ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

6 – ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΤΗΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΣΗΜΑΤΩΝ

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

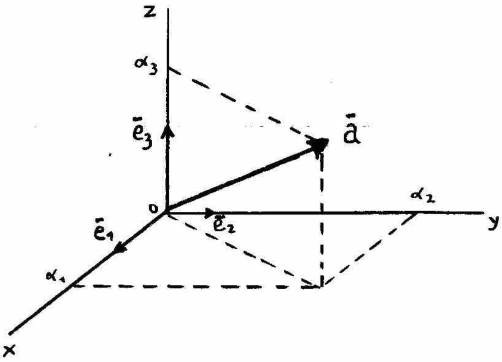
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ ΣΚΟΔΡΑΣ

2023 - 2024

ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΤΗΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΣΗΜΑΤΩΝ

• ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Ένα διάνυσμα $\bar{a}$ στο χώρο των τριών διαστάσεων μπορεί να αναπαρασταθεί μέσω των προβολών του στα μοναδιαία διανύσματα του χώρου, τα οποία αποτελούν τη βάση του χώρου, ως:



$$\bar{a} = \alpha_1 \bar{e}_1 + \alpha_2 \bar{e}_2 + \alpha_3 \bar{e}_3$$

όπου $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ τα μοναδιαία διανύσματα

Γενικά $\bar{a} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \bar{e}_i$

όπου $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$ τα μοναδιαία διανύσματα στον χώρο των n-διαστάσεων και $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ οι συντεταγμένες του διανύσματος στον χώρο αυτό.

Ορισμός: Τα διανύσματα $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ ονομάζονται ανεξάρτητα αν κανένα από αυτά δεν μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των άλλων.

Ορισμός: Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων

$$\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle = \bar{a}^T \cdot \bar{b} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i$$

όπου $\bar{a} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \bar{e}_i$ και $\bar{a}^T$ το ανάστροφο διάνυσμα του $\bar{a}$

$\bar{b} = \sum_{i=1}^{n} b_i \bar{e}_i$

Ορισμός: Δύο διανύσματα είναι ορθογώνια αν $\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle = 0$

Ορισμός: Ένα σύνολο διανυσμάτων $(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n)$ ονομάζεται ορθοκανονικό αν αυτά είναι ανά δύο ορθογώνια και όλα έχουν μέτρο ίσο με τη μονάδα:

$$\langle \bar{a}_k, \bar{a}_m \rangle = \delta_{km} = \begin{cases} 1, & k = m \\ 0, & k \neq m \end{cases}$$

Ορισμός: Για μια ορθοκανονική βάση διανυσμάτων, οι συντεταγμένες $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ του διανύσματος $\bar{a}$ είναι οι προβολές του $\bar{a}$ σε καθένα από τα διανύσματα βάσης και προσδιορίζονται από τη σχέση:

$$\alpha_i = \langle \bar{a}, \bar{e}_i \rangle \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

Συνεπώς, το διάνυσμα $\bar{a}$ γράφεται ως:

$$\bar{a} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \bar{e}_i = \sum_{i=1}^{n} \langle \bar{a}, \bar{e}_i \rangle \bar{e}_i$$

Ορισμός: Μέτρο (norm) ή μήκος διανύσματος

$$\|\bar{a}\| = \langle \bar{a}, \bar{a} \rangle^{1/2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$$

Ιδιότητες εσωτερικού γινομένου:

1. $\langle \bar{a}, \bar{a} \rangle \geqslant 0$

2. $\langle \bar{a} + \bar{b}, \bar{c} \rangle = \langle \bar{a}, \bar{c} \rangle + \langle \bar{b}, \bar{c} \rangle$

3. $\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle = \langle \bar{b}, \bar{a} \rangle^*$

4. $\langle c\bar{a}, \bar{b} \rangle = c \langle \bar{a}, \bar{b} \rangle$

• ΣΗΜΑΤΑ

Ορισμός: Εσωτερικό γινόμενο των σημάτων $x(t)$, $y(t)$, τα οποία ορίζονται στο διάστημα $[\alpha, \beta]$

$$\langle x(t), y(t) \rangle \equiv \int_{\alpha}^{\beta} x(t)\, y^*(t)\, dt$$

όπου $y^*(t)$ είναι το συζυγές σήμα του $y(t)$.

Ορισμός: Δύο σήματα είναι ορθογώνια αν $\langle x(t), y(t) \rangle = 0$

Ορισμός: Ευκλείδειος χώρος ονομάζεται ο μιγαδικός χώρος που είναι εφοδιασμένος με εσωτερικό γινόμενο.

Το μέτρο (norm) ενός σήματος $x(t)$ ορίζεται ως:

$$\| x(t) \|_2 \equiv \langle x(t), x(t) \rangle^{1/2} = \left[\int_{\alpha}^{\beta} |x(t)|^2 dt \right]^{1/2}$$

Το μέτρο είναι πάντοτε ένας μη αρνητικός πραγματικός αριθμός.

Ορισμός: Ο Ευκλείδειος χώρος που προκύπτει για διάστημα ολοκλήρωσης $\pm\infty$ ονομάζεται χώρος $L_2(R)$

$$L_2(R) = \left\{ x(t),\ t \in (-\infty, +\infty):\ \| x(t) \|_2 < +\infty \right\}$$

Το μέτρο $\| \bullet \|_2$ είναι γνωστό και ως L_2-μέτρο (L_2-norm).

Στον χώρο αυτό ανήκουν όλα τα σήματα <u>πεπερασμένης ενέργειας</u>.

Ιδιότητες εσωτερικού γινομένου:

1. $\langle x, x \rangle \geq 0$
2. $\langle x+y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$
3. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle^*$
4. $\langle cx, y \rangle = c \langle x, y \rangle,\ \forall c$

Ένα σήμα $x(t)$, το οποίο ορίζεται στο διάστημα $[\alpha, b]$, μπορεί να εκφραστεί ως

$$x(t) = \sum_{k} \alpha_k \varphi_k(t) \qquad \alpha \leq t \leq b$$

όπου

$$\alpha_k = \int_{\alpha}^{b} x(t)\, \varphi_k^{*}(t)\, dt = \langle x(t), \varphi_k(t) \rangle$$

και $\{\varphi_k(t)\}$ $k = 1, 2, \ldots$ σύνολο ορθοκανονικών συναρτήσεων στο διάστημα $[\alpha, b]$, δηλαδή

$$\langle \varphi_\ell(t), \varphi_m(t) \rangle = \delta_{\ell m}$$

Παρατήρηση: Οι συντελεστές α_k είναι οι προβολές του σήματος $x(t)$ σε καθεμία από τις ορθοκανονικές συναρτήσεις βάσης $\varphi_k(t)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΟΡΘΟΓΩΝΙΩΝ ΠΕΡΙΟΔΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ (ΣΗΜΑΤΩΝ)

Α. ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΕΚΘΕΤΙΚΕΣ: $e^{jk\Omega_0 t}$

Τα εκθετικά σήματα $e^{jk\Omega_0 t}$, $k=0,\pm1,\pm2,\dots$ σε οποιοδήποτε πεπερασμένο χρονικό διάστημα $[t_0, t_0+T_0]$, όπου $T_0=2\pi/\Omega_0$, αποτελούν αρμονικά συσχετιζόμενα σήματα και σχηματίζουν ένα ορθογώνιο σύνολο, δηλαδή είναι ανά δύο ορθογώνια.

Πράγματι, έστω τα εκθετικά σήματα $e^{jk\Omega_0 t}$ και $e^{jm\Omega_0 t}$ και έστω ότι $t_0=0$.

Για $k\neq m$ έχουμε:

$$\left\langle e^{jk\Omega_0 t}, e^{jm\Omega_0 t}\right\rangle = \int_0^{T_0} e^{jk\Omega_0 t} e^{-jm\Omega_0 t}\,dt = \int_0^{T_0} e^{j(k-m)\Omega_0 t}\,dt =$$

$$= \frac{1}{j(k-m)\Omega_0}\, e^{j(k-m)\Omega_0 t}\Big|_0^{T_0} = 0 \quad (\text{Βλ. σημείωση})$$

Για $k=m$ έχουμε:

$$\left\langle e^{jk\Omega_0 t}, e^{jm\Omega_0 t}\right\rangle = \int_0^{T_0} e^{j(k-m)\Omega_0 t}\,dt = \int_0^{T_0} e^{j0\Omega_0 t}\,dt = \int_0^{T_0} 1\,dt = T_0$$

Άρα τελικά:

$$\left\langle e^{jk\Omega_0 t}, e^{jm\Omega_0 t}\right\rangle = T_0 \cdot \delta_{km}$$

<u>Σημείωση</u>

$$\left\langle e^{jk\Omega_0 t}, e^{jm\Omega_0 t}\right\rangle = \dots = \frac{1}{j(k-m)\Omega_0}\left[e^{j(k-m)\Omega_0 T_0} - e^{j(k-m)\Omega_0 \cdot 0}\right] = \left\{\Omega_0 T_0 = 2\pi\right\}$$

$$= \frac{1}{j(k-m)\Omega_0}\left[e^{j(k-m)2\pi} - 1\right] = \left\{k-m=\lambda\neq 0 \text{ αφού } k\neq m\right\}$$

$$= \frac{1}{j(k-m)\Omega_0}\left[e^{j\lambda 2\pi} - 1\right] =$$

$$= \frac{1}{j(k-m)\Omega_0}\left[\underbrace{\cos(2\lambda\pi)}_{\to 1} + j\underbrace{\sin(2\lambda\pi)}_{\to 0} - 1\right] =$$

$$= 0$$

Β. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ: $\cos(k\Omega_0 t)$, $\sin(k\Omega_0 t)$

► Οι συναρτήσεις (σήματα) $\sin(k\Omega_0 t)$, $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$ σε οποιοδήποτε πεπερασμένο χρονικό διάστημα $[t_0, t_0+T_0]$, όπου $T_0=2\pi/\Omega_0$, αποτελούν αρμονικά συσχετισμένα σήματα και σχηματίζουν ένα ορθογώνιο σύνολο, δηλαδή ανά δύο είναι ορθογώνια.

Πράγματι, έστω τα αρμονικά σήματα $\sin(k\Omega_0 t)$ και $\sin(m\Omega_0 t)$, και έστω ότι $t_0=0$. Τότε το εσωτερικό τους γινόμενο ισούται με:

$$\langle \sin(k\Omega_0 t), \sin(m\Omega_0 t)\rangle = \int_0^{T_0} \sin(k\Omega_0 t)\cdot\sin(m\Omega_0 t)\, dt =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^{T_0} \cos[(k-m)\Omega_0 t]\, dt}_{I_1} - \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^{T_0} \cos[(k+m)\Omega_0 t]\, dt}_{I_2} =$$

$$= \frac{1}{2} T_0\, \delta_{km}$$

Σημειώνεται ότι για $k\neq m$, $I_1=I_2=0$ αφού η ολοκλήρωση γίνεται σε μία περίοδο, ενώ για $k=m\neq 0$, $I_1=T_0$, $I_2=0$.

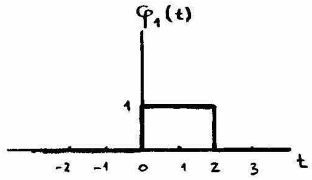
► Για τις συναρτήσεις $\cos(k\Omega_0 t)$, $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$ ισχύουν ακριβώς τα ίδια, δηλαδή

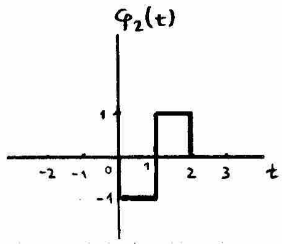
$$\langle \cos(k\Omega_0 t), \cos(m\Omega_0 t)\rangle = \frac{1}{2} T_0\, \delta_{km}$$

Σημειώνεται ότι $\langle \sin(k\Omega_0 t), \cos(m\Omega_0 t)\rangle = 0 \quad \forall\, k,m$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΟΡΘΟΓΩΝΙΩΝ ΜΗ ΠΕΡΙΟΔΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ (ΣΗΜΑΤΩΝ)

Παράδειγμα 6.1 :





Εφαρμόζουμε τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου για να δούμε εάν οι συναρτήσεις $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ είναι ορθογώνιες στο διάστημα $0<t<2$.

$$\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle = \int_\alpha^\beta \varphi_1(t)\, \varphi_2^*(t)\, dt = \int_0^1 \varphi_1(t)\, \varphi_2^*(t)\, dt + \int_1^2 \varphi_1(t)\, \varphi_2^*(t)\, dt =$$

$$= \int_0^1 1\, (-1)\, dt + \int_1^2 1 \cdot 1\, dt = -t\Big|_0^1 + t\Big|_1^2 = -1+1=0$$

$$\langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle = \int_\alpha^\beta \varphi_1(t)\, \varphi_1^*(t)\, dt = \int_0^2 1 \cdot 1\, dt = t\Big|_0^2 = 2$$

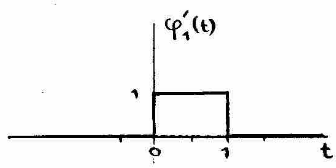
$$\langle \varphi_2, \varphi_2 \rangle = \int_\alpha^\beta \varphi_2(t)\, \varphi_2^*(t)\, dt = \int_0^1 (-1)(-1)\, dt + \int_1^2 1 \cdot 1\, dt = 1+1=2$$

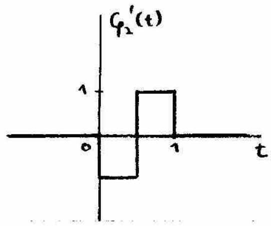
Τελικά παρατηρούμε ότι οι συναρτήσεις $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ είναι αμοιβαία ορθογώνιες στο διάστημα $0<t<2$, αφού

$$\langle \varphi_k(t), \varphi_m(t) \rangle = \begin{cases} \lambda_k, & k=m \\ 0, & k \neq m \end{cases}$$

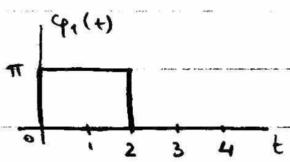
Παρατηρήσεις: 1. Εάν ίσχυε ότι $\lambda_k = 1$, τότε οι συναρτήσεις θα ήταν ορθοκανονικές.

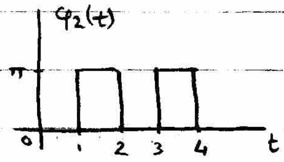
2. Οι συναρτήσεις $\varphi_1'(t) = \varphi_1(2t)$, $\varphi_2'(t) = \varphi_2(2t)$ που προκύπτουν από τις $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ και έχουν τιμή διάφορη του μηδενός στο διάστημα $0<t<1$, είναι <u>ορθοκανονικές</u> και αποτελούν την πιό βασική συνάρτηση <u>κυματιδίων</u> <u>(wavelets)</u>, το λεγόμενο <u>κυματίδιο Haar</u> προς τιμήν του Alfred Haar ο οποίος πρότεινε τις συναρτήσεις αυτές το 1909.





ΑΣΚΗΣΗ Να εξεταστεί ως προς την ορθογωνιότητα στο διάστημα $(0,4)$ το ζεύγος των συναρτήσεων του σχήματος.





ΛΥΣΗ

$$\langle \varphi_1(t), \varphi_2(t) \rangle \equiv \int_{\alpha}^{b} \varphi_1(t)\, \varphi_2^*(t)\, dt =$$

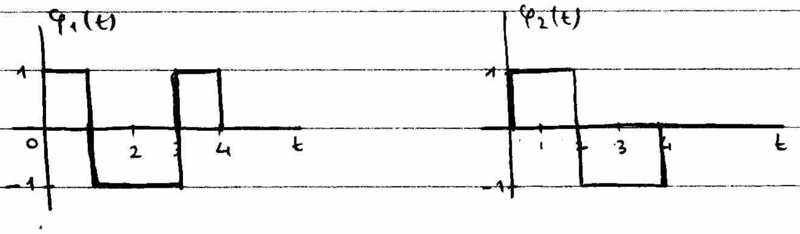
$$= \int_0^1 \varphi_1(t)\, \varphi_2^*(t)\, dt + \int_1^2 \varphi_1(t)\, \varphi_2^*(t)\, dt + \int_2^3 \varphi_1(t)\, \varphi_2^*(t)\, dt + \int_3^4 \varphi_1(t)\, \varphi_2^*(t)\, dt =$$

$$= \int_0^1 \pi \cdot 0\, dt + \int_1^2 \pi \cdot \pi\, dt + \int_2^3 0 \cdot 0\, dt + \int_3^4 0 \cdot \pi\, dt =$$

$$= 0 + \pi^2 t \Big|_1^2 + 0 + 0 = \pi^2 (2-1) = \pi^2$$

Άρα οι συναρτήσεις αυτές ΔΕΝ είναι ορθογώνιες.

ΑΣΚΗΣΗ Να εξεταστεί ως προς την ορθογωνιότητα στο διάστημα (0,4) το ζεύγος των σημάτων του σχήματος.



ΛΥΣΗ

$$\langle \varphi_1(t), \varphi_2(t) \rangle = \int_0^4 \varphi_1(t)\, \varphi_2^*(t)\, dt =$$

$$= \int_0^1 1 \cdot 1\, dt + \int_1^2 (-1) \cdot 1\, dt + \int_2^3 (-1)(-1)\, dt + \int_3^4 1 \cdot (-1)\, dt =$$

$$= t\Big|_0^1 - t\Big|_1^2 + t\Big|_2^3 - t\Big|_3^4 =$$

$$= (1-0) - (2-1) + (3-2) - (4-3) =$$

$$= 1 - 1 + 1 - 1 =$$

$$= 0$$

Άρα τα σήματα αυτά είναι μεταξύ τους ορθογώνια.

ΑΣΚΗΣΗ Νδο οι συναρτήσεις $\cos(k+\frac{1}{2})\pi t$ είναι ορθογώνιες στην περιοχή $[0,1]$.

ΛΥΣΗ Υπολογίζουμε το εσωτερικό γινόμενο δύο τέτοιων συναρτήσεων, $\cos(k+\frac{1}{2})\pi t$ και $\cos(m+\frac{1}{2})\pi t$ στο διάστημα $[0,1]$.

$$\left\langle \cos(k+\tfrac{1}{2})\pi t,\ \cos(m+\tfrac{1}{2})\pi t \right\rangle = \int_0^1 \cos(k+\tfrac{1}{2})\pi t\ \cos(m+\tfrac{1}{2})\pi t\ dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \cos(k-m)\pi t\ dt + \frac{1}{2}\int_0^1 \cos(k+m+1)\pi t\ dt \qquad (1)$$

Για $k=m$ η (1) ισούται με:

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \cos 0\ dt + \frac{1}{2}\int_0^1 \cos(2k+1)\pi t\ dt =$$

$$= \frac{1}{2}\, t\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\,\frac{1}{(2k+1)\pi}\sin(2k+1)\pi t\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2}(1-0) + \frac{1}{2(2k+1)\pi}\left[\cancelto{0}{\sin(2k+1)\pi} - \cancelto{0}{\sin 0}\right] = \frac{1}{2}$$

Για $k\neq m$ η (1) ισούται με:

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1}{(k-m)\pi}\sin(k-m)\pi t\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\,\frac{1}{(k+m+1)\pi}\sin(k+m+1)\pi t\Big|_0^1 =$$

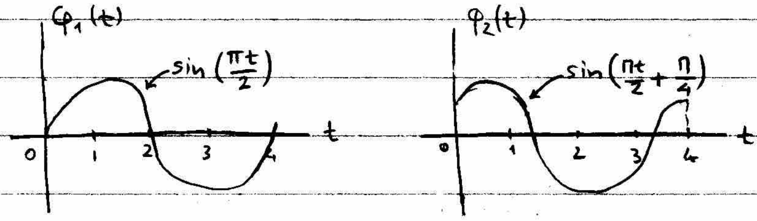
$$= \frac{1}{(k-m)2\pi}\cancelto{0}{\sin(k-m)\pi} + \frac{1}{(k+m+1)2\pi}\cancelto{0}{\sin(k+m+1)\pi} = 0$$

Άρα οι συναρτήσεις $\cos(k+\frac{1}{2})\pi t$ είναι ορθογώνιες, αφού

$$\left\langle \cos(k+\tfrac{1}{2})\pi t,\ \cos(m+\tfrac{1}{2})\pi t \right\rangle = \frac{1}{2}\delta_{km} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{για } k=m \\ 0 & \text{για } k\neq m \end{cases}$$

<u>Σημείωση</u>: Οι ανωτέρω συναρτήσεις αποτελούν τις συναρτήσεις βάσης του <u>μετασχηματισμού συνημιτόνου</u>. Η διακριτή μορφή αυτού του μετασχηματισμού, δηλαδή ο Discrete Cosine Transform (DCT) χρησιμοποιείται στο πρότυπο συμπίεσης εικόνων <u>JPEG</u>.

ΑΣΚΗΣΗ Να εξεταστεί εάν οι συναρτήσεις είναι ορθογώνιες στο διάστημα (0,4).



ΛΥΣΗ Για να είναι ορθογώνιες θα πρέπει το εσωτερικό τους γινόμενο να είναι μηδέν, δηλαδή

$$\langle \varphi_1(t), \varphi_2(t) \rangle \equiv \int_{\alpha}^{b} \varphi_1(t)\, \varphi_2^*(t)\, dt = 0$$

Έχουμε λοιπόν:

$$\int_0^4 \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi t}{2} + \frac{\pi}{4}\right) dt = \int_0^4 \frac{1}{2j}\left[e^{j\frac{\pi}{2}t} - e^{-j\frac{\pi}{2}t}\right] \cdot \frac{1}{2j}\left[e^{j\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}\right)} - e^{-j\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}\right)}\right] dt =$$

$$= \frac{-1}{4}\int_0^4 \left[e^{j\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right)} - e^{-j\frac{\pi}{4}} - e^{j\frac{\pi}{4}} + e^{-j\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right)}\right] dt =$$

$$= -\frac{1}{4}\int_0^4 \left[2\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right) - 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^4 \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right) dt + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\int_0^4 dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\pi}\sin\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right)\Big|_0^4 + \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2}\, t\Big|_0^4 =$$

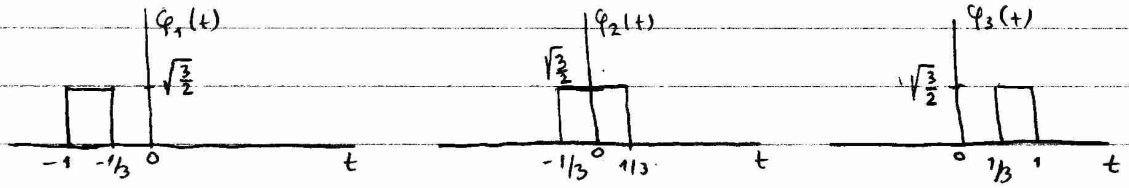
$$= -\frac{1}{2\pi}\left[\sin\left(4\pi + \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] + \frac{\sqrt{2}}{4}(4 - 0) =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\left[\cancel{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)} - \cancel{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}\right] + \sqrt{2} =$$

$$= \sqrt{2}$$

Συνεπώς οι συναρτήσεις αυτές ΔΕΝ είναι ορθογώνιες.

ΑΣΚΗΣΗ Να εξεταστεί εάν το σύνολο των συναρτήσεων βάσης του σχήματος είναι ορθοκανονικό.



ΛΥΣΗ Υπολογίζουμε το εσωτερικό γινόμενο των βάσεων ανά δύο.

$$\langle \varphi_1(t), \varphi_2(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(t)\, \varphi_2^*(t)\, dt = \int_{-1}^{-1/3} \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0\, dt + \int_{-1/3}^{1/3} 0\, \frac{\sqrt{3}}{2}\, dt = 0 + 0 = 0$$

Παρατηρούμε δηλαδή ότι δεν υπάρχει επικάλυψη, και επομένως οι $\varphi_1(t)$ και $\varphi_2(t)$ είναι ορθογώνιες. Το ίδιο ισχύει και για τους υπόλοιπους συνδυασμούς, δηλαδή

$$\langle \varphi_1(t), \varphi_2(t) \rangle = \langle \varphi_1(t), \varphi_3(t) \rangle = \langle \varphi_2(t), \varphi_3(t) \rangle = 0$$

Για τον έλεγχο της ορθοκανονικότητας υπολογίζουμε τα μέτρα των βάσεων.

$$\langle \varphi_1(t), \varphi_1(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_1(t)|^2\, dt = \int_{-1}^{-1/3} \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 dt = \frac{3}{2}\, t \Big|_{-1}^{-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{3} + 1\right) = 1$$

Παρόμοια βρίσκουμε ότι

$$\langle \varphi_2(t), \varphi_2(t) \rangle = 1$$

$$\langle \varphi_3(t), \varphi_3(t) \rangle = 1$$

Άρα οι τρεις συναρτήσεις αποτελούν μια ορθοκανονική (orthonormal) βάση.

ΑΣΚΗΣΗ Δίνεται το σήμα $x(t) = \begin{cases} e^{-t}, & -1 \le t \le 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

Να αναπτυχθεί συναρτήσει των $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)$ της προηγούμενης άσκησης στο διάστημα $-1 \le t \le 1$.

ΛΥΣΗ

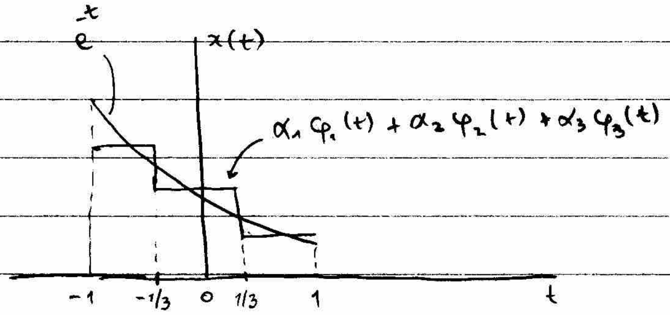
$$x(t) = \sum_{k=1}^{3} \alpha_k \varphi_k(t) = \alpha_1 \varphi_1(t) + \alpha_2 \varphi_2(t) + \alpha_3 \varphi_3(t)$$

όπου $$\alpha_k = \int_{-1}^{1} x(t) \varphi_k^*(t)\, dt \qquad k = 1, 2, 3$$

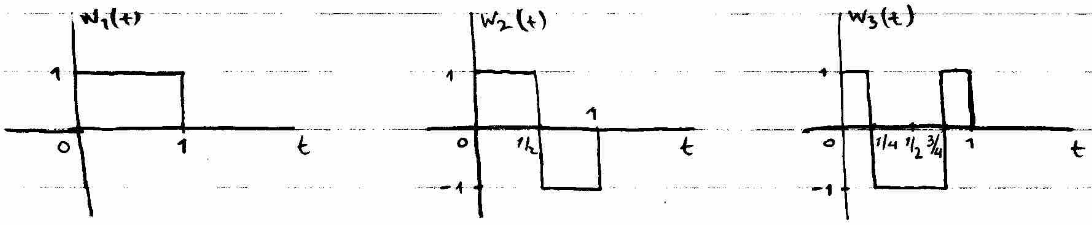
$$\alpha_1 = \int_{-1}^{-1/3} e^{-t} \sqrt{\tfrac{3}{2}}\, dt = -\sqrt{\tfrac{3}{2}}\; e^{-t}\Big|_{-1}^{-1/3} = -\sqrt{\tfrac{3}{2}} \left(e^{1/3} - e \right) = \sqrt{\tfrac{3}{2}} \left(e - e^{1/3} \right) = 1.6199$$

$$\alpha_2 = \int_{-1/3}^{1/3} e^{-t} \sqrt{\tfrac{3}{2}}\, dt = \sqrt{\tfrac{3}{2}} \left(e^{1/3} - e^{-1/3} \right) = 0.8317$$

$$\alpha_3 = \int_{1/3}^{1} e^{-t} \sqrt{\tfrac{3}{2}} = \sqrt{\tfrac{3}{2}} \left(e^{-1/3} - e^{-1} \right) = 0.4270$$



ΑΣΚΗΣΗ Να εξεταστεί εάν οι συναρτήσεις βάσης του σχήματος είναι ορθοκανονικές.



ΛΥΣΗ

$$\langle w_1(t), w_2(t)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} w_1(t)\, w_2^*(t)\, dt = \int_0^{1/2} 1\cdot 1\, dt + \int_{1/2}^{1} 1(-1)\, dt = \left(\tfrac{1}{2}-0\right) - \left(1-\tfrac{1}{2}\right) = 0$$

$$\langle w_1(t), w_1(t)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |w_1(t)|^2\, dt = \int_0^1 1\, dt = 1$$

$$\langle w_2(t), w_2(t)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |w_2(t)|^2\, dt = \int_0^{1/2} 1^2 dt + \int_{1/2}^{1} (-1)^2 dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Με παρόμοιο τρόπο υπολογίζουμε ότι

$\langle w_1(t), w_3(t)\rangle = \langle w_2(t), w_3(t)\rangle = 0$ ⇝ ορθογώνιες

$\langle w_3(t), w_3(t)\rangle = 1$

Άρα το σύνολο των συναρτήσεων αποτελεί μια ορθοκανονική βάση. Πρόκειται για τις πρώτες από τις συναρτήσεις Walsh.

ΑΣΚΗΣΗ Δίνεται το σήμα $x(t) = \begin{cases} e^{-t}, & 0 \le t \le 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

Να αναπτυχθεί συναρτήσει των $w_1(t), w_2(t), w_3(t)$ της προηγούμενης άσκησης, στο διάστημα $0 \le t \le 1$.

ΛΥΣΗ

$$x(t) = \sum_{k=1}^{3} \alpha_k w_k(t) = \alpha_1 w_1(t) + \alpha_2 w_2(t) + \alpha_3 w_3(t)$$

όπου $\alpha_k = \int_0^1 x(t)\, w_k^*(t)\, dt \quad , \quad k = 1, 2, 3$

$$\alpha_1 = \int_0^1 e^{-t} dt = - e^{-t} \Big|_0^1 = -\left(e^{-1} - e^{0}\right) = 1 - e^{-1} = 0.632$$

$$\alpha_2 = \int_0^{1/2} e^{-t} dt - \int_{1/2}^{1} e^{-t} dt = 1 - 2e^{-1/2} - e^{-1} = 0.155$$

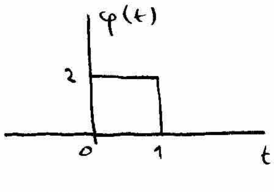
$$\alpha_3 = \int_0^{1/4} e^{-t} dt - \int_{1/4}^{3/4} e^{-t} dt + \int_{3/4}^{1} e^{-t} dt = 0.019$$

ΑΣΚΗΣΗ Δίνεται το σήμα $\varphi(t)$ του σχήματος 1.

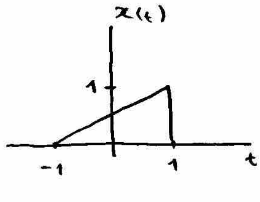
α. Να υπολογίσετε την άρτια και την περιττή συνάρτηση $\varphi_e(t)$, $\varphi_o(t)$ που προέρχονται από τη $\varphi(t)$.

β. Να εξετάσετε εάν οι συναρτήσεις $\varphi_e(t)$, $\varphi_o(t)$ είναι ορθοκανονικές.

γ. Να αναπτύξετε τη συνάρτηση $x(t)$ του σχήματος 2 με βάση τις $\varphi_e(t)$, $\varphi_o(t)$.



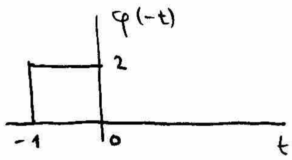
Σχήμα 1



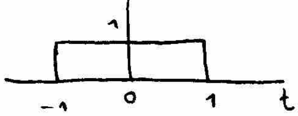
Σχήμα 2

ΛΥΣΗ

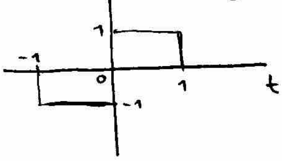
α.



$\varphi_e(t) = \frac{1}{2}\left[\varphi(t) + \varphi(-t)\right]$



$\varphi_o(t) = \frac{1}{2}\left[\varphi(t) - \varphi(-t)\right]$



β. $$\langle \varphi_e(t), \varphi_o(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_e(t)\varphi_o^*(t)\,dt = \int_{-1}^{0} 1\cdot(-1)\,dt + \int_{0}^{1} 1\cdot 1\,dt =$$

$$= -\,t\Big|_{-1}^{0} + t\Big|_{0}^{1} = -(0+1) + (1-0) = 0$$

Άρα οι $\varphi_e(t)$, $\varphi_o(t)$ είναι ορθογώνιες.

$$\langle \varphi_e(t), \varphi_e(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_e(t)|^2 dt = \int_{-1}^{1} 1\,dt = t\Big|_{-1}^{1} = 1-(-1) = 2$$

$$\langle \varphi_o(t), \varphi_o(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_o(t)|^2 dt = \int_{-1}^{0} (-1)^2 dt + \int_{0}^{1} 1^2 dt = t\Big|_{-1}^{0} + t\Big|_{0}^{1} = 2$$

Άρα οι $\varphi_e(t)$, $\varphi_o(t)$ δεν είναι κανονικές.

γ. $x(t) = \sum_k \alpha_k \varphi_k(t)$ όπου $\alpha_k = \langle x(t), \varphi_k(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, \varphi_k^*(t)\, dt$

$$\alpha_e = \int_{-1}^{1} x(t)\, \varphi_e^*(t)\, dt = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}(t+1) \cdot 1 \, dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} t\, dt + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} dt =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{t^2}{2}\Big|_{-1}^{1} + \frac{1}{2} t \Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{4}(1-1) + \frac{1}{2}(1-(-1)) = 1$$

$$\alpha_o = \int_{-1}^{1} x(t)\, \varphi_o^*(t)\, dt = \int_{-1}^{0} \frac{1}{2}(t+1)(-1)\, dt + \int_{0}^{1} \frac{1}{2}(t+1) \cdot 1\, dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\int_{-1}^{0} t\, dt + \int_{-1}^{0} dt\right] + \frac{1}{2}\left[\int_{0}^{1} t\, dt + \int_{0}^{1} dt\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{t^2}{2}\Big|_{-1}^{0} + t\Big|_{-1}^{0}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{t^2}{2}\Big|_{0}^{1} + t\Big|_{0}^{1}\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(0-1) + (0+1)\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(1-0) + (1-0)\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2} + 1\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} + 1\right] = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

Συνεπώς η $x(t)$ αναπτύσσεται στις συναρτήσεις βάσης $\varphi_e(t), \varphi_o(t)$ ως ακολούθως:

$$x(t) = \alpha_e \varphi_e(t) + \alpha_o \varphi_o(t) = 1\, \varphi_e(t) + \frac{1}{2} \varphi_o(t)$$

Σημείωση 1: Ο υπολογισμός της συνάρτησης $x(t)$ έγινε μέσω του σχήματος 2 ως εξής:

$x(t) = \alpha t + b$

Για $t=-1 \rightarrow x(t) = 0 \Rightarrow 0 = \alpha(-1) + b \Rightarrow \alpha = b$ (1)

Για $t = 1 \rightarrow x(t) = 1 \Rightarrow 1 = \alpha + b$ (2)

$(2) \xrightarrow{(1)} 1 = b + b \Rightarrow 1 = 2b \Rightarrow b = \frac{1}{2}$

Άρα και $\alpha = \frac{1}{2}$

οπότε η $x(t)$ γράφεται ως:

$$x(t) = \frac{1}{2}(t+1)$$

Σημείωση 2: Είδαμε ότι οι συναρτήσεις $\varphi_e(t), \varphi_o(t)$ δεν είναι ορθοκανονικές. Θα μπορούσαμε να τις κανονικοποιήσουμε, διαιρώντας καθεμιά από αυτές με το μέτρο της $\|\cdot\|_2$.
Οι συναρτήσεις που θα προκύψουν θα είναι:

$$\theta_e(t) = \frac{1}{\|\varphi_e(t)\|_2} \cdot \varphi_e(t) = \frac{1}{\langle \varphi_e(t), \varphi_e(t)\rangle^{1/2}} \varphi_e(t) = \frac{1}{\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_e(t)|^2 dt}} \varphi_e(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi_e(t)$$

$$\theta_o(t) = \frac{1}{\|\varphi_o(t)\|_2} \varphi_o(t) = \frac{1}{\langle \varphi_o(t), \varphi_o(t)\rangle^{1/2}} \varphi_o(t) = \frac{1}{\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_o(t)|^2 dt}} \varphi_o(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi_o(t)$$

Οι συναρτήσεις $\theta_e(t), \theta_o(t)$ είναι πλέον ορθοκανονικές.

Μπορούμε να αναπτύξουμε τη συνάρτηση $x(t)$ στη νέα ορθοκανονική βάση $\theta_e(t), \theta_o(t)$ ως εξής:

$$x(t) = \sum_{k=e,o} b_k \theta_k(t) \quad \text{όπου} \quad b_k = \langle x(t), \theta_k(t)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, \theta_k^*(t)\, dt$$

$$b_e = \int_{-1}^{1} x(t)\, \theta_e^*(t)\, dt = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}(t+1) \frac{1}{\sqrt{2}} 1\, dt =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\int_{-1}^{1} t\, dt + \int_{-1}^{1} dt \right] = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\frac{t^2}{2} \Big|_{-1}^{1} + t \Big|_{-1}^{1} \right] =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\frac{1}{2}\left(1^2 - (-1)^2\right) + \left(1 - (-1)\right) \right] = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$b_o = \int_{-1}^{1} x(t)\, \theta_o^*(t)\, dt = \int_{-1}^{0} \frac{1}{2}(t+1) \frac{1}{\sqrt{2}}(-1)\, dt + \int_{0}^{1} \frac{1}{2}(t+1) \frac{1}{\sqrt{2}}(1)\, dt =$$

$$= \frac{-1}{2\sqrt{2}} \left[\int_{-1}^{0} (t+1)\, dt \right] + \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\int_{0}^{1} (t+1)\, dt \right] =$$

$$= \frac{-1}{2\sqrt{2}} \left[\frac{t^2}{2} \Big|_{-1}^{0} + t \Big|_{-1}^{0} \right] + \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\frac{t^2}{2} \Big|_{0}^{1} + t \Big|_{0}^{1} \right] =$$

$$= \frac{-1}{2\sqrt{2}} \left[\frac{1}{2}\left(0 - (-1)^2\right) + \left(0 - (-1)\right) \right] + \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\frac{1}{2}(1-0) + (1-0) \right] =$$

$$= \frac{-1}{2\sqrt{2}} \left[\frac{-1}{2} + 1 \right] + \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\frac{1}{2} + 1 \right] = \frac{-1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Παρατηρούμε ότι οι συντελεστές διαμορφώθηκαν κι αυτοί με το αντίστοιχο μέτρο της κάθε βάσης. Η $x(t)$ αναπτύσσεται τώρα ως εξής:

$$x(t) = \sum_{k=e,o} b_k \theta_k(t) = b_e \theta_e(t) + b_o \theta_o(t) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \theta_e(t) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \theta_o(t)$$

Σημείωση 3: Ας υπολογίσουμε τώρα την ενέργεια του σήματος $x(t)$ στον χρόνο, και ας την συγκρίνουμε με εκείνη που προκύπτει από την ανάπτυξη στις ορθογώνιες βάσεις $\varphi_k(t)$ και στις ορθοκανονικές βάσεις $\theta_k(t)$.

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-1}^{1} \left|\tfrac{1}{2}(t+1)\right|^2 dt = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}(t+1)^2 dt =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\int_{-1}^{1} t^2 dt + \int_{-1}^{1} 2t\, dt + \int_{-1}^{1} 1\, dt\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{t^3}{3}\Big|_{-1}^{1} + 2\frac{t^2}{2}\Big|_{-1}^{1} + t\Big|_{-1}^{1}\right] =$$

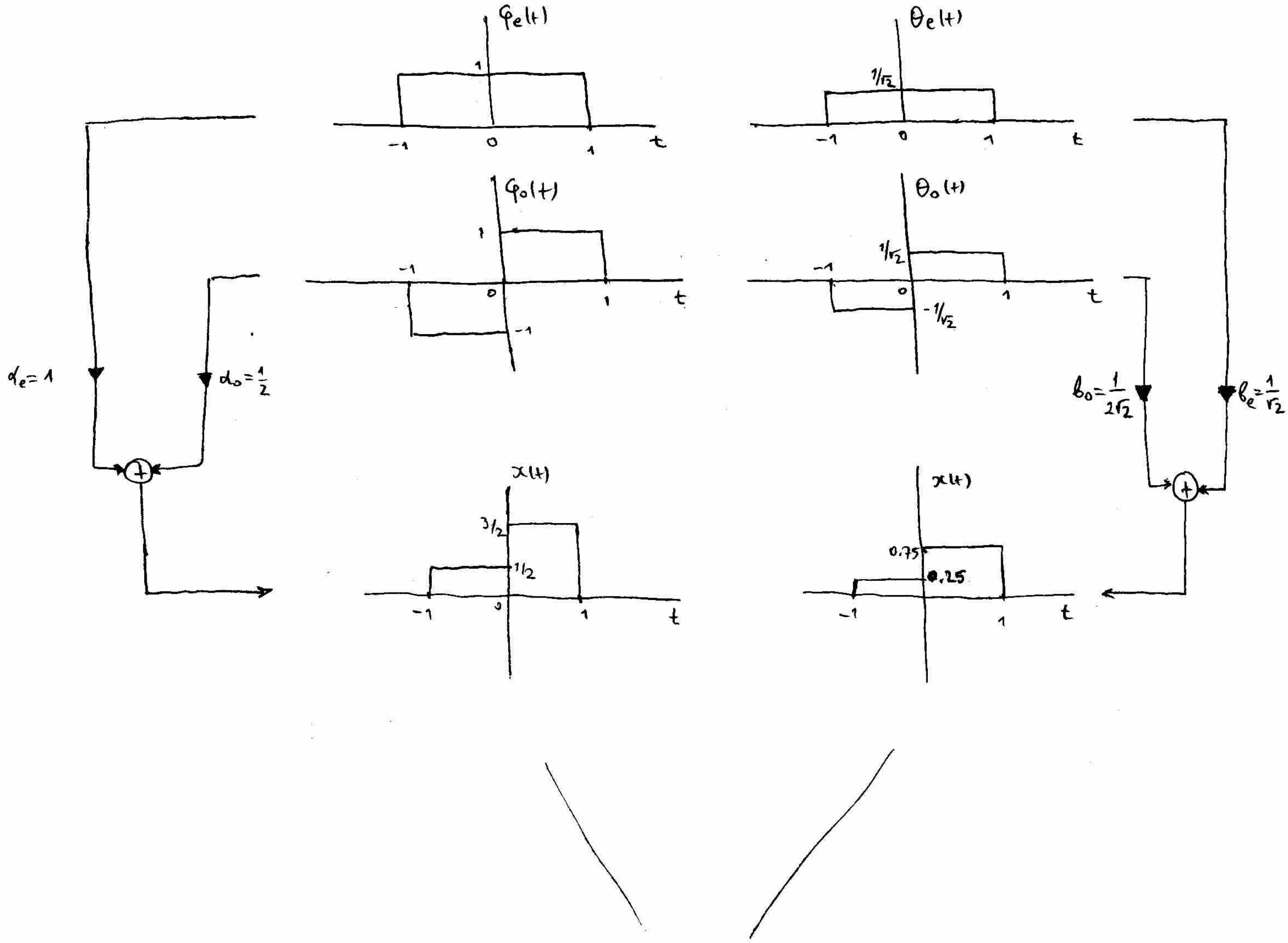
$$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{3}\left(1-(-1)^3\right) + \left(1-(-1)^2\right) + \left(1-(-1)\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{2}{3} + 0 + 2\right] = \frac{1}{4}\cdot\frac{8}{3} = \frac{2}{3} \simeq 0.667$$

$$E_\varphi = \sum |\alpha_k|^2 = |\alpha_e|^2 + |\alpha_o|^2 = 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} = 1.25$$

$$E_\theta = \sum |b_k|^2 = |b_e|^2 + |b_o|^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4\cdot 2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{4+1}{8} = \frac{5}{8} = 0.625$$

Παρατηρούμε ότι $E_\theta \simeq E$, ενώ $E_\varphi > E$. Αυτό σημαίνει ότι οι συντελεστές της ορθοκανονικής βάσης προσεγγίζουν καλύτερα την $x(t)$.



Και οι δύο αυτές συναρτήσεις "προσπαθούν" να προσεγγίσουν την $x(t)$ της εκφώνησης