ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

8 – ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ ΣΤΑ ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΧΡΟΝΟΥ

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ ΣΚΟΔΡΑΣ

2023 - 2024

ΓΕΝΙΚΑ

- Η αναπαράσταση ενός περιοδικού ή μη περιοδικού σήματος στη συχνότητα μας δείχνει πώς η ισχύς ή η ενέργεια αυτού κατανέμεται στις διαφορετικές συχνότητες. Η κατανομή αυτή στις συχνότητες ονομάζεται φάσμα του σήματος.

- Για περιοδικά σήματα το φάσμα είναι διακριτό (discrete), καθώς η ισχύς συγκεντρώνεται σε συχνότητες οι οποίες είναι πολλαπλάσια της θεμελιώδους συχνότητας, η οποία σχετίζεται με την θεμελιώδη περίοδο των σημάτων.

- Η απόκριση συχνότητας (frequency response) ενός συστήματος μας δείχνει πώς ένα ΓΧΑ σύστημα αποκρίνεται σε ημιτονοειδή διαφορετικών συχνοτήτων.

  Η απόκριση συχνότητας χαρακτηρίζει το σύστημα, επιτρέπει τον εύκολο υπολογισμό της μόνιμης κατάστασης (steady state) του συστήματος και διευκολύνει τον σχεδιασμό ή την ανάλυση συστημάτων.

  Η ανάλυση Fourier αφορά στη μόνιμη κατάσταση ενός συστήματος, ενώ η ανάλυση Laplace αφορά και στη μόνιμη και στη μεταβατική κατάσταση αυτού.

- Η πλέον σημαντική ιδιότητα των ΓΧΑ συστημάτων είναι ότι, όταν στην είσοδό τους εφαρμόζεται ένα μιγαδικό εκθετικό (η ο συνδυασμός ενός συνημιτόνου και ενός ημιτόνου) ορισμένης συχνότητας, τότε στην έξοδο εμφανίζεται η ίδια είσοδος πολλαπλασιασμένη με μία μιγαδική σταθερά η οποία δείχνει πώς το σύστημα αποκρίνεται στη συγκεκριμένη συχνότητα της εισόδου.

  Με άλλα λόγια, όταν $x(t)=e^{j\Omega_0 t}$, $-\infty<t<\infty$, τότε $y(t)=H(\Omega_0)\cdot e^{j\Omega_0 t}$ όπου $H(\Omega_0)$ η απόκριση του συστήματος στη συχνότητα Ω_0.

  Το σήμα $x(t)=e^{j\Omega_0 t}$ αποτελεί μια ιδιοσυνάρτηση (eigenfunction) του ΓΧΑ συστήματος, καθώς αυτό εμφανίζεται και στην είσοδο και στην έξοδο αυτού.

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστούν οι εκφράσεις:

α. $(t^3+2)\,\delta(t)$

β. $e^{-4t}\,\delta(t)$

γ. $\dfrac{\Omega^2+1}{\Omega^2+9}\,\delta(\Omega-1)$

δ. $A\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\Omega t}\,\delta(t)\,dt$

ε. $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2(x-t)}\,\delta(2-t)\,dt$

ΛΥΣΗ Με βάση τις σχέσεις $f(t)\,\delta(t-t_0) = f(t_0)\,\delta(t-t_0)$

και $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\delta(t-t_0)\,dt = f(t_0)$ έχουμε:

α. $(t^3+2)\,\delta(t) = (0+2)\,\delta(t) = 2\,\delta(t)$

β. $e^{-4t}\,\delta(t) = e^{-4\cdot 0}\,\delta(t) = \delta(t)$

γ. $\dfrac{\Omega^2+1}{\Omega^2+9}\,\delta(\Omega-1) = \dfrac{1+1}{1+9}\,\delta(\Omega-1) = \dfrac{2}{10}\,\delta(\Omega-1) = \dfrac{1}{5}\,\delta(\Omega-1)$

δ. $A\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\Omega t}\,\delta(t)\,dt = A\,e^{-j\Omega 0} = A$

ε. $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2(x-t)}\,\delta(2-t)\,dt = e^{-2(x-2)}$

ΑΣΚΗΣΗ Να εξεταστεί ποιες από τις συναρτήσεις είναι άρτιες, περιττές ή τίποτα από τα παραπάνω.

α. $x(t)=5t$ δ. $x(t)=\sin\left(3t-\frac{\pi}{2}\right)$

β. $x(t)=e^{-|t|}$ ε. $x(t)=2\,u(t)$

γ. $x(t)=5\cos 3t$

ΛΥΣΗ

α. $x(t)=5t$

$x(-t)=5(-t)=-5t=-x(t)$ $\rightsquigarrow$ περιττή

β. $x(t)=e^{-|t|}$

$x(-t)=e^{-|-t|}=e^{-|t|}=x(t)$ $\rightsquigarrow$ άρτια

γ. $x(t)=5\cos 3t$

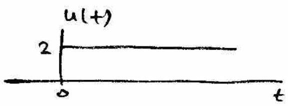
$x(-t)=5\cos[3(-t)]=5\cos(-3t)=5\cos(3t)=x(t)$ $\rightsquigarrow$ άρτια

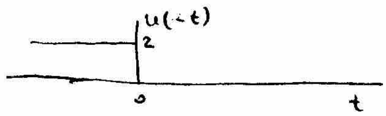
δ. $x(t)=\sin\left(3t-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos(3t)$

$x(-t)=\sin\left(-3t-\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(3t+\frac{\pi}{2}\right)=-\cos(3t)=x(t)$ $\rightsquigarrow$ άρτια

ε. $x(t)=2\,u(t)$

$x(-t)=2\,u(-t)$





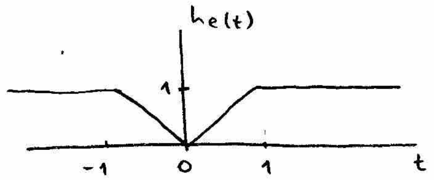
Ούτε άρτια ούτε περιττή

ΑΣΚΗΣΗ Έστω $h(t)$ η κρουστική απόκριση ενός συστήματος. Θεωρήστε ότι η $h(t)$ για ένα αιτιατό σύστημα έχει το άρτιο μέρος $h_e(t)$ για $t>0$, το οποίο δίνεται από τη σχέση

$$h_e(t) = t\,[u(t) - u(t-1)] + u(t-1), \quad t>0$$

Να υπολογιστεί η $h(t)$.

ΛΥΣΗ



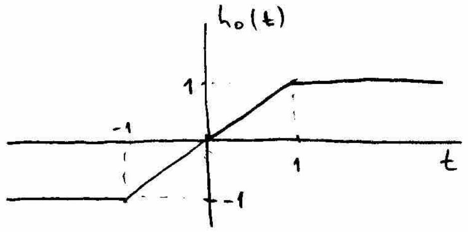
Σχεδιάζουμε την $h_e(t)$.

Αφού το σύστημα είναι αιτιατό, θα ισχύει $h(t)=0$ για $t<0$.

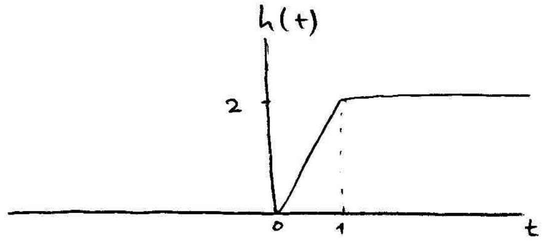
Αλλά,

$$h(t) = h_e(t) + h_o(t) \Rightarrow$$

$$h_o(t) = -h_e(t) \quad \text{για } t<0$$



Γνωρίζοντας την $h_o(t)$ για $t<0$ μπορούμε να βρούμε αυτήν και για $t>0$, αφού $h_o(t) = -h_o(-t)$



Τελικά, η $h(t)$ προκύπτει ως άθροισμα των δύο παραπάνω κυματομορφών (συναρτήσεων):

$$h(t) = h_e(t) + h_o(t) \Rightarrow$$

$$h(t) = 2t\,[u(t) - u(t-1)] + 2\,u(t-1) =$$
$$= 2t\,u(t) - 2(t-1)\,u(t-1)$$

ή

$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{για } t<0 \\ 2t & \text{για } 0<t<1 \\ 2t-2t+2 = 2 & \text{για } t>2 \end{cases}$$

ΑΣΚΗΣΗ Να αποδειχθεί ότι τα παρακάτω σήματα είναι περιοδικά.

Για καθένα από αυτά να βρεθεί η βασική περίοδος T_0 και η βασική συχνότητα Ω_0.

α. $x(t) = 3\sin(3t)$

β. $x(t) = \sin(8t + 30^\circ)$

γ. $x(t) = e^{j2t}$

δ. $x(t) = \cos(t) + \sin(2t)$

ε. $x(t) = e^{j(5t+\pi)}$

στ. $x(t) = e^{-j10t} + e^{j5t}$

ΛΥΣΗ

α. $x(t) = 3\sin(3t) \rightsquigarrow \Omega_0 = 3 \Rightarrow \frac{2\pi}{T_0} = 3 \Rightarrow T_0 = \frac{2\pi}{3}$

$$x(t+T_0) = 3\cdot\sin\left[3\left(t+\frac{2\pi}{3}\right)\right] = 3\cdot\sin(3t+2\pi) = 3\sin(3t) = x(t)$$

β. $x(t) = \sin(8t+30^\circ) \rightsquigarrow \Omega_0 = 8 \Rightarrow \frac{2\pi}{T_0} = 8 \Rightarrow T_0 = \frac{\pi}{4}$

$$x(t+T_0) = \sin\left[8\left(t+\frac{\pi}{4}\right)+30^\circ\right] = \sin\left(8t+2\pi+30^\circ\right) = \sin\left(8t+30^\circ\right) = x(t)$$

γ. $x(t) = e^{j2t} \rightsquigarrow \Omega_0 = 2 \Rightarrow \frac{2\pi}{T_0} = 2 \Rightarrow T_0 = \pi$

$$x(t+T_0) = e^{j2(t+T_0)} = e^{j2(t+\pi)} = e^{j2t+j2\pi} = e^{j2t}\,e^{j2\pi} = e^{j2t} = x(t)$$

δ. $x(t) = \cos(t) + \sin(2t) \rightsquigarrow \Omega_0 = 1 \Rightarrow \frac{2\pi}{T_0} = 1 \Rightarrow T_0 = 2\pi$

$$x(t+T_0) = \cos(t+2\pi) + \sin[2(t+2\pi)] = \cos(t) + \sin(2t+4\pi) = \cos(t) + \sin(2t) = x(t)$$

ε. $x(t) = e^{j(5t+\pi)} \rightsquigarrow \Omega_0 = 5 \Rightarrow \frac{2\pi}{T_0} = 5 \Rightarrow T_0 = \frac{2\pi}{5}$

$$x(t+T_0) = e^{j\left[5\left(t+\frac{2\pi}{5}\right)+\pi\right]} = e^{j(5t+2\pi+\pi)} = e^{j(5t+\pi)}\,e^{j2\pi} = e^{j(5t+\pi)} = x(t)$$

στ. $x(t) = e^{-j10t} + e^{j5t} \rightsquigarrow \Omega_0 = 5 \Rightarrow T_0 = \frac{2\pi}{5}$

$$x(t+T_0) = e^{-j10\left(t+\frac{2\pi}{5}\right)} + e^{j5\left(t+\frac{2\pi}{5}\right)} = e^{-j10t}\,e^{-j4\pi} + e^{j5t}\,e^{j2\pi} = e^{-j10t} + e^{j5t} = x(t)$$

ΑΣΚΗΣΗ Να εξεταστούν ως προς την περιοδικότητα τα σήματα και να υπολογιστεί η περίοδος.

α. $x(t) = \cos(5\pi t) + \sin(12\pi t)$ β. $x(t) = \cos(4\pi t)\sin(3\pi t)$

ΛΥΣΗ α. $T_1 = \frac{2\pi}{\Omega_1} = \frac{2\pi}{5\pi} = \frac{2}{5}$, $T_2 = \frac{2\pi}{\Omega_2} = \frac{2\pi}{12\pi} = \frac{1}{6}$ $\Bigg\} \frac{T_1}{T_2} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{1}{6}} = \frac{12}{5}$ ρητός και άρα περιοδικό.

Για να είναι η $x(t) = \cos(5\pi t) + \sin(12\pi t)$ περιοδική, πρέπει να ισχύει $x(t+T) = x(t) \quad \forall t$. Έχουμε λοιπόν:

$x(t+T) = \cos[5\pi(t+T)] + \sin[12\pi(t+T)] = \cos(5\pi t + 5\pi T) + \sin(12\pi t + 12\pi T)$

Για να ισούται η τελευταία με $x(t)$ πρέπει:

$5\pi T = 2\kappa\pi$ και $12\pi T = 2\lambda\pi$

Με άλλα λόγια:

$$T = \frac{2}{5}\kappa = \frac{2}{12}\lambda \Rightarrow \frac{\kappa}{\lambda} = \frac{\frac{2}{12}}{\frac{2}{5}} \Rightarrow \frac{\kappa}{\lambda} = \frac{5}{12}$$

Επιλέγουμε $\kappa = 5$ και $\lambda = 12$ (αφού οι αριθμοί αυτοί είναι πρώτοι μεταξύ τους) και βρίσκουμε ότι $T = 2$, όπου T η βασική περίοδος του σήματος $x(t)$.

β. $x(t) = \cos(4\pi t)\sin(3\pi t) = \frac{1}{2}[\sin(-\pi t) + \sin(7\pi t)] = \frac{1}{2}[\sin(7\pi t) - \sin(\pi t)]$

$T_1 = \frac{2\pi}{\Omega_1} = \frac{2\pi}{7\pi} = \frac{2}{7}$, $T_2 = \frac{2\pi}{\Omega_2} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$ $\Bigg\} \frac{T_1}{T_2} = \frac{\frac{2}{7}}{2} = \frac{1}{7}$ ρητός και άρα περιοδικό

$x(t+T) = \frac{1}{2}[\sin(7\pi t + 7\pi T) - \sin(\pi t + \pi T)]$

Για να ισούται η σχέση αυτή με την $x(t)$ πρέπει

$7\pi T = 2\kappa\pi$ και $\pi T = 2\lambda\pi \rightsquigarrow$

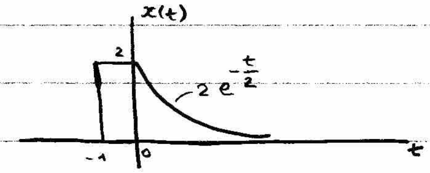
$$T = \frac{2}{7}\kappa = \frac{2}{1}\lambda \Rightarrow \frac{\kappa}{\lambda} = \frac{7}{1}$$

Επιλέγοντας $\kappa = 7$ και $\lambda = 1$ βρίσκουμε ότι $T = 2$.

Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε την περίοδο T ως εξής:

$$T = \text{ΕΚΠ}(T_1, T_2) = \text{ΕΚΠ}\left(\frac{2}{7}, 2\right) = \frac{\text{ΕΚΠ}(2,2)}{\text{ΜΚΔ}(7,1)} = \frac{2}{1} = 2$$

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί η ενέργεια του σήματος



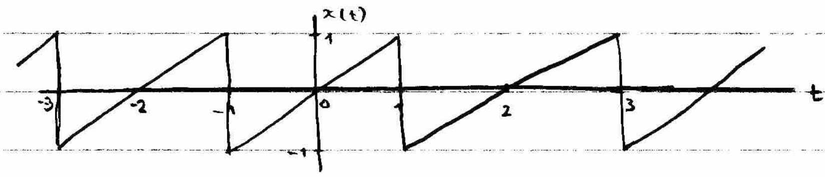
ΛΥΣΗ $E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt = \langle$ αφού το σήμα είναι πραγματικό $|x(t)|^2 = x^2(t) \rangle$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) \, dt = \int_{-1}^{0} 2^2 \, dt + \int_{0}^{\infty} \left(2e^{-\frac{t}{2}}\right)^2 dt =$$

$$= 4\int_{-1}^{0} dt + 4\int_{0}^{\infty} e^{-t} \, dt =$$

$$= 4 \, t\Big|_{-1}^{0} - 4 \, e^{-t}\Big|_{0}^{\infty} = 4(0-(-1)) - 4\left(e^{-\infty} - e^{0}\right) = 4 + 4 = 8$$

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί η μέση ισχύς του σήματος



ΛΥΣΗ

Πρόκειται για περιοδικό σήμα. Κατά συνέπεια υπάρχει η ισχύς του.

$$P_x = \frac{1}{T}\int_{T} |x(t)|^2 \, dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} t^2 \, dt = \frac{1}{2}\,\frac{t^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{6}\left(1^3 - (-1)^3\right) = \frac{1}{6}\,2 = \frac{1}{3}$$

Σημείωση: Η RMS τιμή του σήματος είναι η τετραγωνική ρίζα της μέσης ισχύος, δηλαδή $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί η μέση ισχύς του σήματος $x(t) = D e^{j\Omega t}$

ΛΥΣΗ

$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 \, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)\, x^*(t)\, dt =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} D e^{j\Omega t} \, D e^{-j\Omega t} \, dt =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} D^2 e^{j0} \, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{D^2}{T} \, t \Big|_{-T/2}^{T/2} =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{D^2}{T} \left(\frac{T}{2} - \left(-\frac{T}{2}\right) \right) = D^2$$

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί η μέση ισχύς του σταθερού σήματος $x(t) = A$

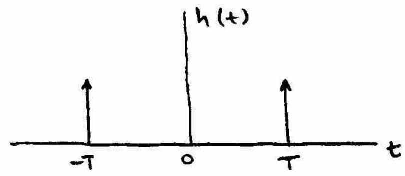
ΛΥΣΗ

$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 \, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} A^2 \, dt =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} A^2 \, t \Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \lim_{T\to\infty} \frac{A^2}{T} \cdot T = A^2$$

ΑΣΚΗΣΗ (ΣΥΝΕΛΙΞΗ ΜΕ ΚΡΟΥΣΤΙΚΗ)

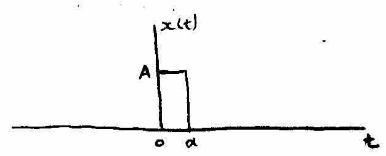
Να υπολογιστεί η συνέλιξη των $h(t)$ και $x(t)$ του σχήματος.



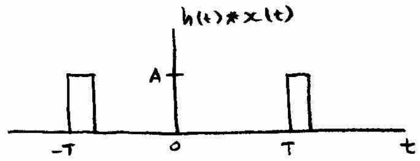
Λύση

Η $h(t)$ γράφεται ως

$$h(t) = \delta(t+T) + \delta(t-T)$$



Άρα



$$\begin{aligned} y(t) &= h(t) * x(t) \\ &= [\delta(t+T) + \delta(t-T)] * x(t) \\ &= \delta(t+T) * x(t) \\ &\quad + \delta(t-T) * x(t) \\ &= \langle \text{με βάση τη σχέση (4) προηγουμένως} \rangle \\ &= x(t+T) + x(t-T) \end{aligned}$$

Συμπέρασμα: Η συνέλιξη οποιασδήποτε συνάρτησης με την κρουστική μας δίνει την ίδια τη συνάρτηση σε θέση που καθορίζεται από την τετμημένη της κρουστικής.

Η ανωτέρω ιδιότητα μας είναι ιδιαιτέρως χρήσιμη για την κατανόηση της εμφάνισης επαναλήψεων στο φάσμα ενός δειγματοληπτημένου σήματος και κατά συνέπεια το ίδιο το θεώρημα δειγματοληψίας του Shannon.

ΑΣΚΗΣΗ Σε ΓΧΑ σύστημα με κρουστική απόκριση $h(t)$ εφαρμόζεται η είσοδος $x(t)$. Να υπολογιστεί η έξοδος για τις εξής περιπτώσεις:

α. $x(t) = u(t)$, $h(t) = u(t)$

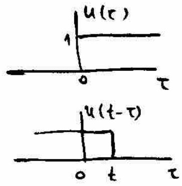
β. $x_1(t) = u(t-\alpha)$, $h_1(t) = u(t)$ όπου $\alpha > 0$

γ. $x_2(t) = u(t-\alpha)$, $h_2(t) = u(t-b)$ όπου $b > \alpha > 0$

ΛΥΣΗ

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

α.

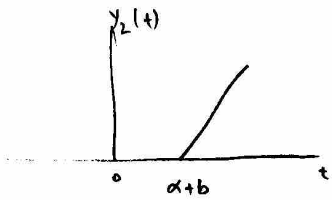


$$y(t) = \int_0^t 1 \cdot d\tau = \tau \Big|_0^t = t \quad \text{ή} \quad y(t) = t\, u(t)$$

β. Η είσοδος είναι τώρα $x_1(t) = x(t-\alpha)$. Αφού το σύστημα είναι ΓΧΑ η έξοδος θα είναι $y_1(t) = y(t-\alpha) = (t-\alpha)\, u(t-\alpha)$

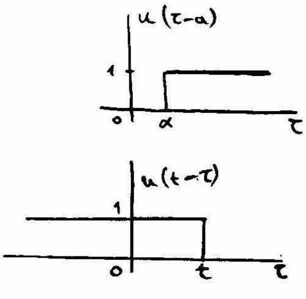
γ. Στην περίπτωση αυτή η έξοδος $y_2(t)$ θα είναι η χρονικά μετατοπισμένη κατά b της $y_1(t)$, δηλαδή

$$y_2(t) = y_1(t-b) = (t-b-\alpha)\, u(t-b-\alpha)$$



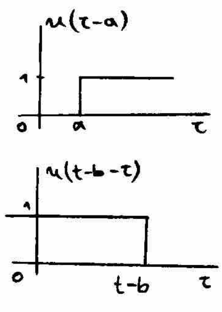
Σημείωση: Τα ερωτήματα β, γ θα μπορούσαν να έχουν υπολογιστεί με βάση τον ορισμό της συνέλιξης, ως εξής:

$$y_1(t) = x_1(t) * h_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)\, h_1(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau-\alpha)\, u(t-\tau)\, d\tau = \int_{\alpha}^{t} 1 \cdot 1 \cdot d\tau = \tau \Big|_{\alpha}^{t} = t - \alpha$$



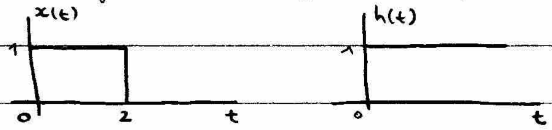
Τελικά $y_1(t) = (t-\alpha)\, u(t-\alpha)$

$$y_2(t) = x_2(t) * h_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_2(\tau)\, h_2(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau-\alpha)\, u(t-b-\tau)\, d\tau = \int_{\alpha}^{t-b} 1 \cdot 1 \cdot d\tau = \tau \Big|_{\alpha}^{t-b} = t-b-\alpha$$

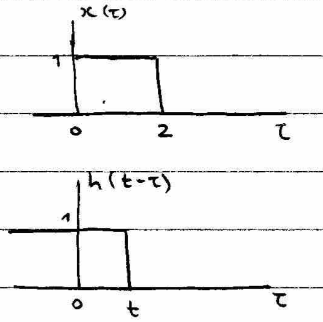


Τελικά $y_2(t) = (t-b-\alpha)\, u(t-b-\alpha)$

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί η συνέλιξη των σημάτων (γραφικά)

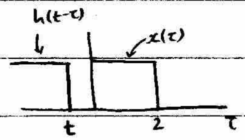


ΛΥΣΗ



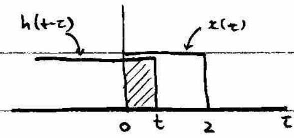
$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

① $t<0$



Το $x(\tau)$ και το $h(t-\tau)$ δεν έχουν κανένα κοινό σημείο και επομένως το γινόμενό τους είναι μηδέν. Άρα $y(t)=0$ για $t<0$

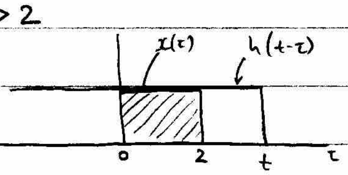
② $0 \le t \le 2$



Το $x(\tau)$ και το $h(t-\tau)$ έχουν κοινά σημεία για $0 \le \tau \le t$. Το γινόμενο $x(\tau)h(t-\tau)=1$

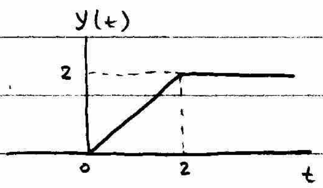
Άρα $y(t) = \int_0^t 1\, d\tau = \tau\Big|_0^t = t$ για $0 \le t \le 2$

③ $t>2$



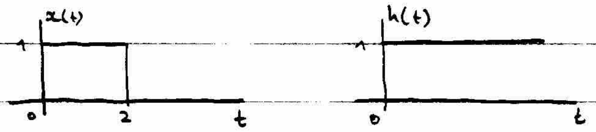
Τα κοινά σημεία των $x(\tau)$ και $h(t-\tau)$ είναι όλο το $x(\tau)$, δηλαδή $x(\tau)\cdot h(t-\tau)=1$. Άρα

$$y(t) = \int_0^2 1 \cdot d\tau = \tau\Big|_0^2 = 2$$



$$y(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ t & 0 \le t \le 2 \\ 2 & t>2 \end{cases}$$

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί η συνέλιξη των σημάτων (με σχέσεις)



ΛΥΣΗ

$x(t) = u(t) - u(t-2) \qquad h(t) = u(t)$

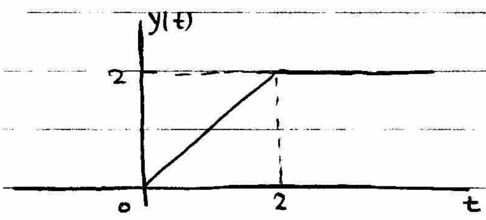
$$y(t) = x(t) * h(t) =$$
$$= [u(t) - u(t-2)] * u(t) =$$
$$= \underbrace{u(t) * u(t)}_{y_1(t)} - \underbrace{u(t-2) * u(t)}_{y_2(t) = y_1(t-2)} = y_1(t) - y_2(t)$$

$$y_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\, u(t-\tau)\, d\tau = \int_0^t 1\, d\tau = \tau \Big|_0^t = t \quad \text{για } t > 0$$

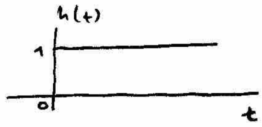
Αρα $y_1(t) = t\, u(t)$

Συνεπώς $y_2(t) = y_1(t-2) = (t-2)\, u(t-2)$

Τελικά $y(t) = y_1(t) - y_2(t) = t\, u(t) - (t-2)\, u(t-2) =$
$$= t\, u(t) - t\, u(t-2) + 2\, u(t-2) =$$
$$= t[u(t) - u(t-2)] + 2\, u(t-2)$$



ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί η συνέλιξη των σημάτων



ΛΥΣΗ

$h(t) = u(t)$

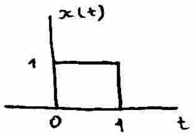
$x(t) = [u(t) - u(t-1)] + [u(t-2) - u(t-3)]$

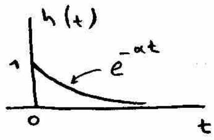
$$
\begin{aligned}
y(t) &= h(t) * x(t) = \\
&= u(t) * \Big[[u(t) - u(t-1)] + [u(t-2) - u(t-3)] \Big] = \\
&= u(t) * u(t) - u(t) * u(t-1) + u(t) * u(t-2) - u(t) * u(t-3) = \\
&= t\,u(t) - (t-1)\,u(t-1) + \underbrace{(t-2)\,u(t-2)} - \underbrace{(t-3)\,u(t-3)} = \\
&= t\,u(t) - t\,u(t-1) + u(t-1) + \underbrace{(t-1)\,u(t-2) - u(t-2)} - \underbrace{(t-1)\,u(t-3) + 2\,u(t-3)} = \\
&= t\,[u(t) - u(t-1)] + [u(t-1) - u(t-2)] + (t-1)[u(t-2) - u(t-3)] + 2\,u(t-3)
\end{aligned}
$$

ή

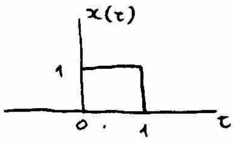
$$y(t) = t\,u(t) + (1-t)\,u(t-1) + (t-2)\,u(t-2) + (3-t)\,u(t-3)$$

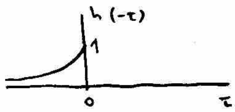
ΑΣΚΗΣΗ Συνέλιξη τετραγωνικού παλμού και εκθετικού.





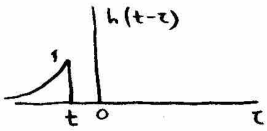
ΛΥΣΗ Α





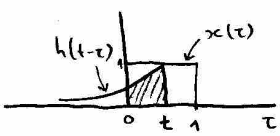
$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

Περιοχή 1: $t<0$



→ Αφού $x(\tau)$ στην περιοχή αυτή είναι μηδέν, το γινόμενο θα είναι μηδέν και κατά συνέπεια και το ολοκλήρωμα.
Άρα για $t<0 \rightarrow y(t)=0$

Περιοχή 2: $0\le t\le 1$

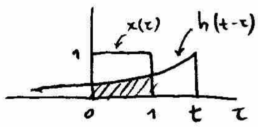


→ Μεταξύ $[0,1]$ υπάρχει πάντοτε κοινό τμήμα το οποίο ισούται με το γραμμοσκιασμένο

$$y(t)=\int_0^t x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau=\int_0^t 1\cdot e^{-a(t-\tau)} d\tau = e^{-at}\int_0^t e^{a\tau} d\tau =$$

$$= e^{-at}\cdot\frac{1}{a}\, e^{a\tau}\Big|_0^t = \frac{e^{-at}}{a}\left(e^{at}-1\right)=\frac{1}{a}\left(1-e^{-at}\right)$$

Περιοχή 3: $t>1$

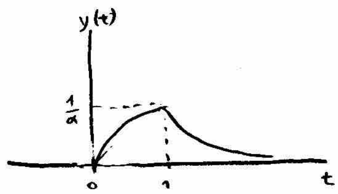


→ Το κοινό τμήμα περιλαμβάνεται στην περιοχή μεταξύ 0 και 1. Εκτός αυτής της περιοχής το $x(\tau)$ είναι μηδέν, οπότε και το ολοκλήρωμα (συνέλιξη). Συνεπώς:

$$y(t)=\int_0^1 x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau=\int_0^1 e^{-a(t-\tau)} d\tau = e^{-at}\int_0^1 e^{a\tau} d\tau =$$

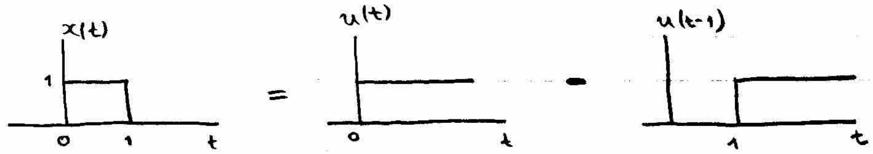
$$= e^{-at}\cdot\frac{1}{a}\, e^{a\tau}\Big|_0^1 = \frac{1}{a}e^{-at}\left(e^{a}-1\right)=$$

$$=\frac{1}{a}\left[e^{-a(t-1)}-e^{-at}\right]$$



Τελικά, η κυματομορφή της συνέλιξης θα είναι αυτή του διπλανού σχήματος.

ΛΥΣΗ Β

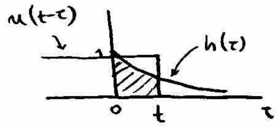


$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\; x(t-\tau)\, d\tau \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\,[u(t-\tau) - u(t-\tau-1)]\, d\tau = y_1(t) - y_2(t)$$

όπου

$$y_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\; u(t-\tau)\; d\tau \quad , \quad y_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\; u(t-\tau-1)\; d\tau$$

Υπολογισμός $y_1(t)$:



$$y_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\; u(t-\tau)\, d\tau = \int_0^t h(\tau)\, d\tau = \int_0^t e^{-a\tau}\, d\tau = -\frac{1}{a}\, e^{-a\tau}\Big|_0^t =$$

$$= -\frac{1}{a}\left(e^{-at} - 1\right) = \frac{1}{a}\left(1 - e^{-at}\right).$$

Συνεπώς: $y_1(t) = \frac{1}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha t}\right) u(t)$

Υπολογισμός $y_2(t)$:

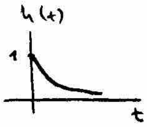
$$\begin{aligned} y_2(t) &= x(t) * u(t-1) = x(t) * [u(t) * \delta(t-1)] = \\ &= [x(t) * u(t)] * \delta(t-1) = \\ &= y_1(t) * \delta(t-1) = \\ &= y_1(t-1) = \\ &= \frac{1}{\alpha}\left[1 - e^{-\alpha(t-1)}\right] u(t-1) \end{aligned}$$

Τελικά:

$$y(t) = y_1(t) - y_2(t) =$$

$$= \frac{1}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha t}\right] u(t) - \frac{1}{\alpha}\left[1 - e^{-\alpha(t-1)}\right] u(t-1)$$

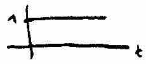
ΑΣΚΗΣΗ (ΣΥΝΕΛΙΞΗ)

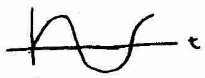


Η κρουστική απόκριση ενός ΓΧΑ συστήματος είναι $h(t)=e^{-t}u(t)$.

Να υπολογιστεί η απόκριση μηδενικής κατάστασης του συστήματος για είσοδο $x(t)$, όπου (α) $x(t)=u(t)$, (β) $x(t)=e^{-2t}u(t)$, (γ) $x(t)=\sin 3t\, u(t)$.

Λύση





Για καθεμία από τις εισόδους υπολογίζουμε τη συνέλιξη $x(t) * h(t) = y(t)$.

(α) $$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau} u(\tau)\, u(t-\tau)\, d\tau =$$

$$=\int_0^t e^{-\tau} d\tau = -e^{-\tau}\Big|_0^t = -e^{-t}+e^{0} = 1-e^{-t} \quad \text{για } t\geq 0$$

Άρα $y(t)=\left(1-e^{-t}\right)u(t)$

(β) Είδαμε σε προηγούμενη άσκηση ότι η συνέλιξη $e^{-at}u(t) * e^{-bt}u(t)$ ισούται με $\left(\dfrac{e^{-at}-e^{-bt}}{b-a}\right)u(t)$. Στην προηγούμενη περίπτωση έχουμε $a=2$, $b=1$.

Άρα $y(t)=-\left(e^{-2t}-e^{-t}\right)u(t) = \left(e^{-t}-e^{-2t}\right)u(t)$

(γ) $$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} \sin 3\tau\, u(\tau)\, e^{-(t-\tau)} u(t-\tau)\, d\tau = \int_0^t \sin 3\tau\, e^{-(t-\tau)} d\tau = e^{-t}\int_0^t \sin 3\tau\, e^{\tau} d\tau =$$

$$= e^{-t}\int_0^t \frac{e^{j3\tau}-e^{-j3\tau}}{2j} e^{\tau} d\tau = \frac{e^{-t}}{2j}\left[\int_0^t e^{(1+3j)\tau} d\tau - \int_0^t e^{(1-3j)\tau} d\tau\right] =$$

$$= \frac{e^{-t}}{2j}\left[\frac{1}{1+3j} e^{(1+3j)\tau}\Big|_0^t - \frac{1}{1-3j} e^{(1-3j)\tau}\Big|_0^t\right] =$$

$$= \frac{e^{-t}}{2j}\left[\frac{1}{1+3j}\left(e^{(1+3j)t}-1\right) - \frac{1}{1-3j}\left(e^{(1-3j)t}-1\right)\right] =$$

$$= \frac{e^{-t}}{2j}\frac{1}{1+3j}e^{(1+3j)t} - \frac{e^{-t}}{2j}\frac{1}{1+3j} - \frac{e^{-t}}{2j}\frac{1}{1-3j}e^{(1-3jt)} + \frac{e^{-t}}{2j}\frac{1}{1-3j} =$$

$$= \frac{1}{2j-6}e^{3jt} - \frac{1}{2j-6}e^{-t} - \frac{1}{2j+6}e^{-3jt} + \frac{1}{2j+6}e^{-t} =$$

$$= \frac{1}{2j-6}e^{3jt} - \frac{1}{2j+6}e^{-3jt} + \left(\frac{1}{2j+6}-\frac{1}{2j-6}\right)e^{-t} =$$

$$= \frac{1}{2j-6}e^{3jt} - \frac{1}{2j+6}e^{-3jt} + \frac{3}{10}e^{-t}$$

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί η έξοδος ΓΧΑ με $h(t) = u(t) - u(t-2)$, στο οποίο εφαρμόζεται η είσοδος $x(t) = \delta(t+3) + 3e^{-t/2}[u(t) - u(t-4)]$

ΛΥΣΗ

$$y(t) = h(t) * x(t) =$$

$$= [u(t) - u(t-2)] * \Big[\delta(t+3) + 3\,\underbrace{e^{-t/2}[u(t)-u(t-4)]}_{g(t)}\Big] =$$

$$= \underbrace{[u(t) - u(t-2)] * \delta(t+3)}_{A} + 3\,\underbrace{[u(t)-u(t-2)] * g(t)}_{B} \qquad (1)$$

Υπολογισμός Α: Λόγω της ιδιότητας της συνέλιξης με την $\delta(t)$ έχουμε

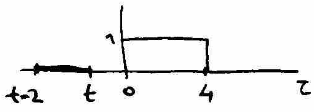
$$A = u(t+3) - u(t+1) \qquad (2)$$

(Βλ. 2ο τεύχος σημειώσεων)

Υπολογισμός Β: Σε προηγούμενη άσκηση είδαμε ότι η συνέλιξη ενός σήματος $g(t)$ με έναν παλμό πλάτους 1 και διάρκειας T ισοδυναμεί με ολοκλήρωση πεπερασμένου μήκους, δηλαδή από $t-T$ μέχρι t. Στην προκειμένη περίπτωση $T=2$. Άρα,

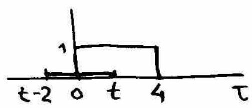
$$B = \int_{t-2}^{t} g(\tau)\,d\tau = \int_{t-2}^{t} e^{-\tau/2}[u(\tau) - u(\tau-4)]\,d\tau \qquad (3)$$

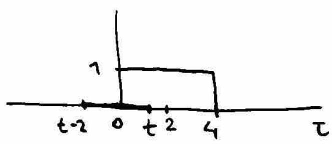
Τώρα αναγκαζόμαστε να διακρίνουμε περιπτώσεις ανάλογα με την επικάλυψη που υπάρχει μεταξύ της περιοχής ολοκλήρωσης $t-2$ έως t και του μοναδιαίου παλμού $u(\tau) - u(\tau-4)$.



<u>Περίπτωση 1η:</u> $t<0 \rightarrow \nexists$ επικάλυψη $\rightarrow B=0$

<u>Περίπτωση 2η:</u> $0 \le t \le 2$

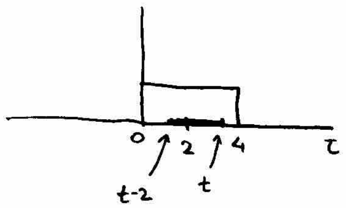




$\exists$ επικάλυψη από 0 έως t, οπότε

$$B = \int_0^t e^{-\tau/2}\cdot 1\cdot d\tau = \frac{1}{-\frac{1}{2}}\, e^{-\tau/2}\Big|_0^t =$$

$$= -2\left(e^{-t/2} - e^{0}\right) = -2\left(e^{-t/2} - 1\right) = 2\left(1 - e^{-t/2}\right)$$

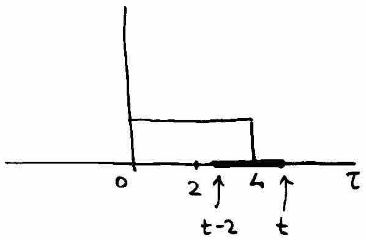


Περίπτωση 3η: $2<t\le 4$

∃ επικάλυψη από $t-2$ έως t, οπότε

$$B=\int_{t-2}^{t} e^{-\tau/2}\cdot 1\cdot d\tau = -2\,e^{-\tau/2}\Big|_{t-2}^{t} = -2\left(e^{-t/2}-e^{-\frac{t-2}{2}}\right)=$$

$$=2\left(e^{-\frac{t-2}{2}}-e^{-t/2}\right)=2\left(e^{-\frac{t}{2}}e^{1}-e^{-\frac{t}{2}}\right)=2e^{-t/2}(e-1)$$

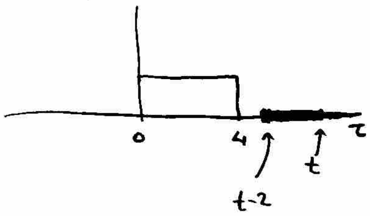


Περίπτωση 4η: $2<t-2\le 4 \Rightarrow 4<t\le 6$

∃ επικάλυψη από $t-2$ μέχρι 4, οπότε

$$B=\int_{t-2}^{4} e^{-\tau/2}\, 1\, d\tau = -2\,e^{-\frac{\tau}{2}}\Big|_{t-2}^{4} = -2\left(e^{-2}-e^{-\frac{t-2}{2}}\right)=$$

$$=2\left(e^{-\frac{t}{2}}e-e^{-2}\right)$$



Περίπτωση 5η: $t-2>4 \Rightarrow t>6$

∄ επικάλυψη ⇝ $B=0$

Τελικά έχουμε από την (1) ότι:

$$y(t)=A+3B=$$

$$=\left[u(t+3)-u(t+1)\right]+3\cdot\begin{cases}2\left(1-e^{-t/2}\right) & \text{για } 0\le t\le 2\\ 2e^{-t/2}(e-1) & \text{για } 2<t\le 4\\ 2\left(e^{-t/2}e-e^{-2}\right) & \text{για } 4<t\le 6\\ 0 & \text{για } t<0 \wedge t>6\end{cases}$$

ή

$$y(t)=\left[u(t+3)-u(t+1)\right]+6\Big\{\left(1-e^{-t/2}\right)\left[u(t)-u(t-2)\right]+$$

$$(e-1)\,e^{-t/2}\left[u(t-2)-u(t-4)\right]+$$

$$\left(e\,e^{-t/2}-e^{-2}\right)\left[u(t-4)-u(t-6)\right]\Big\}$$

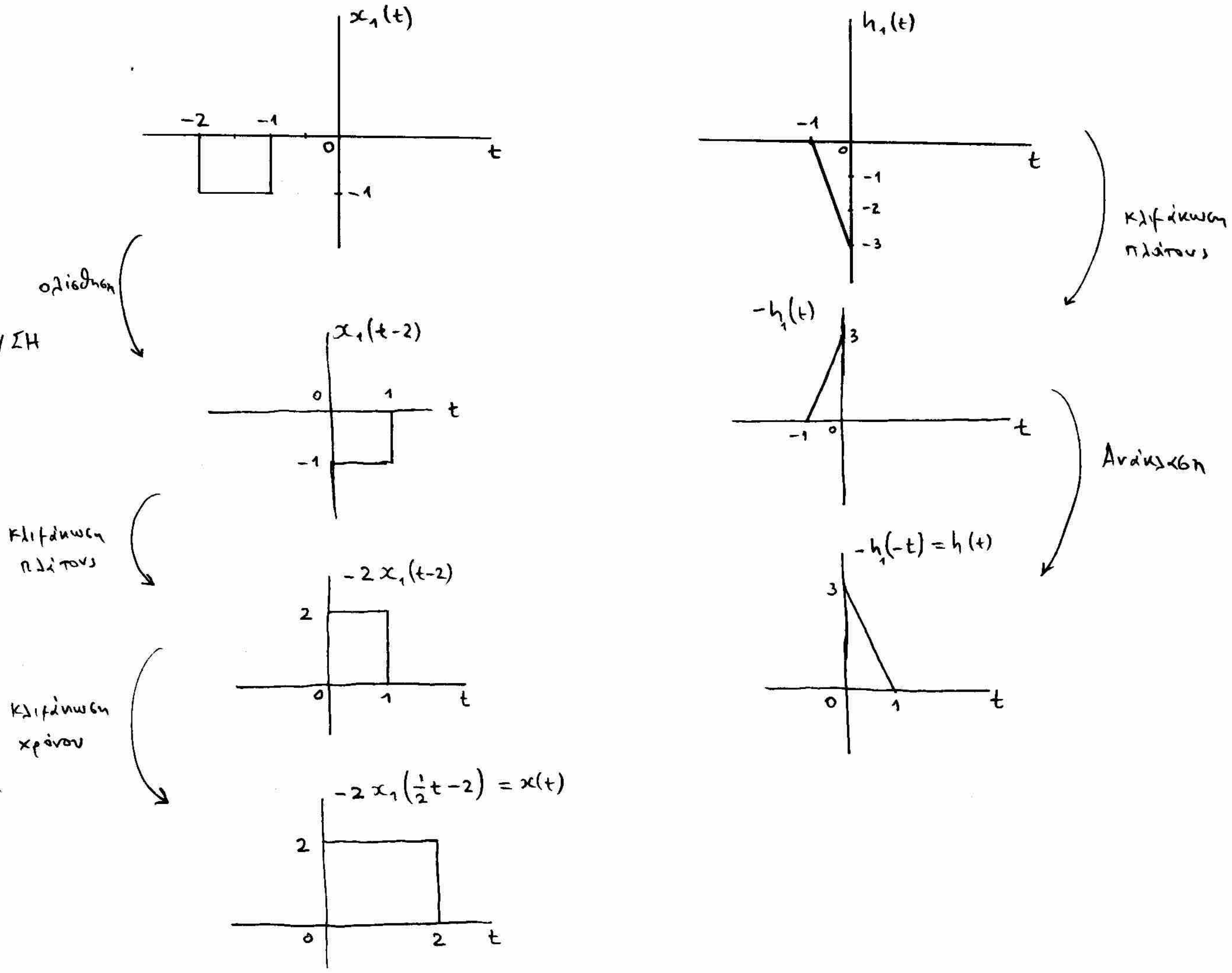
ΑΣΚΗΣΗ Να σχεδιάσετε τα σήματα $x(t)$, $h(t)$ και να υπολογίσετε και να σχεδιάσετε την έξοδο $y(t)$ του ΓΧΑ συστήματος,

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

όπου $x(t) = -2\,x_1(\frac{1}{2}t-2)$ και $h(t) = -h_1(-t)$.

Οι γραφικές παραστάσεις των $x_1(t)$, $h_1(t)$ δίνονται παρακάτω:

ΛΥΣΗ



Το σήμα $x(t)$ εκφράζεται ως: $x(t) = 2[u(t) - u(t-2)]$

Το σήμα, δηλαδή στην προκειμένη περίπτωση η κρουστική απόκριση $h(t)$ του συστήματος, εκφράζεται ως:

$$h(t) = (3-3t)\left[u(t) - u(t-1)\right]$$

Η έξοδος $y(t)$ του συστήματος ισούται με τη συνέλιξη των $x(t)$ και $h(t)$: $y(t) = x(t) * h(t)$

Έχουμε: $y(t) = x(t) * h(t) = 2\left[u(t) - u(t-2)\right] * (3-3t)\left[u(t) - u(t-1)\right] =$

$= \left[2\,u(t) - 2\,u(t-2)\right] * \left[3\,u(t) - 3\,u(t-1) - 3t\,u(t) + 3t\,u(t-1)\right] =$

$= 6\,\underbrace{u(t)*u(t)}_{y_1} - 6\,\underbrace{u(t)*u(t-1)}_{y_2} - 6\,\underbrace{u(t)*t\,u(t)}_{y_3} + 6\,\underbrace{u(t)*t\,u(t-1)}_{y_4}$

$- 6\,\underbrace{u(t-2)*u(t)}_{y_5} + 6\,\underbrace{u(t-2)*u(t-1)}_{y_6} + 6\,\underbrace{u(t-2)*t\,u(t)}_{y_7} - 6\,\underbrace{u(t-2)*t\,u(t-1)}_{y_8}$

$y_1(t) = u(t) * u(t) = t\,u(t)$

$y_2(t) = u(t) * u(t-1) = y_1(t-1) = (t-1)\,u(t-1)$

$y_5(t) = u(t-2) * u(t) = y_1(t-2) = (t-2)\,u(t-2)$

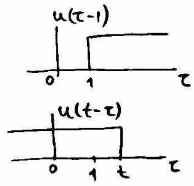
$y_6(t) = u(t-2) * u(t-1) = y_1(t-3) = (t-3)\,u(t-3)$

$y_3(t) = u(t) * t\,u(t) = t\,u(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tau\,u(\tau)\,u(t-\tau)\,d\tau =$

$= \int_0^t \tau\,d\tau = \frac{t^2}{2}$ ή $y_3(t) = \frac{t^2}{2}\,u(t)$

$y_4(t) = u(t) * t\,u(t-1) = t\,u(t-1) * u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tau\,u(\tau-1)\,u(t-\tau)\,d\tau =$

$= \int_1^t \tau\,d\tau = \left.\frac{\tau^2}{2}\right|_1^t = \frac{1}{2}(t^2-1)$



ή $y_4(t) = \frac{1}{2}(t^2-1)\,u(t-1)$

$y_7(t) = u(t-2) * t\,u(t) = t\,u(t) * u(t-2) = \int_{-\infty}^{\infty} \tau\,u(\tau)\,u(t-\tau-2)\,d\tau =$

$= \int_0^{t-2} \tau\,d\tau = \left.\frac{1}{2}\tau^2\right|_0^{t-2} = \frac{1}{2}(t-2)^2$

ή $y_7(t) = \frac{1}{2}(t-2)^2\,u(t-2)$

$y_8(t) = u(t-2) * t\,u(t-1) = t\,u(t-1) * u(t-2) = \int_{-\infty}^{\infty} \tau\,u(\tau-1)\,u(t-\tau-2)\,d\tau =$

$= \int_1^{t-2} \tau\,d\tau = \left.\frac{1}{2}\tau^2\right|_1^{t-2} = \frac{1}{2}\left[(t-2)^2 - 1\right] = \frac{1}{2}(t^2 - 4t + 3)$

ή $y_8(t) = \frac{1}{2}(t^2 - 4t + 3)\,u(t-3)$

Τελικά έχουμε:

$$y(t) = 6\left[y_1(t) - y_2(t) - y_3(t) + y_4(t) - y_5(t) + y_6(t) + y_7(t) - y_8(t)\right] =$$

$$= 6\Big[\underbrace{t\,u(t)}_{y_1} - \underbrace{(t-1)\,u(t-1)}_{y_2} - \underbrace{\tfrac{1}{2}t^2\,u(t)}_{y_3} + \underbrace{\tfrac{1}{2}(t^2-1)\,u(t-1)}_{y_4} - \underbrace{(t-2)\,u(t-2)}_{y_5} +$$

$$+ \underbrace{(t-3)\,u(t-3)}_{y_6} + \underbrace{\tfrac{1}{2}(t-2)^2\,u(t-2)}_{y_7} - \underbrace{\tfrac{1}{2}(t^2-4t+3)\,u(t-3)}_{y_8}\Big] =$$

$$= 6\Big[t\,u(t) - t\,u(t-1) + u(t-1) - \tfrac{1}{2}t^2u(t) + \tfrac{1}{2}t^2u(t-1) - \tfrac{1}{2}u(t-1) - t\,u(t-2) +$$

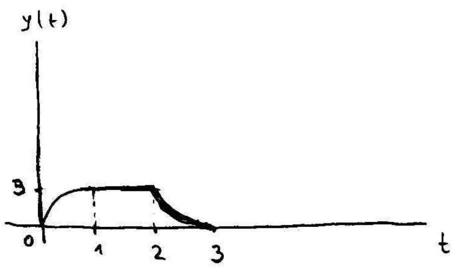
$$+ 2\,u(t-2) + t\,u(t-3) - 3\,u(t-3) + \tfrac{1}{2}t^2\,u(t-2) - 2t\,u(t-2) + 2\,u(t-2)$$

$$- \tfrac{1}{2}t^2\,u(t-3) + 2t\,u(t-3) - \tfrac{3}{2}\,u(t-3)\Big] =$$

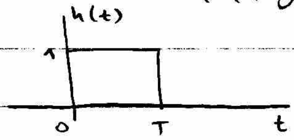
$$= 6\Big[t\,u(t) - t\,u(t-1) + \tfrac{1}{2}u(t-1) - \tfrac{1}{2}t^2u(t) + \tfrac{1}{2}t^2u(t-1) - 3t\,u(t-2) +$$

$$+ \underbrace{4\,u(t-2)}_{\substack{\text{Το γράφω} \\ \text{ως } \frac{9}{2}u(t-2) - \frac{1}{2}u(t-2)}} + 3t\,u(t-3) - \tfrac{9}{2}u(t-3) + \tfrac{1}{2}t^2u(t-2) - \tfrac{1}{2}t^2u(t-3)\Big] =$$

$$= 6\Big[\left(-\tfrac{1}{2}t^2 + t\right)\left[u(t) - u(t-1)\right] + \tfrac{1}{2}\left[u(t-1) - u(t-2)\right] + \left(\tfrac{t^2}{2} - 3t + \tfrac{9}{2}\right)\left[u(t-2) - u(t-3)\right]\Big]$$



ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί η έξοδος $y(t)$ ενός ΓΧΑ με κρουστική απόκριση $h(t)$ αυτή του σχήματος, στο οποίο εφαρμόζεται η είσοδος $x(t)$.



Λύση $h(t) = u(t) - u(t-T)$

$$y(t) = x(t) * h(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[u(\tau) - u(\tau-T)\right] x(t-\tau)\, d\tau =$$

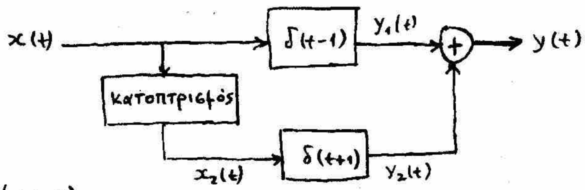
$$= \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau - \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau-T)\, x(t-\tau)\, d\tau =$$

$$= \int_{0}^{\infty} x(t-\tau)\, d\tau - \int_{T}^{\infty} x(t-\tau)\, d\tau = \int_{0}^{T} x(t-\tau)\, d\tau = \langle \text{θέτω } t-\tau = q \rangle$$

$$= -\int_{t}^{t-T} x(q)\, dq = \int_{t-T}^{t} x(q)\, dq$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Το σύστημα αυτό ενεργεί ως ολοκληρωτής πεπερασμένου χρόνου. Δηλαδή ολοκληρώνει την είσοδο για διάστημα T, από $t-T$ έως t.

ΑΣΚΗΣΗ 1.4 Δίνεται το συνεχούς χρόνου σήμα $v(t) = (t+4)\,\dfrac{u(t)-u(t+4)}{4}$



α. Να σχεδιάσετε το σήμα $v(t)$.

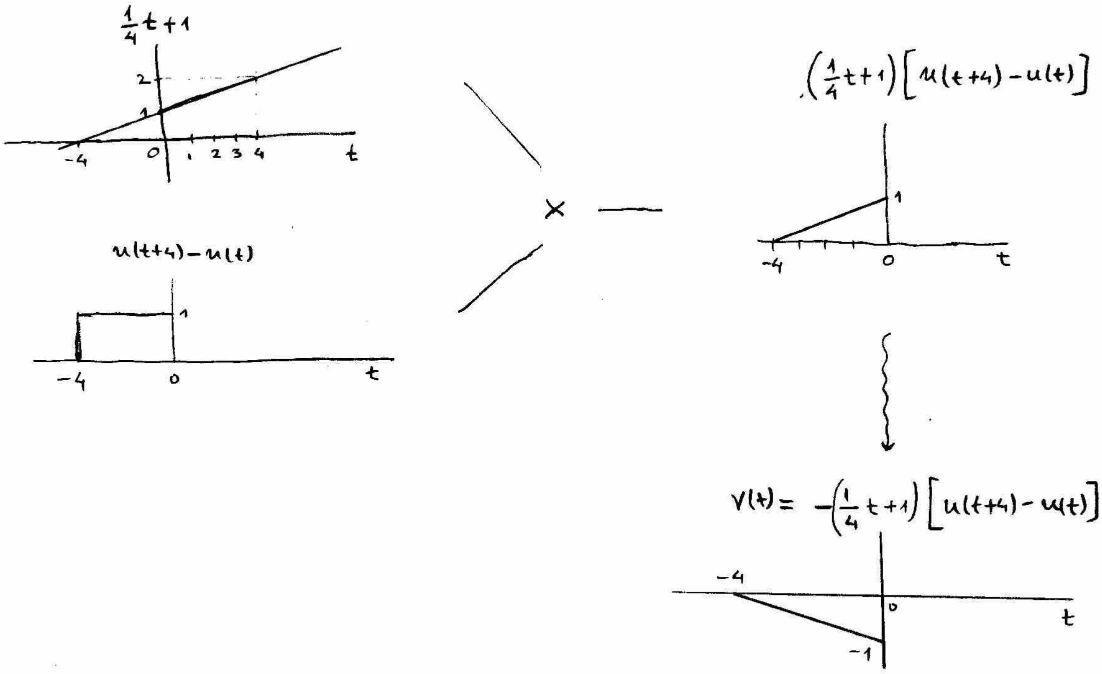
β. Να σχεδιάσετε το σήμα $x(t) = -v(-2t-2)$.

γ. Να υπολογίσετε και να σχεδιάσετε τα σήματα $x_2(t)$, $y_1(t)$, $y_2(t)$, $y(t)$.

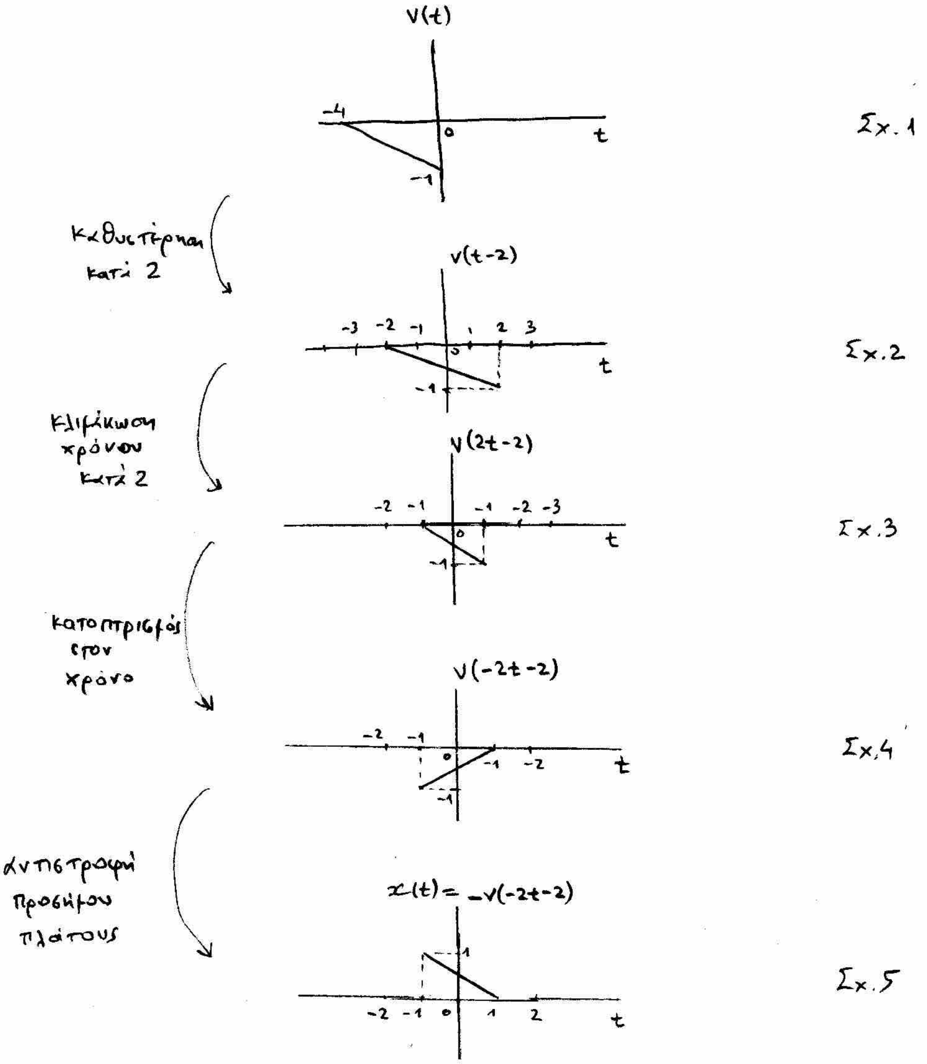
δ. Να υπολογίσετε και να σχεδιάσετε τον μετασχηματισμό Fourier $Y(\Omega)$ του σήματος $y(t)$

ΛΥΣΗ α. Το σήμα $v(t)$ γράφεται ως

$$v(t) = \frac{1}{4}(t+4)\left[u(t)-u(t+4)\right] = -\left(\frac{1}{4}t+1\right)\left[u(t+4)-u(t)\right]$$



β. Το σήμα $x(t)$ ισούται με $x(t) = -v(-2t-2)$. Θα το σχεδιάσουμε σταδιακά αρχίζοντας από το σήμα $v(t)$, ολισθαίνοντας στον χρόνο για να βρούμε το $v(t-2)$, κλιμακώνοντας τον χρόνο για να βρούμε το $v(2t-2)$, εκτελώντας κατοπτρισμό στον χρόνο για να βρούμε το $v(-2t-2)$ και τέλος παίρνοντας το συμμετρικό ως προς τον άξονα των χρόνων για να βρούμε το αρνητικό του μέχρι τώρα αποτελέσματος, δηλαδή το $-v(-2t-2)$. Η διαδικασία αυτή δείχνεται στα σχήματα που ακολουθούν.



Σημειώνεται ότι στο αποτέλεσμα αυτό μπορούμε να καταλήξουμε βασιζόμενοι στον ορισμό του v(t):

$$v(t) = -\left(\tfrac{1}{4}t+1\right)\left[u(t+4)-u(t)\right] \Leftrightarrow v(t) = \begin{cases} -\left(\tfrac{1}{4}t+1\right) & \text{για } -4 \le t \le 0 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

Με βάση αυτό, το σήμα x(t) είναι:

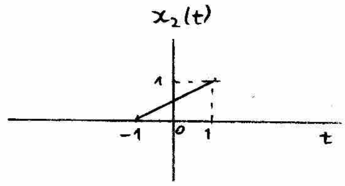
$$x(t) = -v(-2t-2) = \begin{cases} -\left[-\left[\tfrac{1}{4}(-2t-2)+1\right]\right] & \text{για } -4 \le -2t-2 \le 0 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases} \rightsquigarrow$$

$$x(t) = \begin{cases} -\tfrac{1}{2}t + \tfrac{1}{2} & \text{για } -1 \le t \le 1 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

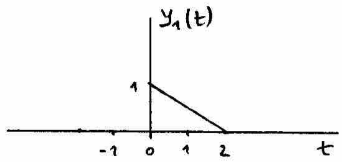
Η γραφική παράσταση του x(t) είναι ακριβώς αυτή του Σχ. 5.

γ.

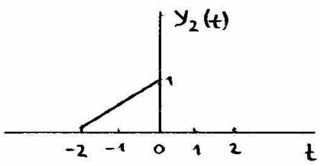
$$x_2(t) = x(-t) = \begin{cases} -\frac{1}{2}(-t) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2} & \text{για} \quad -1 \le t \le 1 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$



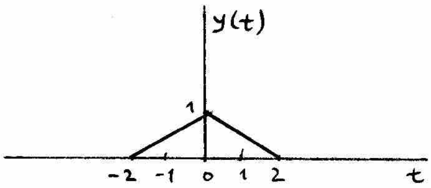
$$y_1(t) = x(t) * \delta(t-1) = x(t-1) = \begin{cases} -\frac{1}{2}(t-1) + \frac{1}{2} & \text{για} \quad -1 \le t-1 \le 1 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases} = \begin{cases} -\frac{1}{2}t + 1 & \text{για} \quad 0 \le t \le 2 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$



$$y_2(t) = x_2(t) * \delta(t+1) = x_2(t+1) = \begin{cases} \frac{1}{2}(t+1) + \frac{1}{2} & \text{για} \quad -1 \le t+1 \le 1 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2}t + 1 & \text{για} \quad -2 \le t \le 0 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$



$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t + 1 & \text{για} \quad -2 \le t \le 0 \\ -\frac{1}{2}t + 1 & \text{για} \quad 0 \le t \le 2 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$



$$\text{δ.}\quad Y(\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty} y(t)\, e^{-j\Omega t}dt = \int_{-2}^{0}\left(\tfrac{1}{2}t+1\right)e^{-j\Omega t}dt + \int_{0}^{2}\left(-\tfrac{1}{2}t+1\right)e^{-j\Omega t}dt =$$

$$=\underbrace{\frac{1}{2}\int_{-2}^{0} t\, e^{-j\Omega t}dt}_{Y_1(\Omega)} + \underbrace{\int_{-2}^{0} e^{-j\Omega t}dt}_{Y_2(\Omega)} \underbrace{-\frac{1}{2}\int_{0}^{2} t\, e^{-j\Omega t}dt}_{Y_3(\Omega)} + \underbrace{\int_{0}^{2} e^{-j\Omega t}dt}_{Y_4(\Omega)} \qquad (1)$$

όπου

$$Y_1(\Omega)=\frac{1}{2}\int_{-2}^{0} t\, e^{-j\Omega t}dt = \frac{1}{2}\,\frac{1}{-j\Omega}\int_{-2}^{0} t\, d\left(e^{-j\Omega t}\right) =$$

$$=\frac{1}{-2j\Omega}\left[t\, e^{-j\Omega t}\Big|_{-2}^{0} - \int_{-2}^{0} e^{-j\Omega t}dt\right] =$$

$$=\frac{1}{-2j\Omega}\left[0-(-2)\,e^{-j\Omega(-2)} - \frac{1}{-j\Omega}\, e^{-j\Omega t}\Big|_{-2}^{0}\right] =$$

$$=\frac{1}{-2j\Omega}\left[2\,e^{j2\Omega} + \frac{1}{j\Omega}\left(e^{0}-e^{-j\Omega(-2)}\right)\right] =$$

$$=\frac{1}{-2j\Omega}\left[2\,e^{j2\Omega} + \frac{1}{j\Omega}\left(1-e^{j2\Omega}\right)\right] =$$

$$=\frac{e^{j2\Omega}}{-j\Omega} + \frac{1}{2\Omega^2} - \frac{e^{j2\Omega}}{2\Omega^2} \qquad (1\alpha)$$

$$Y_2(\Omega)=\int_{-2}^{0} e^{-j\Omega t}dt = \frac{1}{-j\Omega}\, e^{-j\Omega t}\Big|_{-2}^{0} = \frac{1}{-j\Omega}\left(e^{0}-e^{-j\Omega(-2)}\right) =$$

$$=\frac{1}{-j\Omega}\left(1-e^{j2\Omega}\right) = \frac{1}{-j\Omega} + \frac{e^{j2\Omega}}{j\Omega} \qquad (1\beta)$$

$$Y_3(\Omega) = \frac{1}{2}\int_0^2 t\, e^{-j\Omega t}\,dt = \frac{1}{2}\,\frac{1}{-j\Omega}\int_0^2 t\, d\left(e^{-j\Omega t}\right) =$$

$$= \frac{1}{-2j\Omega}\left[t\, e^{-j\Omega t}\Big|_0^2 - \int_0^2 e^{-j\Omega t}\,dt \right] =$$

$$= \frac{1}{-2j\Omega}\left[2\, e^{-j\Omega 2} - 0 - \frac{1}{-j\Omega}\, e^{-j\Omega t}\Big|_0^2 \right] =$$

$$= \frac{1}{-2j\Omega}\left[2\, e^{-j\Omega 2} + \frac{1}{j\Omega}\left(e^{-j\Omega 2} - e^{0} \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{-2j\Omega}\left[2\, e^{-j\Omega 2} + \frac{e^{-j\Omega 2}}{j\Omega} - \frac{1}{j\Omega} \right] =$$

$$= \frac{e^{-j\Omega 2}}{-j\Omega} + \frac{e^{-j\Omega 2}}{2\Omega^2} - \frac{1}{2\Omega^2} \qquad (1\gamma)$$

$$Y_4(\Omega) = \int_0^2 e^{-j\Omega t}\,dt = \frac{1}{-j\Omega}\, e^{-j\Omega t}\Big|_0^2 = \frac{1}{-j\Omega}\left(e^{-j\Omega 2} - e^{0} \right) =$$

$$= \frac{e^{-j2\Omega}}{-j\Omega} + \frac{1}{j\Omega} \qquad (1\delta)$$

Με βάση τα αποτελέσματα αυτά η (1) γίνεται:

$$Y(\Omega) = \underbrace{\left[\cancel{\frac{e^{j2\Omega}}{-j\Omega}} + \frac{1}{2\Omega^2} - \frac{e^{j2\Omega}}{2\Omega^2} \right]}_{(1\alpha)} + \underbrace{\left[\cancel{\frac{1}{-j\Omega}} + \cancel{\frac{e^{j2\Omega}}{j\Omega}} \right]}_{(1\beta)} - \underbrace{\left[\frac{e^{-j2\Omega}}{-j\Omega} + \frac{e^{-j2\Omega}}{2\Omega^2} - \frac{1}{2\Omega^2} \right]}_{(1\gamma)} + \underbrace{\left[\frac{e^{-j2\Omega}}{-j\Omega} + \cancel{\frac{1}{j\Omega}} \right]}_{(1\delta)} =$$

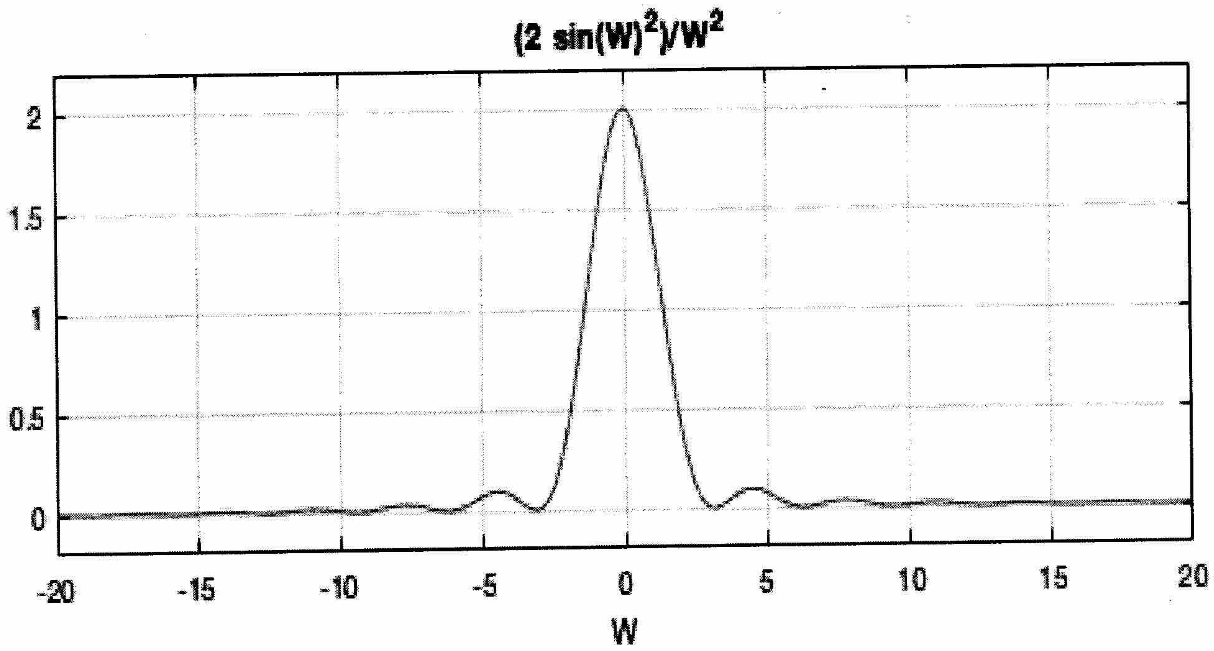
$$= \frac{1}{2\Omega^2} - \frac{e^{j2\Omega}}{2\Omega^2} + \cancel{\frac{e^{-j2\Omega}}{j\Omega}} - \frac{e^{-j2\Omega}}{2\Omega^2} + \frac{1}{2\Omega^2} - \cancel{\frac{e^{-j2\Omega}}{j\Omega}} =$$

$$= \frac{2}{2\Omega^2} - \frac{e^{j2\Omega} + e^{-j2\Omega}}{2\Omega^2} = \frac{1}{\Omega^2} - \frac{2\cos(2\Omega)}{2\Omega^2} = \frac{1-\cos(2\Omega)}{\Omega^2} = \frac{1-\left[1-2\sin^2(\Omega)\right]}{\Omega^2} =$$

$$= \frac{2\sin^2(\Omega)}{\Omega^2}$$

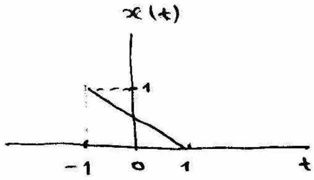
```
syms W

Y(W) = 2 * sin(W)* sin(W) / (W * W);
subplot(2,1,1); ezplot(Y(W), [-20 20]); grid on;
ylim([-0.2,2.2]);
```



ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί ο μετασχ. Fourier του σήματος $x(t)=\frac{1}{2}(1-t)$ για $-1\le t\le 1$ και $x(t)=0$ αλλού.

ΛΥΣΗ



$$X(\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\Omega t}\,dt = \int_{-1}^{1}\frac{1}{2}(1-t)\,e^{-j\Omega t}\,dt =$$

$$=\frac{1}{2}\left[\int_{-1}^{1} e^{-j\Omega t}\,dt - \int_{-1}^{1} t\, e^{-j\Omega t}\,dt\right] = \frac{1}{2}\left[X_1(\Omega)-X_2(\Omega)\right] \qquad (1)$$

όπου

$$X_1(\Omega)=\int_{-1}^{1} e^{-j\Omega t}\,dt = \frac{1}{-j\Omega}\,e^{-j\Omega t}\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{-j\Omega}\left(e^{-j\Omega}-e^{+j\Omega}\right)=$$

$$=\frac{1}{j\Omega}\,2j\sin\Omega = \frac{2}{\Omega}\sin\Omega \qquad (2)$$

$$X_2(\Omega)=\int_{-1}^{1} t\,e^{-j\Omega t}\,dt = \frac{1}{-j\Omega}\int_{-1}^{1} t\, d\left(e^{-j\Omega t}\right) = \langle\text{κατά παράγοντες}\rangle$$

$$=\frac{1}{-j\Omega}\left[t\,e^{-j\Omega t}\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} e^{-j\Omega t}\,dt\right]=$$

$$=\frac{1}{-j\Omega}\left[\left(e^{-j\Omega}-(-1)\,e^{-j\Omega(-1)}\right) - \frac{1}{-j\Omega}\,e^{-j\Omega t}\Big|_{-1}^{1}\right]=$$

$$=\frac{1}{-j\Omega}\left[\left(e^{-j\Omega}+e^{j\Omega}\right) + \frac{1}{j\Omega}\left(e^{-j\Omega}-e^{+j\Omega}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{-j\Omega}\left[2\cos\Omega + \frac{1}{j\Omega}\left(-2j\sin\Omega\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{-j\Omega}\left[2\cos\Omega - \frac{2}{\Omega}\sin\Omega\right]=$$

$$=-\frac{2}{j\Omega}\cos\Omega + \frac{2}{j\Omega^2}\sin\Omega \qquad (3)$$

$$(1) \overset{(2,3)}{\leadsto} \quad X(\Omega) = \frac{1}{2}\left[X_1(\Omega) - X_2(\Omega)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{\Omega}\sin\Omega + \frac{2}{j\Omega}\cos\Omega - \frac{2}{j\Omega^2}\sin\Omega\right] =$$

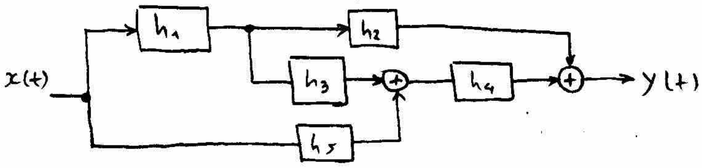
$$= \frac{\sin\Omega}{\Omega} + \frac{1}{j\Omega}\left(\cos\Omega - \frac{\sin\Omega}{\Omega}\right) =$$

$$= \frac{\sin\Omega}{\Omega} - j\,\frac{1}{\Omega}\left(\cos\Omega - \frac{\sin\Omega}{\Omega}\right)$$

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί η κρουστική απόκριση του συστήματος του σχήματος, όταν

$h_1(t) = h_2(t) = h_5(t) = u(t)$

$h_3(t) = 5\delta(t)$, $h_4(t) = e^{-2t}u(t)$



ΛΥΣΗ

$$h(t) \triangleq h = (h_1 * h_2) + h_4 * (h_1 * h_3 + h_5) =$$

$$= (u(t) * u(t)) + h_4(t) * [(u(t) * 5\delta(t)) + u(t)] =$$

$$= t\,u(t) + h_4(t) * [5u(t) + u(t)] =$$

$$= t\,u(t) + \underbrace{h_4(t) * 6u(t)}_{h_6(t)}$$

$$h_6(t) = 6\,h_4(t) * u(t) = 6\,e^{-2t}u(t) * u(t) =$$

$$= 6\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\tau}u(\tau)\,u(t-\tau)\,d\tau = 6\int_0^t e^{-2\tau}\,d\tau = 6\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) e^{-2\tau}\Big|_0^t =$$

$$= -3\left(e^{-2t} - e^{0}\right) = 3\left(1 - e^{-2t}\right)$$

ή $h_6(t) = 3\left(1 - e^{-2t}\right)u(t)$

Τελικά

$$h(t) = t\,u(t) + 3(1 - e^{-2t})\,u(t) =$$

$$= \left(t + 3 - 3e^{-2t}\right)u(t)$$

ΑΣΚΗΣΗ Η κρουστική απόκριση γραμμικού συστήματος είναι $h(t)=\delta(t)-2e^{-t}u(t)$. Να υπολογιστεί η έξοδος για την είσοδο $x(t)=\mathrm{sgn}(t)$

ΛΥΣΗ Α' τρόπος – πεδίο χρόνου

$$x(t)=\mathrm{sgn}(t)=u(t)-u(-t)$$

Άρα

$$y(t)=h(t)*x(t)=\left[\delta(t)-2e^{-t}u(t)\right]*\left[u(t)-u(-t)\right]=$$

$$=\underbrace{\delta(t)*u(t)}_{u(t)}-\underbrace{\delta(t)*u(-t)}_{u(-t)}-\underbrace{2e^{-t}u(t)*u(t)}_{y_1(t)}+\underbrace{2e^{-t}u(t)*u(-t)}_{y_2(t)}=$$

$$=u(t)-u(-t)-y_1(t)+y_2(t)$$

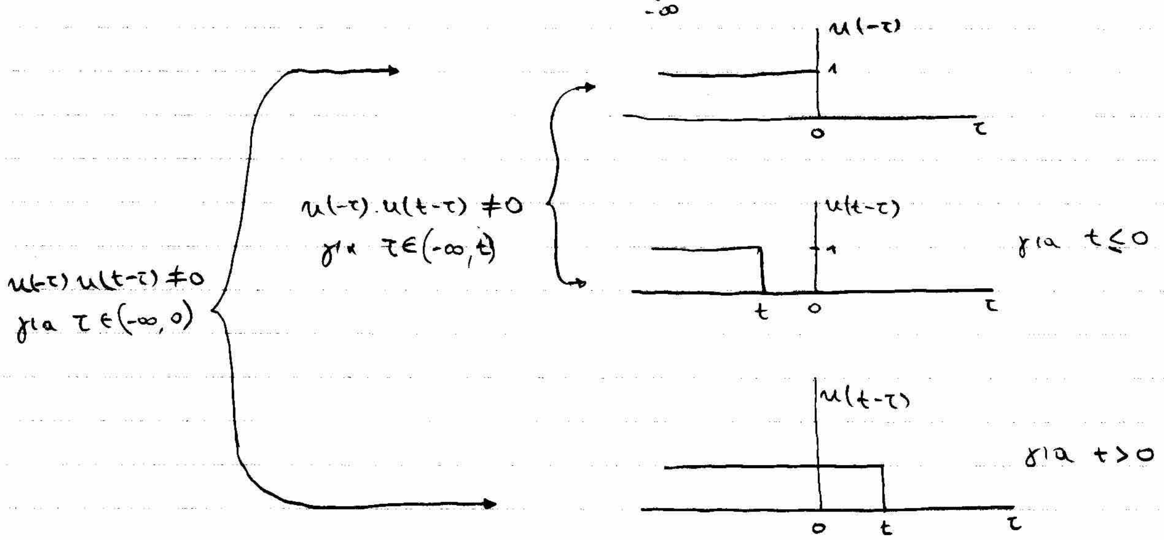
Αλλά

$$y_1(t)=2e^{-t}u(t)*u(t)=2\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\tau}u(\tau)\,u(t-\tau)\,d\tau=$$

$$=2\int_0^t e^{-\tau}d\tau=-2e^{-\tau}\Big|_0^t=-2\left(e^{-t}-e^{0}\right)=2\left(1-e^{-t}\right)\Rightarrow y_1(t)=2\left(1-e^{-t}\right)u(t)$$

$$y_2(t)=2e^{-t}u(t)*u(-t)=\int_{-\infty}^{\infty}u(-\tau)\cdot 2e^{-(t-\tau)}u(t-\tau)\,d\tau=$$

$$=2e^{-t}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\tau}\,u(-\tau)\,u(t-\tau)\,d\tau$$



Για τον υπολογισμό του $y_2(t)$ διακρίνουμε 2 περιπτώσεις:

α. $t\leq 0$:

$$y_2(t)=2e^{-t}\int_{-\infty}^{t}e^{\tau}d\tau=2e^{-t}e^{\tau}\Big|_{-\infty}^{t}=2e^{-t}\left(e^{t}-e^{-\infty}\right)=2e^{-t}e^{t}=2$$

β. $t>0$:

$$y_2(t)=2e^{-t}\int_{-\infty}^{0}e^{\tau}d\tau=2e^{-t}e^{\tau}\Big|_{-\infty}^{0}=2e^{-t}\left(e^{0}-e^{-\infty}\right)=2e^{-t}$$

Συνεπώς: $y_2(t)=2\cdot u(-t)+2e^{-t}u(t)$

Τελικά: $y_1(t)=u(t)-u(-t)-y_1(t)+y_2(t)=$

$$=u(t)-u(-t)-\left[2\left(1-e^{-t}\right)u(t)\right]+\left[2u(-t)+2e^{-t}u(t)\right]=$$

$$=4e^{-t}u(t)-\left[u(t)-u(-t)\right]=4e^{-t}u(t)-\mathrm{sgn}(t)$$

Εναλλακτικά θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση $sgn(t) = 2u(t) - 1$ για τον υπολογισμό της συνέλιξης.

$$
\begin{aligned}
y(t) = h(t) * x(t) &= \left[\delta(t) - 2e^{-t}u(t)\right] * \left[2u(t) - 1\right] = \\
&= \delta(t) * 2u(t) - \delta(t) * 1 - 2e^{-t}u(t) * 2u(t) + \\
&\qquad + 2e^{-t}u(t) * 1 = \\
&= 2u(t) - 1 - 4e^{-t}u(t) * u(t) + 2 = \langle \text{βλ. σημείωση} \rangle \\
&= 2u(t) + 1 - 4\left(1 - e^{-t}\right)u(t) = \\
&= 2u(t) + 1 - 4u(t) + 4e^{-t}u(t) = \\
&= 4e^{-t}u(t) - 2u(t) + 1 = \\
&= 4e^{-t}u(t) - \left[2u(t) - 1\right] = \\
&= 4e^{-t}u(t) - sgn(t)
\end{aligned}
$$

Σημείωση:

- $\delta(t) * 1 = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) \cdot 1 \, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) \, d\tau = 1$

- $2e^{-t}u(t) * 1 = \int_{-\infty}^{\infty} 2e^{-\tau}u(\tau) \cdot 1 \, d\tau = 2\int_{0}^{\infty} e^{-\tau} d\tau =$

$$= -2 \, e^{-\tau}\Big|_0^{\infty} = -2\left(e^{-\infty} - e^{-0}\right) = -2\,(0-1) = 2$$

B' τρόπος — πεδίο συχνότητας

$$H(\Omega) = F\{\delta(t) - 2e^{-t}u(t)\} = 1 - 2\cdot\frac{1}{1+j\Omega}$$

$$X(\Omega) = F\{sgn(t)\} = \frac{2}{j\Omega}$$

$$Y(\Omega) = X(\Omega)\cdot H(\Omega) = \frac{2}{j\Omega}\left(1 - 2\frac{1}{1+j\Omega}\right) = \frac{2}{j\Omega} - \underbrace{\frac{4}{j\Omega(1+j\Omega)}}_{G(\Omega)}$$

Η $G(\Omega)$ αναλύεται σε μερικά κλάσματα ως εξής:

$$G(\Omega) = \frac{4}{j\Omega(1+j\Omega)} = \frac{A}{j\Omega} + \frac{B}{1+j\Omega}$$

όπου

$$A = j\Omega\, G(\Omega)\Big|_{j\Omega=0} = \frac{4}{1+j\Omega}\Big|_{j\Omega=0} = \frac{4}{1} = 4$$

$$B = (1+j\Omega)\, G(\Omega)\Big|_{j\Omega=-1} = \frac{4}{j\Omega} = \frac{4}{-1} = -4$$

Άρα

$$Y(\Omega) = \frac{2}{j\Omega} - \left(\frac{4}{j\Omega} + \frac{-4}{1+j\Omega}\right) = \frac{-2}{j\Omega} + \frac{4}{1+j\Omega}$$

$$\xrightarrow{F^{-1}}\quad y(t) = -F^{-1}\left\{\frac{2}{j\Omega}\right\} + 4F^{-1}\left\{\frac{1}{1+j\Omega}\right\} = -sgn(t) + 4e^{-t}u(t) =$$

$$= 4e^{-t}u(t) - sgn(t)$$

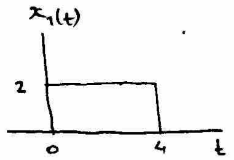
ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί ο ΜF των σημάτων:

α. $x_1(t) = 2[u(t)-u(t-4)]$ γ. $x_3(t) = 2t[u(t)-u(t-4)]$

β. $x_2(t) = e^{-3t}[u(t)-u(t-4)]$ δ. $x_4(t) = \cos 4\pi t\,[u(t)-u(t-4)]$

ΛΥΣΗ α.

$$X_1(\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)\, e^{-j\Omega t}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} 2\,[u(t)-u(t-4)]\, e^{-j\Omega t}\,dt =$$



$$= 2\int_0^4 e^{-j\Omega t}\,dt = 2\cdot\frac{1}{-j\Omega}\, e^{-j\Omega t}\Big|_0^4 = \frac{-2}{j\Omega}\left(e^{-j\Omega 4}-e^{0}\right)=$$

$$=\frac{2}{j\Omega}\left(1-e^{-j4\Omega}\right) = \frac{2}{j\Omega}\, e^{-j2\Omega}\left(e^{j2\Omega}-e^{-j2\Omega}\right)=$$

$$=\frac{2}{j\Omega}\, e^{-j2\Omega}\, 2j\sin 2\Omega = 4\, e^{-j2\Omega}\,\frac{\sin 2\Omega}{\Omega} = 8\, e^{-j2\Omega}\,\frac{\sin 2\Omega}{2\Omega}$$

Ένας άλλος τρόπος υπολογισμού του $X_1(\Omega)$ είναι αυτός μέσω των ιδιοτήτων του ΜF:

$$F\{x_1(t)\} = F\{2[u(t)-u(t-4)]\} \Rightarrow$$

$$X_1(\Omega) = 2\left[F\{u(t)\} - F\{u(t-4)\}\right]=$$

$$= 2\left[U(\Omega) - e^{-j\Omega 4}\,U(\Omega)\right]=$$

$$= 2\,U(\Omega)\left(1-e^{-j\Omega 4}\right)=$$

$$= 2\left[\frac{1}{j\Omega} + \pi\delta(\Omega)\right]\left(1-e^{-j\Omega 4}\right)=$$

$$= 2\,\frac{1}{j\Omega}\left(1-e^{-j\Omega 4}\right) + \underbrace{2\pi\delta(\Omega)\left(1-e^{-j\Omega 4}\right)}$$

Αλλά $X(\Omega)\,\delta(\Omega) = X(0)\,\delta(\Omega)$ οπότε ο δεύτερος όρος γίνεται:

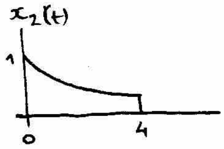
$$2\pi\left(1-e^{-j\Omega 4}\right)\delta(\Omega) = 2\pi\left(1-e^{0}\right)\delta(\Omega) = 2\pi\cdot 0\cdot\delta(\Omega) = 0$$

Τελικά

$$X_1(\Omega) = \frac{2}{j\Omega}\left(1-e^{-j\Omega 4}\right) = \dots = 8\, e^{-j2\Omega}\,\frac{\sin 2\Omega}{2\Omega}$$

β. $X_2(\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty} x_2(t)\, e^{-j\Omega t}\,dt=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-3t}[u(t)-u(t-4)]\, e^{-j\Omega t}\,dt=$

$$=\int_0^4 e^{-3t} e^{-j\Omega t}\,dt=\int_0^4 e^{-(3+j\Omega)t}\,dt=$$

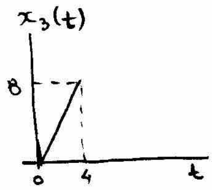


$$=\frac{1}{-(3+j\Omega)}\, e^{-(3+j\Omega)t}\Big|_0^4=\frac{-1}{3+j\Omega}\left[e^{-(3+j\Omega)4}-e^{0}\right]=$$

$$=\frac{1}{3+j\Omega}\left[1-e^{-(3+j\Omega)4}\right]=$$

$$=\frac{1}{3+j\Omega}\left(1-e^{-12}e^{-j\Omega 4}\right)$$

γ. $X_3(\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty} x_3(t)\, e^{-j\Omega t}\,dt=2\int_0^4 t e^{-j\Omega t}\,dt=2\,\frac{1}{-j\Omega}\int_0^4 t\, d\left(e^{-j\Omega t}\right)=$ < ολοκλήρωση κατά παράγοντες >



$$=\frac{-2}{j\Omega}\left[t\, e^{-j\Omega t}\Big|_0^4-\int_0^4 e^{-j\Omega t}\,dt\right]=$$

$$=\frac{-2}{j\Omega}\left[\left(4\, e^{-j\Omega 4}-0\right)-\frac{1}{-j\Omega}\, e^{-j\Omega t}\Big|_0^4\right]=$$

$$=\frac{-2}{j\Omega}\left[4\, e^{-j\Omega 4}+\frac{1}{j\Omega}\left(e^{-j\Omega 4}-e^{0}\right)\right]=$$

$$=\frac{-2}{j\Omega}\, 4\, e^{-j\Omega 4}+\frac{-2}{j\Omega}\,\frac{1}{j\Omega}\left(e^{-j\Omega 4}-1\right)=$$

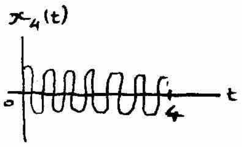
$$=\frac{-8}{j\Omega}\, e^{-j\Omega 4}+\frac{2}{\Omega^2}\left(e^{-j\Omega 4}-1\right)=$$

$$=\frac{8j\Omega}{\Omega^2}\, e^{-j\Omega 4}+\frac{2}{\Omega^2}\left(e^{-j\Omega 4}-1\right)=$$

$$=\frac{1}{\Omega^2}\left[(8j\Omega+2)\, e^{-j\Omega 4}-2\right]$$

δ. $$X_4(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_4(t)\, e^{-j\Omega t}\, dt = \int_0^4 \cos 4\pi t\; e^{-j\Omega t}\, dt =$$

$$= \int_0^4 \frac{1}{2}\left(e^{j4\pi t} + e^{-j4\pi t}\right) e^{-j\Omega t}\, dt =$$



$$= \frac{1}{2}\int_0^4 e^{-j(\Omega-4\pi)t}\, dt + \frac{1}{2}\int_0^4 e^{-j(\Omega+4\pi)t}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1}{-j(\Omega-4\pi)}\, e^{-j(\Omega-4\pi)t}\Big|_0^4 + \frac{1}{2}\,\frac{1}{-j(\Omega+4\pi)}\, e^{-j(\Omega+4\pi)t}\Big|_0^4 =$$

$$= \frac{-1}{2j(\Omega-4\pi)}\left[e^{-j(\Omega-4\pi)4} - e^{0}\right] + \frac{-1}{2j(\Omega+4\pi)}\left[e^{-j(\Omega+4\pi)4} - e^{0}\right] =$$

$$= \frac{1}{2j(\Omega-4\pi)}\left[1 - e^{-j(\Omega-4\pi)4}\right] + \frac{1}{2j(\Omega+4\pi)}\left[1 - e^{-j(\Omega+4\pi)4}\right] =$$

$$= \frac{e^{-j(\Omega-4\pi)2}}{2j(\Omega-4\pi)}\left[e^{+j(\Omega-4\pi)2} - e^{-j(\Omega-4\pi)2}\right] + \frac{e^{-j(\Omega+4\pi)2}}{2j(\Omega+4\pi)}\left[e^{+j(\Omega+4\pi)2} - e^{-j(\Omega+4\pi)2}\right] =$$

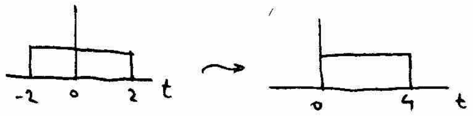
$$= \frac{e^{-j(\Omega-4\pi)2}}{\cancel{2j}(\Omega-4\pi)}\cdot \cancel{2j}\,\sin(\Omega-4\pi)2 + \frac{e^{-j(\Omega+4\pi)2}}{\cancel{2j}(\Omega+4\pi)}\,\cancel{2j}\,\sin(\Omega+4\pi)2 =$$

$$= 2e^{-j(2\Omega-8\pi)}\,\frac{\sin(2\Omega-8\pi)}{(2\Omega-8\pi)} + 2\,e^{-j(2\Omega+8\pi)}\,\frac{\sin(2\Omega+8\pi)}{(2\Omega+8\pi)} =$$

$$= 2\,e^{-j2\Omega}\,\frac{\sin(2\Omega-8\pi)}{(2\Omega-8\pi)} + 2\,e^{-j2\Omega}\,\frac{\sin(2\Omega+8\pi)}{(2\Omega+8\pi)}$$

υποδηλώνει
την ολίσθηση
της κυματομορφής
στον χρόνο.
[καθυστέρηση του
τετραγωνικού παλμού
κατά 2 μονάδες χρόνου]

υποδηλώνει τη συνέλιξη
των φασμάτων sinc και $\delta(2\Omega \pm 8\pi)$
στη συχνότητα.



ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί και να σχεδιαστεί ο MF του σήματος
$x(t)=Ae^{-bt}\cos\Omega_0 t\; u(t)$, όπου $Re\{b\}>0$

ΛΥΣΗ $x(t)=Ae^{-bt}u(t)\cdot\cos\Omega_0 t = x_1(t)\cdot x_2(t)$

όπου $x_1(t)=Ae^{-bt}u(t)$

$x_2(t)=\cos\Omega_0 t$

Αλλά $X_1(\Omega)=\dfrac{A}{b+j\Omega}$ $\qquad X_2(\Omega)=\pi\left[\delta(\Omega-\Omega_0)+\delta(\Omega+\Omega_0)\right]$

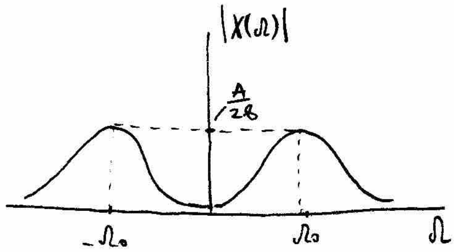
Από την ιδιότητα του πολλαπλασιασμού στο χρόνο έχουμε:

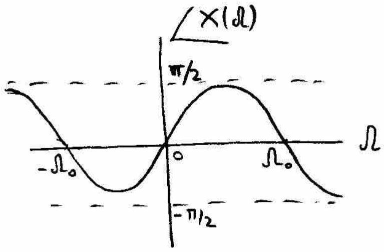
$$x_1(t)\cdot x_2(t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2\pi}X_1(\Omega) * X_2(\Omega)$$

Συνεπώς

$$X(\Omega)=\frac{1}{2\pi}\;\frac{A}{b+j\Omega} * \pi\left[\delta(\Omega-\Omega_0)+\delta(\Omega+\Omega_0)\right]=$$

$$=\frac{A/2}{b+j(\Omega-\Omega_0)}+\frac{A/2}{b+j(\Omega+\Omega_0)}$$





Σημείωση: Στο ίδιο αποτέλεσμα θα είχαμε καταλήξει χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της ολίσθησης στο χρόνο, αφού πρώτα εκφράζαμε το $\cos\Omega_0 t$ μέσω του τύπου του Euler.

$$x_2(t)=\cos\Omega_0 t=\frac{1}{2}\left(e^{j\Omega_0 t}+e^{-j\Omega_0 t}\right) \rightsquigarrow$$

$$x(t)=x_1(t)\cdot x_2(t)=x_1(t)\cdot\frac{1}{2}\left(e^{j\Omega_0 t}+e^{-j\Omega_0 t}\right)=\frac{1}{2}e^{j\Omega_0 t}x_1(t)+\frac{1}{2}e^{-j\Omega_0 t}x_1(t)$$

Άρα

$$X(\Omega)=\frac{1}{2}X_1(\Omega+\Omega_0)+\frac{1}{2}X_1(\Omega-\Omega_0)=\frac{1}{2}\,\frac{A}{b+j(\Omega+\Omega_0)}+\frac{1}{2}\,\frac{A}{b+j(\Omega-\Omega_0)}$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Υπολογισμός μέτρου και φάσης του φάσματος $X(\Omega) = \dfrac{A/2}{b+j(\Omega-\Omega_0)} + \dfrac{A/2}{b+j(\Omega+\Omega_0)}$ (1)

Θέτω $\Omega-\Omega_0 = \Omega_-$ και $\Omega+\Omega_0=\Omega_+$ οπότε έχουμε:

$$X(\Omega) = \frac{A/2}{b+j\Omega_-} + \frac{A/2}{b+j\Omega_+} = \frac{A}{2}\left[\frac{1}{b+j\Omega_-} + \frac{1}{b+j\Omega_+}\right] =$$

$$= \frac{A}{2}\left[\frac{b-j\Omega_-}{(b+j\Omega_-)(b-j\Omega_-)} + \frac{b-j\Omega_+}{(b+j\Omega_+)(b-j\Omega_+)}\right] =$$

$$= \frac{A}{2}\left[\frac{b-j\Omega_-}{b^2+\Omega_-^2} + \frac{b-j\Omega_+}{b^2+\Omega_+^2}\right] =$$

$$= \frac{A}{2}\left[\frac{(b-j\Omega_-)\overbrace{(b^2+\Omega_+^2)}^{C_+} + (b-j\Omega_+)\overbrace{(b^2+\Omega_-^2)}^{C_-}}{\underbrace{(b^2+\Omega_-^2)(b^2+\Omega_+^2)}_{D=C_+C_-}}\right] =$$

$$= \frac{A}{2D}\left[(b-j\Omega_-)C_+ + (b-j\Omega_+)C_-\right] =$$

$$= \frac{A}{2D}\left[bC_+ - j\Omega_-C_+ + bC_- - j\Omega_+C_-\right] =$$

$$= \frac{A}{2D}\underbrace{\left[b(C_++C_-) - j(\Omega_-C_+ + \Omega_+C_-)\right]}_{X_1(\Omega)} \qquad (2)$$

Η σχέση (2) εκφράζει το $X(\Omega)$ ως ένα μιγαδικό στη γνωστή μορφή $x+jy$ του οποίου το μέτρο και τη φάση μπορούμε να υπολογίσουμε ως $\sqrt{x^2+y^2}$ και $\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ αντίστοιχα. Συνεπώς, για το $X_1(\Omega)$ έχουμε:

$$|X_1(\Omega)| = \sqrt{b^2(C_++C_-)^2 + (\Omega_-C_+ + \Omega_+C_-)^2} \qquad (3)$$

$$\angle X_1(\Omega) = \tan^{-1}\frac{-(\Omega_-C_+ + \Omega_+C_-)}{b(C_++C_-)} \qquad (4)$$

Τελικά, για το $X(\Omega) = \frac{A}{2D} X_1(\Omega)$ έχουμε

$$|X(\Omega)| = \frac{A}{2D} |X_1(\Omega)| \quad (5)$$

$$\angle X(\Omega) = \angle X_1(\Omega) \quad (6)$$

Εφαρμογη

Για $A=4$, $B=2$, $\Omega_0 = 2\pi$ το μέτρο και η φάση του $X(\Omega)$ γίνονται:

$\Omega_- = \Omega - \Omega_0 = \Omega - 2\pi$

$\Omega_+ = \Omega + \Omega_0 = \Omega + 2\pi$

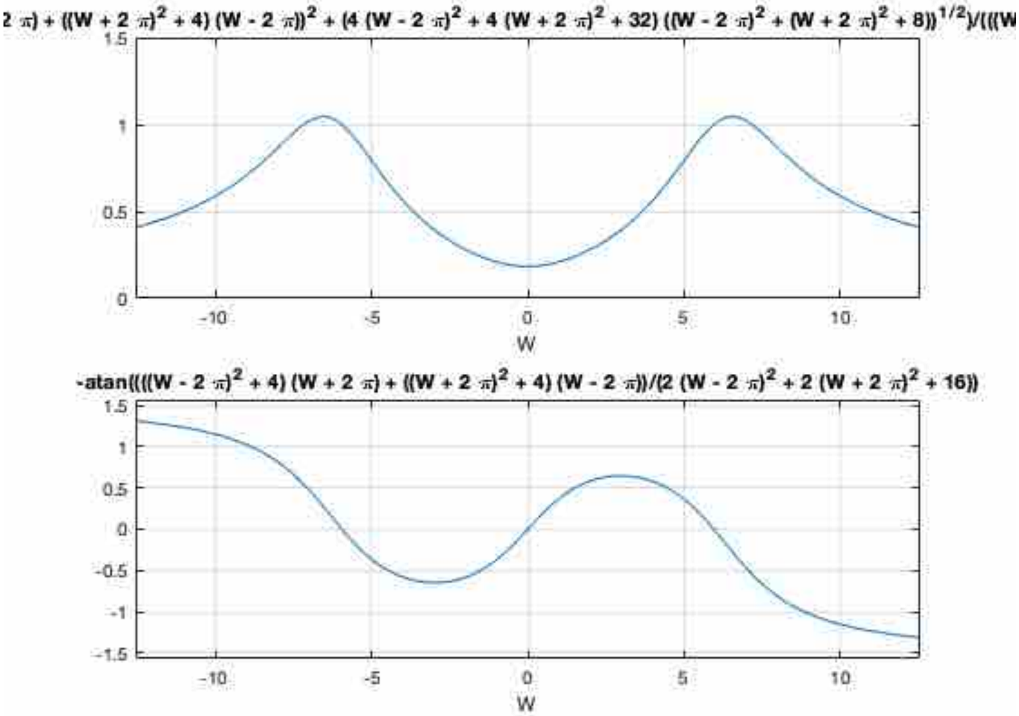
$C_+ = B^2 + \Omega_+^2 = 4 + (\Omega + 2\pi)^2$

$C_- = B^2 + \Omega_-^2 = 4 + (\Omega - 2\pi)^2$

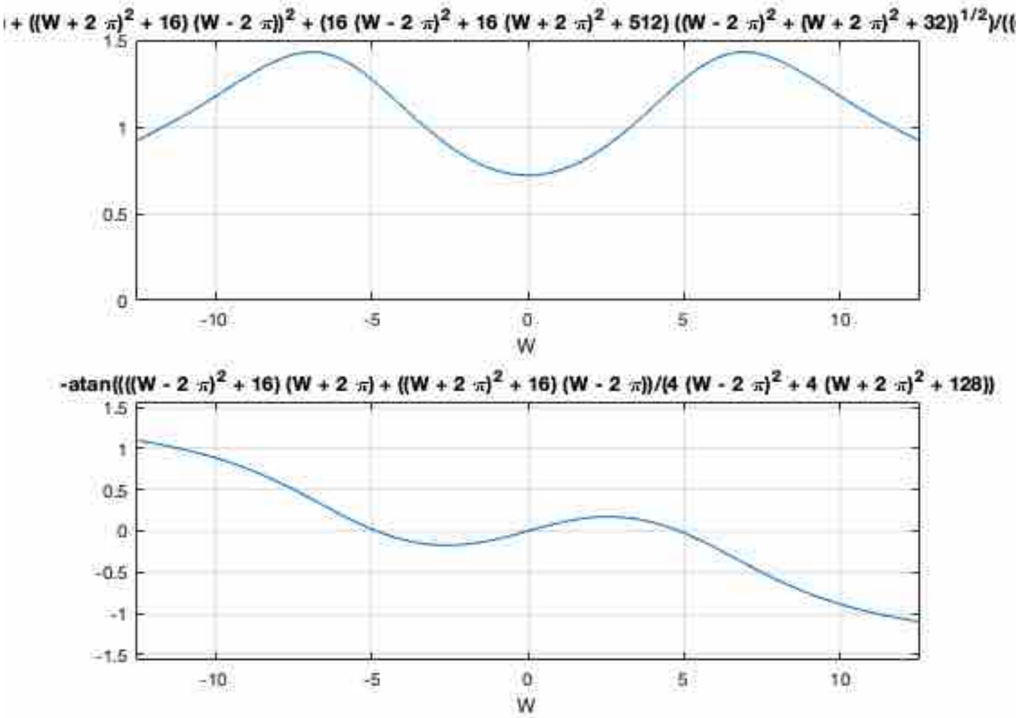
$D = C_+ C_- = [4 + (\Omega+2\pi)^2][4 + (\Omega - 2\pi)^2]$

Οι γραφικές παραστάσεις του μέτρου και της φάσης του $X(\Omega)$ φαίνονται στις σελίδες που ακολουθούν, μαζί με εκείνες για διαφορετικές τιμές των A, B, Ω_0.

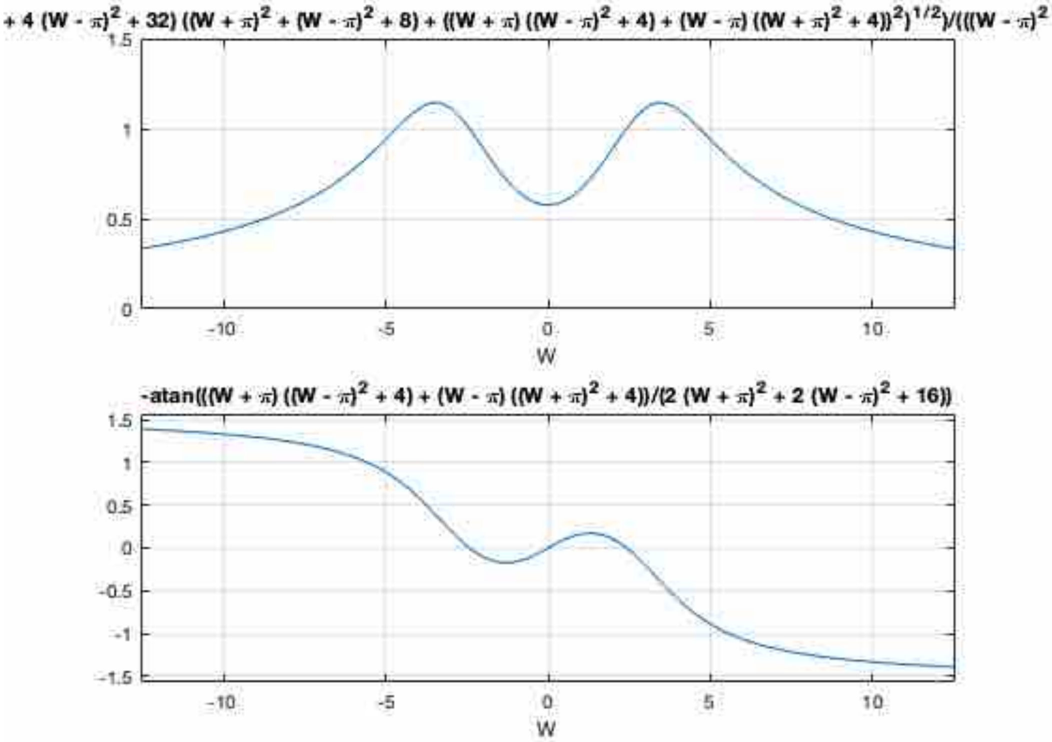
A=4
b=2
W0=2π



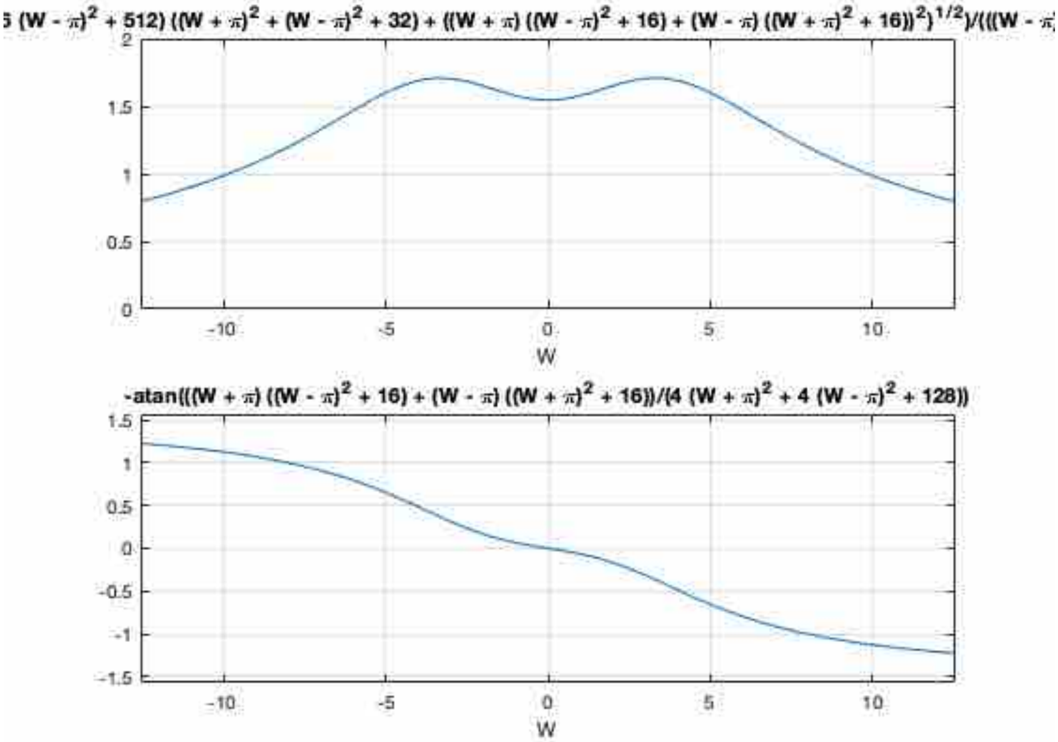
A=10
b=4
W0=2π



A=4
b=2
W0=π



A=10
b=4
W0=π



Matlab code

```
syms W

A = 4;
b = 2;
W0 = 2*pi;
Wm = W - W0;
Wp = W + W0;
Cp = b*b + Wp*Wp;
Cm = b*b + Wm*Wm;
D = Cp * Cm;

magX(W) = (A/(2*D))*sqrt((b*b*(Cp+Cm)*(Cp+Cm))+(Wm*Cp+Wp*Cm)*(Wm*Cp+Wp*Cm));
phaX(W) = atan(-(Wm*Cp+Wp*Cm)/(b*(Cp+Cm)));

subplot(2,1,1); ezplot(magX(W), [-4*pi 4*pi]); grid on; ylim([0, 1.5]);
subplot(2,1,2); ezplot(phaX(W), [-4*pi 4*pi]); grid on; ylim([-pi/2, pi/2]);
```

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί ο ΜF του σήματος $x(t) = \cos\left(6\pi t + \frac{\pi}{8}\right)$

ΛΥΣΗ

<u>A' τρόπος</u>

$$x(t) = \cos\left(6\pi t + \frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{2}\left[e^{j\left(6\pi t + \frac{\pi}{8}\right)} + e^{-j\left(6\pi t + \frac{\pi}{8}\right)} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{8}} e^{j6\pi t} + \frac{1}{2} e^{-j\frac{\pi}{8}} e^{-j6\pi t}$$

Λαμβάνοντας τον ΜF και των δύο μελών και έχοντας υπόψη ότι

$$e^{j\Omega_0 t} \xleftrightarrow{F} 2\pi\,\delta(\Omega - \Omega_0)$$

βρίσκουμε:

$$X(\Omega) = \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{8}}\, 2\pi\,\delta(\Omega - 6\pi) + \frac{1}{2} e^{-j\frac{\pi}{8}}\, 2\pi\,\delta(\Omega + 6\pi) =$$

$$= \pi \left[e^{j\frac{\pi}{8}}\,\delta(\Omega - 6\pi) + e^{-j\frac{\pi}{8}}\,\delta(\Omega + 6\pi) \right]$$

<u>B' τρόπος</u>

Γνωρίζοντας ότι $\cos(\Omega_0 t) \xleftrightarrow{F} \pi\left[\delta(\Omega - \Omega_0) + \delta(\Omega + \Omega_0)\right]$

① κλιμάκωση χρόνου

έχουμε $g(t) = \cos(6\pi t) \xleftrightarrow{F} \pi\left[\delta(\Omega - 6\pi) + \delta(\Omega + 6\pi)\right] = G(\Omega)$

Αλλά

$$x(t) = \cos\left(6\pi t + \frac{\pi}{8}\right) = \cos\left[6\pi\left(t + \frac{1}{48}\right)\right] = g\left(t + \frac{1}{48}\right)$$

Άρα, με βάση την ιδιότητα της ολίσθησης στον χρόνο

② ολίσθηση στον χρόνο

$$g(t - t_0) \xleftrightarrow{F} e^{-j\Omega t_0}\, G(\Omega)$$

βρίσκουμε ότι:

$$X(\Omega) = F\left\{g\left(t + \frac{1}{48}\right)\right\} = e^{-j\Omega\left(-\frac{1}{48}\right)}\, G(\Omega) =$$

$$= e^{j\Omega/48}\, G(\Omega) = e^{j\Omega/48}\, \pi\left[\delta(\Omega - 6\pi) + \delta(\Omega + 6\pi)\right] =$$

$$= \pi\left[e^{j\Omega/48}\,\delta(\Omega - 6\pi) + e^{j\Omega/48}\,\delta(\Omega + 6\pi)\right] = \langle \text{Βλ. σημείωση} \rangle$$

$$= \pi\left[e^{j6\pi/48}\,\delta(\Omega - 6\pi) + e^{j(-6\pi)/48}\,\delta(\Omega + 6\pi)\right] =$$

$$= \pi\left[e^{j\pi/8}\,\delta(\Omega - 6\pi) + e^{-j\pi/8}\,\delta(\Omega + 6\pi)\right]$$

Σημείωση: $q(\xi)\,\delta(\xi - \xi_0) = q(\xi_0)\,\delta(\xi - \xi_0)$

Γ' τρόπος

Έστω $c(t) = \cos t \xleftrightarrow{F} C(\Omega) = \pi[\delta(\Omega-1) + \delta(\Omega+1)]$

① ολίσθηση στον χρόνο

$$\cos\left(t+\frac{\pi}{8}\right) \xleftrightarrow{F} e^{j\Omega\pi/8}\, C(\Omega) = e^{j\Omega\pi/8}\, \pi\left[\delta(\Omega-1) + \delta(\Omega+1)\right]$$

Κάνοντας χρήση της ιδιότητας της κλιμάκωσης στον χρόνο

② κλιμάκωση χρόνου

$$x(\alpha t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{|\alpha|} X\left(\frac{\Omega}{\alpha}\right)$$

έχουμε:

$$\cos\left(6\pi t + \frac{\pi}{8}\right) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{6\pi}\, e^{j\frac{\Omega\pi}{6\pi 8}}\, \pi\left[\delta\left(\frac{\Omega}{6\pi}-1\right) + \delta\left(\frac{\Omega}{6\pi}+1\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{6\pi}\, \pi\left[e^{j\frac{\Omega\pi}{6\pi 8}}\, \delta\left(\frac{\Omega}{6\pi}-1\right) + e^{j\frac{\Omega\pi}{6\pi 8}}\, \delta\left(\frac{\Omega}{6\pi}+1\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{6\pi}\, \pi\left[e^{j\frac{6\pi\pi}{6\pi 8}}\, \delta\left(\frac{\Omega}{6\pi}-1\right) + e^{j\frac{(-6\pi)\pi}{6\pi 8}}\, \delta\left(\frac{\Omega}{6\pi}+1\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{6\pi}\, \pi\left[e^{j\pi/8}\, \delta\left(\frac{\Omega}{6\pi}-1\right) + e^{-j\frac{\pi}{8}}\, \delta\left(\frac{\Omega}{6\pi}+1\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{6\pi}\, \pi\left[e^{j\pi/8}\, \delta\left(\frac{\Omega-6\pi}{6\pi}\right) + e^{-j\frac{\pi}{8}}\, \delta\left(\frac{\Omega+6\pi}{6\pi}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{6\pi}\, \pi\left[e^{j\pi/8}\, \frac{1}{\left|\frac{1}{6\pi}\right|}\, \delta(\Omega-6\pi) + e^{-j\pi/8}\, \frac{1}{\left|\frac{1}{6\pi}\right|}\, \delta(\Omega+6\pi)\right] =$$

$$= \pi\left[e^{j\pi/8}\, \delta(\Omega-6\pi) + e^{-j\pi/8}\, \delta(\Omega+6\pi)\right]$$

Σημειώνεται ότι στα παραπάνω έγινε χρήση της ιδιότητας της συνάρτησης $\delta(\xi)$:

$$\delta(\alpha\xi) = \frac{1}{|\alpha|}\,\delta(\xi)$$

Δ' τρόπος

$$F\left\{\cos\left(6\pi t + \frac{\pi}{8}\right)\right\} = F\left\{\cos(6\pi t)\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) - \sin(6\pi t)\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right\} =$$

$$= F\left\{\cos(6\pi t)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\right\} - F\left\{\sin(6\pi t)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right\} =$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) F\{\cos(6\pi t)\} - \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) F\{\sin(6\pi t)\} =$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\pi\left[\delta(\Omega-6\pi) + \delta(\Omega+6\pi)\right]$$

$$- \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\frac{\pi}{j}\left[\delta(\Omega-6\pi) - \delta(\Omega+6\pi)\right] =$$

$$= \pi\left[\left[\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + j\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right]\delta(\Omega-6\pi) + \right.$$

$$\left.\left[\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) - j\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right]\delta(\Omega+6\pi)\right] =$$

$$= \pi\left[e^{j\pi/8}\,\delta(\Omega-6\pi) + e^{-j\pi/8}\,\delta(\Omega+6\pi)\right]$$

Ε' τρόπος

Ο ΜF ενός περιοδικού σήματος θα μπορούσε να υπολογιστεί από τη ΣF (σειράς Fourier) του σήματος μέσω των σχέσεων:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{jk\Omega_0 t} \xleftrightarrow{F} X(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi \alpha_k \delta(\Omega - k\Omega_0)$$

(βλ. σημείωση)

Καταλαβαίνουμε ότι ο τρόπος αυτός είναι ίδιος με τον Α' τρόπο, αφού εκεί ουσιαστικά υπολογίσαμε τους συντελεστές της ΣF του περιοδικού σήματος $\cos(6\pi t + \frac{\pi}{8})$.

$$x(t) = \cos\left(6\pi t + \frac{\pi}{8}\right) = \sum_{k=1,-1} \alpha_k e^{jk6\pi t} \quad \text{όπου} \quad \alpha_k = \frac{1}{2} e^{jk\frac{\pi}{8}}, \ \Omega_0 = 6\pi$$

Άρα

$$X(\Omega) = \sum_{k=1,-1} 2\pi \alpha_k \delta(\Omega - k\Omega_0) =$$

$$= \sum_{k=1,-1} 2\pi \frac{1}{2} e^{jk\frac{\pi}{8}} \delta(\Omega - k6\pi) =$$

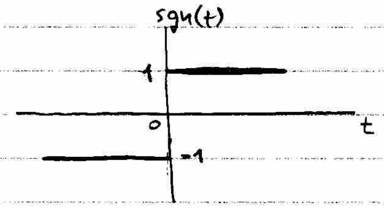
$$= \pi e^{j\pi/8} \delta(\Omega - 6\pi) + \pi e^{-j\pi/8} \delta(\Omega + 6\pi)$$

Σημείωση: Ο ΜF ενός περιοδικού σήματος με συντελεστές ΣF $\{\alpha_k\}$ μπορεί να θεωρηθεί ως ένα τραίνο κρουστικών σε συχνότητες αρμονικά συνδεόμενες μεταξύ τους. Το εμβαδό της κρουστικής της k-οστής αρμονικής $k\Omega_0$ ισούται με 2π φορές τον k-οστό συντελεστή της ΣF α_k.

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί ο MF του σήματος προσήμου sgn(t).

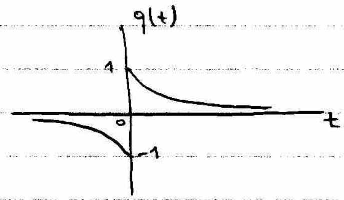
ΛΥΣΗ

$$\mathrm{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & t>0 \\ -1 & t<0 \end{cases}$$



Έστω η συνάρτηση (σήμα)

$$q_\alpha(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t} & t>0 \\ -e^{\alpha t} & t<0 \end{cases} \quad \text{όπου } \alpha>0$$



Ο MF της q(t) είναι:

$$F\{q_\alpha(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} q_\alpha(t)\, e^{-j\Omega t}\, dt =$$

$$= -\int_{-\infty}^{0} e^{\alpha t} e^{j\Omega t}\, dt + \int_{0}^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-j\Omega t}\, dt =$$

$$= -\frac{1}{\alpha - j\Omega} + \frac{1}{\alpha + j\Omega} = -\frac{2j\Omega}{\alpha^2+\Omega^2}$$

Παρατηρούμε ότι καθώς το $\alpha \to 0$, η εκθετική συνάρτηση πλησιάζει όλο και περισσότερο στη συνάρτηση προσήμου, δηλαδή

$$\lim_{\alpha\to 0} q_\alpha(t) = \mathrm{sgn}(t)$$

Ο MF και των δύο σημάτων είναι:

$$F\{\mathrm{sgn}(t)\} = \lim_{\alpha\to 0} F\{q_\alpha(t)\} = \frac{-2j\Omega}{\Omega^2} = \frac{2}{j\Omega}$$

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί ο MF του σήματος $\frac{1}{\pi t}$.

ΛΥΣΗ Για τον υπολογισμό αυτό βασιζόμαστε στην ιδιότητα του δυϊσμού (duality property) του MF η οποία εκφράζεται ως εξής:

$$\text{Εάν} \quad x(t) \xleftrightarrow{F} X(\Omega)$$

$$\text{Τότε} \quad y(t) = X(t) \xleftrightarrow{F} Y(\Omega) = 2\pi\, x(-\Omega)$$

Εφαρμόζουμε την ιδιότητα αυτή στο σήμα προσήμου (signum) και έχουμε:

$$x(t) = \operatorname{sgn}(t) \xleftrightarrow{F} X(\Omega) = \frac{2}{j\Omega}$$

$$y(t) = X(t) = \frac{2}{jt} \xleftrightarrow{F} Y(\Omega) = 2\pi\, x(-\Omega) = 2\pi \operatorname{sgn}(-\Omega)$$

Άρα

$$\frac{2}{jt} \xleftrightarrow{F} 2\pi \operatorname{sgn}(-\Omega) = -2\pi \operatorname{sgn}(\Omega)$$

ή

$$\frac{\cancel{j}}{\cancel{2\pi}} \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{j}t} \xleftrightarrow{F} \frac{j}{2\pi}\left[-2\pi \operatorname{sgn}(\Omega)\right]$$

Τελικά

$$\frac{1}{\pi t} \xleftrightarrow{F} -j \operatorname{sgn}(\Omega)$$

Αποδείξαμε δηλαδή ότι:

$$F\left\{\frac{1}{\pi t}\right\} = -j \operatorname{sgn}(\Omega)$$

Σημείωση: Ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $\frac{1}{\pi t}$ μας χρειάζεται για την κατανόηση του μετασχ. Hilbert.

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί ο ΜF του γκαουσιανού σήματος $x(t) = e^{-\alpha t^2}$, $\alpha > 0$.

ΛΥΣΗ
$$X(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\Omega t}\, dt =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t^2} e^{-j\Omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha\left(t^2 + \frac{j\Omega}{\alpha} t\right)}\, dt =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha\left(t + \frac{j\Omega}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\Omega^2}{4\alpha}}\, dt =$$
$$= e^{-\frac{\Omega^2}{4\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha\left(\overbrace{t + \frac{j\Omega}{2\alpha}}^{y}\right)^2}\, dt =$$
$$= e^{-\frac{\Omega^2}{4\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\overbrace{\alpha^{1/2} y}^{z}\right)^2}\, dy =$$
$$= \frac{e^{-\frac{\Omega^2}{4\alpha}}}{\alpha^{1/2}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2}\, dz}_{\pi^{1/2}} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\, e^{-\frac{\Omega^2}{4\alpha}}$$

Σημείωση 1: Για τον υπολογισμό κάναμε χρήση της εξίσωσης: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha z^2} dz = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$

Σημείωση 2: Παρατηρούμε ότι ο ΜF μιας γκαουσιανής συνάρτησης είναι επίσης μια γκαουσιανή συνάρτηση.

ΑΣΚΗΣΗ Ο ΜF του σήματος $g(t)$ είναι $G(\Omega)=j\Omega/(-\Omega^2+7j\Omega+6)$.

Να υπολογιστεί ο ΜF καθενός από τα παρακάτω σήματα:

α. $g(4t)$

β. $g(6t-12)$

γ. $\dfrac{dg(t)}{dt}$

δ. $g(-t)$

ε. $e^{j200t}g(t)$

στ. $\int_{-\infty}^{t} g(\tau)\,d\tau$

ΛΥΣΗ

α. $$g(4t) \overset{F}{\longleftrightarrow} \frac{1}{4}G\left(\frac{\Omega}{4}\right) = \frac{1}{4}\,\frac{j\Omega/4}{-\frac{\Omega^2}{16}+7j\frac{\Omega}{4}+6} = \frac{j\Omega}{-\Omega^2+28j\Omega+96}$$

β. $$g(6t-12) \overset{F}{\longleftrightarrow} \frac{1}{6}G\left(\frac{\Omega}{6}\right)\cdot e^{-j\frac{\Omega}{6}12} = \frac{1}{6}G\left(\frac{\Omega}{6}\right)e^{-j2\Omega}$$

γ. $$\frac{dg(t)}{dt} \overset{F}{\longleftrightarrow} j\Omega\, G(\Omega) = \frac{-\Omega^2}{-\Omega^2+7j\Omega+6}$$

δ. $$g(-t) \overset{F}{\longleftrightarrow} G(-\Omega) = \frac{-j\Omega}{-\Omega^2-7j\Omega+6} = \frac{j\Omega}{\Omega^2+7j\Omega-6}$$

ε. $$e^{j200t}g(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} G(\Omega-200) = \frac{j(\Omega-200)}{-(\Omega-200)^2+7j(\Omega-200)+6}$$

στ. $$\int_{-\infty}^{t} g(\tau)\,d\tau \overset{F}{\longleftrightarrow} \frac{1}{j\Omega}G(\Omega)+\pi G(0)\,\delta(\Omega) = \frac{1}{-\Omega^2+7j\Omega+6}+\pi\cdot 0 = \frac{1}{-\Omega^2+7j\Omega+6}$$

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί το σήμα s(t) του οποίου ο ΜF είναι $S(\Omega) = \frac{2}{5+j\Omega}\left[\frac{1}{j\Omega} + \pi\delta(\Omega)\right]$

ΛΥΣΗ <u>Α' τρόπος: Συνέλιξη στον χρόνο</u>

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $S(\Omega)$ είναι γινόμενο των συναρτήσεων

$$X(\Omega) = \frac{2}{5+j\Omega} \xleftrightarrow{F} x(t) = 2 \cdot e^{-5t} u(t)$$

$$U(\Omega) = \frac{1}{j\Omega} + \pi\delta(\Omega) \xleftrightarrow{F} u(t)$$

Άρα το ζητούμενο σήμα s(t) μπορεί να προκύψει ως συνέλιξη των x(t) και u(t).

$$s(t) = x(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, u(t-\tau)\, d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} 2 \cdot e^{-5\tau} u(\tau)\; u(t-\tau)\, d\tau =$$

$$= 2\int_{0}^{t} e^{-5\tau} d\tau = 2 \cdot \frac{1}{-5}\, e^{-5\tau}\Big|_{0}^{t} =$$

$$= -\frac{2}{5}\left(e^{-5t} - e^{0}\right) =$$

$$= \frac{2}{5}\left(1 - e^{-5t}\right)$$

Τελικά, το ζητούμενο σήμα s(t) ισούται με:

$$s(t) = \frac{2}{5}\left(1 - e^{-5t}\right) u(t)$$

B' τρόπος: Πολλαπλασιασμός στη συχνότητα

$$S(\Omega) = \frac{2}{5+j\Omega}\left[\frac{1}{j\Omega} + \pi\delta(\Omega)\right] =$$

$$= \frac{2}{5+j\Omega}\cdot\frac{1}{j\Omega} + \frac{2}{5+j\Omega}\cdot\pi\delta(\Omega) = \langle \text{λόγω της ιδιότητας της } \delta(\cdot),\ F(\Omega)\delta(\Omega-\Omega_0) = F(\Omega_0)\delta(\Omega-\Omega_0)\rangle$$

$$= \underbrace{\frac{2}{5+j\Omega}\cdot\frac{1}{j\Omega}}_{S_1(\Omega)} + \underbrace{\frac{2}{5}\pi\delta(\Omega)}_{S_2(\Omega)}$$

Αναλύουμε την $S_1(\Omega)$ σε απλά κλάσματα:

$$S_1(\Omega) = \frac{2}{5+j\Omega}\cdot\frac{1}{j\Omega} = \frac{A}{5+j\Omega} + \frac{B}{j\Omega}$$

όπου

$$A = (5+j\Omega)\,S_1(\Omega)\Big|_{j\Omega=-5} = \frac{2}{j\Omega}\Big|_{j\Omega=-5} = \frac{2}{-5} = \frac{-2}{5}$$

$$B = j\Omega\,S_1(\Omega)\Big|_{j\Omega=0} = \frac{2}{5+j\Omega}\Big|_{j\Omega=0} = \frac{2}{5}$$

Άρα

$$S_1(\Omega) = \frac{-\frac{2}{5}}{5+j\Omega} + \frac{\frac{2}{5}}{j\Omega}$$

και

$$S(\Omega) = -\frac{2}{5}\,\frac{1}{5+j\Omega} + \frac{2}{5}\,\frac{1}{j\Omega} + \frac{2}{5}\pi\delta(\Omega) =$$

$$= -\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{5+j\Omega} + \frac{2}{5}\left[\frac{1}{j\Omega} + \pi\delta(\Omega)\right]$$

Και λαμβάνοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier και των δύο μελών, έχουμε:

$$s(t) = -\frac{2}{5}e^{-5t}u(t) + \frac{2}{5}u(t) =$$

$$= \frac{2}{5}\left(1 - e^{-5t}\right)u(t)$$

ΑΣΚΗΣΗ   Νδο $\frac{d}{dt}\left[x(t) * y(t)\right] = \frac{dx(t)}{dt} * y(t) = x(t) * \frac{dy(t)}{dt}$

ΛΥΣΗ   Έστω

$$x(t) \xleftrightarrow{F} X(\Omega)$$

$$y(t) \xleftrightarrow{F} Y(\Omega)$$

$$F\left\{\frac{d}{dt}\left[x(t) * y(t)\right]\right\} = j\Omega\, F\left\{x(t) * y(t)\right\} = j\Omega\, X(\Omega)\cdot Y(\Omega)$$

λόγω της ιδιότητας της παραγώγισης

λόγω της ιδιότητας της συνέλιξης στον χρόνο

Άρα έχουμε

$$F\left\{\frac{d}{dt}\left[x(t) * y(t)\right]\right\} = j\Omega\, X(\Omega)\cdot Y(\Omega) = X(\Omega)\cdot j\Omega\, Y(\Omega)$$

Συνεπώς

$$F\left\{\frac{d}{dt}\left[x(t) * y(t)\right]\right\} = F\left\{\frac{d}{dt}x(t)\right\}\cdot F\left\{y(t)\right\} = F\left\{x(t)\right\}\cdot F\left\{\frac{d}{dt}y(t)\right\}$$

Τελικά

$$\frac{d}{dt}\left[x(t) * y(t)\right] = \frac{d}{dt}x(t) * y(t) = x(t) * \frac{d}{dt}y(t)$$

ΑΣΚΗΣΗ Νδο $\dfrac{d^2}{dt^2}[x(t) * y(t)] = \dfrac{dx(t)}{dt} * \dfrac{dy(t)}{dt} = \dfrac{d^2x(t)}{dt} * y(t) = x(t) * \dfrac{d^2y(t)}{dt^2}$

ΛΥΣΗ Έστω $F\{x(t)\} = X(\Omega)$ και $F\{y(t)\} = Y(\Omega)$.

τότε $F\left\{\dfrac{dx(t)}{dt}\right\} = j\Omega X(\Omega)$ $F\left\{\dfrac{dy(t)}{dt}\right\} = j\Omega Y(\Omega)$

$F\left\{\dfrac{d^2x(t)}{dt^2}\right\} = (j\Omega)^2 X(\Omega)$ $F\left\{\dfrac{d^2y(t)}{dt^2}\right\} = (j\Omega)^2 Y(\Omega)$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω με την ιδιότητα της συνέλιξης στο χρόνο δηλ. $F\{x(t) * y(t)\} = F\{x(t)\} \cdot F\{y(t)\} = X(\Omega) \cdot Y(\Omega)$, έχουμε:

$$F\left\{\frac{d^2}{dt^2}[x(t) * y(t)]\right\} = (j\Omega)^2 F\{x(t) * y(t)\} = (j\Omega)^2 X(\Omega) \cdot Y(\Omega)$$

Η τελευταία σχέση μπορεί να γραφεί ως:

$$(j\Omega)^2 X(\Omega) \cdot Y(\Omega) \overset{F}{\longleftrightarrow} \frac{d^2}{dt^2}x(t) * y(t)$$

είτε ως

$$\underbrace{j\Omega \cdot X(\Omega)} \cdot \underbrace{j\Omega Y(\Omega)} \overset{F}{\longleftrightarrow} \frac{dx(t)}{dt} * \frac{dy(t)}{dt}$$

είτε ως

$$X(\Omega) \cdot (j\Omega)^2 Y(\Omega) \overset{F}{\longleftrightarrow} x(t) * \frac{d^2}{dt^2}y(t)$$

ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ:

$$\frac{d^k}{dt^k}[x(t) * y(t)] = \frac{d^k}{dt^k}x(t) * y(t) = x(t) * \frac{d^k}{dt^k}y(t) = \frac{d^n x(t)}{dt^n} * \frac{d^m y(t)}{dt^m}$$, όπου $n+m=k$

ΑΣΚΗΣΗ ΝΔΟ $x(t-\tau) * y(t-\tau) = x(t-2\tau) * y(t) = x(t) * y(t-2\tau)$

ΛΥΣΗ Έστω $F\{x(t)\} = X(\Omega)$ και $F\{y(t)\} = Y(\Omega)$

Με βάση τις ιδιότητες της συνέλιξης στο χρόνο και της ολίσθησης στο χρόνο, έχουμε:

$$
\begin{aligned}
F\{x(t-\tau) * y(t-\tau)\} &= F\{x(t-\tau)\} \cdot F\{y(t-\tau)\} = \\
&= e^{-j\Omega\tau} X(\Omega) \cdot e^{-j\Omega\tau} Y(\Omega) = \\
&= e^{-j\Omega 2\tau} X(\Omega) \cdot Y(\Omega) \qquad (1) \\
\text{ή} \quad &= X(\Omega) \cdot e^{-j\Omega 2\tau} Y(\Omega) \qquad (2)
\end{aligned}
$$

Από την (1) έχουμε:

$$
\underbrace{e^{-j\Omega 2\tau} X(\Omega)}_{F\{x(t-2\tau)\}} \cdot \underbrace{Y(\Omega)}_{F\{y(t)\}} = F\{x(t-2\tau)\} \cdot F\{y(t)\} = F\{x(t-2\tau) * y(t)\}
$$

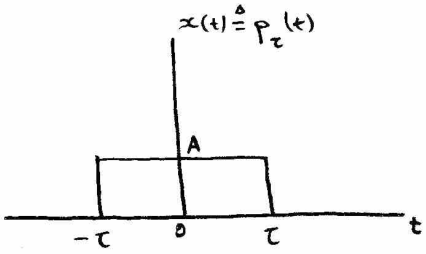
Από την (2) έχουμε:

$$
X(\Omega) \cdot e^{-j\Omega 2\tau} Y(\Omega) = F\{x(t)\} \cdot F\{y(t-2\tau)\} = F\{x(t) * y(t-2\tau)\}
$$

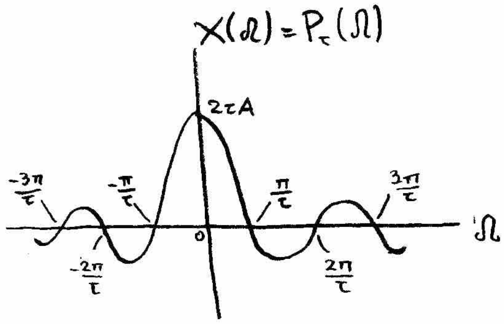
ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ

$$
\begin{aligned}
x(t-\tau_1) * y(t-\tau_2) &= x(t-\tau_1-\tau_2) * y(t) = x(t) * y(t-\tau_1-\tau_2) = \\
&= x(t-\tau_n) * y(t-\tau_m) \quad \text{όπου} \quad \tau_n + \tau_m = \tau_1 + \tau_2
\end{aligned}
$$

ΧΡΟΝΟΣ	ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ

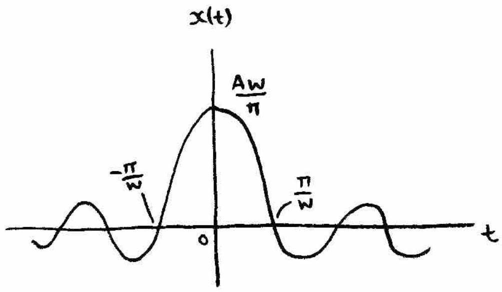


$\xleftrightarrow{F}$

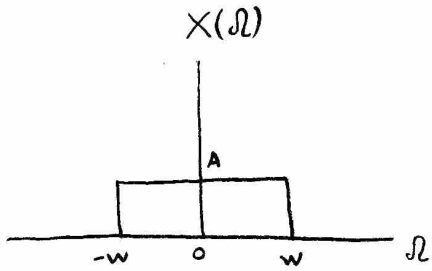


$$p_\tau(t) = \begin{cases} 1 & |t| < \tau \\ 0 & |t| > \tau \end{cases}$$

$$P_\tau(\Omega) = 2\tau A \frac{\sin \Omega\tau}{\Omega\tau} = 2A \frac{\sin \Omega\tau}{\Omega}$$



$\xleftrightarrow{F}$



$$x(t) = \frac{AW}{\pi} \frac{\sin Wt}{\cancel{W}t} = A \frac{\sin Wt}{\pi t}$$

$$X(\Omega) = \begin{cases} A & |\Omega| < W \\ 0 & |\Omega| > W \end{cases}$$

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί η έξοδος του συστήματος, όπου $x(t)=\dfrac{\sin\Omega_i t}{\pi t}$ και $h(t)=\dfrac{\sin\Omega_c t}{\pi t}$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

ΛΥΣΗ Η έξοδος $y(t)$ ισούται με τη συνέλιξη των δύο sinc συναρτήσεων. Ο υπολογισμός στο πεδίο του χρόνου μέσω της συνέλιξης μπορεί να αποφευχθεί καταφεύγοντας στο πεδίο της συχνότητας, όπου έχουμε τον πολλαπλασιασμό των δύο φασμάτων:

$$Y(\Omega) = H(\Omega)\cdot X(\Omega)$$

όπου

$$X(\Omega)=\begin{cases}1 & |\Omega|\le\Omega_i\\ 0 & \text{αλλού}\end{cases}$$

$$H(\Omega)=\begin{cases}1 & |\Omega|\le\Omega_c\\ 0 & \text{αλλού}\end{cases}$$

Άρα

$$Y(\Omega)=\begin{cases}1 & |\Omega|\le\Omega_m\\ 0 & \text{αλλού}\end{cases} \qquad \text{όπου } \Omega_m=\min\{\Omega_i,\Omega_c\}$$

Παρατηρούμε ότι το φάσμα εξόδου θα είναι 1 για $-\Omega_m\le\Omega\le\Omega_m$, όπου Ω_m η μικρότερη από τις συχνότητες Ω_i και Ω_c.

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier μας δίνει τη ζητούμενη έξοδο $y(t)$:

$$y(t)=\begin{cases}\dfrac{\sin\Omega_i t}{\pi t} & \text{εάν } \Omega_i\le\Omega_c\\[2ex] \dfrac{\sin\Omega_c t}{\pi t} & \text{εάν } \Omega_c\le\Omega_i\end{cases}$$

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί η έξοδος ενός ΓΧΑ συστήματος με κρουστική απόκριση

$$h(t) = \frac{\sin[4(t-1)]}{\pi(t-1)}$$

όταν στην είσοδο εφαρμόζεται καθεμιά από τις παρακάτω εισόδους:

α. $x_1(t) = \cos\left(6t + \frac{\pi}{2}\right)$ γ. $x_3(t) = \sin[4(t+1)] / \pi(t+1)$

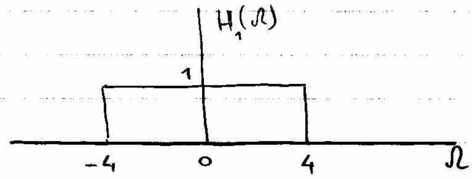
β. $x_2(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \sin(3kt)$ δ. $x_4(t) = (\sin 2t / \pi t)^2$

ΛΥΣΗ Παρατηρούμε ότι $h(t) = h_1(t-1)$, όπου

$$h_1(t) = \frac{\sin 4t}{\pi t}$$

Ο μετασχηματισμός Fourier του $h_1(t)$ ισούται με

$$H_1(\Omega) = \begin{cases} 1, & |\Omega| < 4 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$



Πρόκειται δηλαδή για την απόκριση συχνότητας ενός ιδανικού βαθυπερατού φίλτρου του οποίου η ζώνη διέλευσης (passband) εκτείνεται από $(-4, 4)$.

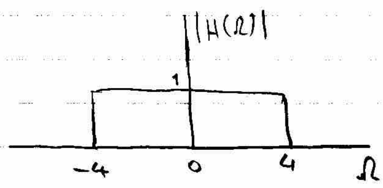
Με βάση την ιδιότητα της ολίσθησης στον χρόνο, υπολογίζεται εύκολα η απόκριση συχνότητας $H(\Omega)$ του συστήματος:

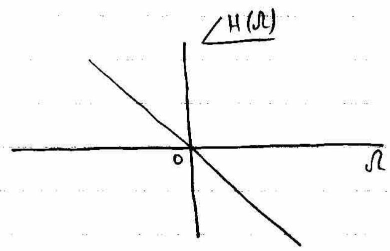
$$h(t) = h_1(t-1) \xleftrightarrow{F} H(\Omega) = e^{-j\Omega} H_1(\Omega)$$

δηλαδή

$$H(\Omega) = \begin{cases} e^{-j\Omega}, & |\Omega| < 4 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Γίνεται φανερό ότι το σύστημα που μας δίνεται θα έχει απόκριση συχνότητας όπως στο σχήμα. Με άλλα λόγια, το μέτρο θα είναι ίδιο με εκείνο του $H_1(\Omega)$, αλλά η φάση θα μεταβάλλεται γραμμικά με κλίση -1 (γωνία $-\pi/4$).





α. Είσοδος $x_1(t) = \cos\left(6t + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left[6\left(t + \frac{\pi}{12}\right)\right]$

Το φάσμα του σήματος $x(t) = \cos 6t$ είναι $X(\Omega)$:

$$x(t) = \cos 6t \xleftrightarrow{F} X(\Omega) = \pi\left[\delta(\Omega - 6) + \delta(\Omega + 6)\right]$$

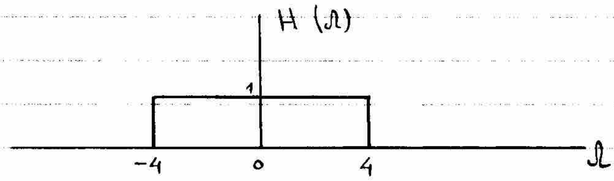
Με βάση την ιδιότητα της ολίσθησης στον χρόνο, το φάσμα του σήματος $x_1(t) = x\left(t + \frac{\pi}{12}\right)$ θα είναι:

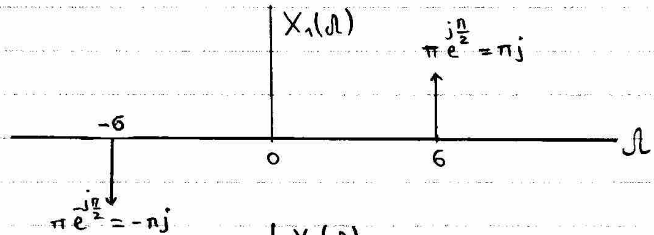
$$X_1(\Omega) = e^{j\Omega\frac{\pi}{12}} X(\Omega) = e^{j\Omega\frac{\pi}{12}} \pi\left[\delta(\Omega-6) + \delta(\Omega+6)\right] \quad \text{(βλ. σημείωση)}$$

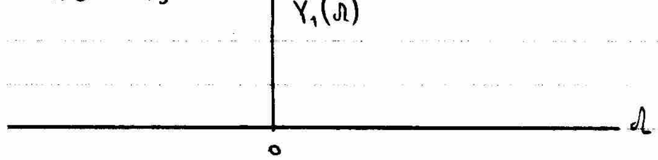
Η έξοδος $Y_1(\Omega)$ ισούται με το γινόμενο των φασμάτων $H(\Omega)$ και $X_1(\Omega)$, δηλαδή

$$Y_1(\Omega) = H(\Omega) \cdot X_1(\Omega) = 0$$

οπότε και $y_1(t) = 0$.







Σημείωση: Η σχέση $X_1(\Omega)$ γράφεται:

$$X_1(\Omega) = \pi e^{j\Omega\frac{\pi}{12}} \delta(\Omega-6) + \pi e^{j\Omega\frac{\pi}{12}} \delta(\Omega+6) = \left\langle \text{λόγω της } f(\Omega)\delta(\Omega-\Omega_0) = f(\Omega_0)\delta(\Omega-\Omega_0) \right\rangle$$

$$= \pi e^{j6\frac{\pi}{12}} \delta(\Omega-6) + \pi e^{j(-6)\frac{\pi}{12}} \delta(\Omega+6) =$$

$$= \pi \underbrace{e^{j\frac{\pi}{2}}}_{j} \delta(\Omega-6) + \pi \underbrace{e^{-j\frac{\pi}{2}}}_{-j} \delta(\Omega+6) =$$

$$= \pi j\, \delta(\Omega-6) + (-\pi j)\, \delta(\Omega+6)$$

β. Είσοδος $x_2(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \sin(3kt) =$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^0 \sin(3\cdot 0\cdot t) + \left(\frac{1}{2}\right)^1 \sin(3\cdot 1\cdot t) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin(3\cdot 2\cdot t) +$$

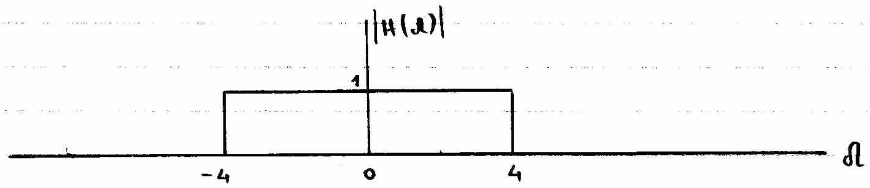
$$+\left(\frac{1}{2}\right)^3 \sin(3\cdot 3\cdot t) + \left(\frac{1}{2}\right)^4 \sin(3\cdot 4\cdot t) + \dots$$

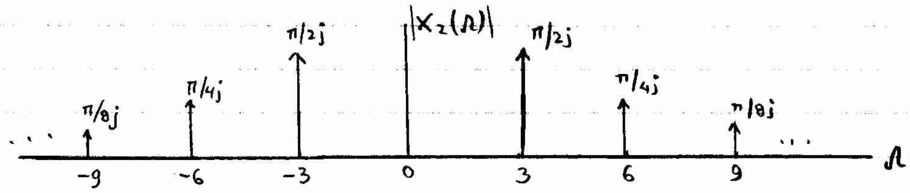
Λαμβάνοντας τον ΜF και των δύο μελών, δεδομένου ότι

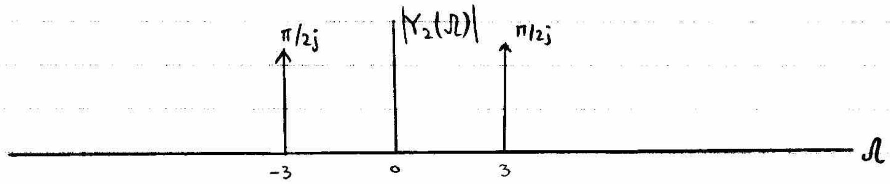
$$\sin(3kt) \xleftrightarrow{F} \frac{\pi}{j}\left[\delta(\Omega-3k) - \delta(\Omega+3k)\right]$$

έχουμε:

$$X_2(\Omega) = \frac{\pi}{j} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^k \left[\delta(\Omega-3k) - \delta(\Omega+3k)\right]\right]$$







Άρα $Y_2(\Omega) = H(\Omega)\cdot X_2(\Omega) = e^{-j\Omega} \frac{\pi}{j} \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left[\delta(\Omega-3) - \delta(\Omega+3)\right]$

αφού μόνον αυτή η συχνότητα $(\Omega = \pm 3)$ αφήνεται να περάσει από το ιδανικό φίλτρο, ενώ όλες οι υπόλοιπες μηδενίζονται.

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier του $Y_2(\Omega)$ μας δίνει το σήμα εξόδου

$$y_2(t) = \frac{1}{2} \sin(3t-3)$$

Σημείωση: Παρατηρείστε ότι: $\sin(3t) \xleftrightarrow{F} \frac{\pi}{j}\left[\delta(\Omega-3) - \delta(\Omega+3)\right]$

$$\sin[3(t-1)] \xleftrightarrow{F} e^{-j\Omega} \frac{\pi}{j}\left[\delta(\Omega-3) - \delta(\Omega+3)\right]$$

γ. Είσοδος $x_3(t)=\frac{\sin[4(t+1)]}{\pi(t+1)}$

Παρατηρούμε ότι $x_3(t)=h_1(t+1)$ και συνεπώς

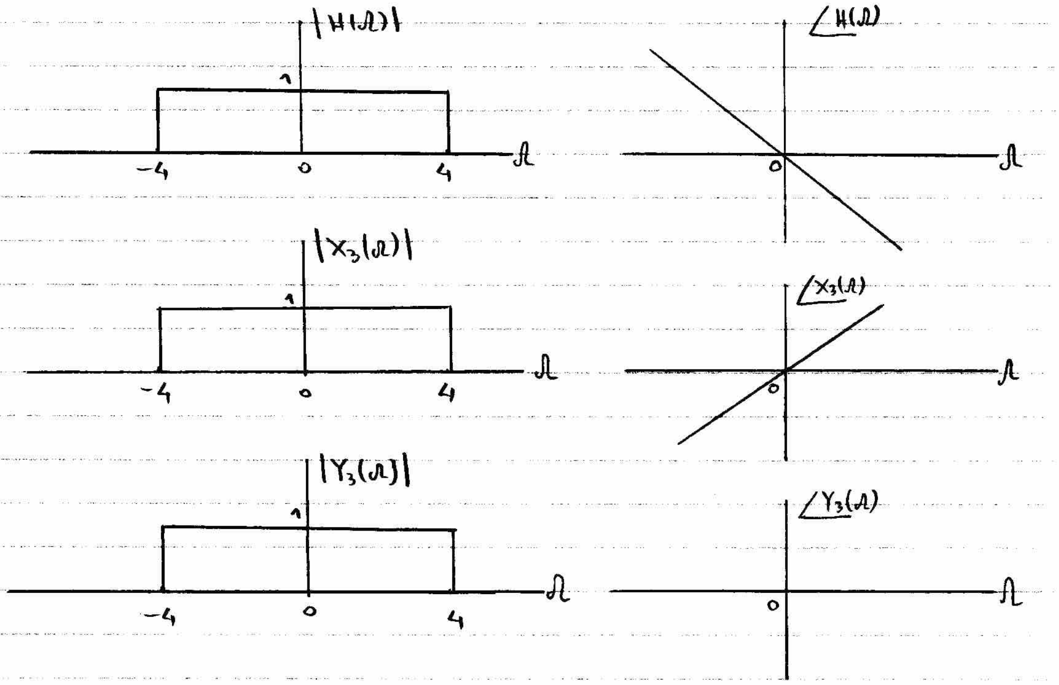
$$X_3(\Omega)=e^{j\Omega}H_1(\Omega)=\begin{cases}e^{j\Omega}, & |\Omega|<4\\ 0, & \text{αλλού}\end{cases}$$

Η έξοδος $Y_3(\Omega)=H(\Omega)\cdot X_3(\Omega)=$

$$=\begin{cases}e^{-j\Omega}, & |\Omega|<4\\ 0, & \text{αλλού}\end{cases}\cdot\begin{cases}e^{j\Omega}, & |\Omega|<4\\ 0, & \text{αλλού}\end{cases}=\begin{cases}1, & |\Omega|<4\\ 0, & \text{αλλού}\end{cases}$$

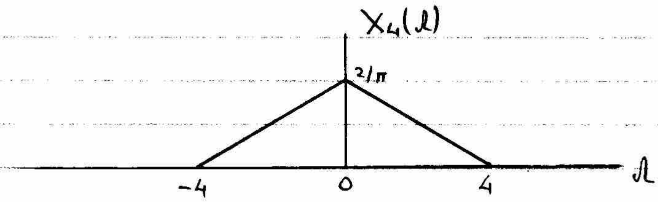
Το φάσμα εξόδου δεν είναι άλλο από το $H_1(\Omega)$.

Η έξοδος $y_3(t)=h_1(t)=\frac{\sin 4t}{\pi t}$



δ. Είσοδος $x_4(t) = \left(\frac{\sin 2t}{\pi t}\right)^2$

Ο ΜF του σήματος $x_4(t)$ είναι το τριγωνικό φάσμα του σχήματος.



$$X_4(\Omega) = \frac{2}{\pi}\begin{cases} 1 - \frac{|\Omega|}{4}, & |\Omega| < 4 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Ο πολλαπλασιασμός του φάσματος αυτού με το ιδανικό φίλτρο από $(-4,4)$, μας δίνει το φάσμα εξόδου $Y_4(\Omega)$:

$$Y_4(\Omega) = H(\Omega)\cdot X_4(\Omega) = \begin{cases} e^{-j\Omega} & |\Omega|<4 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \cdot \frac{2}{\pi}\begin{cases} 1 - \frac{|\Omega|}{4}, & |\Omega| < 4 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \Rightarrow$$

$$Y_4(\Omega) = \frac{2}{\pi}\begin{cases} e^{-j\Omega}\left(1 - \frac{|\Omega|}{4}\right), & |\Omega|<4 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Από την ιδιότητα της ολίσθησης στον χρόνο γίνεται φανερό ότι το $Y_4(\Omega)$ είναι το φάσμα του σήματος $x_4(t-1)$, δηλαδή

$$y_4(t) = x_4(t-1) = \left[\frac{\sin(2(t-1))}{\pi(t-1)}\right]^2$$

Σημείωση: Στο τυπολόγιο δίνεται το ζεύγος μετασχηματισμών:

$$x(t) = \left(\frac{W}{\pi}\right)\left(\frac{\sin Wt}{Wt}\right)^2 \xleftrightarrow{F} X(\Omega) = \begin{cases} 1 - \frac{|\Omega|}{2W}, & |\Omega| < 2W \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Για $W=2$ έχουμε:

$$x(t) = \left(\frac{2}{\pi}\right)\left(\frac{\sin 2t}{2t}\right)^2 = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{\pi}\left(\frac{\sin 2t}{2t}\right)^2 = \frac{2\cdot\pi}{4}\left(\frac{\sin 2t}{\pi t}\right)^2 = \frac{\pi}{2}\cdot x_4(t)$$

Άρα

$$X(\Omega) = \frac{\pi}{2}X_4(\Omega) \Rightarrow X_4(\Omega) = \frac{2}{\pi}X(\Omega) = \frac{2}{\pi}\begin{cases} 1 - \frac{|\Omega|}{4}, & |\Omega|<4 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}^2(t)\,dt$

ΛΥΣΗ Υπενθυμίζεται ότι $\operatorname{sinc}(t) = \dfrac{\sin(\pi t)}{(\pi t)}$ (1)

Επίσης έχουμε αποδείξει (βλ. παράδειγμα 3.3) ότι:

$$\frac{W}{2\pi}\operatorname{sinc}\left(\frac{Wt}{2\pi}\right) \overset{F}{\longleftrightarrow} \begin{cases} 1, & |\Omega| < \frac{W}{2} \\ 0, & |\Omega| > \frac{W}{2} \end{cases} \qquad (2)$$

Τέλος υπενθυμίζεται το θεώρημα του Parseval:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(\Omega)|^2\,d\Omega \qquad (3)$$

Η (2) για $\frac{W}{2\pi} = 1 \Rightarrow W = 2\pi$ γίνεται:

$$\operatorname{sinc}(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} \begin{cases} 1, & |\Omega| < \pi \\ 0, & |\Omega| > \pi \end{cases} \qquad (4)$$

Άρα η σχέση που θέλουμε να υπολογίσουμε, με βάση τις (3),(4) γίνεται:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}^2(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left|F\{\operatorname{sinc}(t)\}\right|^2 d\Omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1^2\,d\Omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\,\Omega\Big|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\pi - (-\pi)\right) = \frac{1}{2\pi}\,2\pi = 1$$

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί η έξοδος του ΓΧΑ συστήματος με κρουστική απόκριση

$$h(t) = e^{-\alpha t}u(t) \quad , \ \alpha > 0$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

για είσοδο

$$x(t) = e^{-bt}u(t) \ , \ b > 0$$

Λυση

$$y(t) = F^{-1}\{Y(\Omega)\} = F^{-1}\{X(\Omega)\cdot H(\Omega)\}$$

$$H(\Omega) = \frac{1}{\alpha + j\Omega} \quad , \quad X(\Omega) = \frac{1}{b + j\Omega}$$

Άρα $$Y(\Omega) = \frac{1}{(\alpha + j\Omega)(b + j\Omega)}$$

Αναλύουμε την $Y(\Omega)$ σε μερικά κλάσματα:

$$Y(\Omega) = \frac{A}{\alpha + j\Omega} + \frac{B}{b + j\Omega}$$

$$A = (\alpha + j\Omega)\, Y(\Omega)\Big|_{j\Omega = -\alpha} = \frac{1}{b + j\Omega}\Big|_{j\Omega = -\alpha} = \frac{1}{b - \alpha}$$

$$B = (b + j\Omega)\, Y(\Omega)\Big|_{j\Omega = -b} = \frac{1}{\alpha + j\Omega}\Big|_{j\Omega = -b} = \frac{1}{\alpha - b}$$

Συνεπώς $$Y(\Omega) = \frac{1}{b - \alpha}\left[\frac{1}{\alpha + j\Omega} - \frac{1}{b + j\Omega}\right]$$

και $$y(t) = F^{-1}\{Y(\Omega)\} = \frac{1}{b - \alpha}\left[e^{-\alpha t}u(t) - e^{-bt}u(t)\right] =$$

$$= \frac{e^{-\alpha t} - e^{-bt}}{b - \alpha}\, u(t)$$

Προσοχή: Για $\alpha = b$ η ανάπτυξη σε μερικά κλάσματα δεν είναι σωστή! Στην περίπτωση αυτή όμως η $Y(\Omega)$ γίνεται:

$$Y(\Omega) = \frac{1}{(\alpha + j\Omega)^2}$$

Όμως $$\frac{1}{(\alpha+j\Omega)^2} = j\,\frac{d}{d\Omega}\left[\frac{1}{\alpha+j\Omega}\right]$$

Με χρήση της ιδιότητας της διαφόρισης (παραγώγισης) στη συχνότητα

$$-j\,t\,x(t) \xleftrightarrow{F} \frac{d}{d\Omega}X(\Omega)$$

και δεδομένου ότι

$$x(t) = e^{-\alpha t}u(t) \xleftrightarrow{F} X(\Omega) = \frac{1}{\alpha+j\Omega}$$

βρίσκουμε ότι

$$t\,e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{F} j\,\frac{d}{d\Omega}\left[\frac{1}{\alpha+j\Omega}\right] = \frac{1}{(\alpha+j\Omega)^2}$$

Τελικά

$$y(t) = t\,e^{-at}u(t).$$

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x(t) = t \cdot g(t)$, όπου $g(t)$ σήμα του οποίου υπάρχει ο μετασχ. Fourier και ισούται με $G(\Omega)$.

ΛΥΣΗ Έχουμε ότι $g(t) \xleftrightarrow{F} G(\Omega)$ ή διαφορετικά εκφρασμένο $F\{g(t)\} = G(\Omega)$.

Λαμβάνοντας την παράγωγο του $G(\Omega)$ έχουμε:

$$\frac{d}{d\Omega} G(\Omega) = \frac{d}{d\Omega} F\{g(t)\} = \frac{d}{d\Omega} \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, e^{-j\Omega t}\, dt =$$

< εναλλάσσοντας την σειρά της ολοκλήρωσης με την παραγώγιση >

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{d\Omega} \left(g(t)\, e^{-j\Omega t} \right) dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, (-jt)\, e^{-j\Omega t}\, dt =$$

$$= \underbrace{-j \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{t \cdot g(t)}_{x(t)}\, e^{-j\Omega t}\, dt}_{F\{t \cdot g(t)\}} =$$

$$= -j\, F\{t \cdot g(t)\}$$

Άρα καταλήξαμε ότι $\dfrac{dG(\Omega)}{d\Omega} = -j\, F\{t \cdot g(t)\} \Rightarrow$

$$F\{t \cdot g(t)\} = \frac{1}{-j} \frac{dG(\Omega)}{d\Omega} = j \frac{dG(\Omega)}{d\Omega}$$

ή

$$t \cdot g(t) \xleftrightarrow{F} j \frac{dG(\Omega)}{d\Omega}$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ Το παραπάνω ζεύγος εκφράζεται στη συχνότητα F ως

$$t\, g(t) \xleftrightarrow{F} \frac{j}{2\pi} \frac{dG(F)}{dF}$$

δεδομένου ότι $\Omega = 2\pi F$

ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ Η προηγούμενη διαδικασία μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό του μετασχηματισμού Fourier οποιουδήποτε σήματος $t^n g(t)$, υπό την προϋπόθεση ότι n είναι ένας θετικός ακέραιος και ο μετασχ. Fourier της $g(t)$ υπάρχει και ισούται με $G(\Omega)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$$\frac{d^n}{d\Omega^n}G(\Omega) = \frac{d^n}{d\Omega^n} F\{g(t)\} = \left(\frac{d}{d\Omega}\right)^n \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, e^{-j\Omega t}\, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^n}{d\Omega^n}\left(g(t)\, e^{-j\Omega t}\right) dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, (-jt)^n\, e^{-j\Omega t}\, dt =$$

$$= (-j)^n \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} t^n g(t)\, e^{-j\Omega t}\, dt}_{F\{t^n g(t)\}} = (-j)^n\, F\{t^n g(t)\}$$

Τελικά, ο ζητούμενος μετασχηματισμός Fourier ισούται με

$$F\{t^n g(t)\} = \frac{1}{(-j)^n}\, \frac{d^n G(\Omega)}{d\Omega^n} = j^n\, \frac{d^n G(\Omega)}{d\Omega^n}$$

αφού $\dfrac{1}{(-j)^n} = \dfrac{1}{(-j)^n} \cdot \dfrac{(-j)^n}{(-j)^n} = \dfrac{(-j)^n}{(-j)^{2n}} = \dfrac{(-j)^n}{\left[(-j)^2\right]^n} = \dfrac{(-j)^n}{(-1)^n} = (j)^n = j^n$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ Το παραπάνω ζεύγος εκφράζεται στη συχνότητα F ως

$$t^n g(t) \xleftrightarrow{F} \left(\frac{j}{2\pi}\right)^n \frac{d^n G(F)}{dF^n}$$

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί το ανάπτυγμα σε εκθετική σειρά Fourier του σήματος $g(t)$.

ΛΥΣΗ

Το σήμα $g(t)$ είναι περιοδικό με περίοδο $T_0=2 \rightarrow \Omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \pi$ και ισούται με

$$g(t) = \begin{cases} 2 & \text{για } 0 \le t < 1 \\ 0 & \text{για } 1 \le t < 2 \end{cases}$$

Ο ορισμός αυτού ως ανάπτυγμα σε εκθετική σειρά Fourier είναι:

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k e^{jk\Omega_0 t} = g_0 + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} g_k e^{jk\pi t}$$

όπου:

$$g_0 = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} g(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^2 g(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^1 2\,dt = \int_0^1 dt = t\Big|_0^1 = 1$$

$$g_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} g(t)\, e^{-jk\Omega_0 t}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^1 2\, e^{-jk\pi t}\,dt = \frac{1}{-jk\pi} e^{-jk\pi t}\Big|_0^1 = \frac{1}{-jk\pi}\big(\underset{\Updownarrow \atop (-1)^k}{e^{-jk\pi}} - 1\big) =$$

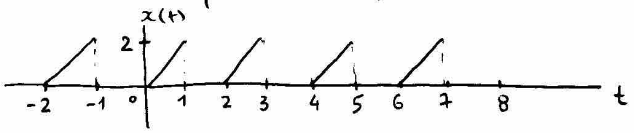
$$= \frac{1}{-jk\pi} e^{-jk\pi/2}\left(e^{-jk\pi/2} - e^{+jk\pi/2}\right) =$$

$$= \frac{1}{jk\pi} e^{-jk\pi/2}\left(e^{jk\pi/2} - e^{-jk\pi/2}\right) = \frac{1}{jk\pi} e^{-jk\pi/2} \cdot 2j \sin\frac{k\pi}{2} = e^{-jk\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\sin\frac{k\pi}{2}}{\frac{k\pi}{2}} =$$

$$= e^{-jk\frac{\pi}{2}} \operatorname{sinc}\left(\frac{k}{2}\right)$$

Το αποτέλεσμα αυτό ήταν αναμενόμενο, αφού πρόκειται για τη γνωστή sinc της άρτιας (συμμετρικής ως προς άξονα) τετραγωνικής παλμοσειράς, πολλαπλασιασμένης επί $e^{-jk\Omega_0 t_0}$, όπου $t_0 = \frac{1}{2}$ η καθυστέρηση στο πεδίο του χρόνου.

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστούν τα αναπτύγματα των σημάτων $x(t)$ και $y(t)$ σε εκθετικές σειρές Fourier, όπου $h(t)=\delta(t-1)$



ΛΥΣΗ

Το σήμα $x(t)$ είναι περιοδικό με περίοδο $T_0=2$, συνεπώς $\Omega_0=\frac{2\pi}{T_0}=\pi$ και ορίζεται ως:

$$x(t)=\begin{cases} 2t & \text{για } 0\le t<1 \\ 0 & \text{για } 1\le t<2 \end{cases}$$

Οι συντελεστές της εκθετικής σειράς Fourier υπολογίζονται ως:

$$\alpha_0=\frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\,dt=\frac{1}{2}\int_0^2 x(t)\,dt=\frac{1}{2}\left[\int_0^1 2t\,dt+\int_1^2 0\,dt\right]=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{t^2}{2}\Big|_0^1=\frac{t^2}{2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}$$

$$\alpha_k=\frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\,e^{-jk\Omega_0 t}\,dt=\frac{1}{2}\int_0^2 x(t)\,e^{-jk\pi t}\,dt=\frac{1}{2}\int_0^1 2t\,e^{-jk\pi t}\,dt=\langle\text{κατά παράγοντες}\rangle=$$

$$=\frac{1}{-jk\pi}\int_0^1 t\,d\left(e^{-jk\pi t}\right)=\frac{1}{-jk\pi}\left[t\,e^{-jk\pi t}\Big|_0^1-\int_0^1 e^{-jk\pi t}\,dt\right]=$$

$$=\frac{1}{-jk\pi}\left[\left(1\cdot e^{-jk\pi}-0\,e^{0}\right)-\frac{1}{-jk\pi}\,e^{-jk\pi t}\Big|_0^1\right]=\frac{1}{-jk\pi}\,e^{-jk\pi}+\frac{1}{(k\pi)^2}\left(e^{-jk\pi}-1\right)=$$

$$=\frac{(-1)^k}{-jk\pi}+\frac{1}{(k\pi)^2}\left[(-1)^k-1\right]$$ δεδομένου ότι $e^{-jk\pi}=\cos(k\pi)-j\sin(k\pi)=\cos(k\pi)=(-1)^k$

Άρα

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\alpha_k e^{jk\Omega_0 t}=\alpha_0+\sum_{\substack{k=-\infty\\k\neq 0}}^{\infty}\alpha_k e^{jk\pi t}=\frac{1}{2}+\sum_{\substack{k=-\infty\\k\neq 0}}^{\infty}\left[\frac{(-1)^k}{-jk\pi}+\frac{1}{(k\pi)^2}\left[(-1)^k-1\right]\right]e^{jk\pi t}$$

Για το σήμα $y(t)$ ισχύει ότι: $y(t)=x(t)*h(t)=x(t)*\delta(t-1)=x(t-1)$

Συνεπώς στη συχνότητα θα έχουμε αλλαγή στη φάση, δηλαδή $b_k=e^{-jk\Omega_0 t_0}\alpha_k=\langle\text{όπου } t_0=1\rangle$

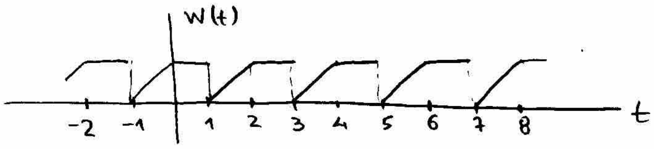
ή $$b_k=e^{-jk\pi}\alpha_k=(-1)^k\alpha_k=(-1)^k\left[\frac{(-1)^k}{-jk\pi}+\frac{1}{(k\pi)^2}\left[(-1)^k-1\right]\right]=$$

$$=\frac{1}{-jk\pi}+\frac{1}{(k\pi)^2}\left[1-(-1)^k\right]$$

Τελικά

$$y(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}b_k e^{jk\Omega_0 t}=b_0+\sum_{\substack{k=-\infty\\k\neq 0}}^{\infty}b_k e^{jk\pi t}=\frac{1}{2}+\sum_{\substack{k=-\infty\\k\neq 0}}^{\infty}b_k e^{jk\pi t}$$ όπου $b_0=\alpha_0$ αφού για $k=0$ η φάση δεν αλλάζει

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί το ανάπτυγμα σε εκθετική σειρά Fourier του σήματος $w(t)$.



ΛΥΣΗ

Με βάση τις δύο προηγούμενες ασκήσεις το σήμα $w(t)$ γράφεται ως

$$w(t) = y(t) + g(t)$$

και οι συντελεστές του φάσματος αυτού W_k ως

$$W_k = b_k + g_k$$

όπου για $k=0 \rightsquigarrow W_0 = b_0 + g_0 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$

για $k \neq 0 \rightsquigarrow$

$$W_k = \underbrace{\left[\frac{1}{-jk\pi} + \frac{1}{(k\pi)^2}\left[1-(-1)^k\right]\right]}_{b_k} + \underbrace{\left[\frac{1}{-jk\pi}\left[(-1)^k - 1\right]\right]}_{g_k} =$$

$$= \frac{1}{-jk\pi} + \frac{1}{(k\pi)^2}\left[1-(-1)^k\right] + \frac{1}{-jk\pi}(-1)^k \cancel{- \frac{1}{-jk\pi}} =$$

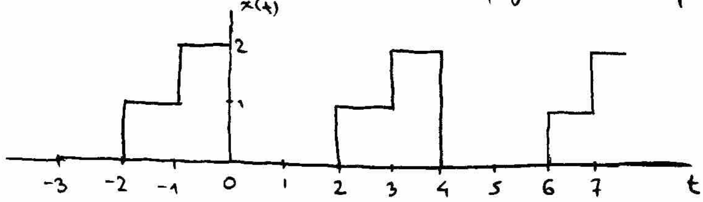
$$= \frac{1}{(k\pi)^2}\left[1-(-1)^k\right] + j\frac{1}{k\pi}(-1)^k$$

Τελικά το σήμα $w(t)$ γράφεται ως:

$$w(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} W_k e^{jk\Omega_0 t} = W_0 + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} W_k e^{jk\pi t}$$

όπου $W_0 = \frac{3}{2}$ και W_k η έκφραση που υπολογίσαμε.

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστούν οι συντελεστές της μιγαδικής σειράς Fourier του σήματος.



ΛΥΣΗ

$$T=4 \leadsto \Omega_0=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$$

$$\alpha_0=\frac{1}{T}\int_T x(t)\,dt=\frac{1}{4}\int_2^3 1\,dt+\frac{1}{4}\int_3^4 2\,dt=\frac{1}{4}\,t\Big|_2^3+\frac{2}{4}\,t\Big|_3^4=\frac{1}{4}(3-2)+\frac{2}{4}(4-3)=\frac{3}{4}$$

$$\alpha_k=\frac{1}{T}\int_T x(t)\,e^{-jk\Omega_0 t}\,dt=\frac{1}{4}\left[\int_0^2 0\cdot e^{-jk\Omega_0 t}\,dt+\int_2^3 1\cdot e^{-jk\Omega_0 t}\,dt+\int_3^4 2\cdot e^{-jk\Omega_0 t}\,dt\right]=$$

$$=\frac{1}{4}\left[\int_2^3 e^{-jk\frac{\pi}{2}t}\,dt+2\int_3^4 e^{-jk\frac{\pi}{2}t}\,dt\right]=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\left[\frac{1}{-jk\frac{\pi}{2}}\,e^{-jk\frac{\pi}{2}t}\Big|_2^3+\frac{2}{-jk\frac{\pi}{2}}\,e^{-jk\frac{\pi}{2}t}\Big|_3^4\right]=$$

$$=\frac{-1}{jk2\pi}\left[\left(e^{-jk\frac{\pi}{2}3}-e^{-jk\frac{\pi}{2}\cdot 2}\right)+2\left(e^{-jk\frac{\pi}{2}4}-e^{-jk\frac{\pi}{2}3}\right)\right]=$$

$$=\frac{j}{2k\pi}\left[e^{-jk\frac{3\pi}{2}}-e^{-jk\pi}+2e^{-jk2\pi}-2e^{-jk\frac{3\pi}{2}}\right]=$$

$$=\frac{j}{2k\pi}\left[-e^{-jk\frac{3\pi}{2}}-e^{-jk\pi}+2e^{-jk2\pi}\right]$$

Αλλά

$$e^{-j2k\pi}=\cos(2k\pi)-j\sin(2k\pi)=1-j0=1$$

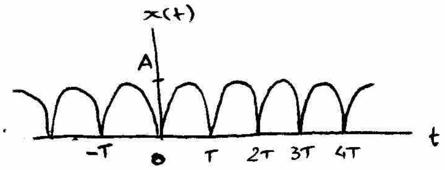
$$e^{-jk\pi}=\cos(k\pi)-j\sin(k\pi)=\left.\begin{cases}1 & \text{για } k=\text{άρτιο}\\ -1 & \text{για } k=\text{περιττό}\end{cases}\right\}=(-1)^k$$

Άρα

$$\alpha_k=\frac{j}{2k\pi}\left[2-(-1)^k-e^{-jk\frac{3\pi}{2}}\right]$$

ΑΣΚΗΣΗ Για το σύστημα του σχήματος $x(t) \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow y(t)$
δίνεται ότι $H(\Omega) = 10 / (5+j\Omega)$ και η είσοδος $x(t)$ είναι το πλήρως ανορθωμένο σήμα πλάτους $A=20$ και $T=3$. Να υπολογιστεί η έξοδος $y(t)$ από τη συνεχή (DC) συνιστώσα και τις πρώτες τρεις αρμονικές.

ΛΥΣΗ



Για το σήμα $x(t)$ έχουμε σε προηγούμενη άσκηση υπολογίσει τους συντελεστές της μιγαδικής σειράς Fourier:

$$\alpha_{x0} = \frac{2A}{\pi} = \frac{40}{\pi} = 12.73 \qquad \alpha_{xk} = \frac{2A}{(1-4k^2)\pi}$$

$$\alpha_{x1} = \frac{40}{(1-4)\pi} = 4.244 \angle 180^\circ$$

$$\alpha_{x2} = \frac{40}{(1-4\cdot 2^2)\pi} = 0.849 \angle 180^\circ$$

$$\alpha_{x3} = \frac{40}{(1-4\cdot 3^2)\pi} = 0.364 \angle 180^\circ$$

$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{3}$$

$$H(\Omega) = \frac{10}{5+j\Omega}$$

$$H(0) = \frac{10}{5+j0} = 2$$

$$H(\Omega_0) = \frac{10}{5+j\frac{2\pi}{3}} = 1.84 \angle -22.7^\circ$$

$$H(2\Omega_0) = \frac{10}{5+j\frac{4\pi}{3}} = 1.533 \angle -40^\circ$$

$$H(3\Omega_0) = \frac{10}{5+j\frac{6\pi}{3}} = \frac{10}{5+j2\pi} = 1.245 \angle -51.5^\circ$$

Οι συντελεστές της σειράς Fourier του σήματος εξόδου θα ισούνται με το γινόμενο των αντίστοιχων συντελεστών της εισόδου και της απόκρισης συχνότητας του συστήματος, δηλαδή $\alpha_{yk} = H(k\Omega_0) \cdot \alpha_{xk}$

$$\alpha_{y0} = (12.73)(2) = 25.46$$

$$\alpha_{y1} = (1.84 \angle -22.7^\circ)(4.244 \angle 180^\circ) = 7.81 \angle 157.3^\circ$$

$$\alpha_{y2} = (1.533 \angle -40^\circ)(0.849 \angle 180^\circ) = 1.30 \angle 140^\circ$$

$$\alpha_{y3} = (1.245 \angle -51.5^\circ)(0.364 \angle 180^\circ) = 0.453 \angle 128.5^\circ$$

Τελικά, το σήμα εξόδου θα είναι:

$$y(t) = 25.46 + 15.62 \cos\left(\frac{2\pi}{3}t + 157.3^\circ\right) + 2.60 \cos\left(\frac{4\pi}{3} + 140^\circ\right) +$$

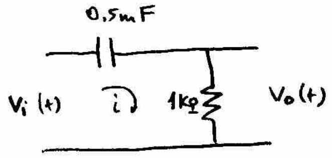
$$+ 0.906 \cos\left(\frac{6\pi}{3}t + 128.5^\circ\right) + \dots$$

ΑΣΚΗΣΗ Για το κύκλωμα του σχήματος:

α. Να υπολογίσετε και να σχεδιάσετε την απόκριση συχνότητας. Για τι είδους φίλτρο πρόκειται;

β. Να βρείτε την κρουστική απόκριση του συστήματος.

γ. Ποια η έξοδος του συστήματος για είσοδο $v_i(t)=\frac{1}{2}e^{-t}u(t)$;



ΛΥΣΗ

α.

$$\left.\begin{aligned} V_i(t) &= V_c(t) + V_o(t) \\ i(t) &= C\frac{dV_c(t)}{dt} \\ V_o(t) &= R\,i(t) \end{aligned}\right\} \quad V_i(t) = V_c(t) + RC\frac{dV_c(t)}{dt} \Rightarrow \langle MF \rangle \Rightarrow$$

$$V_i(\Omega) = V_c(\Omega) + RC\,j\Omega\, V_c(\Omega) \Rightarrow$$

$$V_i(\Omega) = (1 + jRC\Omega)V_c(\Omega) \Rightarrow \qquad (1')$$

$$\frac{V_c(\Omega)}{V_i(\Omega)} = \frac{1}{1+jRC\Omega} \qquad (1)$$

Αλλά

$$V_i(t) = V_c(t) + V_o(t) \xrightarrow{MF} V_i(\Omega) = V_c(\Omega) + V_o(\Omega) \Rightarrow$$

$$V_c(\Omega) = V_i(\Omega) - V_o(\Omega) \qquad (2)$$

οπότε η σχέση (1) γίνεται:

$$\frac{V_i(\Omega) - V_o(\Omega)}{V_i(\Omega)} = \frac{1}{1+jRC\Omega} \Rightarrow$$

$$1 - \frac{V_o(\Omega)}{V_i(\Omega)} = \frac{1}{1+jRC\Omega} \Rightarrow$$

$$\frac{V_o(\Omega)}{V_i(\Omega)} = 1 - \frac{1}{1+jRC\Omega} \Rightarrow$$

$$H(\Omega) = 1 - \frac{1}{1+jRC\Omega} = \frac{jRC\Omega}{1+jRC\Omega} \qquad (3)$$

Σημείωση: Στη σχέση (3) θα μπορούσαμε να καταλήξουμε και ως εξής:

$$V_o(t) = R\,i(t) = RC\frac{dV_c(t)}{dt}$$

$$\xrightarrow{F} V_o(\Omega) = RC\,j\Omega\,V_c(\Omega) \qquad (2')$$

Από την (1') έχουμε:

$$V_i(\Omega) = (1+jRC\Omega)V_c(\Omega) \qquad (3)'$$

Από τις (2'), (3'):

$$H(\Omega) = \frac{V_o(\Omega)}{V_i(\Omega)} = \frac{jRC\Omega}{1+jRC\Omega} \qquad (3)$$

Για $R = 1\,k\Omega$ και $C = 0.5\,mF \rightarrow RC = 1\cdot 10^{3}\cdot \frac{1}{2}\cdot 10^{-3} = \frac{1}{2}$ η σχέση (3) γίνεται:

$$H(\Omega) = 1 - \frac{1}{1 + j\frac{1}{2}\Omega} = \frac{j\Omega}{2 + j\Omega} \qquad (4)$$

Για να βρούμε την απόκριση συχνότητας θα πρέπει να υπολογίσουμε το μέτρο $|H(\Omega)|$ για διαφορετικές συχνότητες.

$$|H(\Omega)| = \left| 1 - \frac{1}{1 + j\frac{1}{2}\Omega} \right| = \left| \frac{\cancel{1} + j\frac{1}{2}\Omega - \cancel{1}}{1 + j\frac{1}{2}\Omega} \right| = \left| \frac{j\Omega}{2 + j\Omega} \right| =$$

$$= \frac{|j\Omega|}{|2 + j\Omega|} = \frac{\sqrt{\Omega^2}}{\sqrt{4 + \Omega^2}} = \sqrt{\frac{\Omega^2}{4 + \Omega^2}} \qquad (5)$$

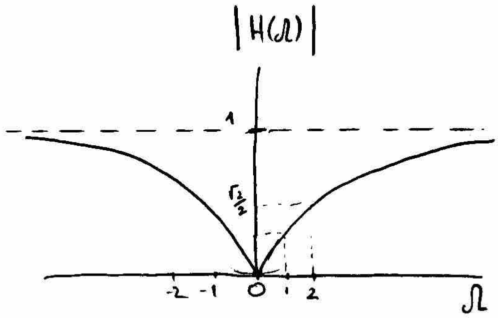
$$|H(\Omega)|_{\Omega=0} = 0$$

$$|H(\Omega)|_{\Omega=1} = \frac{1}{\sqrt{5}} = |H(\Omega)|_{\Omega=-1}$$

$$|H(\Omega)|_{\Omega=2} = \frac{2}{\sqrt{8}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = |H(\Omega)|_{\Omega=-2}$$

$\vdots$

$$|H(\Omega)|_{\Omega\to\infty} = \lim_{\Omega\to\infty} \sqrt{\frac{\Omega^2}{4+\Omega^2}} = \lim_{\Omega\to\infty} \sqrt{\frac{1}{\frac{4}{\Omega^2} + 1}} = \sqrt{\frac{1}{0+1}} = 1$$



Συνεπώς πρόκειται για ένα υψιπερατό (HP - High Pass) φίλτρο.

β. Η κρουστική απόκριση του συστήματος προκύπτει εύκολα από τη σχέση (4), λαμβάνοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier.

$$H(\Omega) = 1 - \frac{1}{1 + j\frac{1}{2}\Omega} = 1 - \frac{2}{2 + j\Omega} = 1 - 2\cdot\frac{1}{2 + j\Omega} \qquad (6)$$

$$\xrightarrow{F^{-1}} h(t) = \delta(t) - 2\cdot e^{-2t}\,u(t)$$

Σημείωση: Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε χρησιμοποιώντας τη δεύτερη από τη σχέση (4) και τις ιδιότητες της παραγώγισης του MF.

$$H(\Omega) = \frac{j\Omega}{2 + j\Omega} = j\Omega\cdot\frac{1}{2 + j\Omega} = j\Omega\, G(\Omega) \xrightarrow{F^{-1}} h(t) = \frac{d\,g(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(e^{-2t}u(t)\right) =$$

$$= \frac{d}{dt}\left(e^{-2t}\right)\cdot u(t) + e^{-2t}\frac{du(t)}{dt} = -2e^{-2t}u(t) + e^{-2t}\delta(t) =$$

$$= -2e^{-2t}u(t) + \delta(t)$$

γ. $v_i(t) = \frac{1}{2} e^{-t} u(t) \xrightarrow{MF} V_i(\Omega) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+j\Omega}$ (7)

Από την (6) έχουμε:

$$H(\Omega) = 1 - 2\frac{1}{2+j\Omega} \Rightarrow \frac{V_o(\Omega)}{V_i(\Omega)} = 1 - 2\frac{1}{2+j\Omega} \Rightarrow$$

$$V_o(\Omega) = \left(1 - 2\frac{1}{2+j\Omega}\right)\left(\frac{1}{2}\frac{1}{1+j\Omega}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{1+j\Omega} - \underbrace{\frac{1}{2+j\Omega} \cdot \frac{1}{1+j\Omega}}_{G(\Omega)} \quad (8)$$

Αναλύουμε την $G(\Omega)$ σε μερικά κλάσματα.

$$G(\Omega) = \frac{1}{(2+j\Omega)(1+j\Omega)} = \frac{A}{2+j\Omega} + \frac{B}{1+j\Omega}$$

$$A = (2+j\Omega)\, G(\Omega)\Big|_{j\Omega=-2} = \frac{1}{1+j\Omega}\Big|_{j\Omega=-2} = \frac{1}{1-2} = -1$$

$$B = (1+j\Omega)\, G(\Omega)\Big|_{j\Omega=-1} = \frac{1}{2+j\Omega}\Big|_{j\Omega=-1} = \frac{1}{2-1} = 1$$

Επομένως $G(\Omega) = \frac{-1}{2+j\Omega} + \frac{1}{1+j\Omega}$ (9)

Με βάση το αποτέλεσμα (9) η σχέση (8) γίνεται:

$$V_o(\Omega) = \frac{1}{2}\frac{1}{1+j\Omega} + \frac{1}{2+j\Omega} - \frac{1}{1+j\Omega} \Rightarrow$$

$$V_o(\Omega) = \frac{1}{2+j\Omega} - \frac{1}{2}\frac{1}{1+j\Omega}$$

F^{-1}

$$v_o(t) = e^{-2t} u(t) - \frac{1}{2} e^{-t} u(t) = \left(e^{-2t} - \frac{1}{2} e^{-t}\right) u(t)$$