ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Δ2 – ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ ΣΚΟΔΡΑΣ

2023 - 2024

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί η βηματική απόκριση ενός ΓΧΑ συστήματος με κρουστική απόκριση $h(n) = u(n)$.

ΛΥΣΗ
$$\left.\begin{array}{l} x(n) = u(n) \\ h(n) = u(n) \end{array}\right\} y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u(m)\, u(n-m) = \sum_{m=0}^{n} 1 = n+1$$

Άρα $y(n) = (n+1)\, u(n) = r(n+1)$

Σημειώνεται ότι το κατώτερο όριο του αθροίσματος προήλθε από την $u(m)$ η οποία ισούται με 1 για $m \geq 0$, ενώ το ανώτερο όριο $m=n$ προέκυψε από την $u(n-m)$ η οποία γίνεται 1 για $n-m \geq 0 \Rightarrow n \geq m$, δηλ. $m \leq n$.

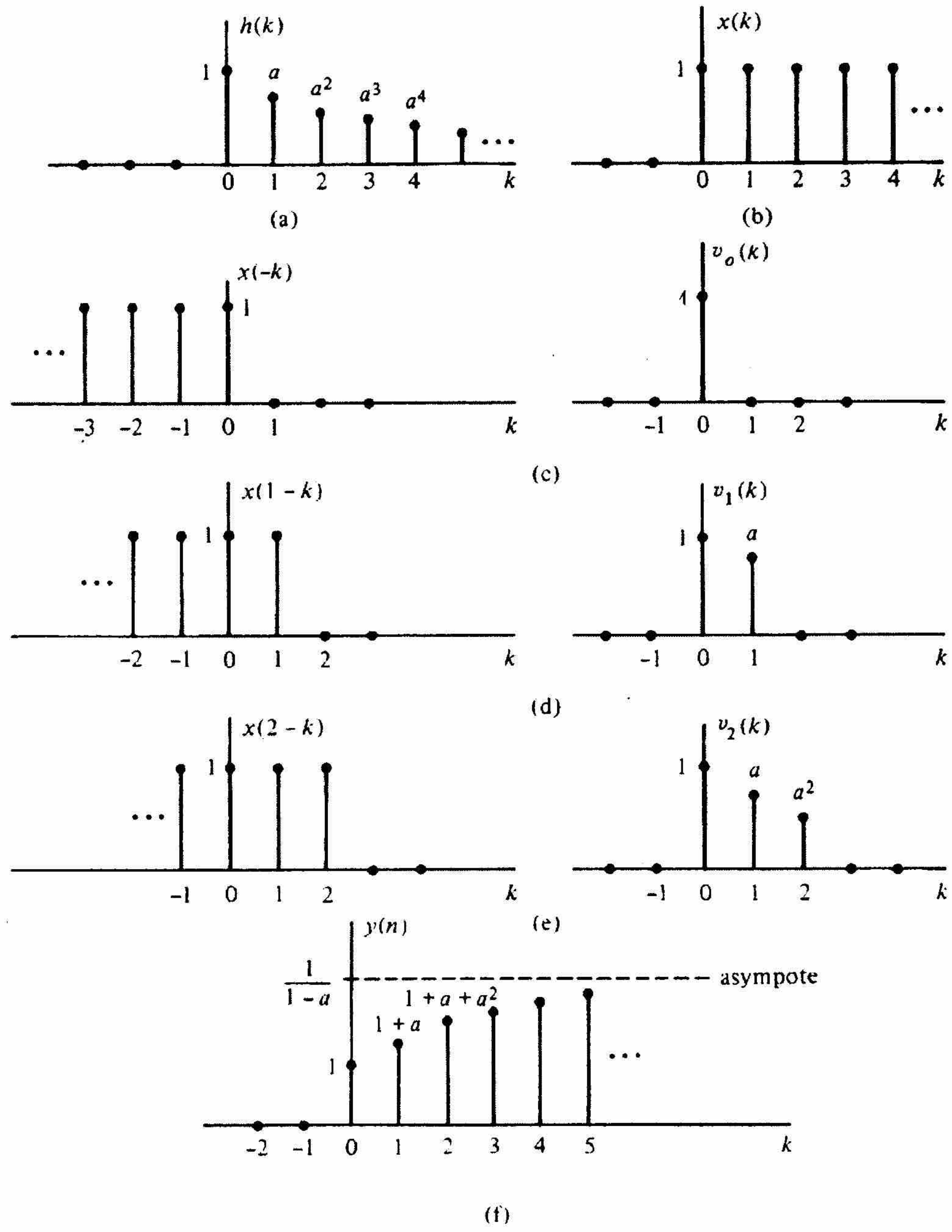
ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί η συνέλιξη των σημάτων $x(n) = u(n)$ και $h(n) = \alpha^n u(n)$, $|\alpha| < 1$.

ΛΥΣΗ
$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)\, x(n-m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha^m u(m)\, u(n-m) =$$
$$= \sum_{m=0}^{n} \alpha^m = \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}, \quad |\alpha| < 1$$

Σημειώνεται ότι στο ίδιο αποτέλεσμα θα καταλήγαμε κι αν χρησιμοποιούσαμε τον ορισμό
$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\, h(n-m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u(m)\, \alpha^{n-m} u(n-m) =$$
$$= \sum_{m=0}^{n} \alpha^{n-m} = \alpha^n \sum_{m=0}^{n} \alpha^{-m} = \alpha^n \sum_{m=0}^{n} (\alpha^{-1})^m =$$
$$= \alpha^n \frac{1-(\alpha^{-1})^{n+1}}{1-\alpha^{-1}} = \frac{\alpha^n - \alpha^n \alpha^{-n-1}}{1-\alpha^{-1}} =$$
$$= \frac{\alpha^n - \alpha^{-1}}{1-\alpha^{-1}} = \langle \text{πολ/ζω επί } \alpha \text{ αριθμητή και παρονομαστή} \rangle =$$
$$= \frac{\alpha^{n+1}-1}{\alpha - 1} = \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha} \qquad |\alpha| < 1$$

Τελικά
$$y(n) = \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha} u(n) = \underbrace{\frac{1}{1-\alpha}}_{A} u(n) + \underbrace{\frac{-\alpha}{1-\alpha}}_{B} \alpha^n u(n) = A\, x(n) + B\, h(n)$$

Παρατηρούμε ότι η έξοδος αποτελείται από όρους της ίδιας αλγεβρικής μορφής με τους όρους της εισόδου και της κρουστικής απόκρισης του συστήματος.



Άσκηση

Να υπολογιστεί η έξοδος $y(n)$ ενός ΓΧΑ συστήματος το οποίο βρίσκεται σε ηρεμία και η κρουστική απόκριση του οποίου είναι $h(n)=\alpha^n u(n)$ $|\alpha|<1$ όταν στην είσοδο εφαρμόζεται η μοναδιαία βηματική ακολουθία, δηλ. $x(n)=u(n)$.

Λύση

Οι ακολουθίες $x(n)$, $h(n)$ είναι άπειρης διάρκειας. Βασιζόμαστε στον ορισμό της συνέλιξης $y(n)=x(n)*h(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n-k)\,h(k)$ και υπολογίζοντας το αποτέλεσμα βήμα προς βήμα, όπως δείχνεται στα σχήματα (α)-(f). Οι ακολουθίες γινομένων $v_0(k)$, $v_1(k)$, $v_2(k)$ οι οποίες αντιστοιχούν στα $x(-k)h(k)$, $x(1-k)h(k)$, $x(2-k)h(k)$ φαίνονται αντίστοιχα στα σχήματα (c),(d),(e). Έτσι έχουμε τις εξόδους:

$$y(0)=1$$
$$y(1)=1+\alpha$$
$$y(2)=1+\alpha+\alpha^2$$

Για $n>0$, η έξοδος $y(n)$ ισούται με:

$$y(n)=1+\alpha+\alpha^2+\dots+\alpha^n=\frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$$

Για $n<0$, όλα τα επιμέρους γινόμενα είναι μηδέν, αφού $u(n)=0$, και επομένως $y(n)=0 \quad n<0$

Στο σχήμα (f) δίνεται η έξοδος $y(n)$ για $0<\alpha<1$.

Παρατηρείστε ότι η έξοδος αυξάνεται εκθετικά με το n. Εφόσον $|\alpha|<1$, η τελική τιμή της εξόδου καθώς το n τείνει στο άπειρο θα είναι:

$$y(\infty)=\lim_{n\to\infty} y(n)=\frac{1}{1-\alpha}$$

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί η συνέλιξη των σημάτων $g(n)=u(n-3)$ και $h(n)=\alpha^n u(n)$, $|\alpha|<1$

ΛΥΣΗ

$$y(n)=h(n)*g(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)\,g(n-m) =$$

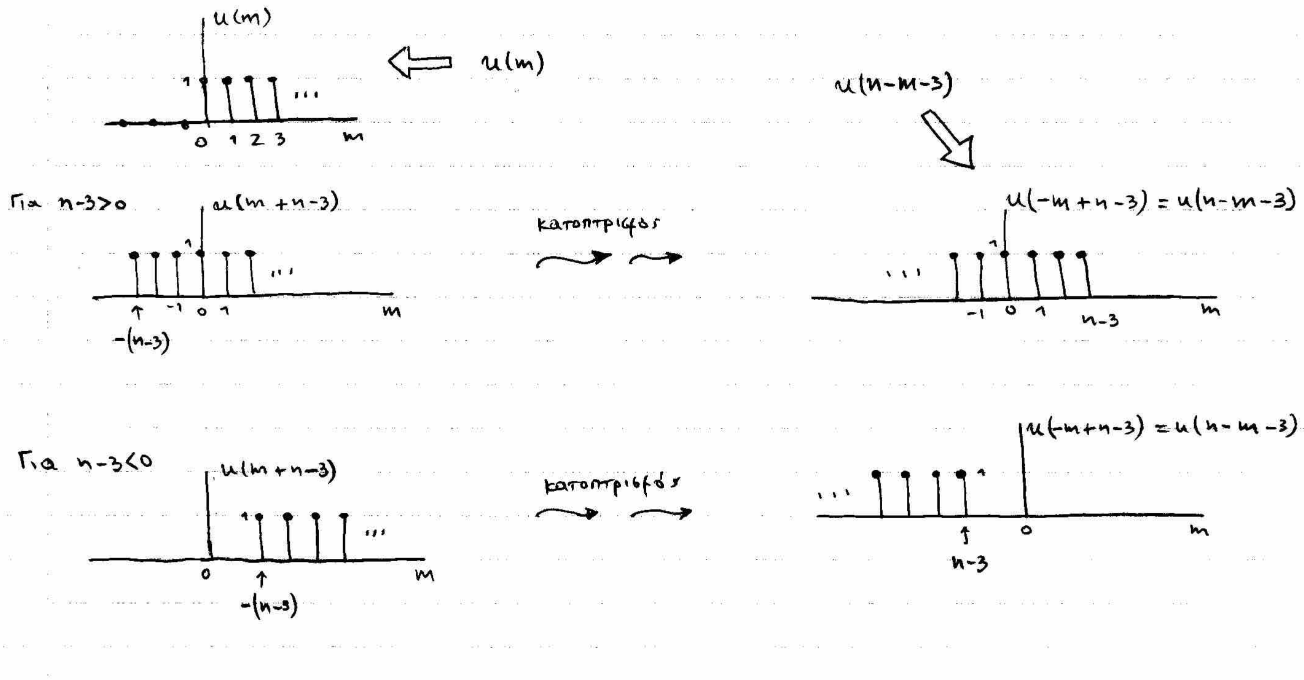
$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha^m u(m)\,u(n-m-3)=$$

$$=\sum_{m=0}^{n-3} \alpha^m = \frac{1-\alpha^{n-3+1}}{1-\alpha} = \frac{1-\alpha^{n-2}}{1-\alpha}, \quad |\alpha|<1$$

Τελικά, αφού η $h(n)$ έχει τιμές διάφορες του μηδενός για $n\geq 0$, ενώ η $g(n)$ έχει τιμές διάφορες του μηδενός για $n\geq 3$, η συνέλιξή τους θα έχει τιμές διάφορες του μηδενός για $n\geq 3$ και θα γράφεται ως:

$$y(n)=\frac{1-\alpha^{n-2}}{1-\alpha}\,u(n-3)$$

<u>Γραφικός προσδιορισμός των ορίων της σειράς</u>



Το γινόμενο $u(m)\cdot u(n-m-3)$ είναι διάφορο του μηδενός μόνο για τιμές του m μεταξύ 0 και $n-3$, αφού $u(m)=1$ για $m\geq 0$ και $u(n-m-3)=1$ για $n-m-3\geq 0 \Rightarrow m\leq n-3$.

Σημείωση: Σε προηγούμενη άσκηση είδαμε ότι $u(n)*\alpha^n u(n) = \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}u(n)$. Με βάση την ιδιότητα της ολίσθησης στον χρόνο μπορούμε εύκολα να δούμε ότι:

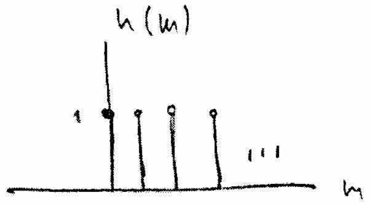
$$u(n-3)*\alpha^n u(n) = \frac{1-\alpha^{(n-3)+1}}{1-\alpha}u(n-3) = \frac{1-\alpha^{n-2}}{1-\alpha}u(n-3)$$

ΓΡΑΦΙΚΟΣ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ $h(n-m)$

ΓΙΑ $h(n) = u(n)$

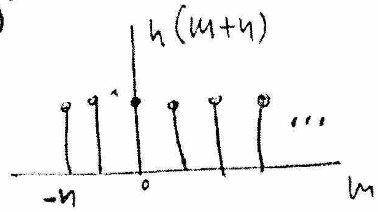
Βήμα 0

(Ορισμός m ως ανεξάρτητης μεταβλητής)

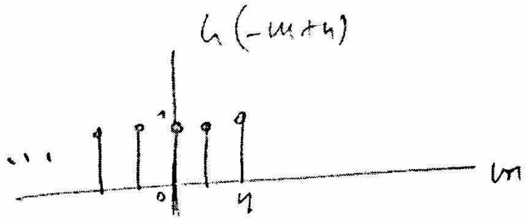


Βήμα 1

(Ολίσθηση)

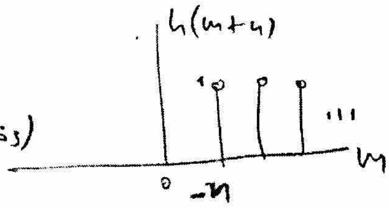


$n > 0$

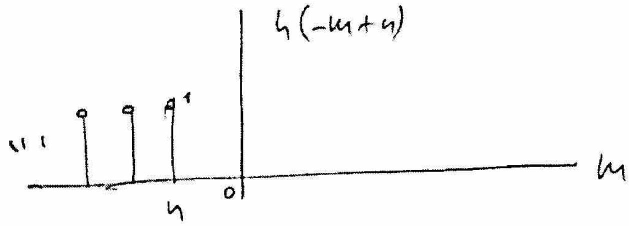


Βήμα 2

(Κατοπτρισμός)

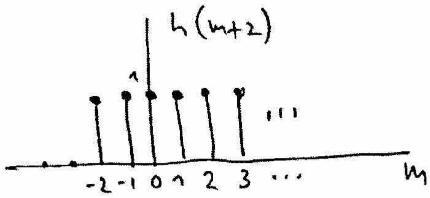


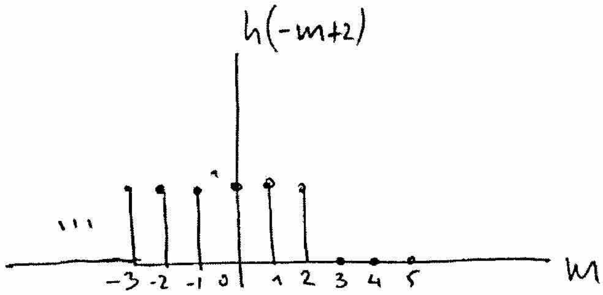
$n < 0$



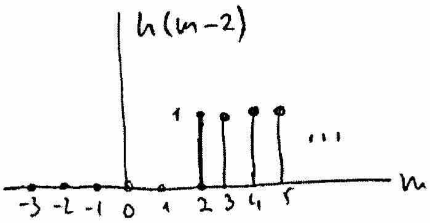
Παράδειγμα για $n=2$ και $n=-2$

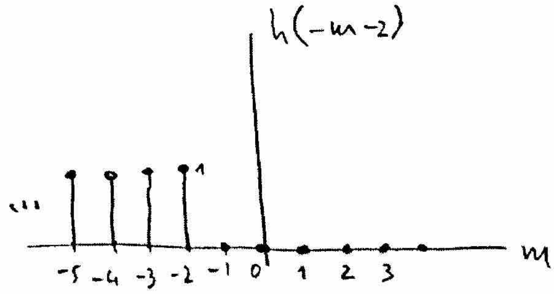
Έστω $n = 2$





Έστω $n = -2$





ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί η συνέλιξη των σημάτων $x(n)=h(n)=\alpha^n u(n)$, $\alpha<1$.

ΛΥΣΗ
$$y(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\, h(n-m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha^m u(m)\, \alpha^{n-m} u(n-m) =$$
$$=\sum_{m=0}^{n} \alpha^m \cdot \alpha^{n-m} = \sum_{m=0}^{n} \alpha^n = \alpha^n \sum_{m=0}^{n} 1 =$$
$$=\alpha^n (n+1)$$

Άρα $y(n)=(n+1)\alpha^n u(n)$

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί η συνέλιξη των σημάτων $x(n)=(0.8)^n u(n)$ και $h(n)=(0.4)^n u(n)$.

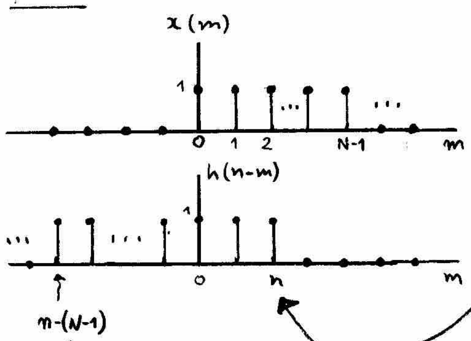
ΛΥΣΗ
$$y(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\, h(n-m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (0.8)^m u(m)\, (0.4)^{n-m} u(n-m) =$$
$$=\sum_{m=0}^{n} (0.8)^m (0.4)^{n-m} =$$
$$=\sum_{m=0}^{n} (2\cdot 0.4)^m (0.4)^{n-m} =$$
$$=\sum_{m=0}^{n} 2^m \cdot (0.4)^n = (0.4)^n \sum_{m=0}^{n} 2^m =$$
$$=(0.4)^n \frac{1-2^{n+1}}{1-2} = (0.4)^n \left(2^{n+1}-1\right)$$

Άρα $y(n)=(0.4)^n\left(2^{n+1}-1\right) u(n)$

ΑΣΚΗΣΗ

Να υπολογιστεί η συνέλιξη των ακολουθιών $x(n)=h(n)=u(n)-u(n-N)$, $N>0$.

ΛΥΣΗ



Διακρίνουμε 4 περιπτώσεις.

Περίπτωση 1η: $n<0$ → Δεν υπάρχει επικάλυψη και άρα $y(n)=0$

Περίπτωση 2η: $0\le n\le N-1$ → Υπάρχει επικάλυψη στα $n+1$ σημεία, δηλ. από το 0 μέχρι και το n.

$$y(n)=\sum_{m=0}^{n}(1)\cdot(1)=n+1$$

Περίπτωση 3η: $0\le n-(N-1)\le N-1 \Rightarrow N-1\le n\le 2N-2$

Υπάρχει επικάλυψη

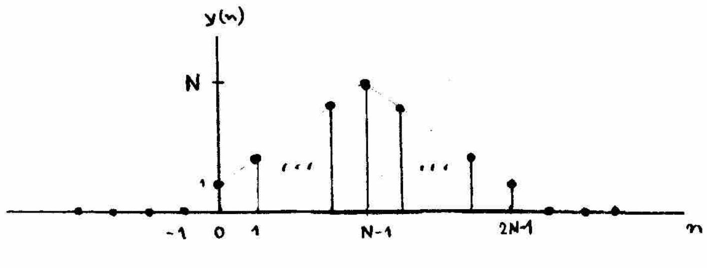
$$y(n)=\sum_{m=n-(N-1)}^{N-1}(1)(1)=(N-1)-\big(n-(N-1)\big)+1=$$
$$=2N-1-n$$

Περίπτωση 4η: $n-(N-1)>N-1 \Rightarrow n>2N-2$

$\nexists$ επικάλυψη και άρα $y(n)=0$

Συμπερασματικά έχουμε:

$$y(n)=\begin{cases} n+1 & \text{για } 0\le n\le N-1 \\ 2N-1-n & \text{για } N-1\le n\le 2N-2 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$



ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΣΥΝΕΛΙΞΗΣ

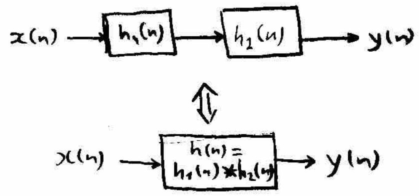
1. $\delta(n) * \delta(n) = \delta(n)$ $\qquad$ $\delta(n) * x(n) = x(n)$ $\qquad$ $\delta(n-n_0) * x(n) = x(n-n_0)$

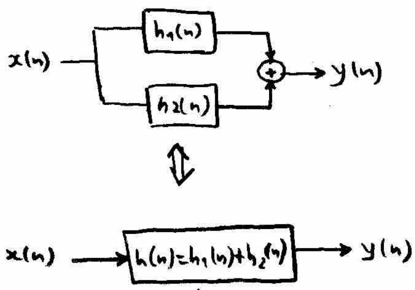
2. $x(n) * u(n) = \sum_{m=-\infty}^{n} x(m)$ ← Υπενθυμίζεται ο ορισμός $u(n) = \sum_{m=-\infty}^{n} \delta(m)$

3. Εάν $x(n) * h(n) = y(n)$, τότε
$x(n-n_0) * h(n) = x(n) * h(n-n_0) = y(n-n_0)$ } Με άλλα λόγια, εάν η $x(n)$ ή η $h(n)$ είναι ολισθημένη κατά n_0, τότε θα είναι και η $y(n)$.

4. Η συνέλιξη δύο αριστερόπλευρων (δεξιόπλευρων) σημάτων είναι επίσης αριστερόπλευρη (δεξιόπλευρη).

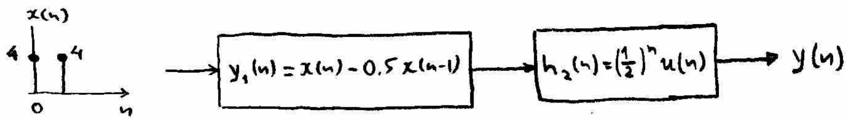
5.





Σύνδεση σε σειρά (cascade) $\qquad$ Σύνδεση παράλληλα (parallel)

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί η συνολική κρουστική απόκριση, καθώς και η έξοδος του συστήματος.



ΛΥΣΗ Το πρώτο σύστημα περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών $y_1(n) = x(n) - 0.5\,x(n-1)$. Η κρουστική του απόκριση προκύπτει άμεσα εάν αντικαταστήσουμε $x(n) = \delta(n)$ και $y_1(n) = h_1(n)$. Άρα
$h_1(n) = \delta(n) - 0.5\,\delta(n-1)$

Η συνολική κρουστική απόκριση $h(n)$ ισούται με τη συνέλιξη των δύο κρουστικών, δηλαδή

$$h(n) = h_1(n) * h_2(n) = [\delta(n) - 0.5\,\delta(n-1)] * \left[\left(\tfrac{1}{2}\right)^n u(n)\right] =$$
$$= \delta(n) * \left(\tfrac{1}{2}\right)^n u(n) - 0.5\,\delta(n-1) * \left(\tfrac{1}{2}\right)^n u(n) =$$
$$= \left(\tfrac{1}{2}\right)^n u(n) - 0.5\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1} u(n-1) =$$
$$= \left(\tfrac{1}{2}\right)^n [u(n) - u(n-1)] = \left(\tfrac{1}{2}\right)^n \delta(n) = \delta(n)$$

Η έξοδος $y(n)$ του όλου συστήματος ισούται με την είσοδο $x(n)$
$$y(n) = h(n) * x(n) = \delta(n) * x(n) = x(n)$$
Παρατηρούμε ότι το δεύτερο σύστημα είναι το αντίστροφο του πρώτου.

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί $y(n) = x(n) * h(n)$, όπου

$$x(n) = u(n) - u(n-5)$$

$$h(n) = u(n-2) - u(n-8) + u(n-11) - u(n-17)$$

ΛΥΣΗ

$$x(n) = \{\underset{\uparrow}{1}, 1, 1, 1, 1\}$$

$$h(n) = \{\underbrace{\underset{\uparrow}{0}, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1}_{\tilde{h}(n)}, 0, \underbrace{0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1}_{\tilde{h}(n-9)}\} \Rightarrow h(n) = \tilde{h}(n) + \tilde{h}(n-9)$$

$$\tilde{y}(n) = x(n) * \tilde{h}(n) = \{\underset{\uparrow}{0}, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 5, 4, 3, 2, 1\}$$

Άρα $y(n) = x(n) * h(n) = x(n) * [\tilde{h}(n) + \tilde{h}(n-9)] =$

$$= x(n) * \tilde{h}(n) + x(n) * \tilde{h}(n-9) =$$

$$= \tilde{y}(n) + \tilde{y}(n-9)$$

$$\tilde{y}(n) = \{0\ 0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1\}$$

$$\tilde{y}(n-9) = \{0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1\}$$

Τελικά $y(n) = \{\underset{\uparrow}{0}\ 0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 5\ 4\ 3\ 2\ 2\ 2\ 3\ 4\ 5\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1\}$

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί γραφικά και αναλυτικά η συνέλιξη των σημάτων

$$x(n)=\begin{cases}\frac{1}{3}n, & 0\le n\le 6\\ 0 & \text{αλλού}\end{cases} \qquad h(n)=\begin{cases}1, & -2\le n\le 2\\ 0 & \text{αλλού}\end{cases}$$

ΛΥΣΗ

Γραφικά: $x(n)=\left\{\underset{\substack{\uparrow\\ n=0}}{0}\ \ \frac{1}{3}\ \ \frac{2}{3}\ \ 1\ \ \frac{4}{3}\ \ \frac{5}{6}\ \ 2\right\}$

$$h(n)=\left\{1\ \ 1\ \ \underset{\substack{\uparrow\\ n=0}}{1}\ \ 1\ \ 1\right\}$$

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & 2\\
 & & & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\
\hline
 & & & & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & 2\\
 & & & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & 2 & \\
 & & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & 2 & & \\
 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & 2 & & & \\
0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & 2 & & & & \\
\hline
0 & \frac{1}{3} & \underset{\substack{\uparrow\\ n=0}}{1} & 2 & \frac{10}{3} & 5 & \frac{20}{3} & 6 & 5 & \frac{11}{3} & 2
\end{array} \quad \leftarrow y(n)$$

Αναλυτικά: $x(n) = 0\,\delta(n) + \frac{1}{3}\delta(n-1) + \frac{2}{3}\delta(n-2) + 1\,\delta(n-3) + \frac{4}{3}\delta(n-4) + \frac{5}{3}\delta(n-5) + 2\,\delta(n-6)$

$$h(n) = \delta(n+2) + \delta(n+1) + \delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2)$$

$$y(n) = x(n) * h(n) =$$
$$= \left[\frac{1}{3}\delta(n-1) + \frac{2}{3}\delta(n-2) + \delta(n-3) + \frac{4}{3}\delta(n-4) + \frac{5}{3}\delta(n-5) + 2\,\delta(n-6)\right] *$$
$$\left[\delta(n+2) + \delta(n+1) + \delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2)\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\delta(n-1) * \delta(n+2) + \frac{2}{3}\delta(n-2) * \delta(n+2) + \dots + 2\,\delta(n-6) * \delta(n-2)\Big] =$$

$= \langle$ Κάνοντας χρήση της ιδιότητας της συνέλιξης

$\delta(n-m) * \delta(n-l) = \delta(n-m-l)$ καταλήγουμε στη σχέση $\rangle =$

$$= \frac{1}{3}\delta(n+1) + \delta(n) + 2\delta(n-1) + \frac{10}{3}\delta(n-2) + 5\,\delta(n-3) + \frac{20}{3}\delta(n-4) +$$
$$+ 6\,\delta(n-5) + 5\,\delta(n-6) + \frac{11}{3}\delta(n-7) + 2\,\delta(n-8)$$

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί η συνέλιξη των σημάτων $x(n)=\{4, \underset{\underset{n=0}{\uparrow}}{1}, 3\}$ και $h(n)=\{2, 5, \underset{\underset{n=0}{\uparrow}}{0}, 4\}$

ΛΥΣΗ

$h(n) \rightarrow$			2	5	0	4
$x(n) \rightarrow$				4	1	3
			6	15	0	12
		2	5	0	4	
	8	20	0	16		
$y(n) \rightarrow$	8	22	11	31	4	12
				$\uparrow$ $n=0$ $\downarrow$		

Άρα $y(n)=\{8, 22, 11, 31, 4, 12\}$

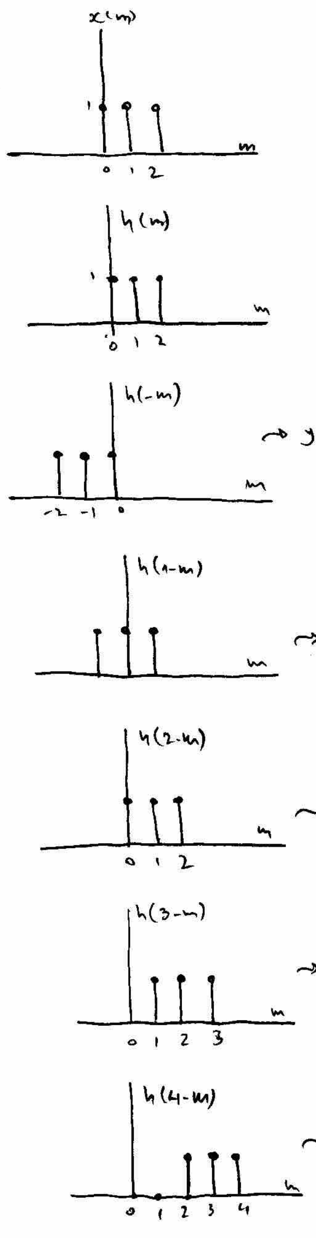
Γενικά:

1. Ο δείκτης της αρχής (δηλ. η θέση στην οποία δείχνουμε για $n=0$) της $y(n)$ ισούται με το άθροισμα των δεικτών αρχής των $x(n)$ και $h(n)$.

2. Ο δείκτης του τέλους της $y(n)$ ισούται με το άθροισμα των δεικτών τέλους των $x(n)$ και $h(n)$.

3. Το μήκος N του σήματος $y(n)$ ισούται με το άθροισμα των μηκών N_1 και N_2 των σημάτων $x(n)$ και $h(n)$ μειωμένο κατά 1, δηλ. $N=N_1+N_2-1$.

Συνέλιξη ολισθημένων ακολουθιών: Αν $y(n) = x(n) * h(n)$ τότε $y'(n) = x(n-\ell) * h(n-i) = y(n-(\ell+i))$



$\rightsquigarrow y(0) = 1\cdot 1 = 1$

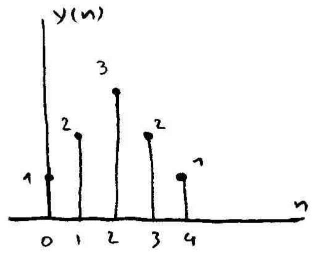
$\rightarrow y(1) = 2$

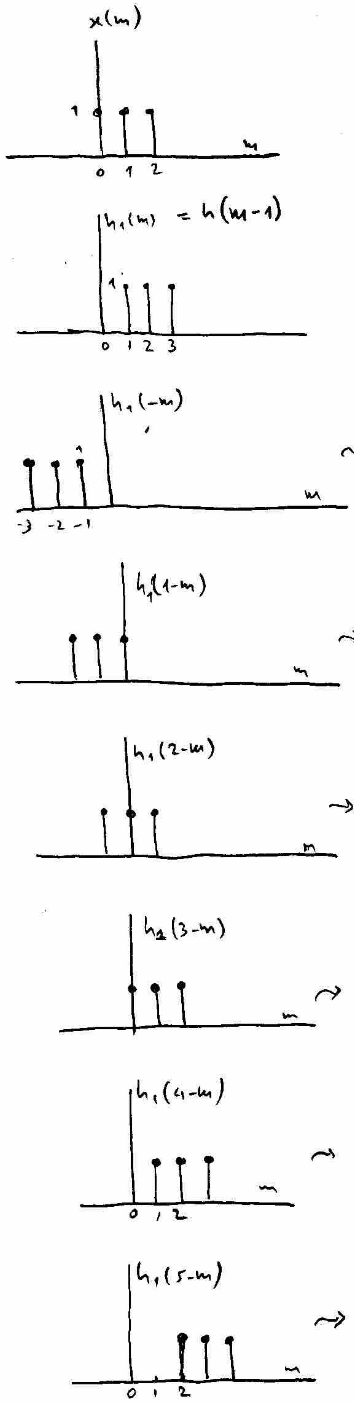
$\rightarrow y(2) = 3$

$\rightarrow y(3) = 2$

$\rightsquigarrow y(4) = 1$

Άρα





$\rightsquigarrow y(0) = 0$

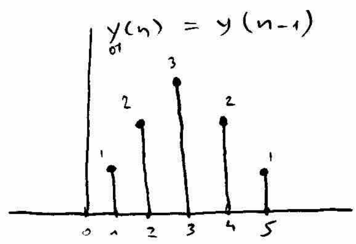
$\rightarrow y(1) = 1$

$\rightarrow y(2) = 2$

$\rightsquigarrow y(3) = 3$

$\rightsquigarrow y(4) = 2$

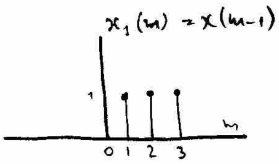
$\rightarrow y(5) = 1$

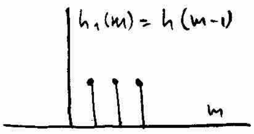


$\neq 0$

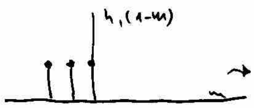
$\downarrow$

```
      1 1 1
      1 1 1
    -------
      1 1 1
    1 1 1
  1 1 1
---------
  1 2 3 2 1
```

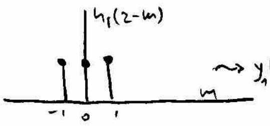




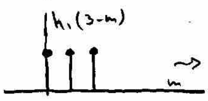
$\rightsquigarrow y_1(0) = 0$



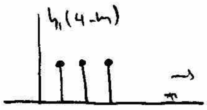
$\rightarrow y_1(1) = 0$



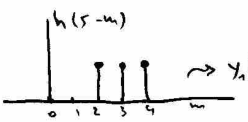
$\rightsquigarrow y_1(2) = 1$



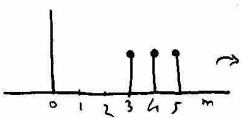
$\rightsquigarrow y_1(3) = 2$



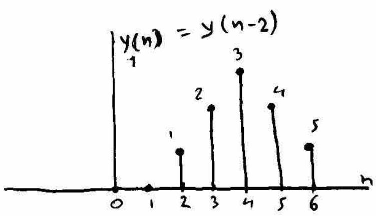
$\rightarrow y_1(4) = 3$



$\rightsquigarrow y_1(5) = 2$



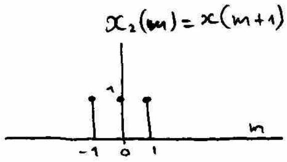
$\rightsquigarrow y_1(6) = 1$

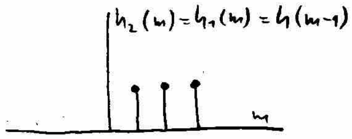


#0
↓

```
      1 1 1 0
      1 1 1 0
    ---------
      0 0 0 0
    1 1 1 0
  1 1 1 0
1 1 1 0
-------------
1 2 3 2 1 0 0
```

↑
#0





$\rightsquigarrow y_2(0) = 1$

$\rightsquigarrow y_2(1) = 2$

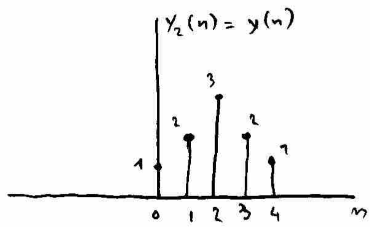
$\rightsquigarrow y_2(2) = 3$

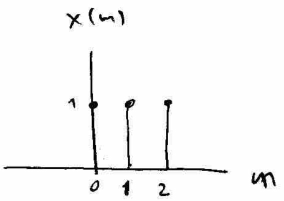
$\rightsquigarrow y_2(3) = 2$

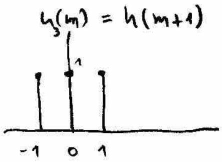
$\rightsquigarrow y_2(4) = 1$

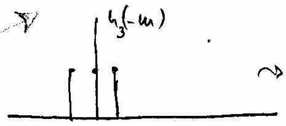
$\rightsquigarrow y_2(5) = 0$

$\rightsquigarrow y_2(6) = 0$

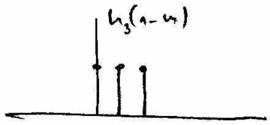




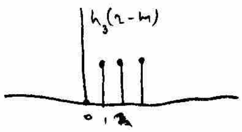




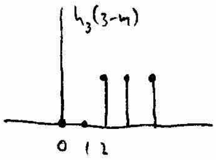
$\rightsquigarrow y_3(0) = 1 + 1 = 2$



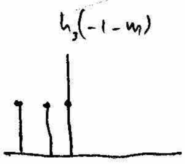
$\rightsquigarrow y_3(1) = 1+1+1 = 3$



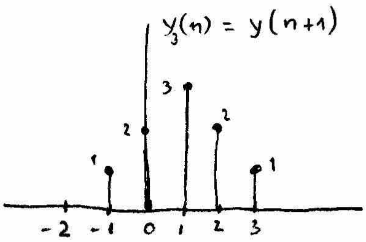
$\rightsquigarrow y_3(2) = 1+1 = 2$

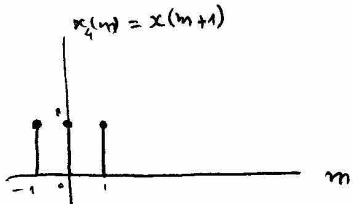


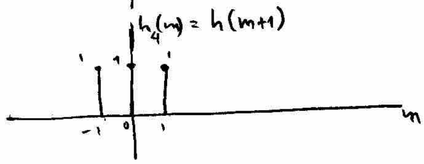
$\rightsquigarrow y_3(3) = 1$

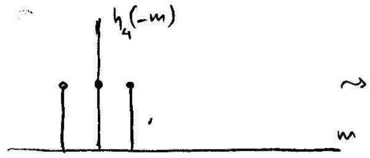


$\rightsquigarrow y_3(-1) = 1$

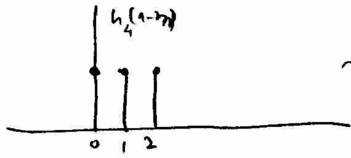




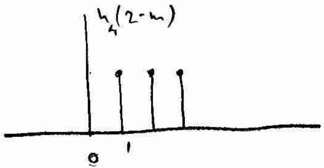




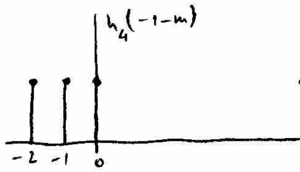
$\rightsquigarrow y_4(0) = 3$



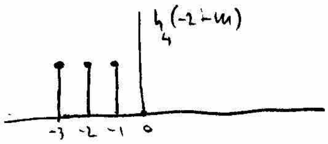
$\rightsquigarrow y_4(1) = 2$



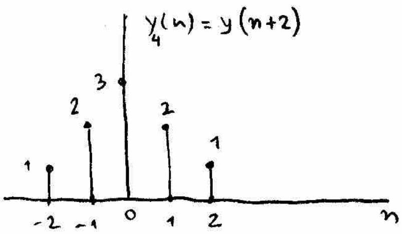
$\rightsquigarrow y_4(2) = 1$



$\rightsquigarrow y_4(-1) = 2$



$\rightsquigarrow y_4(-2) = 1$



ΓΕΝΙΚΑ

$$x(n) \longrightarrow \boxed{h(n)} \longrightarrow y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\, h(n-m)$$

A. Έστω $x_1(n) = x(n-l)$

Τότε
$$y_1(n) = x_1(n) * h(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m)\, h(n-m) =$$
$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m-l)\, h(n-m) = \langle \text{θέτω } m-l=q \rightsquigarrow m=q+l \rangle$$
$$= \sum_{q=-\infty}^{\infty} x(q)\, h(n-(q+l)) =$$
$$= \sum_{q=-\infty}^{\infty} x(q)\, h(n-l-q) =$$
$$= y(n-l)$$

B. Έστω $x_1(n) = x(n-l)$ και $h_1(n) = h(n-i)$ όπου τα l, i θετικοί ή αρνητικοί ακέραιοι (δηλαδή έχουμε καθυστέρηση ή προήγηση, αντίστοιχα).

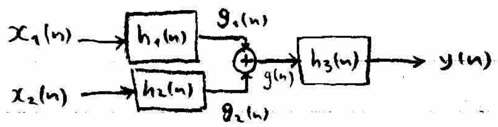
Τότε
$$y_1(n) = x_1(n) * h_1(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m)\, h_1(n-m) =$$
$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m-l)\, h(n-i-m) = \langle \text{θέτω } m-l=q \rightsquigarrow m=q+l \rangle$$
$$= \sum_{q=-\infty}^{\infty} x(q)\, h(n-i-q-l) =$$
$$= \sum_{q=-\infty}^{\infty} x(q)\, h(n-(i+l)-q) =$$
$$= y(n-\underbrace{(i+l)})$$

συνολική καθυστέρηση/προήγηση ίση με το αλγεβρικό άθροισμα των καθυστερήσεων των δύο ακολουθιών (εισόδου και κρουστικής).

Αυτό συνεπάγεται πως στην περίπτωση που η μία προηγείται κατά 1 δείγμα ενώ η άλλη καθυστερεί κατά 1 δείγμα, η ακολουθία εξόδου θα αρχίζει από τη θέση μηδέν.

Αυτό εύκολα αποδεικνύεται μέσω του μετασχ.-Z.

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογίσετε και να σχεδιάσετε την έξοδο $y(n)$ του συστήματος.



Δίνονται: $h_1(n) = h_2(n) = \delta(n)$ $\quad h_3(n) = u(n)$

$x_1(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$ $\quad x_2(n) = 2^n u(-n)$

ΛΥΣΗ [Προσοχή: Οι είσοδοι στα συστήματα $h_1(n)$ και $h_2(n)$ είναι διαφορετικές οπότε $h_{12}(n) \neq h_1(n) + h_2(n)$]

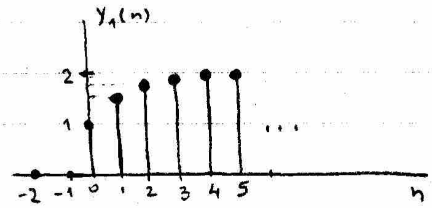
$$g_1(n) = x_1(n) * h_1(n) = x_1(n) * \delta(n) = x_1(n)$$
$$g_2(n) = x_2(n) * h_2(n) = x_2(n) * \delta(n) = x_2(n)$$

$$g(n) = g_1(n) + g_2(n)$$

$$y(n) = g(n) * h_3(n) = [g_1(n) + g_2(n)] * u(n) = \underbrace{g_1(n) * u(n)}_{y_1(n)} + \underbrace{g_2(n) * u(n)}_{y_2(n)}$$

Υπολογίζουμε τις επιμέρους συνελίξεις.

$$\rightsquigarrow y_1(n) = g_1(n) * u(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} g_1(m)\, u(n-m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^m u(m)\, u(n-m) =$$
$$= \sum_{m=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^m = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = 2\cdot\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] = 2-\left(\frac{1}{2}\right)^n$$



$$y_1(n) = \left[2-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] u(n)$$

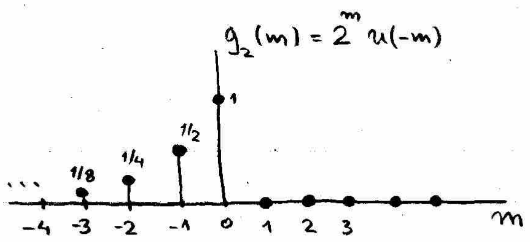
$$\rightsquigarrow y_2(n) = g_2(n) * u(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} g_2(m)\, u(n-m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} 2^m u(-m)\, u(n-m)$$

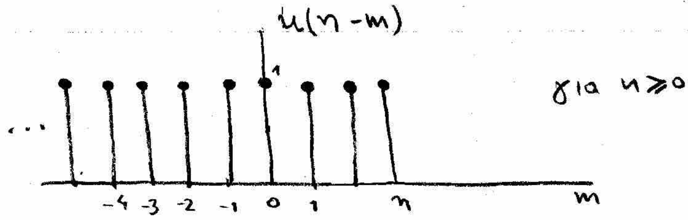
Εδώ διακρίνουμε δύο περιπτώσεις ανάλογα με το n.

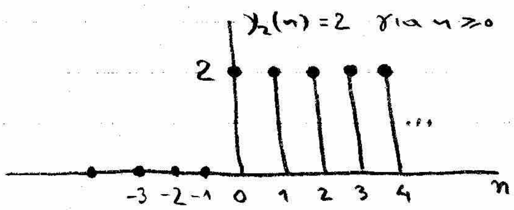
α. $n \geq 0$ [Βλ. σημείωση στο τέλος της άσκησης]

$$y_2(n) = \sum_{m=-\infty}^{0} 2^m = \langle \text{θέτω } \ell = -m \rangle =$$
$$= \sum_{\ell=0}^{\infty} 2^{-\ell} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^\ell = \frac{1}{1-1/2} = 2 = 2\,u(n)$$

Άρα η $y_2(n)$ έχει σταθερή τιμή ίση με 2 για $n \geq 0$.







β. $n<0$ [Βλ. σημείωση στο τέλος της άσκησης]

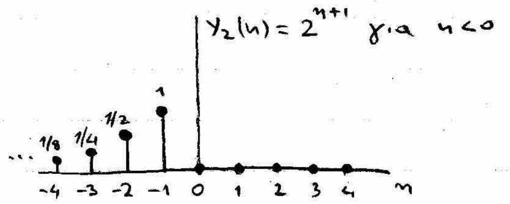
Στην περίπτωση αυτή η $g_2(m)\,u(n-m)$ έχει μη-μηδενικά δείγματα για $m \leq n$. Άρα

$$y_2(n) = \sum_{m=-\infty}^{n} 2^m = \langle \text{θέτω } l=-m \rangle =$$

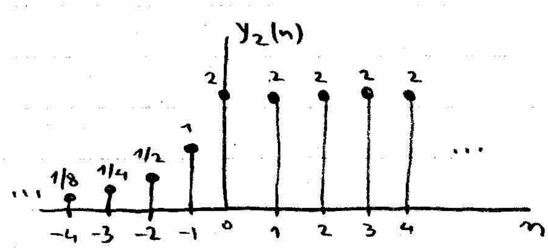
$$= \sum_{l=\infty}^{-n} 2^{-l} = \sum_{l=-n}^{\infty} \left(\tfrac{1}{2}\right)^l = \langle \text{θέτω } r=l+n \rangle =$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \left(\tfrac{1}{2}\right)^{r-n} = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{-n} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\tfrac{1}{2}\right)^r = 2^n \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2^n \cdot 2 = 2^{n+1}$$

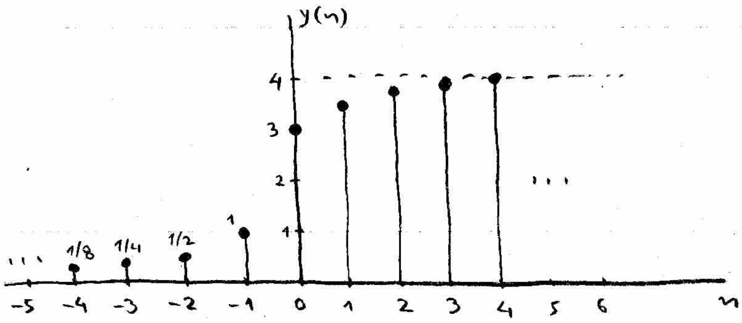
Συνεπώς για $n<0$ έχουμε $y_2(n) = 2^{n+1}$, όπως φαίνεται στο σχήμα.



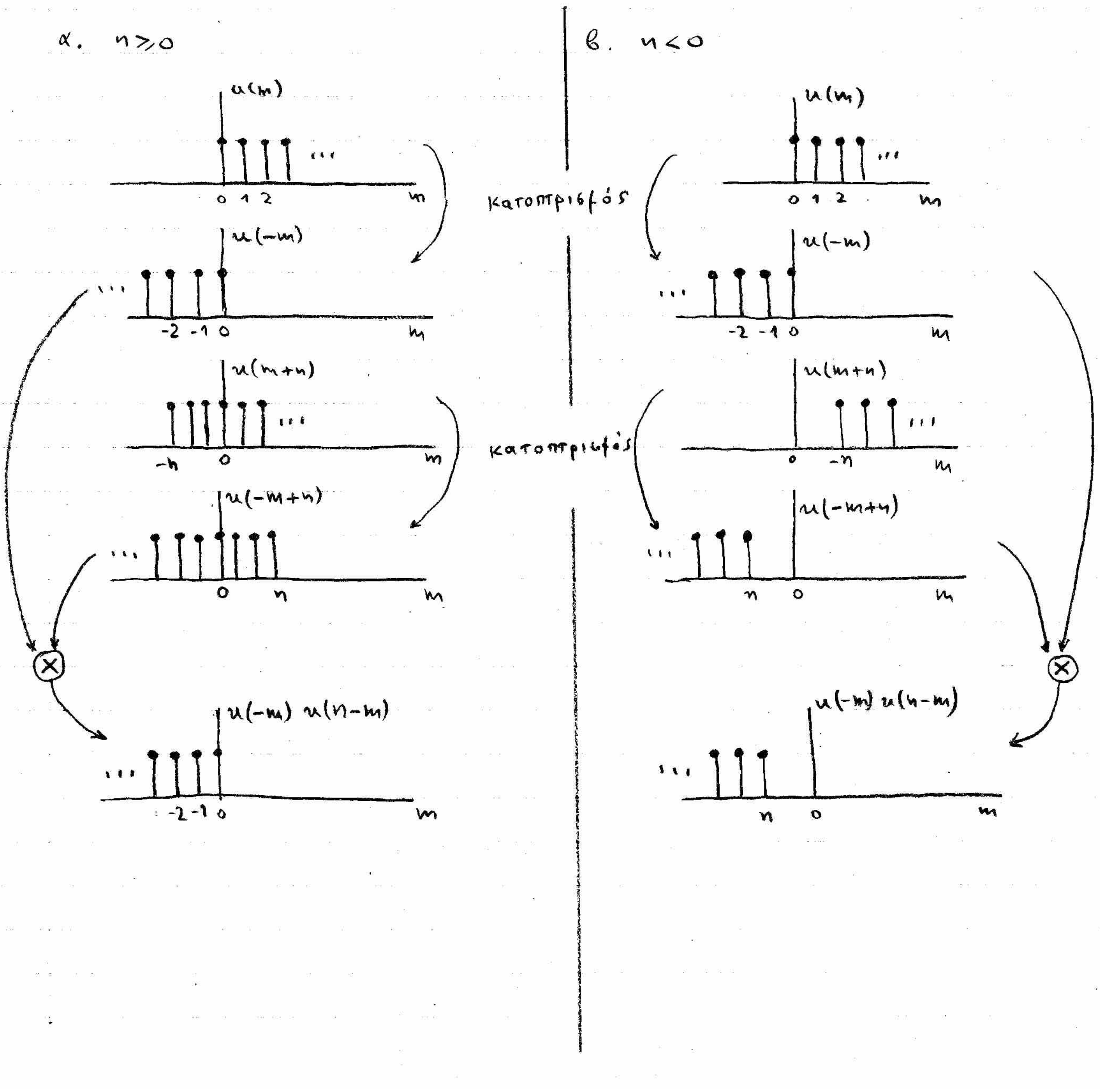
Η $y_2(n)$ για όλο το διάστημα των τιμών n είναι:



Τελικά, η $y(n) = y_1(n) + y_2(n)$ ισούται με το άθροισμα των $y_1(n)$ και $y_2(n)$ που υπολογίσαμε. Η γραφική της παράσταση είναι:



<u>Σημείωση</u> Ο υπολογισμός του γινομένου $u(-m)\,u(n-m)$ για τις περιπτώσεις α, β γίνεται με γραφικό τρόπο ως ακολούθως:



Stability

Stability Condition for LTI Discrete-Time Systems (pp. 84-85 Mitra)

Example: Examine whether a causal LTI discrete-time system with an impulse response given by $h(n) = \alpha^n u(n)$ is BIBO stable.

For this system we have:

$$S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\alpha^n| u(n) = \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha^n| = \frac{1}{1-|\alpha|} \quad \text{if } |\alpha|<1$$

Therefore, $S < \infty$ if $|\alpha|<1$ for which the system is BIBO stable. In the case that $|\alpha|=1$ the above system is <u>not</u> BIBO stable. —

Example: What about the stability of a causal LTI discrete-time system with an impulse response given by

$$h(n) = \begin{cases} \alpha^n, & N_1 \leq n \leq N_2 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

This is <u>always</u> BIBO stable independently of the value of α as long as it is not infinite, since the impulse response sequence is absolutely summable for finite values of N_1 and N_2. —