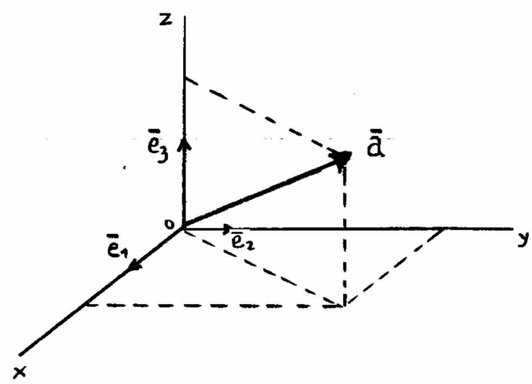
Τριγωνομετρική Σειρά Fourier

Ορθογωνιότητα Διανυσμάτων και Σημάτων



Τριγωνομετρική Σειρά Fourier

$$\alpha_0 = \frac{1}{T}\int_T x(t)\,dt$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_T x(t)\cos(k\Omega_0 t)\,dt$$

$$c_k = \frac{2}{T}\int_T x(t)\sin(k\Omega_0 t)\,dt$$

Ανάλυση

$$x(t) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k\cos(k\Omega_0 t) + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin(k\Omega_0 t)$$

$$t \in [t_0, t_0+T]$$

$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$ η βασική συχνότητα

Σύνθεση

$$\Updownarrow$$

$$A_k = \sqrt{b_k^2 + c_k^2} \qquad \theta_k = -\tan^{-1}\frac{c_k}{b_k}$$

$$x(t) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\Omega_0 t + \theta_k)$$

Ένα πραγματικό περιοδικό σήμα $x(t)$ μπορεί να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier με τρεις ισοδύναμους τρόπους ως εξής:

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\alpha_k e^{jk\Omega_0 t} \qquad \alpha_k=\frac{1}{T}\int_T x(t)\, e^{-jk\Omega_0 t}\,dt$$

$$x(t)=\alpha_0+\sum_{k=1}^{\infty}A_k\cos(k\Omega_0 t+\theta_k) \qquad A_k=2|a_k|$$

$$x(t)=\alpha_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left[b_k\cos(k\Omega_0 t)+c_k\sin(k\Omega_0 t)\right] \qquad 2a_k=b_k-jc_k$$

Σχόλια:

- Η περίοδος $T=\frac{2\pi}{\Omega_0}$ είναι κοινή για όλα τα σήματα $e^{jk\Omega_0 t}$, $\cos(k\Omega_0 t)$, $\sin(k\Omega_0 t)$ (συναρτήσεις βάσης) στα οποία αναλύεται το περιοδικό σήμα $x(t)$.

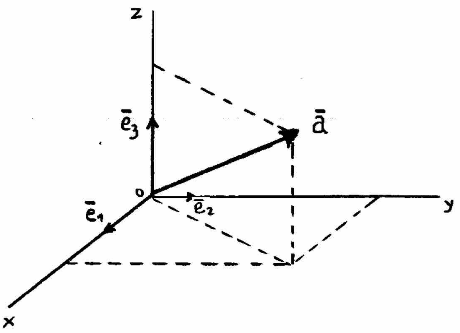
  $$T=\frac{2\pi}{\Omega_0}=k\cdot\frac{2\pi}{k\Omega_0}=kT_k$$

- Οι συναρτήσεις βάσεις στη διάρκεια μιας περιόδου T είναι χρονικά συσχετιζόμενες και αποτελούν ένα ορθογώνιο σύνολο.

Ορθογωνιότητα Διανυσμάτων και Σημάτων

- ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Ένα διάνυσμα $\bar{a}$ στο χώρο των τριών διαστάσεων μπορεί να αναπαρασταθεί μέσω των προβολών του στα μοναδιαία διανύσματα του χώρου, τα οποία αποτελούν τη βάση του χώρου, ως:



$$\bar{a}=\alpha_1\bar{e}_1+\alpha_2\bar{e}_2+\alpha_3\bar{e}_3$$

όπου $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ τα μοναδιαία διανύσματα

Γενικά $\bar{a}=\sum_{i=1}^{n}a_i\bar{e}_i$

όπου $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$ τα μοναδιαία διανύσματα στον χώρο των n-διαστάσεων και $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ οι συντεταγμένες του διανύσματος στον χώρο αυτό.

Ορισμός: Τα διανύσματα $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ ονομάζονται ανεξάρτητα αν κανένα από αυτά δεν μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των άλλων.

Ορισμός: Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων

$$\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle = \bar{a}^T \cdot \bar{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i$$

όπου $\bar{a} = \sum_{i=1}^{n} a_i \bar{e}_i$ και $\bar{a}^T$ το ανάστροφο διάνυσμα του $\bar{a}$

$\bar{b} = \sum_{i=1}^{n} b_i \bar{e}_i$

Ορισμός: Δύο διανύσματα είναι ορθογώνια αν $\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle = 0$

Ορισμός: Ένα σύνολο διανυσμάτων $(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n)$ ονομάζεται ορθοκανονικό αν αυτά είναι ανά δύο ορθογώνια και όλα έχουν μέτρο ίσο με τη μονάδα:

$$\langle \bar{a}_k, \bar{a}_m \rangle = \delta_{km} = \begin{cases} 1, & k = m \\ 0, & k \neq m \end{cases}$$

Ορισμός: Για μια ορθοκανονική βάση διανυσμάτων, οι συντεταγμένες $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ του διανύσματος $\bar{a}$ είναι οι προβολές του $\bar{a}$ σε καθένα από τα διανύσματα βάσης και προσδιορίζονται από τη σχέση:

$$a_i = \langle \bar{a}, \bar{e}_i \rangle \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

Συνεπώς, το διάνυσμα $\bar{a}$ γράφεται ως:

$$\bar{a} = \sum_{i=1}^{n} a_i \bar{e}_i = \sum_{i=1}^{n} \langle \bar{a}, \bar{e}_i \rangle \bar{e}_i$$

Ορισμός: Μέτρο (norm) ή μήκος διανύσματος

$$\|\bar{a}\| = \langle \bar{a}, \bar{a} \rangle^{1/2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$$

Ιδιότητες εσωτερικού γινομένου:

1. $\langle \bar{a}, \bar{a} \rangle \geq 0$

2. $\langle \bar{a}+\bar{b}, \bar{c} \rangle = \langle \bar{a}, \bar{c} \rangle + \langle \bar{b}, \bar{c} \rangle$

3. $\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle = \langle \bar{b}, \bar{a} \rangle^*$

4. $\langle c\bar{a}, \bar{b} \rangle = c \langle \bar{a}, \bar{b} \rangle$

• ΣΗΜΑΤΑ

Ορισμός: Εσωτερικό γινόμενο των σημάτων $x(t)$, $y(t)$, τα οποία ορίζονται στο διάστημα $[\alpha, \beta]$

$$\langle x(t), y(t) \rangle \equiv \int_{\alpha}^{\beta} x(t)\, y^*(t)\, dt$$

όπου $y^*(t)$ είναι το συζυγές σήμα του $y(t)$.

Ορισμός: Δύο σήματα είναι ορθογώνια αν $\langle x(t), y(t) \rangle = 0$

Ορισμός: Ευκλείδειος χώρος ονομάζεται ο μιγαδικός χώρος που είναι εφοδιασμένος με εσωτερικό γινόμενο.

Το μέτρο (norm) ενός σήματος $x(t)$ ορίζεται ως:

$$\| x(t) \|_2 \equiv \langle x(t), x(t) \rangle^{1/2} = \left[\int_{\alpha}^{\beta} |x(t)|^2 dt \right]^{1/2}$$

Το μέτρο είναι πάντοτε ένας μη αρνητικός πραγματικός αριθμός.

Ορισμός: Ο ευκλείδειος χώρος που προκύπτει για διάστημα ολοκλήρωσης $\pm\infty$ ονομάζεται χώρος $L_2(R)$

$$L_2(R) = \left\{ x(t),\ t \in (-\infty, +\infty):\ \|x(t)\|_2 < +\infty \right\}$$

Το μέτρο $\|\bullet\|_2$ είναι γνωστό και ως L_2-μέτρο (L_2-norm).

Στον χώρο αυτό ανήκουν όλα τα σήματα πεπερασμένης ενέργειας.

Ιδιότητες εσωτερικού γινομένου:

1. $\langle x, x \rangle \geq 0$

2. $\langle x+y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$

3. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle^*$

4. $\langle cx, y \rangle = c \langle x, y \rangle, \ \forall c$

Ένα σήμα $x(t)$, το οποίο ορίζεται στο διάστημα $[a, b]$, μπορεί να εκφραστεί ως

$$x(t) = \sum_k a_k \varphi_k(t) \qquad a \leq t \leq b$$

όπου

$$a_k = \int_a^b x(t) \varphi_k^*(t)\, dt = \langle x(t), \varphi_k(t) \rangle$$

και $\{\varphi_k(t)\}$ $k = 1, 2, \ldots$ σύνολο ορθοκανονικών συναρτήσεων στο διάστημα $[a, b]$, δηλαδή:

$$\langle \varphi_l(t), \varphi_m(t) \rangle = \delta_{lm}$$

Παρατήρηση: Οι συντελεστές a_k είναι οι προβολές του σήματος $x(t)$ σε καθεμία από τις ορθοκανονικές συναρτήσεις βάσης $\varphi_k(t)$.

Παραδείγματα Ορθογώνιων Περιοδικών Σημάτων

Α. Μιγαδικές Εκθετικές: $e^{jk\Omega_0 t}$

Τα εκθετικά σήματα $e^{jk\Omega_0 t}$, $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$ σε οποιοδήποτε πεπερασμένο χρονικό διάστημα $[t_0, t_0+T]$, όπου $T=2\pi/\Omega_0$, αποτελούν αρμονικά συσχετισμένα σήματα και σχηματίζουν ένα ορθογώνιο σύνολο, δηλαδή είναι ανά δύο ορθογώνια.

Πράγματι, έστω τα εκθετικά σήματα $e^{jk\Omega_0 t}$ και $e^{jm\Omega_0 t}$ και έστω ότι $t_0=0$.

Για $k\neq m$ έχουμε:

$$\langle e^{jk\Omega_0 t}, e^{jm\Omega_0 t}\rangle = \int_0^T e^{jk\Omega_0 t} e^{-jm\Omega_0 t}\,dt = \int_0^T e^{j(k-m)\Omega_0 t}\,dt =$$

$$= \frac{1}{j(k-m)\Omega_0} e^{-j(k-m)\Omega_0 t}\Big|_0^T = 0$$

Για $k=m$ έχουμε:

$$\langle e^{jk\Omega_0 t}, e^{jm\Omega_0 t}\rangle = \int_0^T e^{j(k-m)\Omega_0 t}\,dt = \int_0^T e^{j0\Omega_0 t}\,dt = \int_0^T 1\,dt = T$$

Άρα τελικά:

$$\langle e^{jk\Omega_0 t}, e^{jm\Omega_0 t}\rangle = T\cdot\delta_{km}$$

Β. Τριγωνομετρικές: $\cos(k\Omega_0 t)$, $\sin(k\Omega_0 t)$

- Οι συναρτήσεις (σήματα) $\sin(k\Omega_0 t)$, $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$ σε οποιοδήποτε πεπερασμένο χρονικό διάστημα $[t_0, t_0+T]$, όπου $T=2\pi/\Omega_0$, αποτελούν αρμονικά συσχετισμένα σήματα και σχηματίζουν ένα ορθογώνιο σύνολο, δηλαδή ανά δύο είναι ορθογώνια.

Πράγματι, έστω τα ημιτονικά σήματα $\sin(k\Omega_0 t)$ και $\sin(m\Omega_0 t)$, και έστω ότι $t_0=0$. Τότε το εσωτερικό τους γινόμενο ισούται με:

$$\langle \sin(k\Omega_0 t), \sin(m\Omega_0 t)\rangle = \int_0^T \sin(k\Omega_0 t)\cdot\sin(m\Omega_0 t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\underbrace{\int_0^T \cos[(k-m)\Omega_0 t]\,dt}_{I_1} - \frac{1}{2}\underbrace{\int_0^T \cos[(k+m)\Omega_0 t]\,dt}_{I_2} =$$

$$= \frac{1}{2}T\,\delta_{km}$$

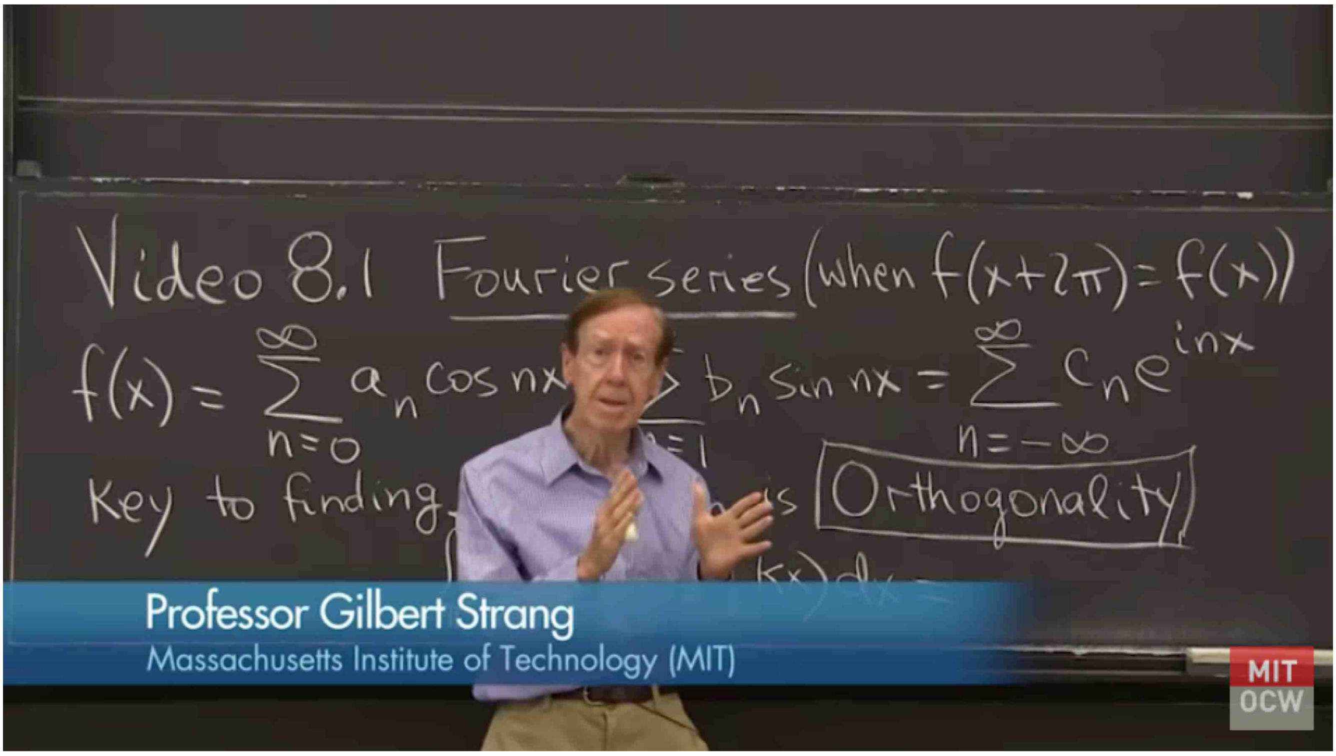
Σημειώνεται ότι για $k\neq m$, $I_1=I_2=0$ αφού η ολοκλήρωση γίνεται σε μία περίοδο, ενώ για $k=m\neq 0$, $I_1=T$, $I_2=0$.

- Για τις συναρτήσεις $\cos(k\Omega_0 t)$, $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$ ισχύουν ακριβώς τα ίδια, δηλαδή

$$\langle \cos(k\Omega_0 t), \cos(m\Omega_0 t)\rangle = \frac{1}{2} T \delta_{km}$$

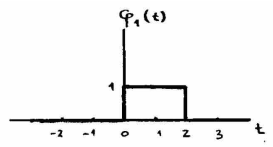
Σημειώνεται ότι $\langle \sin(k\Omega_0 t), \cos(m\Omega_0 t)\rangle = 0 \quad \forall\, k,m$

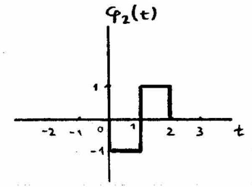
Trigonometric Fourier Series by Gilbert Strang (MIT)



https://www.youtube.com/watch?v=vA9dfINW4Rg

Παραδείγματα Ορθογώνιων Μη Περιοδικών Σημάτων





Εφαρμόζουμε τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου για να δούμε εάν οι συναρτήσεις $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ είναι ορθογώνιες στο διάστημα $0<t<2$.

$$\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle = \int_\alpha^\beta \varphi_1(t)\, \varphi_2^*(t)\, dt = \int_0^1 \varphi_1(t)\, \varphi_2^*(t)\, dt + \int_1^2 \varphi_1(t)\, \varphi_2^*(t)\, dt =$$

$$= \int_0^1 1\,(-1)\, dt + \int_1^2 1 \cdot 1\, dt = -t\Big|_0^1 + t\Big|_1^2 = -1+1=0$$

$$\langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle = \int_\alpha^\beta \varphi_1(t)\, \varphi_1^*(t)\, dt = \int_0^2 1 \cdot 1\, dt = t\Big|_0^2 = 2$$

$$\langle \varphi_2, \varphi_2 \rangle = \int_\alpha^\beta \varphi_2(t)\, \varphi_2^*(t)\, dt = \int_0^1 (-1)(-1)\, dt + \int_1^2 1 \cdot 1\, dt = 1+1=2$$

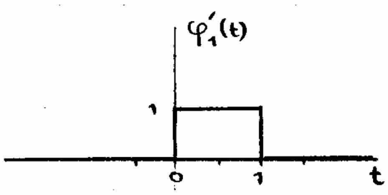
Τελικά παρατηρούμε ότι οι συναρτήσεις $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ είναι αμοιβαία ορθογώνιες στο διάστημα $0<t<2$, αφού

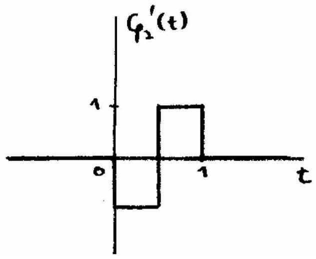
$$\langle \varphi_k(t), \varphi_m(t) \rangle = \begin{cases} \lambda_k, & k=m \\ 0, & k \neq m \end{cases}$$

Παρατηρήσεις:

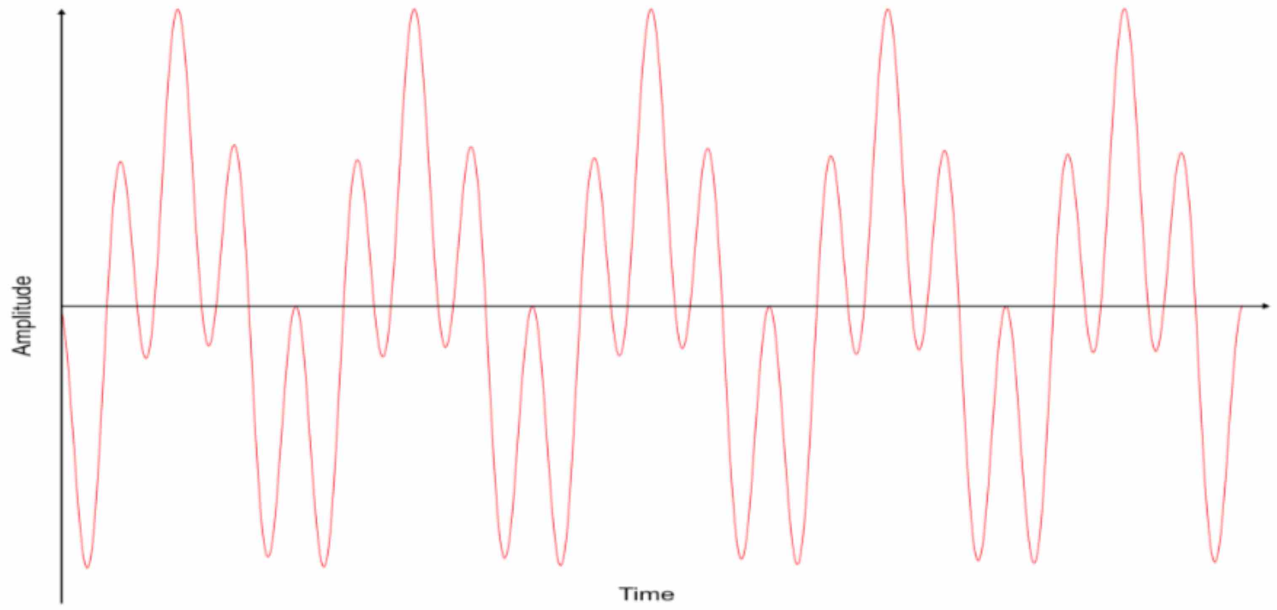
1. Εάν ισχύει ότι $\lambda_k=1$, τότε οι συναρτήσεις θα ήταν ορθοκανονικές.

2. Οι συναρτήσεις $\varphi_1'(t)=\varphi_1(2t)$, $\varphi_2'(t)=\varphi_2(2t)$ που προκύπτουν από τις $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ και έχουν τιμή διάφορη του μηδενός στο διάστημα $0<t<1$, είναι ορθοκανονικές και αποτελούν την πιο βασική συνάρτηση κυματιδίων (wavelets), το λεγόμενο κυματίδιο Haar προς τιμήν του Alfred Haar ο οποίος πρότεινε τις συναρτήσεις αυτές το 1909.

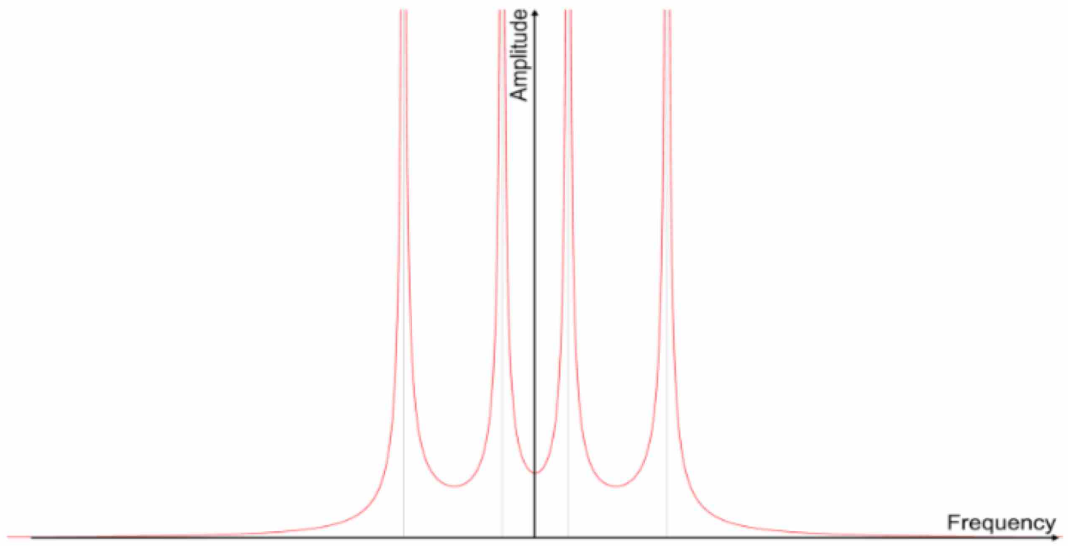




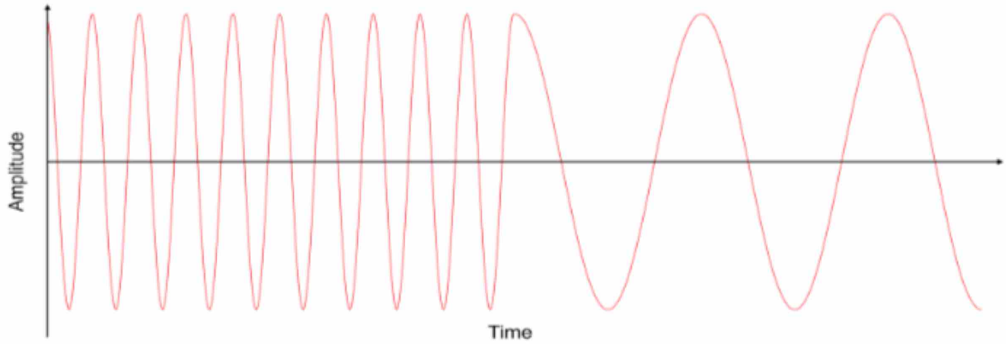
Γιατί Wavelets;



Stationary signal consisting of a sum of two sines



The Fourier Transform of the signal reveals its frequency content, consisting of two distinct frequencies



Non-stationary signal consisting of first a high-frequency sine and then a lower frequency sine