σιάζεται το φαινόμενο της χαμηλού ρυθμού δειγματοληψίας (aliasing).

- Η ψηφιοποίηση του πλάτους ενός σήματος εισάγει ένα θόρυβο, το λεγόμενο θόρυβο κβάντισης, ο οποίος, όσο περισσότερα επίπεδα κβάντισης χρησιμοποιούμε, δηλαδή όσο περισσότερα bits χρησιμοποιούμε για την αναπαράσταση της κάθε τιμής του πλάτους, τόσο μικρότερος γίνεται.

1.3 Σήματα διακριτού χρόνου

Στην ενότητα αυτή θα ασχοληθούμε με τα σήματα διακριτού χρόνου. Θα γνωρίσουμε τα πιο βασικά σήματα διακριτού χρόνου, καθώς και τις στοιχειώδεις πράξεις που εφαρμόζονται σε τέτοιου είδους σήματα. Όλα αυτά θα αποτελέσουν τα εργαλεία τα απαραίτητα για τη μελέτη των συστημάτων και την ανάλυση των σημάτων που θα μας απασχολήσουν σε όλη την έκταση αυτού του βιβλίου.

1.3.1 Βασικά σήματα διακριτού χρόνου

Τα σήματα που περιγράφονται στη συνέχεια θεωρούνται ως τα βασικά (στοιχειώδη) σήματα διακριτού χρόνου.

α) *Μοναδιαίο δείγμα* (unit sample) ή *μοναδιαία κρουστική ακολουθία* (unit impulse sequence): Είναι το πλέον βασικό σήμα διακριτού χρόνου το οποίο ορίζεται ως:

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \tag{1.25}$$

β) *Μοναδιαία βηματική ακολουθία* (unit step sequence): Ορίζεται ως:

$$u(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \tag{1.26}$$

γ) *Σταθερή ακολουθία* (constant sequence):

$$x(n) = A, \qquad -\infty < n < \infty \tag{1.27}$$

δ) *Γραμμική ακολουθία* (linear sequence):

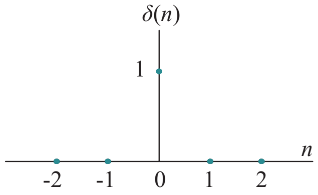
$$x(n) = An, \qquad -\infty < n < \infty \tag{1.28}$$

Οι κυματομορφές όλων των παραπάνω σημάτων φαίνονται στα Σχήματα 1.10 έως και 1.13.

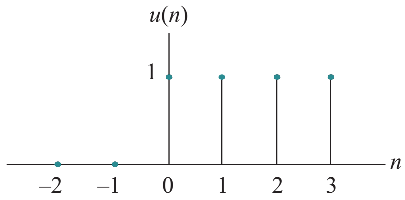
ε) *Εκθετική ακολουθία* (exponential sequence):

$$x(n) = a^n, \qquad -\infty < n < \infty \tag{1.29}$$

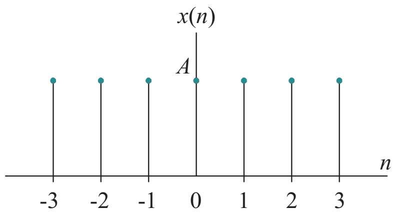
Η ακολουθία αυτή παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Η μορφή της εξαρτάται από την τιμή του a. Έτσι, αν a πραγματικός αριθμός, τότε αυτή είναι φθίνουσα για $|a| < 1$ (Σχήμα 1.14α,β) και αύξουσα για $|a| > 1$ (Σχήμα 1.14γ,δ). Αν a μιγαδικός αριθμός, δηλαδή $a = re^{j\omega}$, τότε $x(n) = r^n e^{j\omega n}$ ή $x(n) = r^n\,[\cos(\omega n) + j\sin(\omega n)]$. Για $r = 1$ το πραγματικό και φανταστικό μέρος είναι αντίστοιχα μία συνημιτονική και μία ημιτονική ακολουθία σταθερού πλάτους της μορφής του Σχήματος 1.15α. Για $r < 1$ έχουμε φθίνουσες ημιτονικές ακολουθίες της μορφής του Σχήματος 1.15β και για $r > 1$ έχουμε αύξουσες ημιτονικές ακολουθίες της μορφής του Σχήματος 1.15γ.



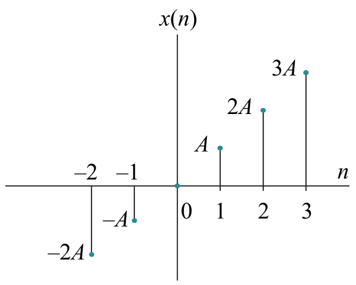
Σχήμα 1.10: *Κρουστική ακολουθία*



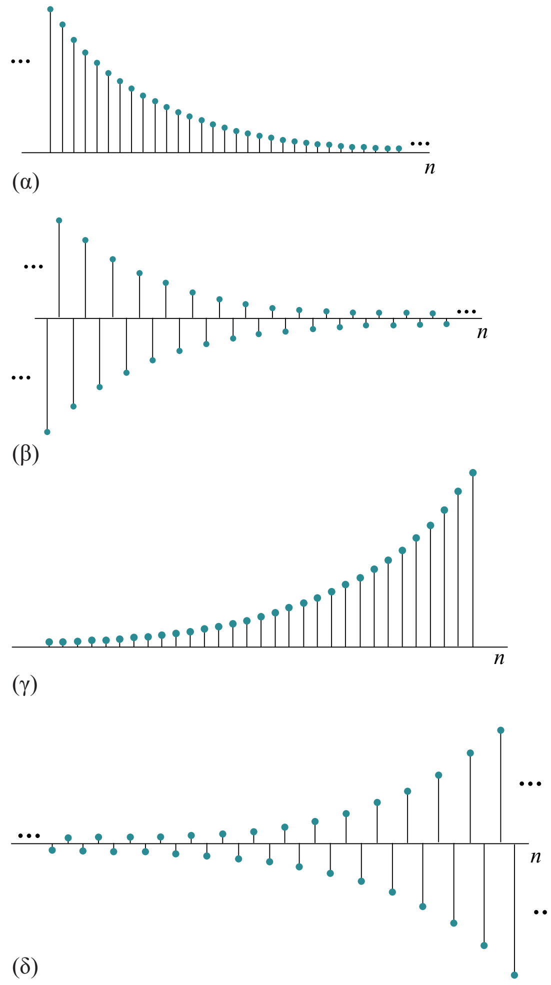
Σχήμα 1.11: *Βηματική ακολουθία*



Σχήμα 1.12: *Σταθερή ακολουθία*

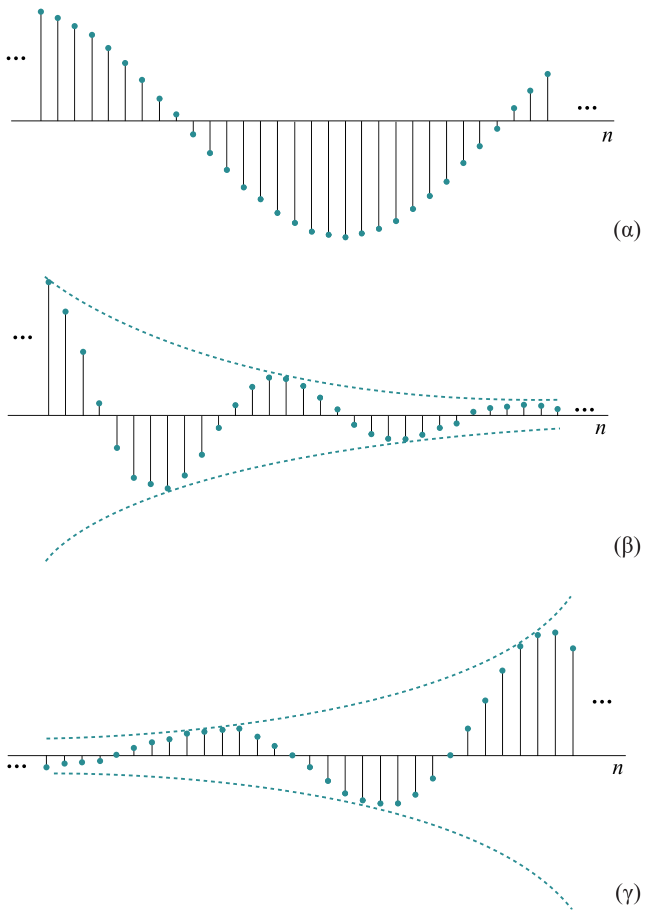


Σχήμα 1.13: *Γραμμική ακολουθία*



Σχήμα 1.14

Εκθετική ακολουθία $x(n) = a^n$ για a πραγματικό και (α) $0 < a < 1$, (β) $-1 < a < 0$, (γ) $a > 1$ και (δ) $a < -1$



Σχήμα 1.15

Γραφική αναπαράσταση του πραγματικού ή φανταστικού μέρους της εκθετικής ακολουθίας $x(n) = a^n$ για a μιγαδικό ($a = re^{j\omega}$), όπου (α) $r = 1$, (β) $r < 1$ και (γ) $r > 1$

1.3.2 Στοιχειώδεις πράξεις

ΟΛΙΣΘΗΣΗ ΣΗΜΑΤΩΝ ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ

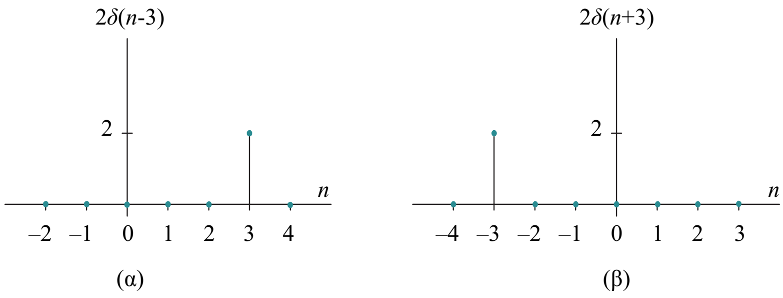
Η μαθηματική περιγραφή της ολίσθησης και η κατανόηση αυτής είναι καίριας σημασίας. Για παράδειγμα, η ολίσθηση της μοναδιαίας κρουστικής κατά n_o μονάδες (δείγματα) ορίζεται ως:

$$\delta(n-n_o)=\begin{cases}1, & n=n_o\\ 0, & n\neq n_o\end{cases} \tag{1.30}$$

Στο Σχήμα 1.16 φαίνονται οι συναρτήσεις $2\cdot\delta(n-3)$ και $2\cdot\delta(n+3)$.

Σχήμα 1.16

Γραφικές παραστάσεις των μοναδιαίων ακολουθιών (α) 2δ(n–3) και (β) 2δ(n + 3).



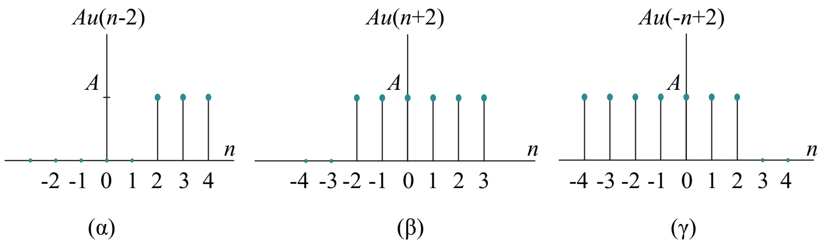
Με όμοιο τρόπο ορίζεται και η ολισθημένη κατά n_o μοναδιαία βηματική ακολουθία:

$$\mathrm{u}(n-n_o)=\begin{cases}1, & n\geq n_o\\ 0, & n<n_{\mathrm{o}}\end{cases} \tag{1.31}$$

Στο Σχήμα 1.17 φαίνονται παραδείγματα ολίσθησης μίας βηματικής συνάρτησης κατά δύο δείγματα (n_o = 2).

Σχήμα 1.17

Γραφικές παραστάσεις των βηματικών ακολουθιών (α) Au(n–2), (β) Au(n + 2) και (γ) Au(–n + 2)



Παρατηρούμε ότι η μη μηδενική τιμή μιας κρουστικής βρίσκεται εκεί όπου το όρισμα της $\delta(\cdot)$ γίνεται μηδέν. Όμοια, μία βηματική ακολουθία είναι μη μηδενική για εκείνες τις τιμές για τις οποίες το όρισμα της $u(\cdot)$ είναι μεγαλύτερο ή ίσο του μηδενός. Για παράδειγμα, μία κρουστική ακολουθία με πλάτος δείγματος 4 στη θέση n = 3, εκφράζεται ως $4\delta(n–3)$. Μία βηματική ακολουθία πλάτους –2 για όλες τις θετικές τιμές του n, καθώς και για $n = 0$, εκφράζεται ως $x(n) = –2u(n)$. Η κατοπτρική αυτής ως προς τον άξονα των συντεταγμένων είναι η $x(–n) = –2u(–n)$. Αυτή έχει πλάτος –2 για όλες τις αρνητικές τιμές του n, καθώς και για $n = 0$. Η ολίσθηση αυτής κατά 4 θέσεις προς τα αριστερά θα μας δώσει την ακολουθία $x(–n + 4) = –2u(–n + 4)$.

Είμαστε τώρα σε θέση να δούμε εύκολα ότι οι σχέσεις που συνδέουν την κρουστική και τη βηματική ακολουθία είναι οι εξής:

$$u(n)=\sum_{m=-\infty}^{n}\delta(m) \tag{1.32}$$

$$\delta(n) = u(n) - u(n-1) \tag{1.33}$$

Γενικά, η ακολουθία $x(n\text{–}n_0)$ είναι ένα αντίγραφο της $x(n)$ το οποίο έχει υποστεί ολίσθηση. Για $n_0 > 0$ έχουμε μια δεξιά ολίσθηση η οποία ισοδυναμεί με καθυστέρηση (delay) του σήματος, ενώ για $n_0 < 0$ έχουμε μια αριστερή ολίσθηση η οποία ισοδυναμεί με προήγηση (advance) του σήματος.

ΓΕΝΙΚΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΑΚΟΛΟΥΘΙΑΣ

Οποιοδήποτε σήμα $x(n)$ μπορεί να γραφεί ως άθροισμα ολισθημένων κρουστικών δειγμάτων πολλαπλασιασμένων με συντελεστές βάρους:

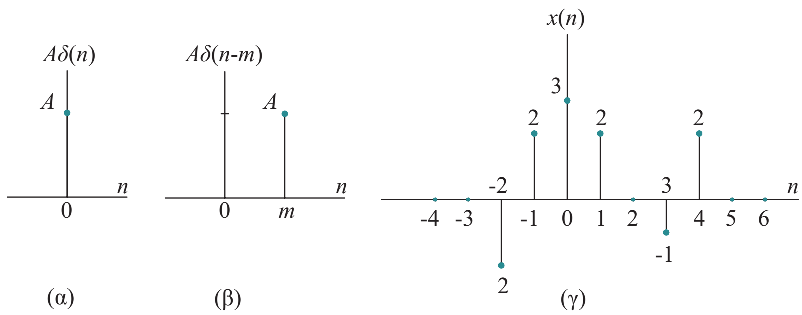
$$x(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)\delta(n-m) \tag{1.34}$$

Για να γίνει αυτό κατανοητό, ας δούμε το Σχήμα 1.18. Η $A\delta(n)$ βρίσκεται στην αρχή των αξόνων, ενώ η $A\delta(n\text{–}m)$ βρίσκεται στο σημείο $n = m$. Έτσι η ακολουθία $x(n)$, με $\{x(n)\} = \{\ldots\ 0, 0, –2, 2, \underline{\mathbf{3}}, 2, 0, –1, 2, 0, 0, \ldots\}$, όπου με έντονη γραφή και υπογράμμιση σημειώνεται η χρονική στιγμή $n = 0$ (στοιχείο 3), μπορεί να περιγραφεί ως:

$$x(n) = \ldots –2\delta(n+2) + 2\delta(n+1) + 3\delta(n) + 2\delta(n–1) – \delta(n–3) + 2\delta(n–4) + \ldots =$$

$$= \ldots + x(–2)\delta(n+2) + x(–1)\delta(n+1) + x(0)\delta(n) + x(1)\delta(n–1) + x(3)\delta(n–3) + x(4)\delta(n–4) + \ldots$$

και γενικά προκύπτει η σχέση (1.34). Η σχέση αυτή είναι πολύ βασική και θα μας βοηθήσει στην κατανόηση της συνέλιξης (convolution), όπως θα δούμε αναλυτικά στην ενότητα 1.4.

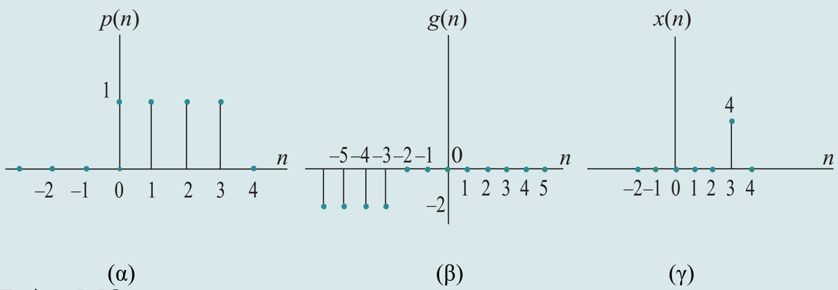


Σχήμα 1.18

Η μοναδιαία κρουστική στην περιγραφή οποιουδήποτε σήματος διακριτού χρόνου x(n):(α) Aδ(n), (β) Aδ(n–m), (γ) x(n)

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 1.4

Να εκφράσετε τον παλμό διακριτού χρόνου $p(n)$ του Σχήματος 1.19α ως συνδυασμό βηματικών ακολουθιών.



Σχήμα 1.19

Σήματα διακριτού χρόνου.

Δραστηριότητα 1.2

Να βρείτε τις εκφράσεις για τα σήματα $g(n)$, $x(n)$ των Σχημάτων 1.19β και 1.19γ.

Σύνοψη ενότητας

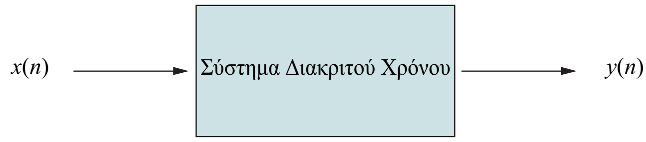
Στην ενότητα αυτή ορίσαμε όλες τις βασικές ακολουθίες (κρουστική, βηματική, εκθετική) και γνωρίσαμε τις στοιχειώδεις πράξεις που μπορούμε να έχουμε σ' αυτές. Στη συνέχεια, είδαμε ότι οποιοδήποτε σήμα διακριτού χρόνου μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός μοναδιαίων κρουστικών.

1.4 Συστήματα διακριτού χρόνου

Ένα σύστημα διακριτού χρόνου είναι εκείνο που δέχεται μία είσοδο διακριτού χρόνου $x(n)$ και παράγει μία έξοδο επίσης διακριτού χρόνου $y(n)$ (Σχήμα 1.20). Τα συστήματα με τα οποία θα ασχοληθούμε στο βιβλίο αυτό έχουν δύο βασικά χαρακτηριστικά. Είναι *γραμμικά* (linear) και *χρονικά αμετάβλητα* (time–invariant). Θα αναφερόμαστε σ' αυτά με τον αγγλικό όρο LTI (Linear Time–Invariant) για λόγους συμβατότητας με τη διεθνή βιβλιογραφία και ευκολίας του σπουδαστή.

Γραμμικό ονομάζεται ένα σύστημα στο οποίο ισχύει η ***αρχή της υπέρθεσης***. Συγκεκριμένα, εάν η είσοδος του συστήματος, το οποίο αρχικά βρισκόταν σε ηρεμία[3],

[3] Αρχική ηρεμία σημαίνει ότι στο σύστημα δεν έχει εφαρμοστεί καμία διέγερση (είσοδος) πριν από τη χρονική στιγμή $n = n_0$, κατά την οποία εφαρμόστηκε η είσοδος $x(n)$.



Σχήμα 1.20

Γενικό διάγραμμα συστήματος διακριτού χρόνου

αποτελείται από ένα γραμμικό συνδυασμό σημάτων, τότε η έξοδος του συστήματος (απόκριση) θα ισούται με το γραμμικό συνδυασμό των αποκρίσεων των επιμέρους σημάτων, σαν αυτά να είχαν εφαρμοσθεί το καθένα χωριστά. Μαθηματικά αυτό εκφράζεται ως εξής: αν $y_1(n)$ είναι η απόκριση του συστήματος στην είσοδο $x_1(n)$ και $y_2(n)$ είναι η απόκριση αυτού στην είσοδο $x_2(n)$, τότε η απόκριση του συστήματος στην είσοδο $ax_1(n) + bx_2(n)$ θα είναι $ay_1(n) + by_2(n)$, όπου a, b σταθερές.

Ας εξετάσουμε τις περιπτώσεις ενός γραμμικού και ενός μη γραμμικού συστήματος. Ένα παράδειγμα γραμμικού συστήματος είναι αυτό του οποίου η έξοδος ισούται με $y(n) = x(n)–x(n–1)$. Για είσοδο $x_1(n)$, η έξοδος του συστήματος θα είναι $y_1(n) = x_1(n)–x_1(n–1)$. Για είσοδο $x_2(n)$ η έξοδος του συστήματος θα είναι $y_2(n) = x_2(n)–x_2(n–1)$. Αν τώρα εφαρμόσουμε ως είσοδο $x_3(n)$ το γραμμικό συνδυασμό των δύο προηγουμένων ακολουθιών εισόδου, δηλαδή $x_3(n) = a\,x_1(n) + b\,x_2(n)$, η έξοδος $y_3(n)$ του συστήματος θα ισούται με:

$$
\begin{aligned}
y_3(n) &= x_3(n)–x_3(n–1) = [a\,x_1(n) + b\,x_2(n)] – [a\,x_1(n–1) + b\,x_2(n–1)] \\
&= a[x_1(n) – x_1(n–1)] + b[x_2(n) – x_2(n–1)] = a\,y_1(n) + b\,y_2(n)
\end{aligned}
$$

άρα, ισχύει η αρχή της υπέρθεσης.

Ένα παράδειγμα μη γραμμικού συστήματος είναι εκείνο το οποίο παράγει στην έξοδό του το τετράγωνο της εισόδου, δηλαδή $y(n) = [x(n)]^2$. Για είσοδο $x_1(n)$ η έξοδος του συστήματος θα είναι $y_1(n) = [x_1(n)]^2$. Για είσοδο $x_2(n)$ η έξοδος του συστήματος θα είναι $y_2(n) = [x_2(n)]^2$. Αν τώρα εφαρμοστεί στην είσοδο το σήμα $x_3(n) = ax_1(n) + bx_2(n)$ η έξοδος θα είναι:

$$
\begin{aligned}
y_3(n) &= \left[x_3(n)\right]^2 = \left[ax_1(n) + bx_2(n)\right]^2 = \left[ax_1(n)\right]^2 + \left[bx_2(n)\right]^2 + 2abx_1(n)x_2(n) = \\
&= a^2 y_1(n) + b^2 y_2(n) + 2abx_1(n)x_2(n) \neq ay_1(n) + by_2(n)
\end{aligned}
$$

Χρονικά αμετάβλητο ονομάζεται ένα σύστημα του οποίου η συμπεριφορά και οι ιδιότητες δεν αλλάζουν με το χρόνο. Αυτό σημαίνει ότι μια χρονική ολίσθηση της εισόδου θα αντιστοιχεί σε χρονική ολίσθηση της εξόδου. Με άλλα λόγια, εάν $y(n)$ είναι η έξοδος ενός χρονικά αμετάβλητου συστήματος για είσοδο $x(n)$, τότε $y(n–n_0)$ θα είναι η έξοδος αυτού για είσοδο $x(n–n_0)$.

Ευσταθές (stable) ονομάζεται ένα σύστημα*εάν και μόνο εάν κάθε φραγμένη είσοδος* *παράγει μια φραγμένη έξοδο* (Bounded Input Bounded Output, BIBO). Με άλλα λόγια, ένα τέτοιο σύστημα μας εξασφαλίζει ότι όσο η είσοδος παραμένει φραγμένη ($|x(n)| \leq M_x < \infty$), η έξοδος δε θα απειρίζεται ($|y(n)| \leq M_y < \infty$) για όλα τα n, όπου M_x, M_y πεπερασμένοι αριθμοί. Σε διαφορετική περίπτωση το σύστημα ονομάζεται ασταθές (unstable).

Αιτιατό (causal) σύστημα είναι εκείνο του οποίου η έξοδος, σε κάθε χρονική στιγμή, εξαρτάται μόνο από τις τιμές του σήματος εισόδου στην τρέχουσα χρονική στιγμή και σε προηγούμενες χρονικές στιγμές. Με άλλα λόγια, οι μεταβολές στην έξοδο ενός τέτοιου συστήματος είναι αποτέλεσμα των μεταβολών της εισόδου.

Στη συνέχεια, θα εξετάσουμε τη σημασία της κρουστικής απόκρισης μονοδιάστατου συστήματος διακριτού χρόνου και θα δούμε ότι με τη βοήθειά της μπορούμε, μέσω της πράξης της συνέλιξης, να υπολογίσουμε την έξοδο ενός γραμμικού συστήματος διακριτού χρόνου για οποιαδήποτε είσοδο.

Παράδειγμα 1.5

Να χαρακτηρίσετε τα συστήματα που περιγράφονται από τις επόμενες σχέσεις εισόδου–εξόδου, ως προς τις ιδιότητες της γραμμικότητας, της ευστάθειας,της χρονικής μεταβλητότητας και της αιτιατότητας.

α. $y(n) = 3x(n)–2x(n–1)$ γ. $y(n) = nx(n–2)–x(n + 3)$

β. $y(n) = x(n) + 2y(n–1)$ δ. $y(n) = \cos[x(n)]$

Λύση:

Τα δύο πρώτα συστήματα είναι γραμμικά, αφού η έξοδος υπολογίζεται ως γραμμικός συνδυασμός δειγμάτων της εισόδου και προηγούμενων τιμών της εξόδου. Το τρίτο σύστημα είναι επίσης γραμμικό, αφού ισχύει η αρχή της υπέρθεσης. Το τέταρτο είναι μη γραμμικό σύστημα.

Ως προς την ευστάθεια, το δεύτερο σύστημα δεν είναι ευσταθές. Για να γίνει αυτό κατανοητό, ας θεωρήσουμε ότι στην είσοδο του συστήματος εφαρμόζεται η φραγμένη ακολουθία $x(n) = C\delta(n)$, όπου C σταθερά. Θεωρούμε επίσης ότι το σύστημα βρίσκεται σε αρχική ηρεμία, οπότε $y(–1) = 0$. Η ακολουθία εξόδου που παράγεται είναι:

$$y(0) = C\cdot\delta(0) + 2\cdot y(–1) = C\cdot 1 + 2\cdot 0 = C$$

$$y(1) = C\cdot\delta(1) + 2\cdot y(0) = C\cdot 0 + 2\cdot C = 2C$$

$$y(2) = C\cdot\delta(2) + 2\cdot y(1) = C\cdot 0 + 2\cdot 2C = 2^2C$$

…

$$y(n) = C\cdot\delta(n) + 2\cdot y(n–1) = C\cdot 0 + 2\cdot 2^{n–1}C = 2^nC$$

Επομένως, γίνεται φανερό, ότι η έξοδος είναι μη φραγμένη και το σύστημα είναι BIBO ασταθές, αφού μία φραγμένη είσοδος έχει ως αποτέλεσμα μια μη φραγμένη έξοδο.

Μεταβλητό με το χρόνο είναι το τρίτο σύστημα αφού ο συντελεστής n δεν είναι σταθερός αλλά μεταβάλλεται διαρκώς.

Τέλος, το τρίτο σύστημα δεν είναι αιτιατό αφού απαιτεί γνώση μελλοντικών τιμών της εισόδου.

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 1.5

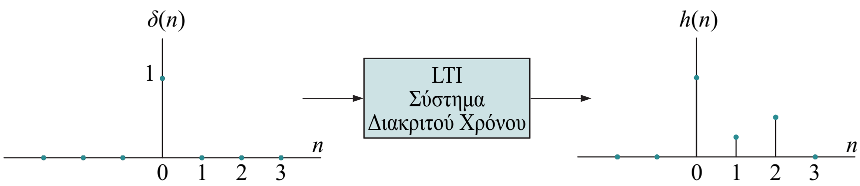
Εξετάστε αν το σύστημα $y(n) = 3x(n) + 3$ είναι γραμμικό.

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 1.6

Εξετάστε αν τα συστήματα $y(n) = nx(n)$ και $y(n) = x(2n)$ είναι χρονικά αμετάβλητα.

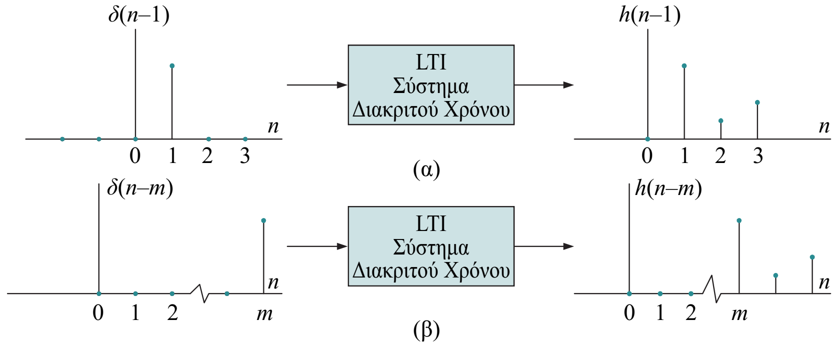
1.4.1 Κρουστική απόκριση συστήματος

Ας θυμηθούμε τη μοναδιαία κρουστική ακολουθία $\delta(n)$. Αυτή έχει τιμή 1 για $n = 0$ και τιμή 0 οπουδήποτε αλλού (βλ. Σχήμα 1.10). Εφαρμόζουμε αυτό το σήμα στην είσοδο ενός LTI συστήματος διακριτού χρόνου, το οποίο αρχικά ηρεμεί, δηλαδή εφαρμόζουμε μία διέγερση τη στιγμή $n = 0$. Το σήμα εξόδου, το οποίο θα παρατηρηθεί μετά τη στιγμή $n = 0$, είναι χαρακτηριστικό του ίδιου του συστήματος. Αυτό το σήμα εξόδου αποτελεί την ***κρουστική απόκριση***, $h(n)$, του συστήματος. Η κρουστική απόκριση ονομάζεται και ***φυσική απόκριση*** του συστήματος. Ένα παράδειγμα κρουστικής απόκρισης συστήματος διακριτού χρόνου φαίνεται στο Σχήμα 1.21.



Σχήμα 1.21
Κρουστική απόκριση συστήματος διακριτού χρόνου

Αν εφαρμόζαμε τη διέγερση τη στιγμή $n = 1$, τότε η απόκριση του συστήματος θα ήταν ίδια με την προηγούμενη, αλλά θα άρχιζε από τη στιγμή $n = 1$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.22α. Και γενικά, αν εφαρμόζαμε την κρουστική είσοδο τη χρονική στιγμή $n = m$, τότε το αποτέλεσμα θα ήταν η ίδια απόκριση, αλλά με αρχή τη στιγμή m (Σχήμα 1.22β). Όπως καταλαβαίνουμε αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι το σύστημά μας είναι χρονικά αμετάβλητο.



Σχήμα 1.22

Κρουστική απόκριση συστήματος διακριτού χρόνου για είσοδο (α) δ(n–1) και (β) δ(n–m)

1.4.2 Συνέλιξη

Τίθεται συνεπώς το ερώτημα: Ποια θα είναι η απόκριση ενός συστήματος διακριτού χρόνου για είσοδο $x(n)$, αν γνωρίζουμε την κρουστική του απόκριση $h(n)$;

Η απάντηση στο ερώτημα αυτό δίνεται μονολεκτικά από τη λέξη *συνέλιξη* (convolution). Η έξοδος $y(n)$ του συστήματος (Σχήμα 1.20) θα ισούται με τη συνέλιξη της εισόδου $x(n)$ και της κρουστικής $h(n)$ του συστήματος, ή:

$$y(n) = x(n) * h(n) \tag{1.35}$$

όπου * το σύμβολο της συνέλιξης. Όμως τι είναι η συνέλιξη και πώς υπολογίζεται;

Έστω, λοιπόν, ότι $x(n)$ η είσοδος και $h(n)$ η κρουστική απόκριση συστήματος διακριτού χρόνου. Πριν προχωρήσουμε, ας θυμηθούμε τη σχέση (1.34), η οποία μας λέει ότι ένα σήμα διακριτού χρόνου μπορεί να εκφρασθεί ως γραμμικός συνδυασμός ολισθημένων κρουστικών. Επίσης, ας μην ξεχνάμε ότι το σύστημα που εξετάζουμε είναι γραμμικό (άρα ισχύει η αρχή της υπέρθεσης) και χρονικά αμετάβλητο. Έχοντας αυτά κατά νου, μπορούμε να εκφράσουμε την είσοδο $x(n)$ ως:

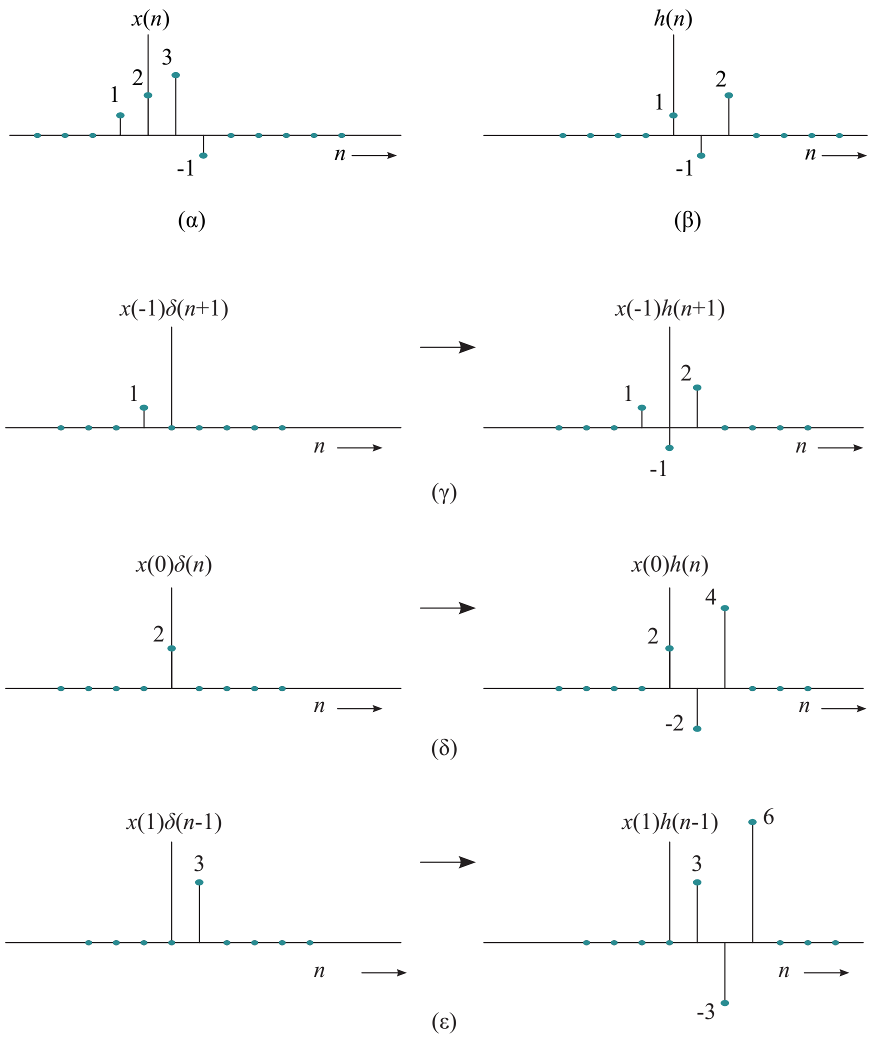
$$\begin{aligned} x(n) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta(n-m) \\ &= \ldots + x(-1)\delta(n+1) + x(0)\delta(\mathrm{n}) + x(1)\delta(n-1) + x(2)\delta(n-2) + \ldots \end{aligned} \tag{1.36}$$

Για κάθε μία από τις εισόδους $x(m)\delta(n–m)$, είδαμε στην προηγούμενη υποενότητα 1.4.1, ότι η έξοδος θα ισούται με $x(m)h(n–m)$. Λόγω της γραμμικότητας του συστήματος, η τελική έξοδος $y(n)$ θα είναι ίση με το άθροισμα των επιμέρους αποκρίσεων, δηλαδή:

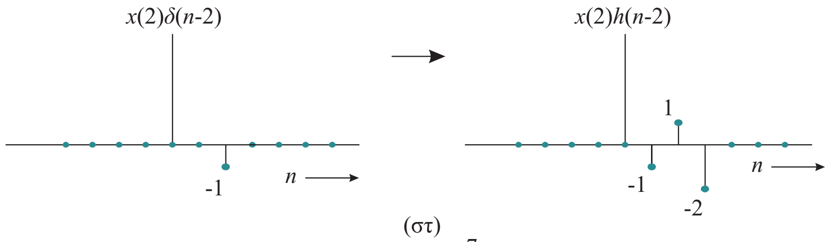
$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m) \tag{1.37}$$

Αυτή είναι η σχέση της γραμμικής συνέλιξης.

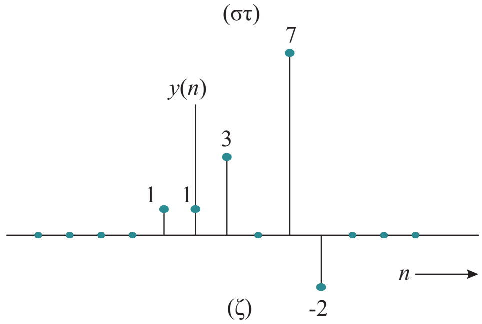
Η διαδικασία που μόλις περιγράψαμε δίνεται παραστατικά με τη βοήθεια του παραδείγματος του Σχήματος 1.23, για την περίπτωση κατά την οποία $\{x(n)\} = \{1,\underline{\mathbf{2}},3,-1\}$ και $\{h(n)\} = \{\underline{\mathbf{1}},-1,2\}$. Στα Σχήματα 1.23α,β φαίνονται οι ακολουθίες $x(n)$, $h(n)$. Στο αριστερό μέρος των Σχημάτων 1.23γ έως 1.23στ δίνονται οι κρουστικές $x(m)\delta(n-m)$, ενώ στο δεξί μέρος των ίδιων σχημάτων φαίνονται οι αντίστοιχες αποκρίσεις τους. Το άθροισμα των επιμέρους κρουστικών, το οποίο αποτελεί και την απόκριση του συστήματος, φαίνεται στο Σχήμα 1.23ζ.



Σχήμα 1.23
Γραμμική συνέλιξη



(στ)



(ζ)

Παρατηρήστε ότι το μήκος της απόκρισης είναι 6 δείγματα. Γενικά, αν N_1 είναι το μήκος της μίας ακολουθίας και N_2 το μήκος της άλλης ακολουθίας, τότε η γραμμική συνέλιξη αυτών δίνει μια νέα ακολουθία με μήκος $N_1 + N_2 - 1$. Ο υπολογισμός της συνέλιξης δύο σημάτων διακριτού χρόνου με χαρτί και μολύβι γίνεται συνήθως με δύο τρόπους. Είτε γραφικά, όπως περιγράφεται στο παράδειγμα 1.6 είτε με τη μέθοδο της ολισθαίνουσας ράβδου του παραδείγματος 1.7

Παράδειγμα 1.6

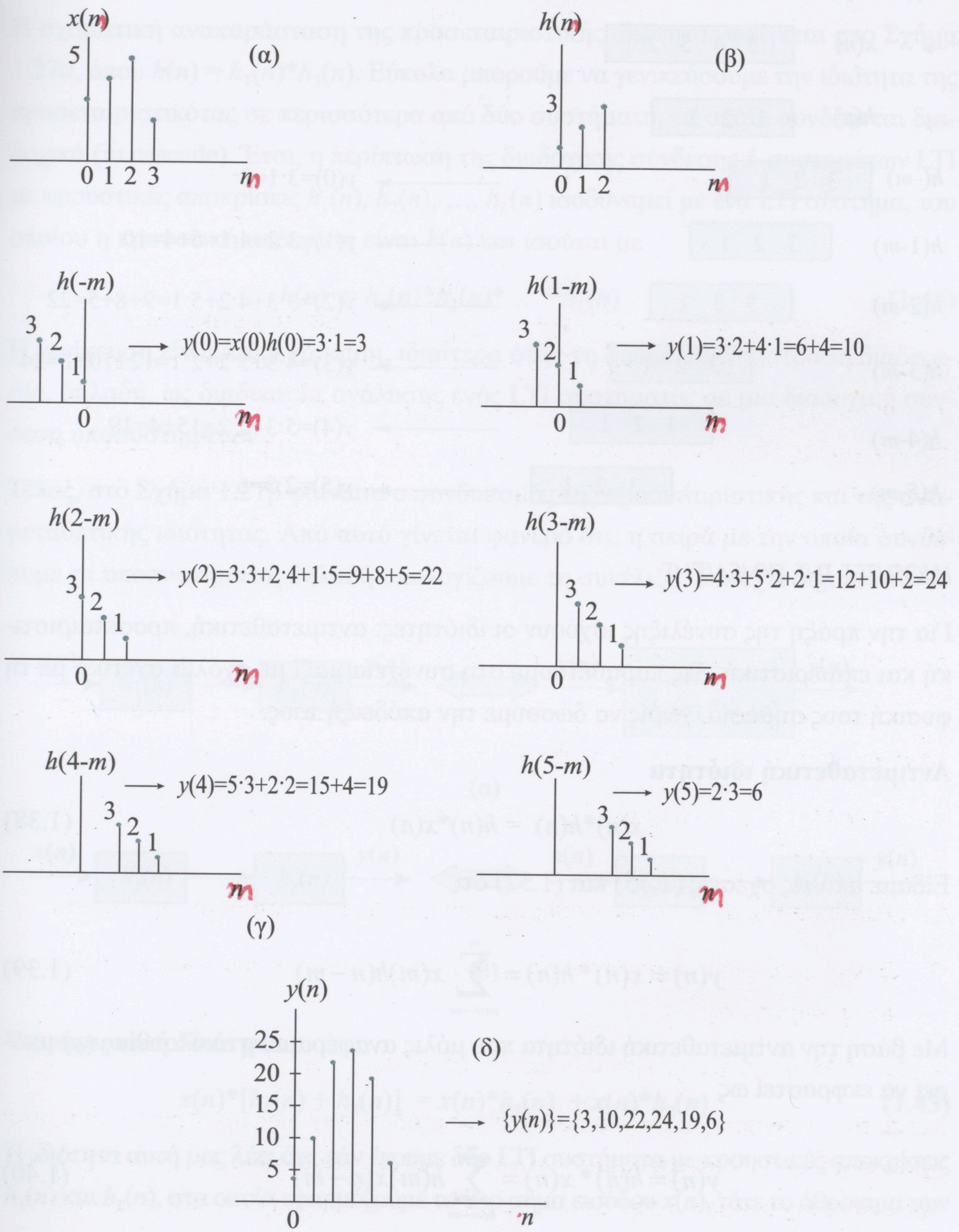
Γραφική μέθοδος υπολογισμού της συνέλιξης.

Ο υπολογισμός της συνέλιξης των $x(n)$ και $h(n)$, σύμφωνα με τη σχέση 1.37, μας υπαγορεύει την ακόλουθη σειρά βημάτων:

1. Αναδίπλωση (κατοπτρισμό) της $h(m)$ γύρω από το δείγμα $m = 0$, ώστε να μας δώσει την $h(-m)$.
2. Ολίσθηση της $h(-m)$ στην επιθυμητή θέση n, ώστε να πάρουμε την $h(n-m)$.
3. Υπολογισμό των γινομένων $x(m)h(n-m)$, δείγμα προς δείγμα, για να μας δώσουν την επιθυμητή τιμή n.
4. Πρόσθεση των γινομένων που υπολογίστηκαν.

Ας παρακολουθήσουμε τον υπολογισμό της εξόδου $y(n)$ ενός συστήματος διακριτού χρόνου με κρουστική απόκριση $\{h(n)\} = \{\underline{\mathbf{1}},2,3\}$ και είσοδο $\{x(n)\} = \{\underline{\mathbf{3}},4,5,2\}$, όπως αυτό περιγράφεται στο Σχήμα 1.24. Οι ακολουθίες $x(n)$ και $h(n)$ δείχνονται στα

Σχήματα 1.24α και 1.24β αντίστοιχα. Στα Σχήματα 1.24γ δίνονται όλες οι διαφορετικές θέσεις της $h(n-m)$ για $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Για καθεμιά από τις θέσεις αυτές υπολογίζεται το αντίστοιχο άθροισμα γινομένων με την ακολουθία εισόδου. Αυτό αποτελεί ουσιαστικά και το αποτέλεσμα της συνέλιξης των $x(n)$ και $h(n)$, δηλαδή την ακολουθία εξόδου $y(n)$ η οποία φαίνεται στο Σχήμα 1.24δ. Στο παράδειγμά μας η $x(n)$ έχει μήκος 4 και η $h(n)$ έχει μήκος 3, οπότε η ακολουθία $y(n)$, που προκύπτει, έχει μήκος $4 + 3 - 1 = 6$ δειγμάτων.

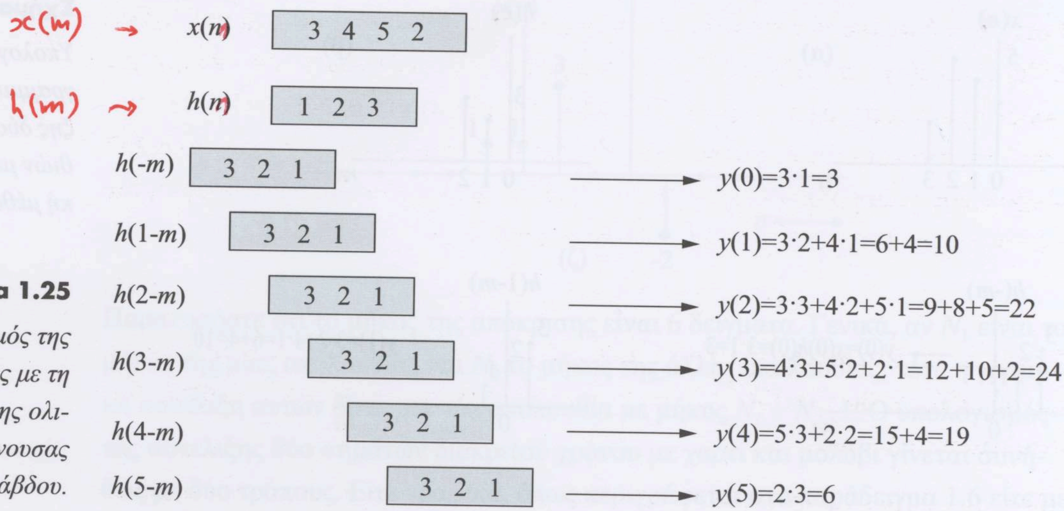


Σχήμα 1.24
Υπολογισμός της γραμμικής συνέλιξης δύο ακολουθιών με τη γραφική μέθοδο.

Παράδειγμα 1.7

Υπολογισμός της συνέλιξης με τη μέθοδο της ολισθαίνουσας ράβδου.

Η διαδικασία είναι η ίδια με εκείνη του παραδείγματος 1.6, με μόνη διαφορά ότι αντί για τις γραφικές παραστάσεις των ακολουθιών χρησιμοποιούμε τις τιμές τους. Τα βήματα που ακολουθούμε είναι επίσης τα ίδια, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 1.25 όπου δίνεται ο υπολογισμός της συνέλιξης των ακολουθιών $x(n)$, $h(n)$ του παραδείγματος 1.6.



Σχήμα 1.25
Υπολογισμός της συνέλιξης με τη μέθοδο της ολισθαίνουσας ράβδου.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΣΥΝΕΛΙΞΗΣ

Για την πράξη της συνέλιξης ισχύουν οι ιδιότητες: αντιμεταθετική, προσεταιριστική και επιμεριστική. Τις παραθέτουμε στη συνέχεια μαζί με σχόλια σχετικά με τη φυσική τους σημασία, χωρίς να δώσουμε την απόδειξή τους.

Αντιμεταθετική ιδιότητα

$$x(n)*h(n) = h(n)*x(n) \tag{1.38}$$

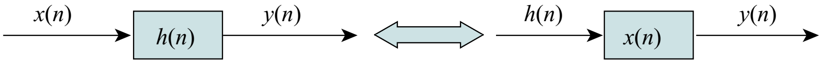
Είδαμε από τις σχέσεις (1.35) και (1.37) ότι

$$y(n) = x(n)*h(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m) \tag{1.39}$$

Με βάση την αντιμεταθετική ιδιότητα που μόλις αναφέραμε, η ακολουθία $y(n)$ μπορεί να εκφραστεί ως

$$y(n) = h(n)*x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x(n-m) \tag{1.40}$$

Επομένως, οι ρόλοι των ακολουθιών $x(n)$ και $h(n)$ μπορούν να αντιμετατεθούν, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.26.



Σχήμα 1.26
Σχηματική αναπαράσταση της αντιμεταθετικής ιδιότητας της συνέλιξης.

Προσεταιριστική ιδιότητα

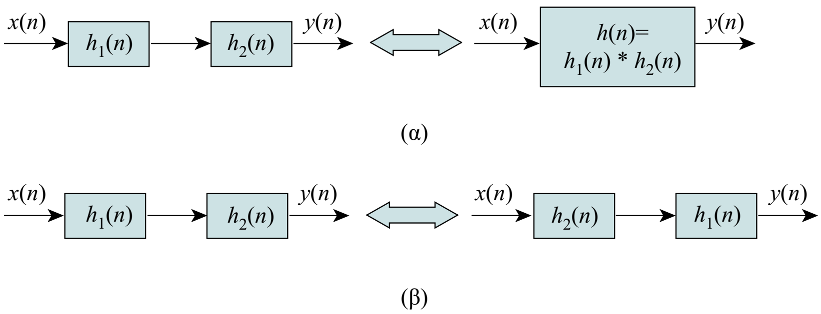
$$[x(n)*h_1(n)]*h_2(n) = x(n)*[h_1(n)*h_2(n)] \tag{1.41}$$

Η σχηματική αναπαράσταση της προσεταιριστικής ιδιότητας φαίνεται στο Σχήμα 1.27α, όπου $h(n) = h_1(n)*h_2(n)$. Εύκολα μπορούμε να γενικεύσουμε την ιδιότητα της προσεταιριστικότας σε περισσότερα από δύο συστήματα, τα οποία συνδέονται διαδοχικά (in cascade). Έτσι, η περίπτωση της διαδοχικής σύνδεσης L συστημάτων LTI με κρουστικές αποκρίσεις $h_1(n)$, $h_2(n)$, …, $h_L(n)$ ισοδυναμεί με ένα LTI σύστημα, του οποίου η κρουστική απόκριση είναι $h(n)$ και ισούται με

$$h(n) = h_1(n)*h_2(n)* \dots *h_L(n) \tag{1.42}$$

Η γενίκευση είναι πολύ χρήσιμη, ιδιαίτερα όταν τη δούμε ως αντίστροφη διαδικασία, δηλαδή, ως διαδικασία ανάλυσης ενός LTI συστήματος σε μια διαδοχική σύνδεση υποσυστημάτων.

Τέλος, στο Σχήμα 1.27β φαίνεται ο συνδυασμός της προσεταιριστικής και της αντιμεταθετικής ιδιότητας. Από αυτό γίνεται φανερό ότι, η σειρά με την οποία συνδέουμε τα υποσυστήματα, δηλαδή υπολογίζουμε τη συνέλιξη, δεν έχει σημασία.



Σχήμα 1.27
(α) Προσεταιριστική ιδιότητα της συνέλιξης, και (β) συνδυασμός προσεταιριστικής και αντιμεταθετικής ιδιότητας

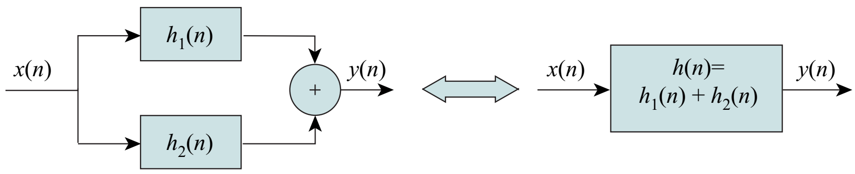
Επιμεριστική Ιδιότητα

$$x(n)*[h_1(n) + h_2(n)] = x(n)*h_1(n) + x(n)*h_2(n) \tag{1.43}$$

Η ιδιότητα αυτή μας λέει ότι, εάν έχουμε δύο LTI συστήματα με κρουστικές αποκρίσεις $h_1(n)$ και $h_2(n)$, στα οποία εφαρμόζουμε το ίδιο σήμα εισόδου $x(n)$, τότε το άθροισμα των δύο αποκρίσεων είναι ίδιο με την απόκριση ενός άλλου συστήματος με κρουστική απόκριση $h(n) = h_1(n) + h_2(n)$. Δηλαδή, το νέο αυτό σύστημα ισούται με τον παράλληλο συνδυασμό των δύο LTI συστημάτων (Σχήμα 1.28). Γενικά, η παράλληλη σύνδεση L συστημάτων με κρουστικές αποκρίσεις $h_1(n)$, $h_2(n)$,…, $h_L(n)$ στα οποία εφαρμόζεται η ίδια είσοδος $x(n)$, ισοδυναμεί με ένα σύστημα του οποίου η κρουστική απόκριση ισούται με

$$h(n) = h_1(n) + h_2(n) + \ldots + h_L(n) \tag{1.44}$$

Και αντίστροφα, κάθε LTI σύστημα μπορεί να αναλυθεί σε υποσυστήματα συνδεδεμένα παράλληλα.



Σχήμα 1.28

Επιμεριστική ιδιότητα: δύο LTI συστήματα συνδεδεμένα παράλληλα, μπορούν να αντικατασταθούν από ένα σύστημα του οποίου η κρουστική απόκριση ισούται με το άθροισμα των κρουστικών τους.

Μέχρι εδώ έχουμε επικεντρώσει τη μελέτη μας στον υπολογισμό της γραμμικής συνέλιξης με γραφικό ή αριθμητικό τρόπο. Θα εξετάσουμε τώρα τον υπολογισμό της συνέλιξης ακολουθιών με αναλυτικό τρόπο. Οι αναλυτικές εκφράσεις οδηγούν σε συμπεράσματα περισσότερο γενικά για τα συστήματα που εξετάζουμε, και έτσι μας είναι πιο χρήσιμες. Ας δούμε λοιπόν ένα σχετικό παράδειγμα.

Παράδειγμα 1.8

Στην είσοδο ενός συστήματος με κρουστική απόκριση $h(n) = a^n u(n)$ εφαρμόζεται το σήμα $x(n) = b^n u(n)$, όπου a, b γνωστές σταθερές και $a \neq b$. Να υπολογιστεί η έξοδος $y(n)$ του συστήματος.

Λύση:

Η έξοδος $y(n)$ θα είναι το αποτέλεσμα της συνέλιξης της εισόδου με την κρουστική απόκριση του συστήματος. Με βάση τη σχέση (1.40) έχουμε:

$$y(n) = h(n) * x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x(n-m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a^m u(m) b^{n-m} u(n-m) = \sum_{m=0}^{n} a^m b^{n-m}$$

(Θυμηθείτε ότι η $u(m) = 0$ για $m < 0$ και η $u(n–m) = 0$ για $m > n$).

Επειδή το άθροισμα υπολογίζεται ως προς m, ο όρος b^n μπορεί να «βγεί» εκτός του αθροίσματος, οπότε η τελευταία σχέση γίνεται:

$$y(n) = b^n \sum_{m=0}^{n} a^m b^{-m} = b^n \sum_{m=0}^{n} (ab^{-1})^m$$

Το παραπάνω είναι άθροισμα των $n + 1$ πρώτων όρων γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο 1 και λόγο ab^{-1} και δίνεται σε κλειστή μορφή ως

$$y(n) = b^n\left(\frac{1-(ab^{-1})^{n+1}}{1-ab^{-1}}\right) = b^n\left(\frac{b-a^{n+1}b^{-n}}{b-a}\right)$$
$$= \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{b-a} = \frac{b}{b-a}b^n - \frac{a}{b-a}a^n = C_b b^n - C_a a^n$$

όπου $n \geq 0$. Παρατηρούμε ότι η έξοδος χαρακτηρίζεται τόσο από την είσοδο $x(n) = b^n$, $n \geq 0$, όσο και από την κρουστική του συστήματος $h(n) = a^n$, $n \geq 0$. Αυτή είναι μια γενικότερη διαπίστωση, δηλαδή η έξοδος θα περιέχει όρους της ίδιας αλγεβρικής μορφής με τους όρους της εισόδου και της κρουστικής απόκρισης του συστήματος.

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 1.7

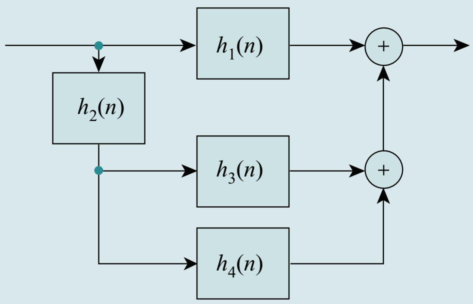
Να υπολογίσετε την έξοδο του συστήματος του Παραδείγματος 1.8 με είσοδο τη βηματική ακολουθία πλάτους Α.

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 1.8

Για το σύστημα με μοναδιαία κρουστική ίση με $h(n) = (a^n + b^n)u(n)$, να υπολογιστεί η έξοδος, όταν σ' αυτό εφαρμόζεται ως είσοδος η βηματική ακολουθία πλάτους Α.

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 1.9

Να υπολογιστεί η κρουστική απόκριση $h(n)$ του συστήματος διακριτού χρόνου του Σχήματος 1.29, όταν $h_1(n) = \delta(n) + \frac{1}{2}\delta(n-1)$, $h_2(n) = \frac{1}{2}\delta(n) - \frac{1}{4}\delta(n-1)$, $h_3(n) = 2\delta(n)$, και $h_4(n) = -2(\frac{1}{2})^n u(n)$.



Σχήμα 1.29

Σύστημα διακριτού χρόνου.

Σύνοψη ενότητας

Στην ενότητα αυτή ασχοληθήκαμε με γραμμικά χρονικά–αμετάβλητα (LTI) συστήματα διακριτού χρόνου και μελετήσαμε την απόκρισή τους σε διεγέρσεις της εισόδου. Είδαμε, ότι η έξοδος κάθε LTI συστήματος ισούται με τη συνέλιξη της ακολουθίας εισόδου με την μοναδιαία κρουστική απόκριση του συστήματος. Γνωρίσαμε τις ιδιότητες της συνέλιξης (αντιμεταθετική, προσεταιριστική, επιμεριστική) και περιγράψαμε διαφορετικούς τρόπους υπολογισμού της τόσο αριθμητικά, όσο και αναλυτικά.

Σύνοψη κεφαλαίου

Στο Κεφάλαιο αυτό μάθαμε ότι:

Η ψηφιακή επεξεργασία σημάτων παρουσιάζει στις μέρες μας εντυπωσιακά πλεονεκτήματα έναντι της αντίστοιχης αναλογικής επεξεργασίας, όπως ευελιξία, αξιοπιστία και ακρίβεια.

Κάθε αναλογικό σήμα, για να υποστεί επεξεργασία με ένα ψηφιακό σύστημα, πρέπει πρώτα να μετατραπεί σε ψηφιακό σήμα. Αυτό επιτυγχάνεται με κατάλληλη δειγματοληψία του αναλογικού σήματος και κβάντιση (καθώς και κωδικοποίηση) των δειγμάτων.

Κατάλληλη δειγματοληψία σημαίνει τη λήψη τουλάχιστον δύο δειγμάτων ανά περίοδο του σήματος, δηλαδή $F_s \geq 2F_{\max}$ (θεώρημα δειγματοληψίας ή θεώρημα του Shannon).

Ελάττωση του σφάλματος κβάντισης, κατά την ψηφιοποίηση ενός δείγματος, συνεπάγεται περισσότερα bits για την αναπαράσταση αυτού.

Κάθε σήμα διακριτού χρόνου μπορεί να εκφραστεί ως άθροισμα ολισθημένων κρουστικών, πολλαπλασιασμένων με κατάλληλους συντελεστές βάρους.

Η απόκριση συστήματος διακριτού χρόνου ισούται με τη γραμμική συνέλιξη της εισόδου και της κρουστικής απόκρισης του συστήματος.

Βιβλιογραφία κεφαλαίου

ΕΛΛΗΝΟΓΛΩΣΣΗ

Σ. Θεοδωρίδης, Κ. Μπερμπερίδης, *Εισαγωγή στη Θεωρία Σημάτων & Συστημάτων*, Τυπωθήτω Γ. Δαρδανός, Αθήνα, 1998.

Ν.Καλουπτσίδης, *Σήματα, Συστήματα και Αλγόριθμοι* , Εκδόσεις Δίαυλος,Αθήνα, 1993.

ΞΕΝΟΓΛΩΣΣΗ

R.I.Damper, *Introduction to Discrete–Time Signals and Systems*, Chapman & Hall, 1995.

E.C.Ifeachor and B.W. Jervis, *Digital Signal Processing: A Practical Approach*, Second Edition, Pearson Education Limited, 2002.

P.A. Lynn and W. Fuerst, *Introductory Digital Signal Processing With Computer Applications*, J.Wiley and Sons Ltd, 1989.

S.K.Mitra, *Digital Signal Processing: A computer–Based Approach*, Second Edition, McGraw Hill, 2001.

S.J.Orfanidis, *Introduction to Signal Processing*, Prentice–Hall, 1996.

A.V.Oppenheim and A.S.Willsky, *Signals & Systems*, Second Edition, Prentice–Hall, 1997.

J.G.Proakis and D.G.Manolakis, *Digital Signal Processing: Principles, Algorithms and Applications*, Prentice–Hall, 1996.

R.D.Strum and D.E.Kirk, *First Principles of Discrete Systems and Digital Signal Processing*, Addison–Wesley Publishing Company, 1988.

Απόδοση αγγλικών όρων στην ελληνική

accuracy	ακρίβεια (πράξεων)
advance	προήγηση
aliasing	φαινόμενο χαμηλού (ανεπαρκούς) ρυθμού δειγματοληψίας, φασματική επικάλυψη, αλλοίωση
amplitude	πλάτος
angular frequency	γωνιακή συχνότητα
bounded	φραγμένος

cascade	διαδοχική σύνδεση
convolution	συνέλιξη
delay	καθυστέρηση
digital signal processing	ψηφιακή επεξεργασία σήματος
dimension	διάσταση
discrete	διακριτός
dynamic range	δυναμική περιοχή
exponential sequence	εκθετική ακολουθία
folding frequency	συχνότητα αναδίπλωσης
fundamental period	βασική περίοδος
image processing	επεξεργασία εικόνας
impulse response	κρουστική απόκριση
linear	γραμμικός
normalised frequency	κανονικοποιημένη συχνότητα
periodic	περιοδικός
phasor	φάσορας
quantisation	κβάντιση
quantisation error	σφάλμα ή θόρυβος κβάντισης
relative frequency	σχετική συχνότητα
resolution	ανάλυση, διακριτική ικανότητα
rounding	στρογγυλοποίηση
sinusoidal	ημιτονοειδές
speech	ομιλία
superposition	υπέρθεση
time invariant	χρονικά αμετάβλητος
truncation	αποκοπή
unit sample	μοναδιαίο δείγμα, κρουστική ακολουθία
unit step	μοναδιαία βηματική ακολουθία
video	ακολουθία εικόνων

σχέση $2\sin A\cos B = \sin(A + B) + \sin(A–B)$. Επομένως, έχουμε:

$$x(t) = \sin(\pi t) + 4\sin(3\pi t)\cos(2\pi t) = \sin(\pi t) + 2[\sin(3\pi t + 2\pi t) + \sin(3\pi t–2\pi t)] =$$
$$\sin(\pi t) + 2\sin(5\pi t) + 2\sin(\pi t) = 3\sin(\pi t) + 2\sin(5\pi t) = 3\sin(2\pi \frac{1}{2} t) +$$
$$2\sin(2\pi \frac{5}{2} t)$$

Βλέπουμε ότι το αναλογικό σήμα $x(t)$ αποτελείται από δύο συχνότητες,

την $F_1 = \frac{1}{2}$kHz και την $F_2 = \frac{5}{2}$kHz.

Η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας για την F_1 είναι $2F_1 = 2(1/2) = 1$ kHz, ενώ για την F_2 είναι $2F_2 = 2(5/2) = 5$ kHz. Συνεπώς, λαμβάνοντας δείγματα του σήματος με ρυθμό 3 kHz, για την F_1 δε θα υπάρξει πρόβλημα και τα δείγματα που θα πάρουμε θα αντιστοιχούν σ΄ αυτή. Για το ημιτονοειδές όμως με συχνότητα F_2, θα παρουσιαστεί πρόβλημα, εξαιτίας της χαμηλού ρυθμού δειγματοληψίας, αφού για να το αναπαραστήσουμε σωστά θα έπρεπε να λαμβάνουμε δείγματα με συχνότητα τουλάχιστον 5 kHz. Έτσι, τα δείγματα που θα προκύψουν θα αντιστοιχούν σ' ένα ημιτονοειδές συχνότητας

$$F_0 = F_k – k \cdot F_s = \frac{5}{2} – 1 \cdot 3 = -\frac{1}{2}\text{kHz}, \text{ όπου } F_k = F_2 = \frac{5}{2}\text{kHz και } k = 1,$$

αφού η τιμή F_0 που προέκυψε ανήκει στο διάστημα $[–F_s/2, F_s/2]$. Τελικά, ως συμπέρασμα προκύπτει ότι τα δείγματα που θα πάρουμε από τη δειγματοληψία του $x(t)$, θα αντιστοιχούν σ' ένα και μόνο ημιτονοειδές συχνότητας $\frac{1}{2}$kHz.

Επισημαίνεται ότι στο ίδιο αποτέλεσμα θα είχαμε καταλήξει αν εργαζόμασταν μόνο με τη σχέση $x(t) = 3\sin(\pi t) + 2\sin(5\pi t)$, και αντικαθιστούσαμε $t = nT$, όπου $T = 1/F_s = 1/3$ msec. Επαληθεύστε το.

1.4

Είναι εύκολο να δούμε ότι η ακολουθία $p(n)$ μπορεί να εκφραστεί ως διαφορά δύο βηματικών ακολουθιών, από τις οποίες η μία είναι ολισθημένη ως προς την άλλη κατά 4 μονάδες (δείγματα). Έχουμε, δηλαδή, $p(n) = u(n)–u(n–4)$, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 1.30. Αν πάλι δεν το σκεφτήκατε έτσι και κάνατε χρήση της μοναδιαίας κρουστικής $\delta(n)$, τότε θα καταλήξατε στο σωστό αποτέλεσμα, αλλά λίγο πιο επίπονα. Παρατηρείτε, δηλαδή, ότι $p(n) = \delta(n) + \delta(n–1) + \delta(n–2) + \delta(n–3)$. Αλλά, με βάση τη σχέση (1.33) έχουμε

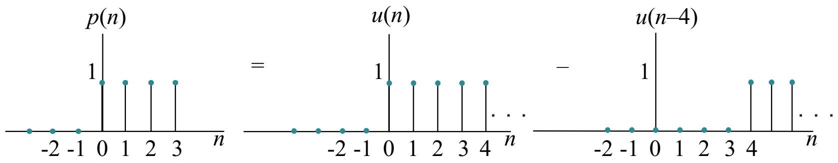
$$\delta(n) = u(n) - u(n-1)$$

$$\delta(n-1) = u(n-1) - u(n-2)$$

$$\delta(n-2) = u(n-2) - u(n-3)$$

$$\delta(n-3) = u(n-3) - u(n-4)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη καταλήγουμε και πάλι στο ίδιο αποτέλεσμα $p(n) = u(n) - u(n-4)$.



Σχήμα 1.30
Παλμός διακριτού χρόνου ως διαφορά βηματικών ακολουθιών

Η απάντηση αυτή είναι εύκολη για εκείνον που έχει κατανοήσει την έννοια της ολίσθησης σημάτων προς τα αριστερά (προήγηση) ή τα δεξιά (καθυστέρηση). Αν δεν τα καταφέρατε μην απογοητευτείτε. Είναι έννοιες που φαίνονται εύκολες, αλλά συχνά προκαλούν σύγχυση. Πιθανόν να μπερδευτείτε όταν σας ζητηθεί να σχεδιάσετε μία ακολουθία σαν την $u(n-4)$. Βλέποντας το μείον (–) μπροστά από το 4, συνήθως νομίζουμε ότι το σήμα βρίσκεται στα αρνητικά. Προσοχή σ' αυτό! Χρειάζεται εξοικείωση με τις έννοιες αυτές και να τις κατανοήσουμε. Το σημείο–κλειδί είναι εκεί όπου μηδενίζεται η παράσταση στην παρένθεση. Στην προκειμένη περίπτωση αυτό συμβαίνει για $n-4 = 0$, δηλαδή για $n = 4$. Συνεπώς, η ακολουθία (το σήμα) αρχίζει από το σημείο $n = 4$. Και αφού το n είναι θετικό, το σήμα θα συνεχίζει προς μεγαλύτερες τιμές, δηλαδή προς τα δεξιά. Ένα τέτοιο σήμα λέμε ότι έχει υποστεί καθυστέρηση κατά 4 μονάδες χρόνου. Το αν ένα σήμα έχει υποστεί καθυστέρηση (delay) ή προήγηση (advance) εξαρτάται από το αν αυτό βρίσκεται μετά ή πριν από το 0 (μηδέν). Ας μην ξεχνάμε ότι η μεταβλητή n συνήθως αναφέρεται στο χρόνο. Έτσι, λαμβάνοντας ως αναφορά τη χρονική στιγμή $n = 0$, ό,τι συμβαίνει μετά το $n = 0$ σημαίνει ότι είναι χρονικά καθυστερημένο, ενώ ό,τι συμβαίνει πριν το $n = 0$ σημαίνει ότι χρονικά προηγείται.

1.5

Σ' όλες αυτές τις περιπτώσεις, βασιζόμαστε στους αντίστοιχους ορισμούς. Αν και φαίνονται τόσο εύκολοι και κατανοητοί όταν τους διαβάζουμε, εντούτοις η εφαρμογή τους μπορεί πολλές φορές να μας φέρνει κάποιες δυσκολίες. Ας εφαρμόσουμε τον ορισμό της γραμμικότητας για την άσκηση αυτή.

Για είσοδο $x_1(n)$, η έξοδος του συστήματος θα είναι $y_1(n) = 3x_1(n) + 3$. Για είσοδο $x_2(n)$, η έξοδος του συστήματος θα είναι $y_2(n) = 3x_2(n) + 3$. Τέλος, για είσοδο $x_3(n) = ax_1(n) + bx_2(n)$, η έξοδος θα ισούται με $y_3(n) = 3x_3(n) + 3 = 3[ax_1(n) + bx_2(n)] + 3 = 3ax_1(n) + 3bx_2(n) + 3 = 3ax_1(n) + 3bx_2(n) + 3 + 3a–3a + 3b–3b = a[3x_1(n) + 3] + b[3x_2(n) + 3] + 3(1–a–b) = ay_1(n) + by_2(n) + 3(1–a–b) \neq a\, y_1(n) + b\, y_2(n)$. Άρα, το σύστημα είναι μη γραμμικό.

Αν καταλήξατε στο σωστό αποτέλεσμα, τότε σας αξίζουν συγχαρητήρια. Ήταν σχετικά δύσκολη η απόδειξη, αφού έπρεπε να δημιουργήσουμε τα $y_1(n)$, $y_2(n)$ στην τελική έκφραση προσθαφαιρώντας κατάλληλους όρους. Αν δεν τα καταφέρατε, μελετήστε και πάλι την έννοια της γραμμικότητας στην ενότητα 1.4 και ξαναπροσπαθήστε.

1.6

Αφού το σύστημα $y(n) = nx(n)$ έχει ένα συντελεστή χρονικά μεταβαλλόμενο, περιμένουμε αυτό να μην είναι χρονικά αμετάβλητο. Πράγματι, αν εφαρμόσουμε στην είσοδο την καθυστερημένη κατά n_0 ακολουθία $x(n–n_0)$, η έξοδος θα είναι $y_d(n) = n\, x(n–n_0)$. Από την άλλη πλευρά, αν καθυστερήσουμε την έξοδο $y(n)$ κατά n_0, αντικαθιστώντας όπου n το $n–n_0$, τότε η έξοδος θα είναι $y(n–n_0) = (n–n_0)x(n–n_0) \neq y_d(n)$. Συνεπώς το σύστημα δεν είναι χρονικά αμετάβλητο.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει το σύστημα $y(n) = x(2n)$, γιατί στην ουσία πρόκειται για ένα σύστημα *υποδειγματοληψίας*. Η έξοδος ενός τέτοιου συστήματος «κρατάει» τα άρτια μόνο δείγματα της ακολουθίας εισόδου. Αν λοιπόν καθυστερήσουμε την είσοδο κατά n_0 δείγματα, δηλαδή αν εφαρμόσουμε στο σύστημα την $x(n–n_0)$, τότε η έξοδος θα είναι $y_d(n) = x(2n–n_0)$. Αν τώρα καθυστερήσουμε την έξοδο κατά n_0 μονάδες, γεγονός που εκφράζεται μαθηματικά με αντικατάσταση του n με το $n–n_0$, τότε η έξοδος θα ισούται με $y(n–n_0) = x\{2(n–n_0)\} = x(2n–2n_0) \neq x(2n–n_0) = y_d(n)$. Γίνεται φανερό, επομένως, ότι ένα τέτοιο σύστημα δεν είναι χρονικά αμετάβλητο. Αυτό μπορεί εύκολα να γίνει κατανοητό με το ακόλουθο παράδειγμα. Έστω ότι η ακολουθία εισόδου είναι $\{x(n)\} = \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, \ldots\}$. Τότε η ακολουθία εξόδου θα ισούται με $\{y(n)\} = \{x(2n)\} = \{x_0, x_2, x_4, x_6, \ldots\}$. Καθυστερούμε την είσοδο κατά μία μονάδα ($n_0 = 1$), δηλαδή κατά ένα δείγμα, οπότε αυτή γίνεται $\{x(n–1)\} = \{0, x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, \ldots\}$. Η ακολουθία εξόδου θα είναι τώρα ίση με $\{y(n)\} = \{x(2n–1)\} = \{0, x_1, x_3, x_5, \ldots\}$. Παρατηρούμε, επομένως, ότι αυτή δεν ισούται με την προηγούμενη ακολουθία εξόδου η οποία έχει υποστεί καθυστέρηση κατά μία μονάδα, αλλά πρόκειται για μία εντελώς διαφορετική ακολουθία, επιβεβαιώνοντας έτσι ότι το σύστημα δεν είναι χρονικά αμετάβλητο.

Αν απαντήσατε σωστά, τότε σας αξίζουν πραγματικά συγχαρητήρια. Αν πάλι δεν καταφέρατε να απαντήσετε σωστά, μην απογοητευτείτε. Γίνεται φανερό, για μια ακόμη φορά, ότι φαινομενικά πρόκειται για απλές έννοιες, οι οποίες όμως παρουσιάζουν αρκετή δυσκολία στην κατανόησή τους, όπως και στην κατανόηση της διαδικασίας απόδειξής τους. Δείτε ξανά τον ορισμό της χρονικής αμεταβλητότητας ενός συστήματος και επαναλάβετε την προσπάθειά σας.

1.7

Αυτή την άσκηση μπορούμε εύκολα να τη λύσουμε, αφού έχουμε ήδη αντιμετωπίσει την πιο δύσκολη περίπτωση του Παραδείγματος 1.8. Ας δούμε τη διαδικασία και πάλι, υπολογίζοντας τη συνέλιξη $y(n) = h(n)*x(n)$. Μας δίνεται ότι $h(n) = a^n u(n)$ και $x(n) = Au(n)$. Άρα

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x(n-m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a^m u(m)Au(n-m) = \sum_{m=0}^{n} a^m A = A\sum_{m=0}^{n} a^m$$

ή

$$y(n) = A(\frac{1-a^{n+1}}{1-a}) = \frac{A}{1-a} + \frac{Aa}{a-1}a^n = C_0 + C_1 a^n$$

όπου $n \geq 0$ και C_0, C_1, σταθερές εξαρτώμενες από το πλάτος της εισόδου A και την παράμετρο a της μοναδιαίας κρουστικής. Για να εξοικειωθείτε με αυτού του είδους τις ασκήσεις, επαναλάβετε τους υπολογισμούς για την περίπτωση $y(n) = x(n)*h(n)$.

1.8

Υπάρχουν τουλάχιστον δύο τρόποι για να λύσετε την άσκηση αυτή. Ο ένας είναι ο γνωστός τρόπος, που χρησιμοποιήσαμε στο Παράδειγμα 1.8 και στην άσκηση αυτοαξιολόγησης 1.7, κατά τον οποίο υπολογίζουμε τη ζητούμενη συνέλιξη με βάση τους ορισμούς (1.39) ή (1.40), όπου $h(n) = (a^n + b^n)u(n)$ και $x(n) = Au(n)$. Ένας δεύτερος τρόπος είναι εκείνος κατά τον οποίο, χρησιμοποιώντας την επιμεριστική ιδιότητα της συνέλιξης και αξιοποιώντας το αποτέλεσμα της άσκησης αυτοαξιολόγησης 1.7, έχουμε:

$h(n) = (a^n + b^n)u(n) = a^n u(n) + b^n u(n) = h_1(n) + h_2(n)$. Επομένως

$y(n) = h(n)*x(n) = [h_1(n) + h_2(n)]*x(n) = h_1(n)*x(n) + h_2(n)*x(n)$.

Το αποτέλεσμα $h_1(n)*x(n)$ μας είναι ήδη γνωστό από την άσκηση αυτοαξιολόγησης 1.7 και ισούται με $\frac{A}{1-a} + \frac{Aa}{a-1}a^n = C_0 + C_1 a^n$. Κατ' αναλογία, το αποτέλεσμα της συνέλιξης $h_2(n)*x(n)$ θα ισούται με $\dfrac{A}{1-b}+\dfrac{Ab}{b-1}b^n = C_2 + C_3 b^n$.

Συνεπώς, η έξοδος του συστήματος θα είναι: $y(n) = C_0 + C_1a^n + C_2 + C_3b^n$.

Αν υπολογίσατε το σωστό αποτέλεσμα με κάποιον από αυτούς τους τρόπους, τότε σας αξίζουν συγχαρητήρια. Αν δεν τα καταφέρατε, μελετήστε και πάλι το Παράδειγμα 1.8 και την ΄Ασκηση Αυτοαξιολόγησης 1.7 και ξαναπροσπαθήστε. Είναι θέμα χρόνου το να εξοικειωθείτε με τις ασκήσεις αυτού του είδους.

1.9

Είναι φανερό ότι θα πρέπει να αξιοποιήσουμε τις ιδιότητες της συνέλιξης, που γνωρίσαμε στην ενότητα 1.4, για να υπολογίσουμε την συνολική κρουστική απόκριση του συστήματος. Από το Σχήμα 1.29 βλέπουμε ότι $h(n) = h_1(n) + h_2(n)*[h_3(n) + h_4(n)]$ $= h_1(n) + h_2(n)*h_3(n) + h_2(n)*h_4(n)$. Αλλά

$$
\begin{aligned}
h_2(n)*h_3(n) &= [\tfrac{1}{2}\delta(n) - \tfrac{1}{4}\delta(n-1)]*2\delta(n) = \tfrac{1}{2}\delta(n)*2\delta(n) - \tfrac{1}{4}\delta(n-1)*2\delta(n) \\
&= \delta(n) - \tfrac{1}{2}\delta(n-1) \\
h_2(n)*h_4(n) &= [\tfrac{1}{2}\delta(n) - \tfrac{1}{4}\delta(n-1)]*[-2(\tfrac{1}{2})^n u(n)] \\
&= \tfrac{1}{2}\delta(n)*[-2(\tfrac{1}{2})^n u(n)] - \tfrac{1}{4}\delta(n-1)*[-2(\tfrac{1}{2})^n u(n)] \\
&= -(\tfrac{1}{2})^n u(n) + \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2})^{n-1}u(n-1) = -(\tfrac{1}{2})^n[u(n)-u(n-1)] \\
&= -(\tfrac{1}{2})^n\delta(n) = -\delta(n).
\end{aligned}
$$

Άρα, $h(n) = [\delta(n) + \tfrac{1}{2}\delta(n-1)] + [\delta(n) - \tfrac{1}{2}\delta(n-1)] + [-\delta(n)] = \delta(n)$

Η δυσκολία σ' αυτή την άσκηση δε βρίσκεται στη χρήση των ιδιοτήτων της συνέλιξης, αλλά στον υπολογισμό της συνέλιξης ενός σήματος με την κρουστική ακολουθία. Από τον ορισμό της συνέλιξης (σχέση 1.37), μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι $\delta(n)*g(n) = g(n)$, $\delta(n-m)*g(n) = g(n-m)$. Αυτό άλλωστε το είδαμε και στο Σχήμα 1.22.

Έχοντας όλα αυτά κατά νου, προσπαθήστε να λύσετε την άσκηση χρησιμοποιώντας όμως την πρώτη ισότητα για την $h(n)$, δηλαδή $h(n) = h_1(n) + h_2(n)*[h_3(n) + h_4(n)]$.

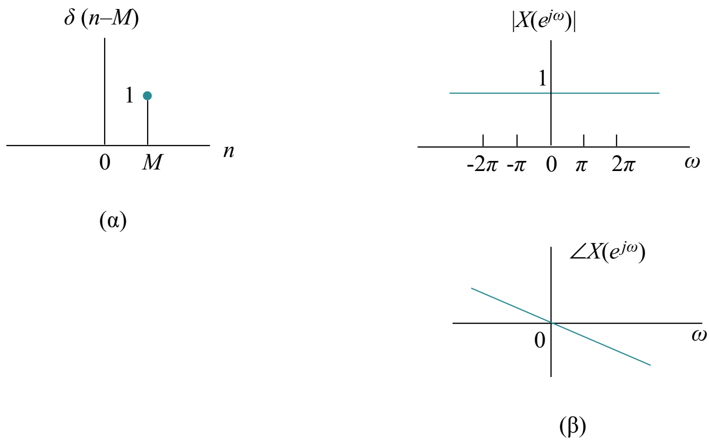
2.1

Η άσκηση αυτή είναι εύκολο να λυθεί, αν θυμηθούμε ότι $\delta(n–M) = 1$ μόνο για $n = M$, και εργαστούμε όπως στο Παράδειγμα 2.2. Έτσι, από τον ορισμό (2.1) έχουμε:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n-M)e^{-j\omega n} = e^{-j\omega M}$$

Παρατηρούμε ότι το μέτρο της συνάρτησης που υπολογίσαμε είναι και πάλι ίσο με 1, αφού $\left|X(e^{j\omega})\right| = \left|e^{-j\omega M}\right| = \left|\cos(\omega M) - j\sin(\omega M)\right| = \sqrt{\cos^2(\omega M) + \sin^2(\omega M)}$, ενώ η φάση είναι ανάλογη της συχνότητας, δηλαδή $\angle X(e^{j\omega}) = -\omega M$.

Οι αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις δίνονται στο Σχήμα 2.15.



Σχήμα 2.15
(α) Η ακολουθία $\delta(n–M)$ και (β) το μέτρο και η φάση του μετασχηματισμού Fourier αυτής.

Αν καταλήξατε στο σωστό αποτέλεσμα, μπράβο σας. Αν όχι, ξαναπροσπαθήστε. Δύο είναι τα σημεία τα οποία πιθανόν δεν έχετε κατανοήσει: (α) τη μοναδιαία κρουστική $\delta(n–M)$ η οποία είναι παντού ίση με μηδέν, εκτός του σημείου $n = M$, όπου έχει την τιμή 1 (Βλ. ενότητα 1.3), και (β) τους ορισμούς τους σχετικούς με τους μιγαδικούς αριθμούς. Οι ορισμοί (2.3) έως (2.6) θα σας βοηθήσουν σ’ αυτό. Δείτε τους και προσπαθήστε και πάλι να λύσετε μόνοι σας την άσκηση.

2.2

Θυμηθείτε ότι με βάση τη σχέση 1.34 ο παλμός $x(n)$ γράφεται:

$$x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta(n-m) = 1\cdot\left[\delta(n+2)+\delta(n+1)+\delta(n)+\delta(n-1)+\delta(n-2)\right].$$