ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

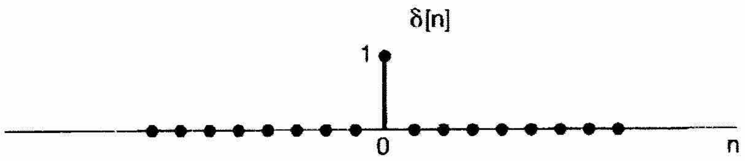
Δ1 – ΣΗΜΑΤΑ ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ ΣΚΟΔΡΑΣ

2023 - 2024

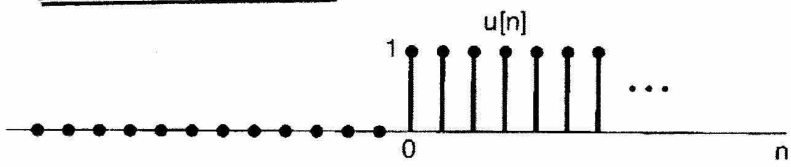
Μοναδιαία Κρουστική ή Μοναδιαίο Δείγμα



$$\delta[n] = \begin{cases} 0, & n \neq 0 \\ 1, & n = 0 \end{cases}$$

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1]$$ ← Πρώτη διαφορά (first difference)

Μοναδιαία Βηματική



$$u[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 1, & n \geq 0 \end{cases}$$

$$u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k] \quad \text{ή} \quad u[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} \delta[m]$$

↑ Τρέχον άθροισμα του μοναδιαίου δείγματος (Running sum of the unit sample)

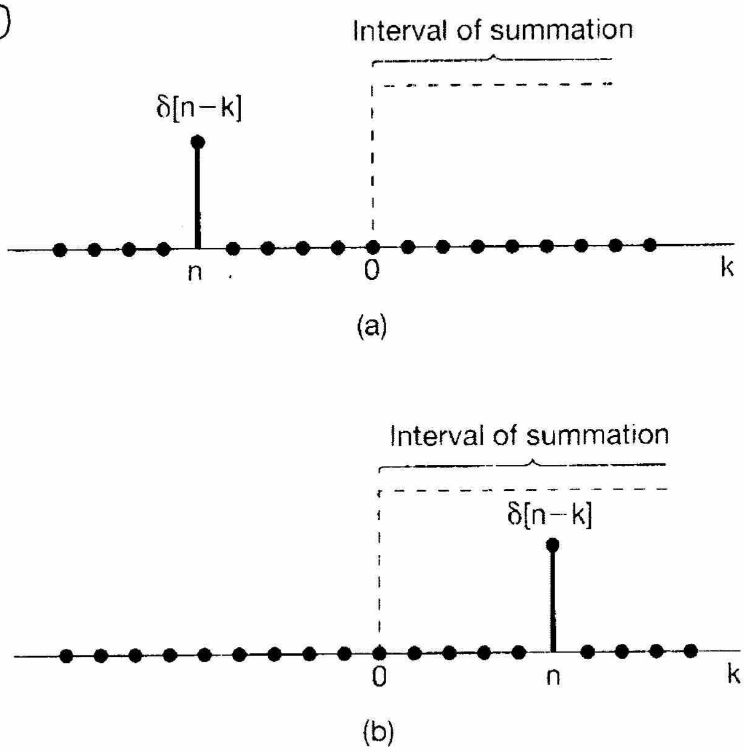
Βασική ιδιότητα της μοναδιαίας κρουστικής

$$x[n] \cdot \delta[n] = x[0] \cdot \delta[n]$$

Γενικά: $x[n]\,\delta[n-n_0] = x[n_0] \cdot \delta[n-n_0]$

Η μοναδιαία βηματική μπορεί να εκφραστεί ως:

①

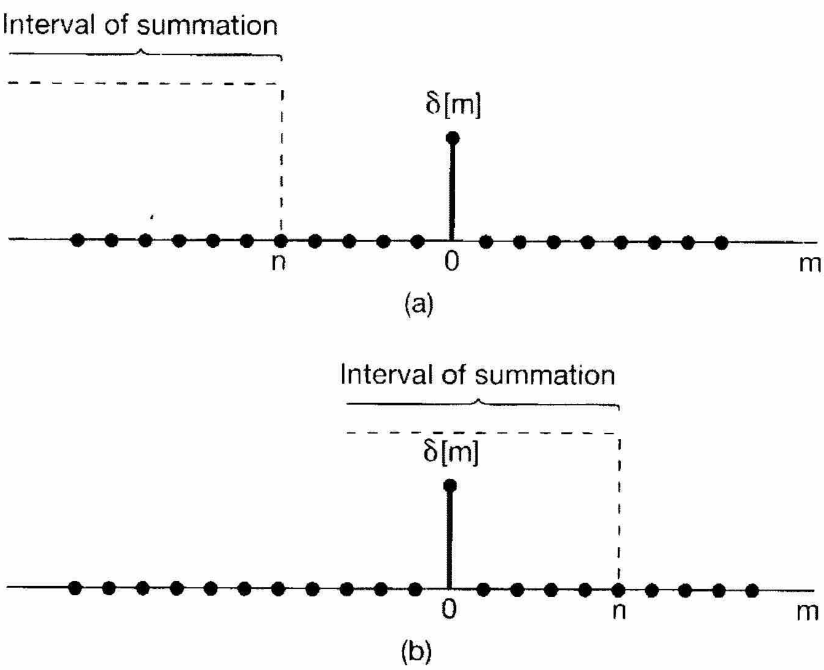


← $n<0$

$$u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k]$$

← $n>0$

②



← $n<0$

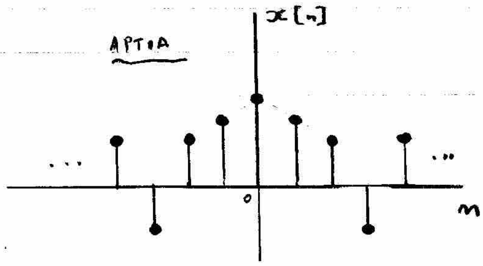
$$u[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} \delta[m]$$

← $n>0$

<u>Απόδειξη:</u> $u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k] \xrightarrow[\text{οπότε}]{\text{Θέτω } n-k=m} \xrightarrow[\text{για } k=0 \to m=n]{} \xrightarrow[\text{για } k=\infty \to m=-\infty]{} u[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} \delta[m]$

ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ

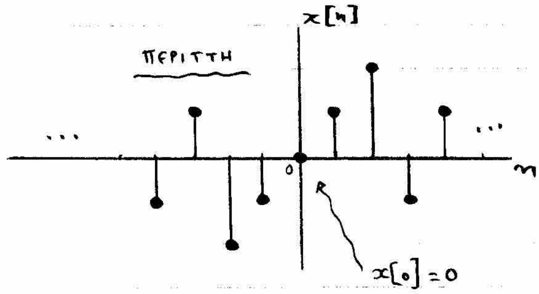
Α. ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΑ ΣΗΜΑΤΑ ΔΧ



Άρτια συμμετρία: $x[n] = x[-n]$

Περιττή συμμετρία: $x[n] = -x[-n]$

Κάθε πραγματικό ΣΔΧ μπορεί να εκφραστεί ως άθροισμα μιας άρτιας και μιας περιττής συνιστώσας:



$$x[n] = x_e[n] + x_o[n]$$

όπου $x_e[n] = \frac{1}{2}\left(x[n] + x[-n]\right)$

$$x_o[n] = \frac{1}{2}\left(x[n] - x[-n]\right)$$

Σημείωση 1: Τα άρτια (even) σήματα παρουσιάζουν συμμετρία ως προς τον κάθετο άξονα, ενώ τα περιττά (odd) ως προς την αρχή των αξόνων. Συνέπεια του τελευταίου είναι ότι στα περιττά σήματα ισχύει πάντοτε $x[0] = 0$.

Σημείωση 2: Τα άρτια σήματα ονομάζονται και συμμετρικά, ενώ τα περιττά σήματα ονομάζονται και αντισυμμετρικά.

Β. ΜΙΓΑΔΙΚΑ ΣΗΜΑΤΑ ΔΧ

Συζυγής-συμμετρία: $x[n] = x^*[-n]$

Συζυγής-αντισυμμετρία: $x[n] = -x^*[-n]$

Κάθε μιγαδικό ΣΔΧ μπορεί να εκφραστεί ως άθροισμα μιας συζυγούς-συμμετρικής $x_{cs}[n]$ και μιας συζυγούς-αντισυμμετρικής $x_{ca}[n]$ συνιστώσας:

$$x[n] = x_{cs}[n] + x_{ca}[n]$$

όπου $x_{cs}[n] = \frac{1}{2}\left(x[n] + x^*[-n]\right)$

$$x_{ca}[n] = \frac{1}{2}\left(x[n] - x^*[-n]\right)$$

Άσκηση : Να προσδιοριστεί η άρτια και περιττή συνιστώσα του σήματος $x[n]=\{3,-4,\underset{\underset{n=0}{\uparrow}}{2},0,6,3\}$

$$x[n] = \{3 \quad -4 \quad \underset{\uparrow}{2} \quad 0 \quad 6 \quad 3\}$$

$$x[-n] = \{3 \quad 6 \quad 0 \quad \underset{\uparrow}{2} \quad -4 \quad 3\}$$

$$x_e[n] = \frac{1}{2}\left(x[n]+x[-n]\right) = \frac{1}{2}\{3 \quad 9 \quad -4 \quad \underset{\uparrow}{4} \quad -4 \quad 9 \quad 3\} = \left\{\frac{3}{2} \quad \frac{9}{2} \quad -2 \quad \underset{\uparrow}{2} \quad -2 \quad \frac{9}{2} \quad \frac{3}{2}\right\}$$

$$x_o[n] = \frac{1}{2}\left(x[n]-x[-n]\right) = \frac{1}{2}\{-3 \quad -3 \quad -4 \quad \underset{\uparrow}{0} \quad 4 \quad 3 \quad 3\} = \left\{-\frac{3}{2} \quad -\frac{3}{2} \quad -2 \quad \underset{\uparrow}{0} \quad 2 \quad \frac{3}{2} \quad \frac{3}{2}\right\}$$

Άσκηση : Να προσδιοριστεί η άρτια και η περιττή συνιστώσα του ΣΔΧ $x[n]=n^2$

$$\left.\begin{array}{l} x[n] = n^2 \\ x[-n] = n^2 \end{array}\right\} \rightsquigarrow \begin{array}{l} x_e[n] = \frac{1}{2}\left(x[n]+x[-n]\right) = \frac{1}{2}\left(n^2+n^2\right) = n^2 \\ x_o[n] = \frac{1}{2}\left(x[n]-x[-n]\right) = \frac{1}{2}\left(n^2-n^2\right) = 0 \end{array}$$

Άσκηση : Όμοια για την $x[n]=n^3$

$$\left.\begin{array}{l} x[n] = n^3 \\ x[-n] = -n^3 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} x_e[n] = \frac{1}{2}\left(n^3+(-n^3)\right) = 0 \\ x_o[n] = \frac{1}{2}\left(n^3-(-n^3)\right) = n^3 \end{array}$$

Άσκηση : Όμοια για την $x[n] = A\cos(\omega n) + B\sin(\omega n)$

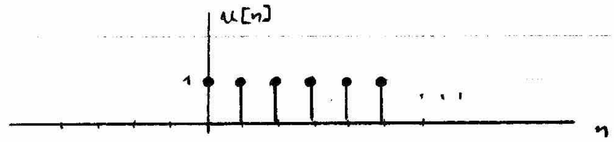
$$x[n] = A\cos(\omega n) + B\sin(\omega n)$$
$$x[-n] = A\cos(\omega n) - B\sin(\omega n)$$

$$x_e[n] = \frac{1}{2}\left(2A\cos(\omega n)\right) = A\cos(\omega n)$$

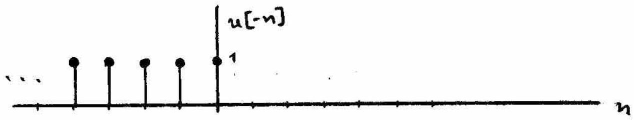
$$x_o[n] = \frac{1}{2}\left(2B\sin(\omega n)\right) = B\sin(\omega n)$$

Άσκηση : Να προσδιοριστεί η άρτια και η περιττή συνιστώσα του σήματος $u[n]$.

$x[n] = u[n]$

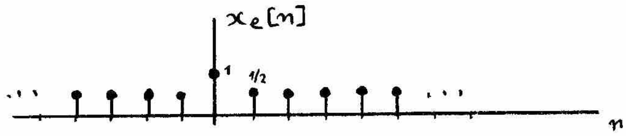


$x[-n] = u[-n]$



$$x_e[n] = \frac{1}{2}\left(u[n] + u[-n]\right) =$$

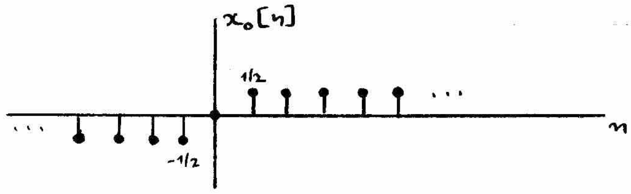
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\delta[n]$$



$$x_o[n] = \frac{1}{2}\left(u[n] - u[-n]\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{sgn}[n]$$

↑
συνάρτηση
προσήμου



Άσκηση: Να προσδιοριστεί η άρτια και η περιττή συνιστώσα του σήματος $\alpha^n u[n]$.

$$x[n] = \alpha^n u[n]$$

$$x_e[n] = \frac{1}{2}\left(\alpha^n u[n] + \alpha^{-n} u[-n]\right) = \frac{1}{2}\alpha^{|n|} + \frac{1}{2}\delta[n]$$

$$x_o[n] = \frac{1}{2}\left(\alpha^n u[n] - \alpha^{-n} u[-n]\right) = \frac{1}{2}\alpha^{|n|}\,\mathrm{sgn}[n]$$

(Βλ. άσκηση 6.5.8 βιβλίου Μάργαρη 2014)

Άσκηση : Να αποδειχθεί ότι η άρτια και η περιττή συνιστώσα ενός ΣΔΧ είναι αντίστοιχα άρτιο (συμμετρικό) και περιττό (αντισυμμετρικό) ΣΔΧ.

$$x_e[n] = \frac{1}{2}\left(x[n] + x[-n]\right)$$

$$x_e[-n] = \frac{1}{2}\left(x[-n] + x[n]\right) = x_e[n]$$ άρα το σήμα είναι άρτιο!

$$x_o[n] = \frac{1}{2}\left(x[n] - x[-n]\right)$$

$$x_o[-n] = \frac{1}{2}\left(x[-n] - x[n]\right) = -\frac{1}{2}\underbrace{\left(x[n] - x[-n]\right)}_{x_o[n]} = -x_o[n]$$ άρα το σήμα είναι περιττό!

Άσκηση : Έστω ότι $g[n]$ άρτιο και $h[n]$ περιττό. Ποια η συμμετρία των ΣΔΧ
α. $x[n] = g[n]\,g[n]$ β. $y[n] = g[n]\cdot h[n]$ γ. $z[n] = h[n]\cdot h[n]$;

Αφού $g[n]$ άρτιο ισχύει: $g[n] = g[-n]$
Αφού $h[n]$ περιττό ισχύει: $h[n] = -h[-n]$

Για να βρούμε τη συμμετρία καθενός από τα σήματα $x[n]$, $y[n]$, $z[n]$ υπολογίζουμε τα $x[-n]$, $y[-n]$, $z[-n]$ και τα συγκρίνουμε με τα πρώτα.

α. $x[-n] = g[-n]\,g[-n] = g[n]\,g[n] = x[n]$ άρα άρτιο

β. $y[-n] = g[-n]\,h[-n] = g[n]\left(-h[n]\right) = -g[n]\,h[n] = -y[n]$ άρα περιττό

γ. $z[-n] = h[-n]\,h[-n] = \left(-h[n]\right)\left(-h[n]\right) = +h[n]\,h[n] = z[n]$ άρα άρτιο.

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟΤΗΤΑ

Ορισμός: Ένα ΣΔΧ $x[n]$ ονομάζεται περιοδικό με περίοδο N $(N>0)$ εάν και μόνον εάν

$$x[n+N] = x[n] \qquad \forall n$$

- Η μικρότερη τιμή του N για την οποία ικανοποιείται η σχέση, ονομάζεται θεμελιώδης περίοδος.

- Εάν δεν υπάρχει τιμή του N που να ικανοποιεί τη σχέση, τότε το σήμα ονομάζεται μη περιοδικό ή απεριοδικό.

- Τα περιοδικά σήματα είναι σήματα ισχύος.

- Ένα περιοδικό σήμα με περίοδο N έχει ως περιόδους και τις ποσότητες mN, $m=1,2,3,\ldots$, δηλαδή $x[n+mN]=x[n]$. Για $m=1$ έχουμε τη θεμελιώδη περίοδο.

- Έστω τα περιοδικά σήματα $x_1[n]$, $x_2[n]$ με περιόδους N_1, N_2 αντίστοιχα. Τα σήματα $x_1[n]+x_2[n]$ και $x_1[n]\cdot x_2[n]$ θα είναι επίσης περιοδικά με περίοδο $N=\dfrac{N_1\cdot N_2}{ΜΚΔ(N_1,N_2)}$

  όπου $ΜΚΔ(N_1,N_2)$ ο Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης των ακεραίων N_1 και N_2.

ΗΜΙΤΟΝΟΕΙΔΗ ΣΔΧ ΚΑΙ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟΤΗΤΑ

Ορισμός: Ένα διακριτού χρόνου ημιτονοειδές είναι περιοδικό μόνον εάν η συχνότητά του f είναι ρητός αριθμός.

Απόδειξη: Ένα διακριτού χρόνου ημιτονοειδές σήμα εκφράζεται ως

$$x[n] = \cos(\omega n+\theta) = \cos(2\pi f n+\theta) \qquad -\infty<n<\infty$$

Για να είναι περιοδικό με περίοδο N $(N>0)$ πρέπει να ισχύει

$$x[n+N] = x[n] \Rightarrow \cos[2\pi f(n+N)+\theta] = \cos(2\pi f n+\theta)$$

Για να αληθής η σχέση αυτή πρέπει να υπάρχει ένας ακέραιος k τέτοιος ώστε

$$2\pi f N = 2k\pi$$

ή ισοδύναμα

$$f=\frac{k}{N}$$

Συνεπώς η συχνότητα f πρέπει να είναι λόγος δύο ακεραίων, δηλαδή ρητός αριθμός.

Υπολογισμός θεμελιώδους περιόδου N ενός περιοδικού ΣΔΧ

Για να υπολογίσουμε τη θεμελιώδη περίοδο N ενός περιοδικού ημιτονοειδούς, εκφράζουμε τη συχνότητά του f ως $f = \frac{k}{N}$ και αφαιρούμε τους κοινούς παράγοντες έτσι ώστε τα k, N να είναι πρώτοι αριθμοί. Τότε, η θεμελιώδης περίοδος του ημιτονοειδούς ισούται με N.

Παρατήρηση: Μια μικρή αλλαγή στη συχνότητα μπορεί να επιφέρει μια μεγάλη αλλαγή στην περίοδο. Για παράδειγμα, $f_1 = 31/60$ σημαίνει ότι $N_1 = 60$, ενώ $f_2 = 30/60$ συνεπάγεται ότι $N_2 = 2$.

Άσκηση: Ποια από τα ημιτονοειδή ΣΔΧ είναι περιοδικά και ποια η θεμελιώδης περίοδος;

α. $\cos(0.01\pi n)$ β. $\cos\left(\pi \frac{30n}{105}\right)$ γ. $\cos(3\pi n)$

δ. $\sin(3n)$ ε. $\sin\left(\pi \frac{62n}{10}\right)$

Λύση

α. $2\pi f = 0.01\pi \Rightarrow f = \frac{0.01}{2} = \frac{1}{200}$ $\rightsquigarrow$ περιοδικό με $N = 200$

β. $2\pi f = \pi \frac{30}{105} \Rightarrow f = \frac{30}{210} = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$ $\rightsquigarrow$ περιοδικό με $N = 7$

γ. $2\pi f = 3\pi \Rightarrow f = \frac{3}{2}$ $\rightsquigarrow$ περιοδικό με $N = 2$

δ. $2\pi f = 3 \Rightarrow f = \frac{3}{2\pi}$ $\rightsquigarrow$ μη περιοδικό διότι f άρρητος

ε. $2\pi f = \pi \frac{62}{10} \Rightarrow f = \frac{62}{20} = \frac{31}{10}$ $\rightsquigarrow$ περιοδικό με $N = 10$

Άσκηση : Ποια από τα σήματα είναι περιοδικά και ποια η θεμελιώδης περίοδος;

α. $x_1[n] = 3\cos[5n + \pi/6]$ β. $x_2[n] = 2\,e^{j(\frac{n}{6} - \pi)}$

γ. $x_3[n] = \cos[n/8]\cos[\pi n/8]$ δ. $x_4[n] = \cos[\frac{\pi n}{2}] - \sin[\frac{\pi n}{8}] + 3\cos[\frac{\pi n}{4} + \frac{\pi}{3}]$

Λύση

α. $2\pi f = 5 \Rightarrow f = \frac{5}{2\pi} \rightsquigarrow$ άρρητος $\rightsquigarrow$ μη περιοδικό

β. $x_2[n] = 2\cdot e^{-j(\frac{n}{6} - \pi)} = 2\cdot\left[\cos(\frac{n}{6} - \pi) - j\sin(\frac{n}{6} - \pi)\right]$

$2\pi f = \frac{1}{6} \Rightarrow f = \frac{1}{12\pi} \rightsquigarrow$ άρρητος $\rightarrow$ μη περιοδικό

γ. $\cos[n/8] \rightarrow 2\pi f = \frac{1}{8} \Rightarrow f = \frac{1}{16\pi} \rightsquigarrow$ μη περιοδικό

$\cos[\pi n/8] \rightsquigarrow 2\pi f = \frac{\pi}{8} \Rightarrow f = \frac{1}{16} \rightsquigarrow$ περιοδικό με περίοδο $N = 16$

Το σήμα $x_3[n]$ είναι μη περιοδικό ως γινόμενο ενός περιοδικού και ενός μη περιοδικού σήματος.

δ. $\cos[\frac{\pi n}{2}] \rightsquigarrow 2\pi f_1 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow f_1 = \frac{1}{4} \rightarrow$ περιοδικό με περίοδο $N_1 = 4$

$\cos[\frac{\pi n}{8}] \rightarrow 2\pi f_2 = \frac{\pi}{8} \Rightarrow f_2 = \frac{1}{16} \rightsquigarrow$ περιοδικό με περίοδο $N_2 = 16$

$\cos[\frac{\pi n}{4} + \frac{\pi}{3}] \rightsquigarrow 2\pi f_3 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow f_3 = \frac{1}{8} \rightsquigarrow$ περιοδικό με περίοδο $N_3 = 8$

Το τελικό σήμα $x_4[n]$ θα είναι περιοδικό με περίοδο $N = 16$ ίση με το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο (ΕΚΠ) των N_1, N_2, N_3, δηλαδή $N = \text{ΕΚΠ}(4, 8, 16) = 16$.

Σημείωση: Ένας άλλος τρόπος υπολογισμού της περιόδου του σήματος $x_4[n]$ είναι να προσδιορίσουμε την περίοδο N_{12} των δύο πρώτων σημάτων με περιόδους N_1, N_2 και στη συνέχεια να υπολογίσουμε την τελική περίοδο N με βάση τις περιόδους N_{12} και N_3. Αναλυτικά:

$$N_{12} = \frac{N_1 \cdot N_2}{\text{ΜΚΔ}(N_1, N_2)} = \frac{4\cdot 16}{4} = 16$$

$$N = \frac{N_{12}\cdot N_3}{\text{ΜΚΔ}(N_{12}, N_3)} = \frac{16\cdot 8}{8} = 16$$

Άσκηση : Να προσδιοριστεί η θεμελιώδης περίοδος καθενός από τα περιοδικά σήματα ΔΧ :

α. $x_1[n] = e^{j0.25\pi n}$ β. $x_2[n] = \cos(0.2\pi n)$

γ. $x_3[n] = 2\cos(0.1\pi n) + 2\sin(0.2\pi n)$ δ. $x_4[n] = 3\sin(0.8\pi n) - 4\cos(0.1\pi n)$

ε. $x_5[n] = 5\sin(0.1\pi n) + 4\sin(0.9\pi n) - \cos(0.8\pi n)$ στ. $x_6[n] = n \bmod 5$

Λύση

α. $x_1[n] = e^{j0.25\pi n} = \cos(0.25\pi n) + j\sin(0.25\pi n)$

$$2\pi f = 0.25\pi \Rightarrow f = \frac{0.25}{2} = \frac{1}{8} \rightsquigarrow N = 8$$

β. $$2\pi f = 0.2\pi \rightarrow f = \frac{0.2}{2} = \frac{1}{10} \rightsquigarrow N = 10$$

γ. $$2\pi f_1 = 0.1\pi \Rightarrow f_1 = \frac{0.1}{2} = \frac{1}{20} \rightarrow N_1 = 20$$

$$2\pi f_2 = 0.2\pi \Rightarrow f_2 = \frac{0.2}{2} = \frac{1}{10} \rightarrow N_2 = 10$$

Άρα η θεμελιώδης περίοδος N του σήματος $x_3[n]$ θα είναι:

$$N = \frac{N_1 \cdot N_2}{\text{ΜΚΔ}(N_1, N_2)} = \frac{20 \cdot 10}{10} = 20$$

δ. $$2\pi f_1 = 0.8\pi \Rightarrow f_1 = \frac{0.8}{2} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5} \rightsquigarrow N_1 = 5$$

$$2\pi f_2 = 0.1\pi \Rightarrow f_2 = \frac{0.1}{2} = \frac{1}{20} \rightarrow N_2 = 20$$

Άρα $$N = \frac{N_1 \cdot N_2}{\text{ΜΚΔ}(N_1, N_2)} = \frac{5 \cdot 20}{5} = 20$$

ε. $$2\pi f_1 = 0.1\pi \Rightarrow f_1 = \frac{0.1}{2} = \frac{1}{20} \rightarrow N_1 = 20$$

$$2\pi f_2 = 0.9\pi \Rightarrow f_2 = \frac{0.9}{2} = \frac{9}{20} \rightarrow N_2 = 20$$

$$2\pi f_3 = 0.8\pi \Rightarrow f_3 = \frac{0.8}{2} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5} \rightarrow N_3 = 5$$

$N = \text{ΕΚΠ}(20, 20, 5) = 20$

στ. $x_6[n+5] = (n+5) \bmod 5 = n \bmod 5 = x_6[n]$

Άρα η θεμελιώδης περίοδος του σήματος είναι $N = 5$.

Άσκηση : Να αποδειχθεί ότι η θεμελιώδης περίοδος N_p των ΣΔΧ

$$s_k[n] = e^{j\frac{2\pi k n}{N}} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

δίνεται από τη σχέση $N_p = \dfrac{N}{\text{ΜΚΔ}(k,N)}$.

Ποια η θεμελιώδης περίοδος για $N=7$ και ποια για $N=16$;

Λύση

$k=0$, $\quad s_0[n] = e^{j0} = 1$

$k=1$, $\quad s_1[n] = e^{j\frac{2\pi n}{N}} \rightsquigarrow 2\pi f_1 = \frac{2\pi}{N} \Rightarrow f_1 = \frac{1}{N}$

$k=2$, $\quad s_2[n] = e^{j\frac{2\pi 2n}{N}} \rightsquigarrow 2\pi f_2 = \frac{4\pi}{N} \Rightarrow f_2 = \frac{2}{N}$

$\vdots$

$s_k[n] = e^{j\frac{2\pi k n}{N}} \rightsquigarrow 2\pi f_k = \frac{2k\pi}{N} \Rightarrow f_k = \frac{k}{N}$

Έστω $\alpha = \text{ΜΚΔ}(k,N)$. Τότε $k = k'\cdot\alpha$ και $N = N'\cdot\alpha$.

Άρα $f_k = \frac{k}{N} = \frac{k'\alpha}{N'\alpha} = \frac{k'}{N'}$

Συνεπώς η θεμελιώδης περίοδος θα ισούται με $N' = \frac{N}{\alpha}$

δηλαδή $N_p = \frac{N}{\alpha} = \frac{N}{\text{ΜΚΔ}(k,N)}$

Για $N=7$ και

$k =$	0	1	2	3	4	5	6	7
έχουμε ΜΚΔ(k,N) =	7	1	1	1	1	1	1	7
οπότε N_p =	1	7	7	7	7	7	7	1

Για $N=16$ και

$k =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
έχουμε ΜΚΔ(k,N) =	16	1	2	1	4	1	2	1	8	1	2	1	4	1	2	1	16
οπότε N_p =	1	16	8	16	4	16	8	16	2	16	8	16	4	16	8	16	1

ΕΝΕΡΓΕΙΑ & ΙΣΧΥΣ ΣΔΧ

Ενέργεια : $$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

Μέση ισχύς : $$P = \lim_{N\to\infty} \left(\frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2 \right)$$

Μέση ισχύς περιοδικού σήματος με περίοδο N : $$P = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2$$

- Η ενέργεια ενός σήματος μπορεί να έχει πεπερασμένη ή άπειρη τιμή.

  Η ενέργεια ενός σήματος με πεπερασμένο μήκος και πεπερασμένο πλάτος τιμών είναι πάντοτε πεπερασμένη.

  Η ενέργεια ενός σήματος με άπειρο μήκος και πεπερασμένο πλάτος τιμών μπορεί να είναι πεπερασμένη ή άπειρη.

  Ένα σήμα με πεπερασμένη ενέργεια ($0 < E < \infty$) ονομάζεται <u>σήμα ενέργειας</u>.

- Η μέση ισχύς ενός σήματος με πεπερασμένο μήκος είναι πάντοτε πεπερασμένη.

  Η μέση ισχύς ενός σήματος με άπειρο μήκος μπορεί να είναι πεπερασμένη ή άπειρη.

  Ένα σήμα πεπερασμένης μέσης ισχύος ονομάζεται <u>σήμα ισχύος</u>.

- Εάν η ενέργεια ενός σήματος είναι πεπερασμένη, τότε η μέση ισχύς αυτού είναι μηδέν.

  Εάν η ενέργεια ενός σήματος είναι άπειρη, η μέση ισχύς μπορεί να έχει πεπερασμένη ή άπειρη τιμή.

Άσκηση : Να υπολογιστεί η ενέργεια των τριγωνομετρικών σημάτων

$$x[n] = A\cos\left(\frac{2\kappa\pi n}{N}\right) \qquad n, \kappa = 0, 1, 2, \ldots, N-1$$

$$E = \sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = A^2 \sum_{n=0}^{N-1} \cos^2\left(\frac{2\kappa\pi n}{N}\right) = \langle \cos(2\varphi) = 2\cos^2\varphi - 1 \rangle =$$

$$= \frac{A^2}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \left[1 + \cos\left(\frac{4\kappa\pi n}{N}\right)\right] =$$

$$= \frac{A^2}{2} \underbrace{\sum_{n=0}^{N-1} 1}_{N} + \frac{A^2}{2} \underbrace{\sum_{n=0}^{N-1} \cos\left(\frac{4\kappa\pi n}{N}\right)}_{0} = \frac{A^2}{2} N$$

Σημείωση: $\displaystyle \sum_{n=0}^{N-1} \cos\left(\frac{4\kappa\pi n}{N}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} \left[\frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}\right] = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1} e^{j\theta} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\theta}$ $\left(\text{όπου } \theta = \frac{4\kappa\pi n}{N}\right)$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{4\kappa\pi}{N} n} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\frac{4\kappa\pi}{N} n} =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{e^{j\frac{4\kappa\pi}{N}\cdot 0} - e^{j\frac{4\kappa\pi}{N}\cdot N}}{1 - e^{j\frac{4\kappa\pi}{N}}} + \frac{1}{2} \frac{e^{-j\frac{4\kappa\pi}{N}\cdot 0} - e^{-j\frac{4\kappa\pi}{N} N}}{1 - e^{-j\frac{4\kappa\pi}{N}}} =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1 - e^{j4\kappa\pi}}{1 - e^{j4\kappa\pi/N}} + \frac{1}{2} \frac{1 - e^{-j4\kappa\pi}}{1 - e^{-j4\kappa\pi/N}} = \frac{1}{2}\, 0 + \frac{1}{2}\, 0 = 0$$

αφού $e^{j4\kappa\pi} = \cos(4\kappa\pi) + j\sin(4\kappa\pi) = 1 + j0 = 1$

$$e^{-j4\kappa\pi} = \cos(4\kappa\pi) - j\sin(4\kappa\pi) = 1 - j0 = 1$$

Σημείωση: Στα παραπάνω κάναμε χρήση της σχέσης που ισχύει για τη γεωμετρική πρόοδο

$$\sum_{n=l}^{m} a^n = \frac{a^l - a^{m+1}}{1 - a}, \quad \text{όπου } m \geq l \text{ και } a \neq 1$$

Άσκηση : Να υπολογιστεί η μέση ισχύς του περιοδικού σήματος $A\cos\left(\frac{2\pi n}{N} + \varphi\right)$

$$P = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} A^2\cos^2\left(\frac{2\pi n}{N} + \varphi\right) = \frac{A^2}{2N} \sum_{n=0}^{N-1} \left[1 + \cos\left(\frac{4\pi n}{N} + \varphi\right)\right] = \frac{A^2}{2N}\cdot N = \frac{A^2}{2}$$

Άσκηση: Να υπολογιστεί η ενέργεια των σημάτων $x_1[n] = \begin{cases} \frac{1}{n} & n \geq 1 \\ 0 & n \leq 0 \end{cases}$ $\quad x_2[n] = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n}} & n \geq 1 \\ 0 & n \leq 0 \end{cases}$

$$E_1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_1[n]|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{\pi^2}{6}$$

$$E_2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_2[n]|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \qquad \underline{\text{ΔΕΝ}} \text{ ΣΥΓΚΛΙΝΕΙ}$$

Άρα το σήμα $x_1[n]$ έχει πεπερασμένη ενέργεια, ενώ το σήμα $x_2[n]$ έχει άπειρη ενέργεια.

Και τα δύο σήματα είναι απείρου μήκους.

Άσκηση: Να υπολογιστεί η ενέργεια και η μέση ισχύς του σήματος $x[n] = \begin{cases} 2(-1)^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} 4(-1)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} 4 = 4 \sum_{n=0}^{\infty} 1 \qquad \underline{\text{ΔΕΝ}} \text{ ΣΥΓΚΛΙΝΕΙ}$$

$$P = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1}\left(4\sum_{n=0}^{N} 1\right) = \lim_{N\to\infty} \frac{4(N+1)}{2N+1} = 4 \lim_{N\to\infty} \frac{1+\frac{1}{N}}{2+\frac{1}{N}} = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$$

Παρατηρούμε ότι το σήμα αυτό έχει άπειρη ενέργεια και πεπερασμένη μέση ισχύ. Πρόκειται, δηλαδή, για ένα σήμα ισχύος.

Άσκηση: Να υπολογιστεί η μέση ισχύς της μοναδιαίας βηματικής ακολουθίας $u[n]$.

$$P = \lim_{N\to\infty} \left(\frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2\right) = \lim_{N\to\infty} \left(\frac{1}{2N+1} \sum_{n=0}^{N} |u[n]|^2\right) =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \left(\frac{1}{2N+1} \sum_{n=0}^{N} 1\right) =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \left(\frac{1}{2N+1} \cdot (N+1)\right) = \lim_{N\to\infty} \frac{N+1}{2N+1} = \lim_{N\to\infty} \frac{1+\frac{1}{N}}{2+\frac{1}{N}} = \frac{1}{2}$$

Πρόκειται για σήμα ισχύος αφού έχει άπειρη ενέργεια και πεπερασμένη μέση ισχύ.