αφού $\varphi = -\omega n_0$, όπου φ η φάση.

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί η συνέλιξη των ακολουθιών

$$x_1(n) = x_2(n) = \{1, \underset{\uparrow}{1}, 1\}$$

ΛΥΣΗ

Α' τρόπος

$$X_1(e^{j\omega}) = X_2(e^{j\omega}) = 1+2\cos\omega$$

Άρα

$$X(e^{j\omega}) = X_1(e^{j\omega})\cdot X_2(e^{j\omega}) =$$
$$=(1+2\cos\omega)^2 =$$
$$= 3+4\cos\omega+2\cos 2\omega =$$
$$= 3+2(e^{j\omega}+e^{-j\omega})+(e^{j2\omega}+e^{-j2\omega})$$

Ο αντίστροφος DTFT του $X(e^{j\omega})$ θα μας δώσει το ζητούμενο αποτέλεσμα:

$$x(n)=\{1, 2, \underset{\uparrow}{3}, 2, 1\}$$

Β' τρόπος

$$x_1(n) = \delta(n+1)+\delta(n)+\delta(n-1) = x_2(n)$$

Ο DTFT των $x_1(n)$ και $x_2(n)$ ισούται

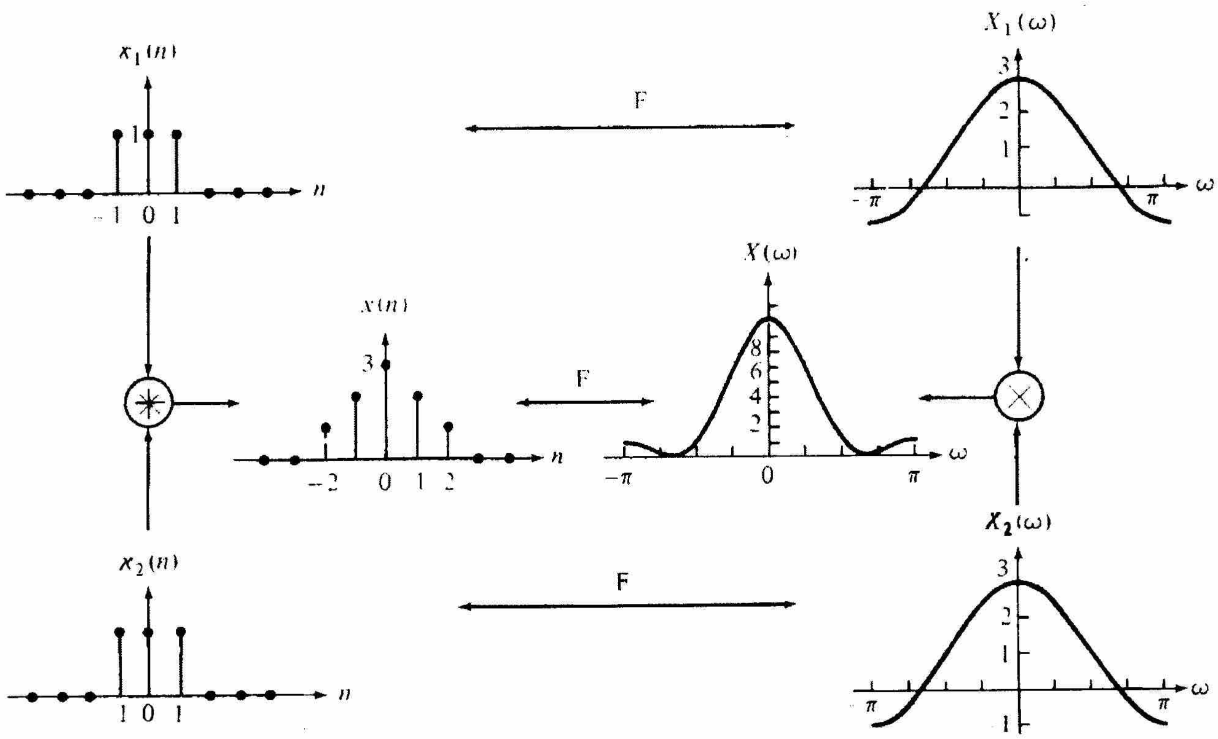
$$X_1(e^{j\omega}) = X_2(e^{j\omega}) = e^{j\omega}+1+e^{-j\omega}$$

Άρα $X(e^{j\omega}) = X_1(e^{j\omega})\cdot X_2(e^{j\omega}) =$

$$=(1+e^{j\omega}+e^{-j\omega})^2 =$$
$$= 1+e^{j2\omega}+e^{-j2\omega}+2e^{j\omega}+$$
$$+2e^{-j\omega}+2\underbrace{e^{j\omega}e^{-j\omega}}_{1} =$$
$$= 3+2(e^{j\omega}+e^{-j\omega})+(e^{j2\omega}+e^{-j2\omega})$$

οπότε τελικά:

$$x(n)=\{1, 2, \underset{\uparrow}{3}, 2, 1\}$$



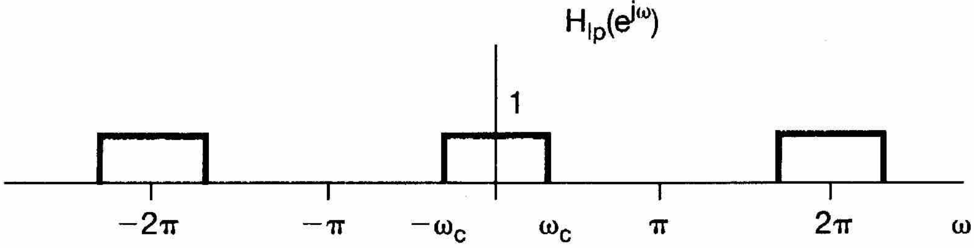
ΑΣΚΗΣΗ Έστω ιδανικό βαθυπερατό (lowpass) φίλτρο με συχνότητα αποκοπής ω_c (σχήμα α). Η απόκριση συχνότητας αυτού είναι $H_{lp}(e^{j\omega})$ και η κρουστική του απόκριση $h_{lp}(n)$. Ισχύει ότι $h_{lp}(n) \xleftrightarrow{F} H_{lp}(e^{j\omega})$.

Να υπολογιστεί η κρουστική απόκριση του υψηπερατού (highpass) φίλτρου με συχνότητα αποκοπής $\pi-\omega_c$.

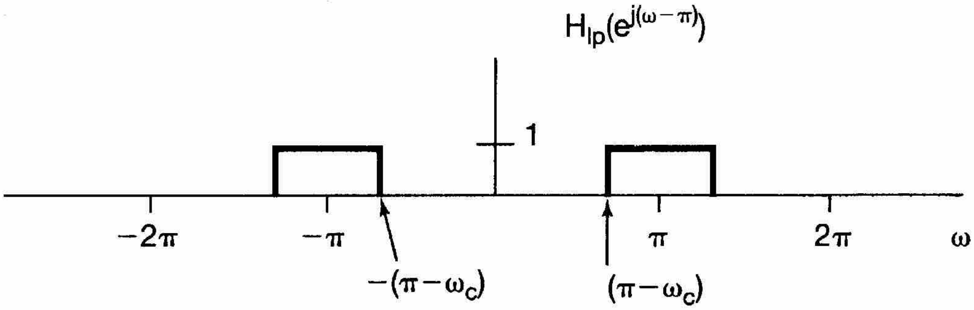
ΛΥΣΗ Η απόκριση συχνότητας του υψηπερατού προκύπτει από την απόκριση συχνότητας του βαθυπερατού φίλτρου με ολίσθηση στη συχνότητα κατά π. (Βλ. σχ. b).

Δηλαδή
$$H_{hp}(e^{j\omega}) = H_{lp}(e^{j(\omega-\pi)})$$

Από την ιδιότητα της ολίσθησης στη συχνότητα καταλαβαίνουμε ότι στο πεδίο του χρόνου θα έχουμε: $h_{hp}(n) = e^{j\pi n} h_{lp}(n) = (-1)^n h_{lp}(n)$



(a)

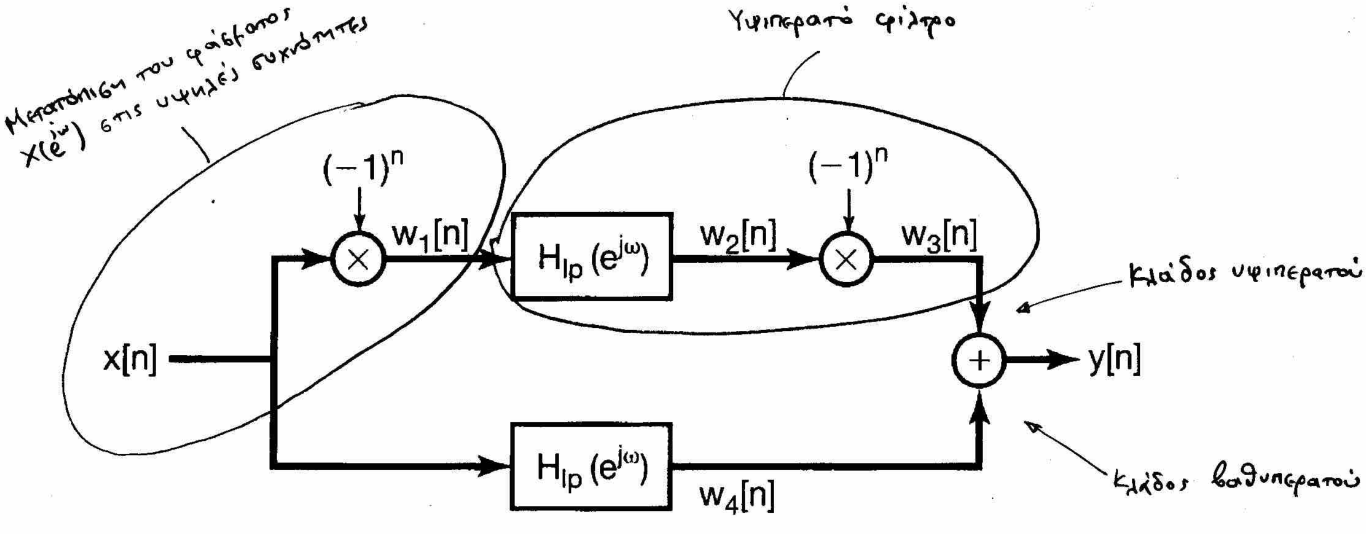


(b)

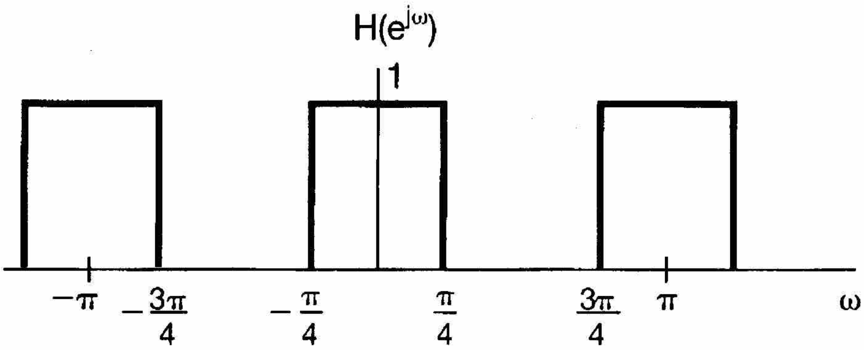
Σημείωση: Η απόκριση συχνότητας ενός ΓΧΑ συστήματος ισούται με τον μετασχηματισμό Fourier της κρουστικής απόκρισης του συστήματος.

$$h(n) \xleftrightarrow{F} H(e^{j\omega})$$

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί η συνολική απόκριση συχνότητας του συστήματος του σχήματος (α), όταν $H_{lp}(e^{j\omega})$ είναι ΓΧΑ βαθυπερατά συστήματα (φίλτρα) με συχνότητα αποκοπής $\omega_c = \frac{\pi}{4}$.



(a)



(b)

ΛΥΣΗ Αρχίζοντας από τον άνω κλάδο του συστήματος, και λαμβάνοντας υπόψη ότι $(-1)^n = e^{j\pi n}$, έχουμε:

$$w_1(n) = (-1)^n x(n) = e^{j\pi n} x(n) \xleftrightarrow{F} W_1(e^{j\omega}) = X\left(e^{j(\omega-\pi)}\right)$$ ← λόγω ολίσθησης στη συχνότητα

$$W_2(e^{j\omega}) = H_{lp}(e^{j\omega})\, W_1(e^{j\omega}) = H_{lp}(e^{j\omega})\, X\left(e^{j(\omega-\pi)}\right)$$ ← λόγω ιδιότητας συνέλιξης

$$W_3(e^{j\omega}) = W_2\left(e^{j(\omega-\pi)}\right) = H_{lp}\left(e^{j(\omega-\pi)}\right) X\left(e^{j(\omega-2\pi)}\right)$$

Αλλά ο DTFT είναι πάντοτε περιοδικός με περίοδο 2π, οπότε $X\left(e^{j(\omega-2\pi)}\right) = X(e^{j\omega})$.

Συνεπώς

$$W_3(e^{j\omega}) = H_{lp}\left(e^{j(\omega-\pi)}\right) \; X(e^{j\omega})$$

Από τον κάτω κλάδο έχουμε:

$$W_4(e^{j\omega}) = H_{lp}(e^{j\omega}) \; X(e^{j\omega})$$

Τελικά, λόγω της ιδιότητας της γραμμικότητας, ο DTFT της εξόδου θα είναι:

$$Y(e^{j\omega}) = W_4(e^{j\omega}) + W_3(e^{j\omega}) =$$

$$= \underbrace{\left[H_{lp}(e^{j\omega}) + H_{lp}\left(e^{j(\omega-\pi)}\right)\right]}_{H(e^{j\omega})} \; X(e^{j\omega})$$

Η συνολική απόκριση συχνότητας του συστήματος είναι:

$$H(e^{j\omega}) = \underbrace{H_{lp}(e^{j\omega})}_{\text{lowpass}} + \underbrace{H_{lp}\left(e^{j(\omega-\pi)}\right)}_{\text{highpass}}$$

Το σύστημα αυτό επιτρέπει να διέρχονται οι χαμηλές και υψηλές συχνότητες, ενώ αποκόπτει τις ενδιάμεσες συχνότητες από $\pi/4$ μέχρι $3\pi/4$.
Πρόκειται δηλαδή για ένα φίλτρο απόρριψης συχνοτήτων (bandstop), με περιοχή απόρριψης $\pi/4 < |\omega| < 3\pi/4$.

ΘΕΩΡΗΜΑ PARSEVAL

Για το 2π-περιοδικό πεπερασμένης ενέργειας ΣΔΧ ισχύει:

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 \, d\omega$$

Απόδειξη: Η ενέργεια του ΣΔΧ $x(n)$ ορίζεται ως $E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 \Rightarrow$

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, x^*(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X^*(e^{j\omega})\, e^{-j\omega n}\, d\omega\right]$$

και εναλλάσσοντας την σειρά της ολοκλήρωσης με την άθροιση έχουμε:

$$E_x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X^*(e^{j\omega}) \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, e^{-j\omega n}\right] d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X^*(e^{j\omega}) \cdot X(e^{j\omega})\, d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 \, d\omega$$

ΦΑΣΜΑ ΕΝΕΡΓΕΙΑΚΗΣ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑΣ

Το φάσμα $X(e^{j\omega})$, γενικά, είναι μια μιγαδική συνάρτηση της συχνότητας και μπορεί να εκφραστεί ως

$$X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})|\, e^{j\theta(\omega)}$$

όπου $\theta(\omega) = \angle X(e^{j\omega})$ η φάση του φάσματος και $|X(e^{j\omega})|$ το μέτρο του.

Όπως και στην περίπτωση των ΣΣΧ, η ποσότητα

$$S_{xx}(\omega) = |X(e^{j\omega})|^2$$

αντιπροσωπεύει την κατανομή της ενέργειας ως συνάρτηση της συχνότητας και ονομάζεται φάσμα ενεργειακής πυκνότητας. Η $S_{xx}(\omega)$ δεν περιέχει πληροφορία για τη φάση.

Όταν το ΣΔΧ $x(n)$ είναι πραγματικό, τότε $X^*(e^{j\omega}) = X(e^{-j\omega})$

ή ισοδύναμα $|X(e^{-j\omega})| = |X(e^{j\omega})| \rightsquigarrow$ άρτια συμμετρία

και $\angle X(e^{-j\omega}) = -\angle X(e^{j\omega}) \rightarrow$ περιττή συμμετρία

και άρα $S_{xx}(-\omega) = S_{xx}(\omega) \rightarrow$ άρτια συμμετρία

Από τα παραπάνω διαπιστώνουμε ότι η περιγραφή ενός πραγματικού ΣΔΧ στον χώρο των συχνοτήτων, καθορίζεται πλήρως από το φάσμα του στην περιοχή $0 \le \omega \le \pi$ ή ισοδύναμα $0 \le F \le F_s/2$.

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί ο μετασχ. Fourier και το φάσμα ενεργειακής πυκνότητας της ακολουθίας

$$x(n) = \begin{cases} A & 0 \le n \le L-1 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

ΛΥΣΗ Κατ' αρχήν παρατηρούμε ότι η ακολουθία είναι αθροίσιμη κατ' απόλυτη τιμή:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| = \sum_{n=0}^{L-1} |A| = |A|L < \infty$$

Άρα ο μετασχηματισμός Fourier υπάρχει. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι το σήμα είναι πεπερασμένης ενέργειας: $E_x = |A|^2 L$.

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{L-1} A\, e^{-j\omega n} = A\, \frac{1-e^{-j\omega L}}{1-e^{-j\omega}} = A\, e^{-j\frac{\omega}{2}(L-1)}\, \frac{\sin\left(\frac{\omega L}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$

Για $\omega = 0 \rightsquigarrow X(e^{j\omega}) = AL$ (χρήση l'Hospital)

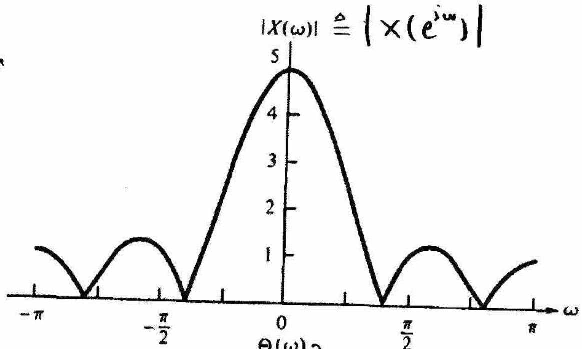
Το μέτρο ισούται με
$$|X(e^{j\omega})| = \begin{cases} |A|L & \text{για } \omega = 0 \\ |A| \left| \dfrac{\sin\left(\frac{\omega L}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} \right| & \text{αλλού} \end{cases}$$

και η φάση (*) ισούται με
$$\angle X(e^{j\omega}) = \angle A - \frac{\omega}{2}(L-1) + \angle \frac{\sin\left(\frac{\omega L}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$

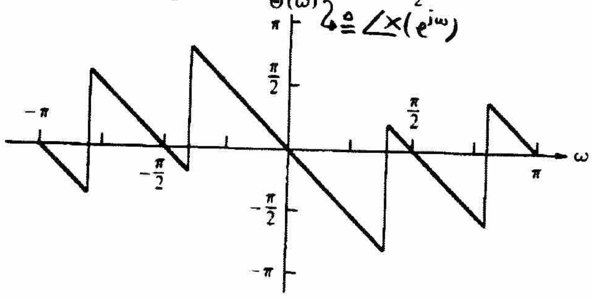
Το φάσμα ενεργ. πυκνότητας ισούται με το τετράγωνο του μέτρου.

Το μέτρο και η φάση για $A=1$ και $L=5$

(a)



(b)



(*) Σημείωση: Η φάση ενός πραγματικού είναι μηδέν εάν αυτός είναι θετικός και π εάν αυτός είναι αρνητικός.

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί και να σχεδιαστεί το φάσμα ενεργειακής πυκνότητας $S_{xx}(\omega)$ του ΣΔΧ $x(n)=\alpha^n u(n)$ $\quad -1<\alpha<1$ για $\alpha=-0.5$ και $\alpha=0.5$.

Λύση Αφού $|\alpha|<1$, η ακολουθία $x(n)$ είναι αθροίσιμη κατ' απόλυτη τιμή:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)| = \sum_{n=0}^{\infty}|\alpha|^n = \frac{1}{1-|\alpha|} < \infty$$

Ο DTFT της ακολουθίας $x(n)$ υπάρχει και ισούται με:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty}(\alpha e^{-j\omega})^n = \frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}$$

αφού $|\alpha e^{-j\omega}| = |\alpha| < 1$

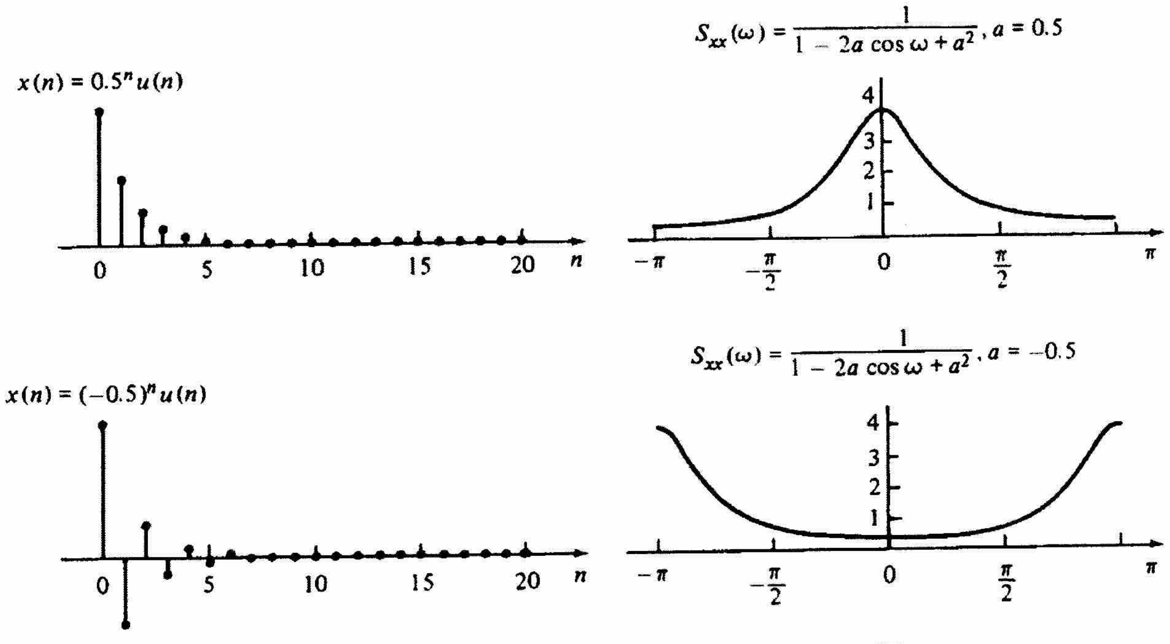
Το φάσμα ενεργειακής πυκνότητας είναι:

$$S_{xx}(\omega) = |X(e^{j\omega})|^2 = X(e^{j\omega})X^*(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}\cdot\frac{1}{1-\alpha e^{j\omega}} = \frac{1}{1-2\alpha\cos\omega+\alpha^2}$$

Σημειώστε ότι ισχύει: $S_{xx}(-\omega) = S_{xx}(\omega)$

Στο παρακάτω σχήμα δείχνονται τα σήματα για $\alpha=0.5$ και $\alpha=-0.5$ καθώς και τα αντίστοιχα φάσματα ενεργειακής πυκνότητας.

Παρατήρηση: Για $\alpha=-0.5$ το σήμα παρουσιάζει πολύ μεγαλύτερες εναλλαγές και κατά συνέπεια το φάσμα του έχει ισχυρότερες υψηλές συχνότητες!



(a) (b)

ΑΣΚΗΣΗ Υπολογίστε και σχεδιάστε το πραγματικό μέρος $X_R(e^{j\omega})$, το φανταστικό μέρος $X_I(e^{j\omega})$, το μέτρο $|X(e^{j\omega})|$ και τη φάση $\angle X(e^{j\omega})$ του μετασχηματισμού Fourier

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}} \qquad -1<\alpha<1$$

ΛΥΣΗ Πολλαπλασιάζοντας αριθμητή και παρονομαστή με τον συζυγή μιγαδικό του παρονομαστή έχουμε:

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1-\alpha e^{j\omega}}{(1-\alpha e^{-j\omega})(1-\alpha e^{j\omega})} = \frac{1-\alpha\cos\omega - j\alpha\sin\omega}{1-2\alpha\cos\omega+\alpha^2}$$

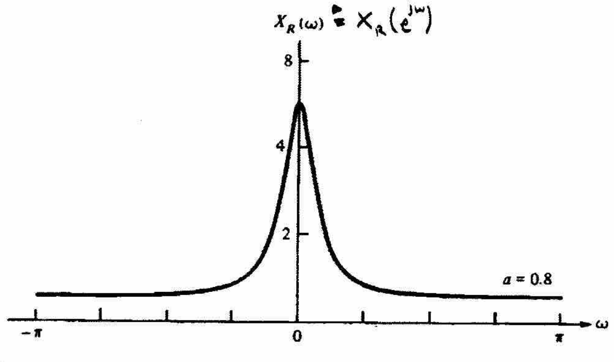
Συνεπώς:

$$X_R(e^{j\omega}) = \frac{1-\alpha\cos\omega}{1-2\alpha\cos\omega+\alpha^2} \qquad X_I(e^{j\omega}) = -\frac{\alpha\sin\omega}{1-2\alpha\cos\omega+\alpha^2}$$

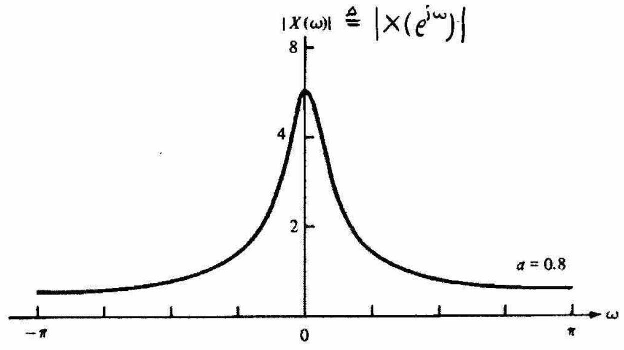
$$|X(e^{j\omega})| = \sqrt{X_R^2(\cdot)+X_I^2(\cdot)} = \frac{1}{\sqrt{1-2\alpha\cos\omega+\alpha^2}}$$

$$\angle X(e^{j\omega}) = \tan^{-1}\frac{X_I(e^{j\omega})}{X_R(e^{j\omega})} = -\tan^{-1}\frac{\alpha\cdot\sin\omega}{1-\alpha\cos\omega}$$

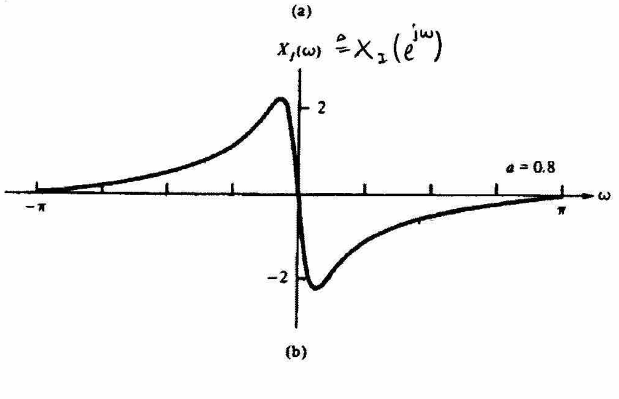
Οι γραφικές αναπαραστάσεις των φασμάτων αυτών για $\alpha=0.8$ δείχνονται στα παρακάτω σχήματα. Όπως αναφέραμε, αφού το σήμα είναι πραγματικό (real), το πραγματικό μέρος και το μέτρο του φάσματος είναι άρτιες συναρτήσεις, ενώ το φανταστικό μέρος και η φάση του φάσματος είναι περιττές.



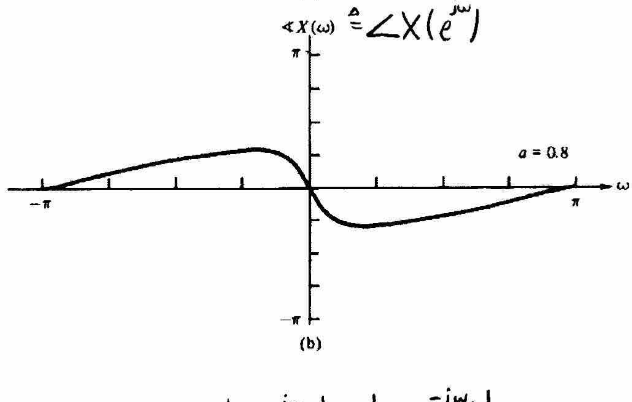
(a)



(a)



(b)



(b)

Άρτια συμμετρία: $X_R(e^{j\omega}) = X_R(e^{-j\omega})$ $\qquad |X(e^{j\omega})| = |X(e^{-j\omega})|$

Περιττή συμμετρία: $X_I(e^{j\omega}) = -X_I(e^{-j\omega})$ $\qquad \angle X(e^{j\omega}) = -\angle X(e^{-j\omega})$

Discrete-Time Fourier Transform (DTFT)

(Le's p 214)

A signal $x(t)$ is sampled at time instants $t=nT$, resulting in the discrete sampled $x(n)$. Let us look what happens to its spectrum.

$$X(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\Omega t}\, dt \qquad \leftarrow \text{Fourier transform of the continuous signal}$$

The sampling impulses are impulse or "delta" functions $\delta(t)$ spaced at intervals of T:

$$r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)$$

The sampled function is the product of the signal at the sampling instants and the sampling impulses:

$$x_s(t) = x(t)\cdot r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t)\,\delta(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\,\delta(t-nT) \quad \text{since } t=nT$$

Thus, the Fourier transform of the sampled signal is:

$$X(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_s(t)\, e^{-j\Omega t}\, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\,\delta(t-nT)\, e^{-j\Omega t}\, dt =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(nT)\,\delta(t-nT)\, e^{-j\Omega t}\, dt =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\, e^{-j\Omega nT} \qquad \text{since } \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t_k)\, f(t)\, dt = f(t_k)$$

Since $t=nT$ and $\omega = \Omega T$ the DTFT becomes:

DTFT: $$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, e^{-j\omega n} \qquad \leftarrow \text{continuous frequency spectrum}$$

IDTFT: $$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega)\, e^{j\omega n}\, d\omega$$

Note: We use to denote $X(\omega)$ as $X(e^{j\omega})$.

PROPERTIES OF THE DISCRETE-TIME FOURIER TRANSFORM

Property	Aperiodic Signal	Fourier Transform
	$x[n]$ $y[n]$	$\left.\begin{array}{l}X(e^{j\omega})\\Y(e^{j\omega})\end{array}\right\}$ periodic with period 2π
Linearity	$ax[n] + by[n]$	$aX(e^{j\omega}) + bY(e^{j\omega})$
Time Shifting	$x[n - n_0]$	$e^{-j\omega n_0}X(e^{j\omega})$
Frequency Shifting	$e^{j\omega_0 n}x[n]$	$X(e^{j(\omega-\omega_0)})$
Conjugation	$x^*[n]$	$X^*(e^{-j\omega})$
Time Reversal	$x[-n]$	$X(e^{-j\omega})$
Time Expansion	$x_{(k)}[n] = \begin{cases} x[n/k], & \text{if } n = \text{multiple of } k \\ 0, & \text{if } n \neq \text{multiple of } k \end{cases}$	$X(e^{jk\omega})$
Convolution	$x[n] * y[n]$	$X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$
Multiplication	$x[n]y[n]$	$\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\theta})Y(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$
Differencing in Time	$x[n] - x[n-1]$	$(1 - e^{-j\omega})X(e^{j\omega})$
Accumulation	$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$	$\frac{1}{1 - e^{-j\omega}}X(e^{j\omega})$ $+\pi X(e^{j0}) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$
Differentiation in Frequency	$nx[n]$	$j\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$
Conjugate Symmetry for Real Signals	$x[n]$ real	$\begin{cases} X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega}) \\ \mathcal{R}e\{X(e^{j\omega})\} = \mathcal{R}e\{X(e^{-j\omega})\} \\ \mathcal{I}m\{X(e^{j\omega})\} = -\mathcal{I}m\{X(e^{-j\omega})\} \\ \lvert X(e^{j\omega})\rvert = \lvert X(e^{-j\omega})\rvert \\ \sphericalangle X(e^{j\omega}) = -\sphericalangle X(e^{-j\omega}) \end{cases}$
Symmetry for Real, Even Signals	$x[n]$ real an even	$X(e^{j\omega})$ real and even
Symmetry for Real, Odd Signals	$x[n]$ real and odd	$X(e^{j\omega})$ purely imaginary and odd
Even-odd Decomposition of Real Signals	$x_e[n] = \mathcal{E}v\{x[n]\}$ $[x[n]$ real$]$ $x_o[n] = \mathcal{O}d\{x[n]\}$ $[x[n]$ real$]$	$\mathcal{R}e\{X(e^{j\omega})\}$ $j\mathcal{I}m\{X(e^{j\omega})\}$

Parseval's Relation for Aperiodic Signals

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \lvert x[n]\rvert^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} \lvert X(e^{j\omega})\rvert^2 d\omega$$