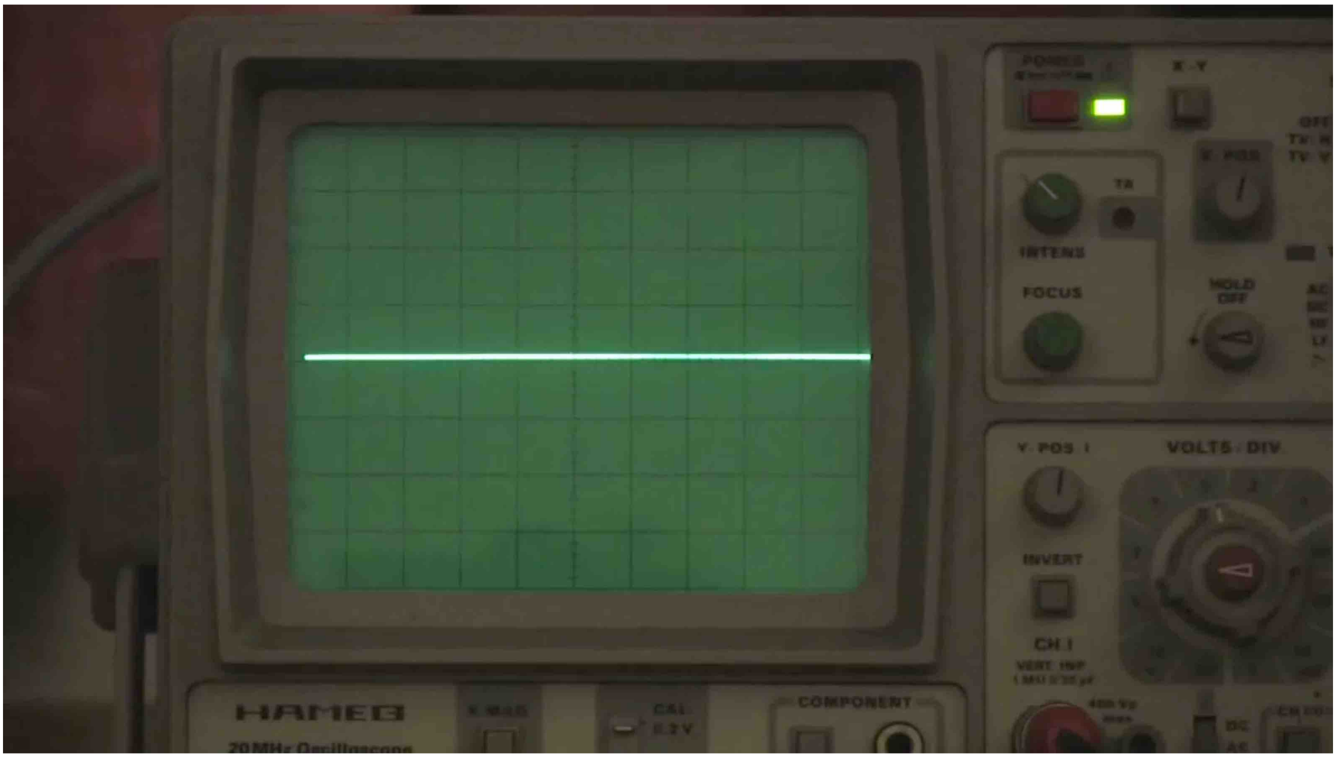
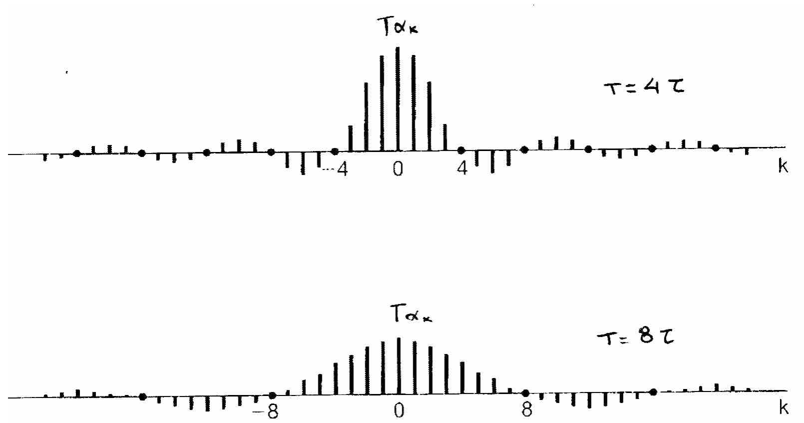
Can you hear the difference between a square wave and a sine?



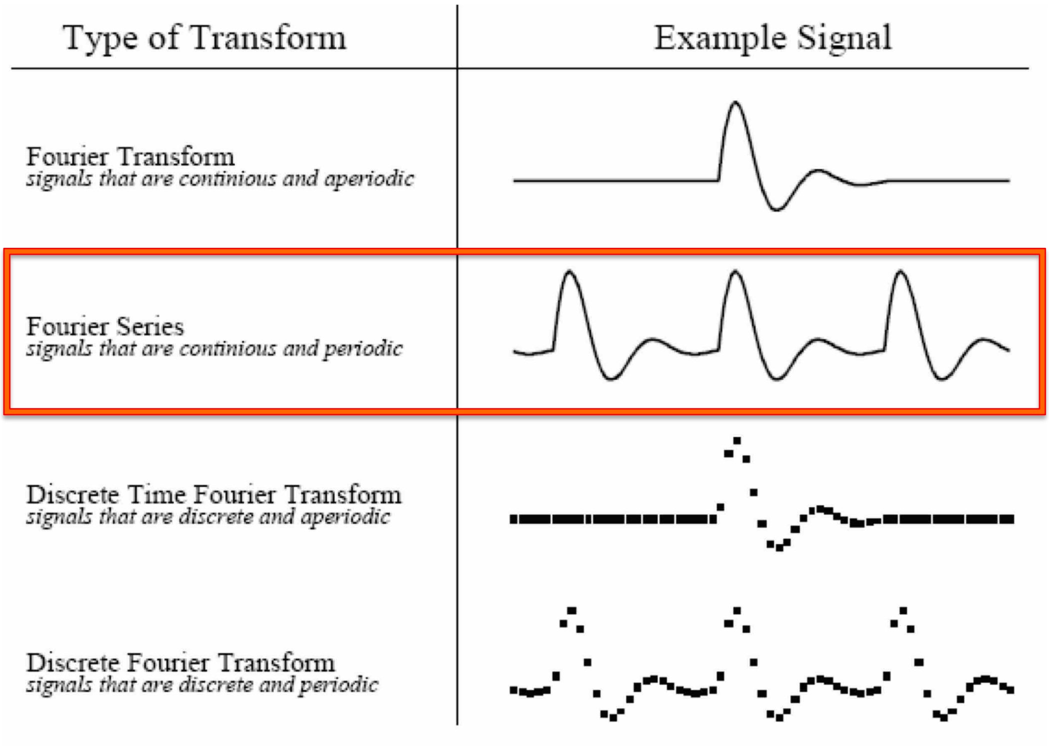
Source - `https://www.youtube.com/watch?v=uIuJTWS2uvY`

Εκθετική Σειρά Fourier

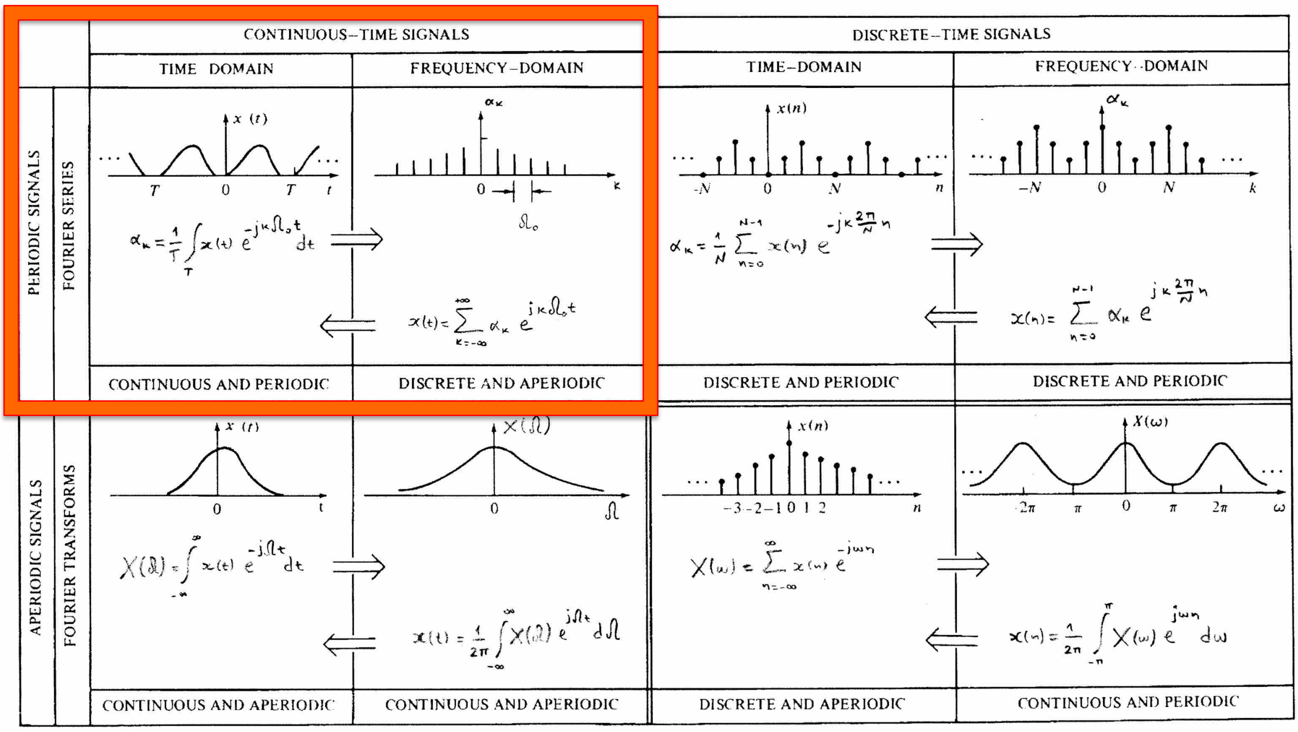
- Ορισμοί & Ιδιότητες -



ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΩΝ FOURIER



ΣΧΕΣΕΙΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ & ΣΥΝΘΕΣΗΣ ΣΗΜΑΤΩΝ



Σημ.: 1. $\omega = \Omega T$
2. $X(\omega) \triangleq X(e^{j\omega})$

Εκθετική Σειρά Fourier

$$\alpha_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)\, e^{-jk\Omega_0 t}\, dt \qquad\qquad x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k\, e^{jk\Omega_0 t}$$

ανάλυση σύνθεση

όπου $\Omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

- Για περιοδικά σήματα συνεχούς χρόνου με βασική (κυκλική) συχνότητα Ω_0 και βασική περίοδο T.

- Οι συντελεστές α_k ονομάζονται συντελεστές της σειράς Fourier ή φασματικοί συντελεστές ή φασματικές γραμμές του $x(t)$.

- Ο συντελεστής α_0 αποτελεί τη σταθερή συνιστώσα ή dc του $x(t)$ και ισούται με

$$\alpha_0 = \frac{1}{T}\int_T x(t)\, dt$$

Πρόκειται για τη μέση τιμή του $x(t)$ σε μια περίοδο.

- Ο συντελεστής α_k αντιστοιχεί στην προβολή του σήματος $x(t)$ στην k-οστή ορθογώνια συνιστώσα $e^{jk\Omega_0 t}$, δηλώνει το φασματικό περιεχόμενο του $x(t)$ στη συχνότητα $k\Omega_0$ και ονομάζεται k-οστή αρμονική συνιστώσα.

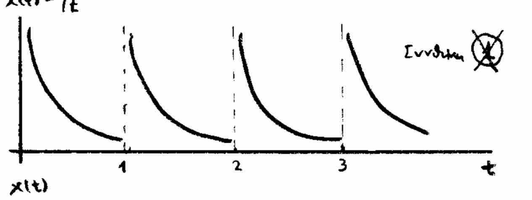
Συνθήκες Ύπαρξης Σειράς Fourier

- Το ανάπτυγμα ενός σήματος $x(t)$ σε σειρά Fourier υπάρχει όταν πληρούνται οι ακόλουθες συνθήκες Dirichlet:

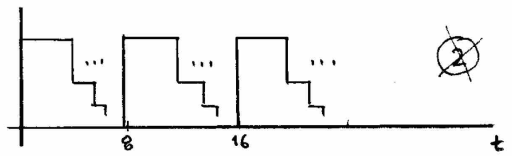
Συναρτήσεις που δεν πληρούν τις συνθήκες

(1) Η $x(t)$ είναι ολοκληρώσιμη κατ' απόλυτη τιμή στο διάστημα μιας περιόδου T

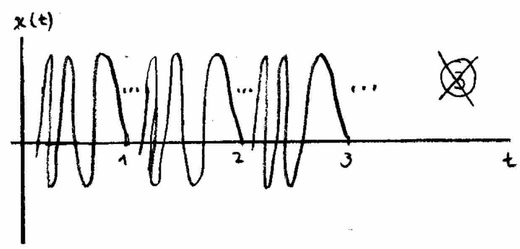
$$\int_T |x(t)|\, dt < \infty$$



(2) Η $x(t)$, σε κάθε πεπερασμένο χρονικό διάστημα, είναι συνεχής ή περιέχει πεπερασμένο αριθμό ασυνεχειών πεπερασμένου ύψους η καθεμία.



(3) Η $x(t)$, σε κάθε πεπερασμένο χρονικό διάστημα, είναι φραγμένης κύμανσης, δηλ. υπάρχει πεπερασμένος αριθμός μεγίστων και ελαχίστων στο διάστημα αυτό.



Ιδιότητες Σειράς Fourier

Ιδιότητα	Περιοδικό Σήμα	Συντελεστές ΣF
	$x(t)$, $y(t)$ } Περιοδικά με βασική περίοδο T και βασική συχνότητα $\Omega_0=2\pi/T$	a_k, b_k
Γραμμικότητα	$Ax(t)+By(t)$	Aa_k+Bb_k
Ολίσθηση στο χρόνο	$x(t-t_0)$	$e^{-jk\Omega_0 t_0}a_k$
Ολίσθηση στη συχνότητα	$e^{jM\Omega_0 t}x(t)$	a_{k-M}
Κλιμάκωση στο χρόνο	$x(at),\ a>0$ (περιοδικό με περίοδο T/a)	a_k (Προσοχή: το ανάπτυγμα έχει αλλάξει λόγω αλλαγής της βασικής συχν.)
Περιοδική Συνέλιξη	$\int_T x(\tau)\,y(t-\tau)\,d\tau$	$Ta_k b_k$
Πολλαπλασιασμός	$x(t)\,y(t)$	$\sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l b_{k-l}$
Παραγώγιση	$\frac{dx(t)}{dt}$	$jk\Omega_0 a_k$
Ολοκλήρωση	$\int_{-\infty}^{t} x(t)\,dt$	$\frac{1}{jk\Omega_0}a_k$

Κατοπτρισμός	$x(-t)$	a_{-k}
Συζυγία	$x^*(t)$	a^*_{-k}
Συζυγής Συμμετρία για Πραγματικά Σήματα	$x(t)$ πραγματικό	$\begin{cases} a_k = a^*_{-k} \\ Re\{a_k\} = Re\{a_{-k}\} \\ Im\{a_k\} = -Im\{a_{-k}\} \\ \lvert a_k\rvert = \lvert a_{-k}\rvert \\ \angle a_k = -\angle a_{-k} \end{cases}$
Πραγματικά & Άρτια Πραγματικά & Περιττά	$x(t)$ πραγματικό & άρτιο $x(t)$ πραγματικό & περιττό	a_k πραγματικό & άρτιο a_k φανταστικό & περιττό
Parseval για περιοδικά σήματα	$\frac{1}{T}\int_T \lvert x(t)\rvert^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lvert a_k\rvert^2$	

Παράδειγμα

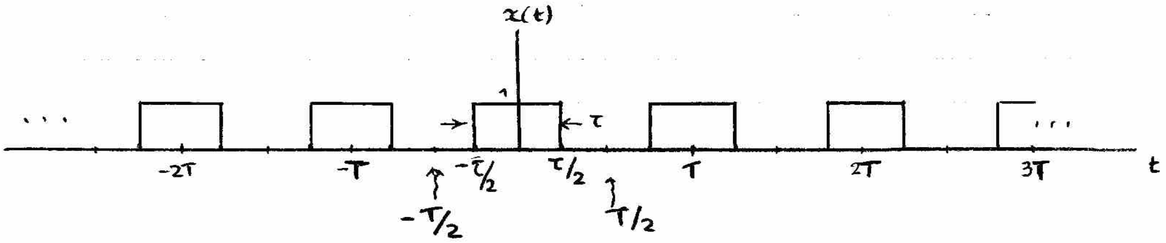
Να υπολογιστούν οι συντελεστές της σειράς Fourier του σήματος

$$x(t)=\begin{cases}1, & |t|<\tau/2\\ 0, & \tau/2<|t|<\frac{T}{2}\end{cases}$$

όπου T η βασική περίοδος του σήματος και $\Omega_0=\frac{2\pi}{T}$ η βασική συχνότητα.

Λύση

Πρόκειται για την περιοδική τετραγωνική κυματομορφή του σχήματος.



Λόγω της συμμετρίας γύρω από το 0 επιλέγουμε ως περίοδο ολοκλήρωσης T το διάστημα $-\frac{T}{2}\le t<\frac{T}{2}$. Στο ίδιο αποτέλεσμα θα καταλήγαμε και για οποιοδήποτε άλλο διάστημα αν επιλέγαμε.

Για $k=0$ έχουμε:

$$a_0=\frac{1}{T}\int_T x(t)\,dt=\frac{1}{T}\int_{-\tau/2}^{\tau/2}dt=\frac{\tau}{T}$$

Σημειώνεται ότι ο συντελεστής a_0 αντιπροσωπεύει τη μέση τιμή του σήματος σε μία περίοδο. Στην προκειμένη περίπτωση βλέπουμε ότι ισούται με το τμήμα της περιόδου κατά το οποίο $x(t)=1$.

Για $k\neq 0$ έχουμε:

$$a_k=\frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\Omega_0 t}\,dt=\frac{1}{T}\int_{-\tau/2}^{\tau/2}e^{-jk\Omega_0 t}\,dt=-\frac{1}{jk\Omega_0 T}\,e^{-jk\Omega_0 t}\Big|_{-\tau/2}^{\tau/2}=$$

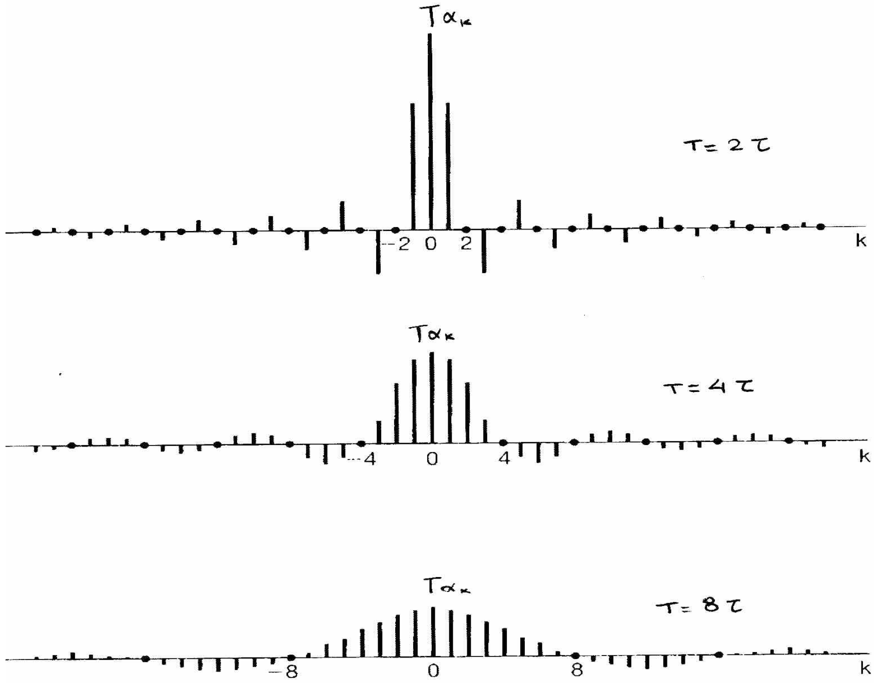
$$=\frac{2}{k\Omega_0 T}\left[\frac{e^{jk\Omega_0\tau/2}-e^{-jk\Omega_0\tau/2}}{2j}\right]=\frac{2\sin(k\Omega_0\tau/2)}{k\Omega_0 T}=\boxed{\frac{\sin(k\Omega_0\tau/2)}{k\pi}}$$

Στην ειδική περίπτωση κατά την οποία $T=2\tau$, δηλαδή έχουμε έναν περιοδικό τετραγωνικό παλμό ο οποίος έχει πλάτος ίσο με τη μονάδα στο μισό της περιόδου και μηδέν στο άλλο μισό (duty cycle = 50%), οι παραπάνω συντελεστές ισούνται με:

$$\boxed{a_0=\frac{1}{2}\quad,\quad a_k=\frac{\sin(k\frac{\pi}{2})}{k\pi}\quad,}\quad k\neq 0$$

Παρατηρούμε ότι $\boxed{a_k=0 \text{ για } k \text{ άρτιο}}$ και διάφορο του μηδενός.

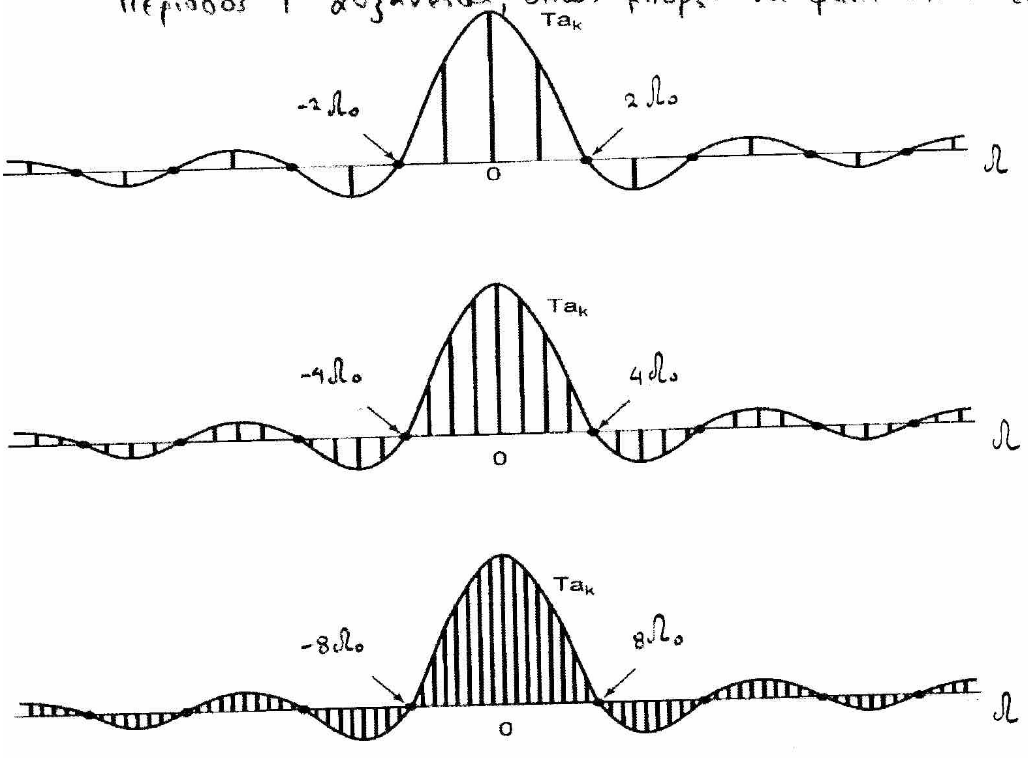
Επίσης, το $\sin(k\frac{\pi}{2})$ εναλλάσσεται μεταξύ ± 1 για διαδοχικές περιττές τιμές k.



Στο παραπάνω σχήμα δείχνονται οι συντελεστές της εκθετικής σειράς Fourier της περιοδικής τετραγωνικής κυματομορφής για σταθερό τ και διαφορετική περίοδο T.

Παρατηρούμε ότι οι συντελεστές αποτελούν ισαπέχοντα κατά $\frac{2\pi}{T}$ δείγματα της περιβάλλουσας συνάρτησης $\frac{2\sin(\Omega\tau/2)}{\Omega}$, όπου $\Omega = k\Omega_0$ και $\Omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

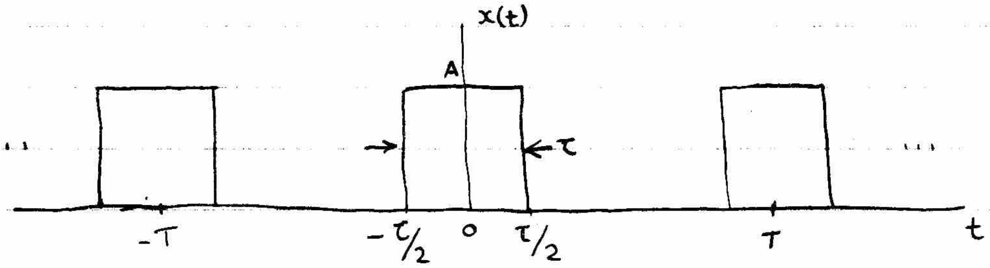
Η απόσταση μεταξύ των δειγμάτων μειώνεται καθώς η βασική περίοδος T αυξάνεται, όπως μπορεί να φανεί από τα επόμενα σχήματα.



Spectrum of Sine and Square Waves Demo
(by Alan Oppenheim, MIT)

Source - https://www.youtube.com/watch?v=KT3yNuY_FPM

Για το περιοδικό συμμετρικό τετραγωνικό σήμα του σχήματος, να σχεδιαστεί το φάσμα μέτρου και φάσης για διάρκεια παλμού $\tau = T/5$.



Οι συντελεστές της εκθετικής σειράς Fourier όπως είχαν υπολογιστεί στο παράδειγμα 5.4, είναι:

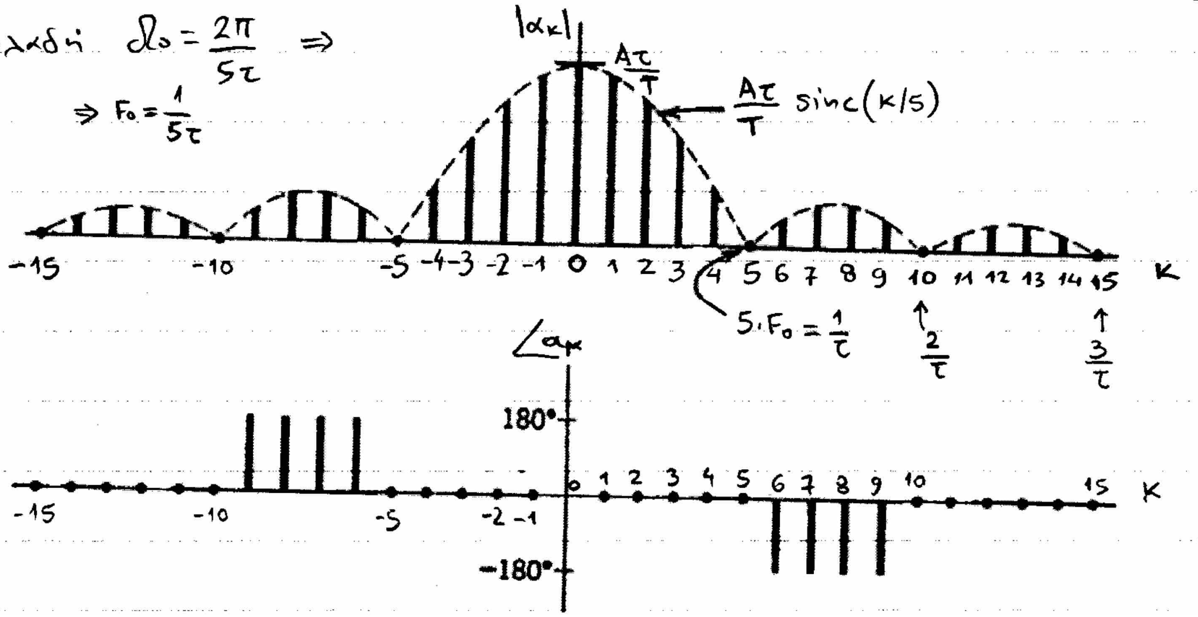
$$\alpha_0 = \frac{\tau}{T} A = \frac{A\tau}{T}$$

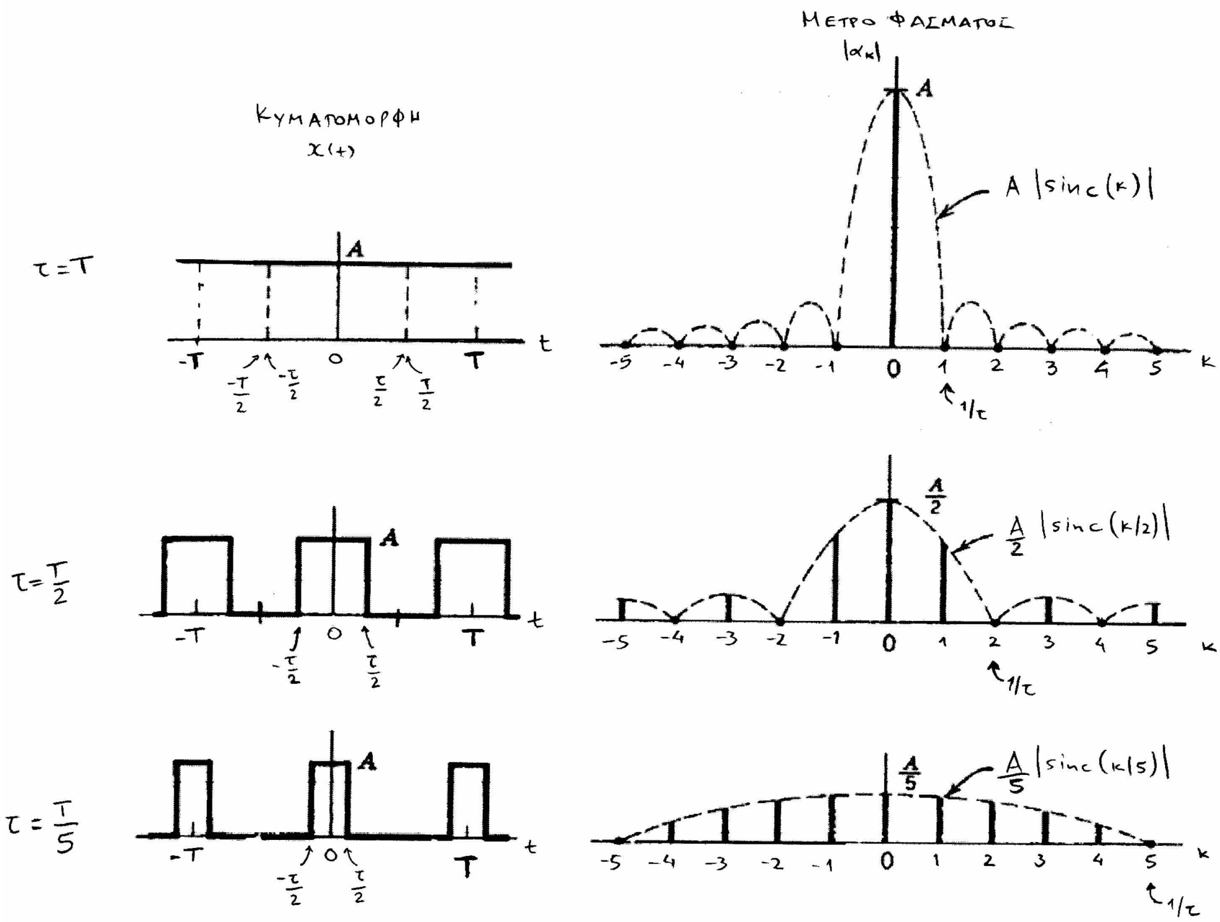
$$\alpha_k = A\,\frac{\sin(k\Omega_0 \tau/2)}{k\pi} = A\,\frac{\sin\left(k\frac{2\pi}{T}\frac{\tau}{2}\right)}{k\pi} = \frac{A\tau}{T}\,\frac{\sin\left(k\pi\frac{\tau}{T}\right)}{k\pi\frac{\tau}{T}} = \frac{A\tau}{T}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{k\tau}{T}\right)$$

Το φάσμα του μέτρου $|\alpha_k| = \frac{A\tau}{T}\left|\mathrm{sinc}\left(\frac{k\tau}{T}\right)\right|$ και της φάσης $\angle\alpha_k$ δείχνονται στο σχήμα για την περίπτωση $\tau = T/5 \Rightarrow \frac{\tau}{T} = \frac{1}{5}$

δηλαδή $\Omega_0 = \frac{2\pi}{5\tau} \Rightarrow$

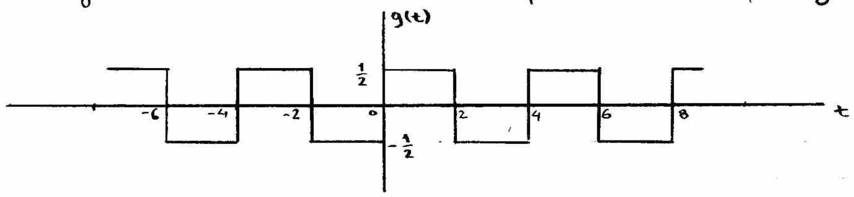
$\Rightarrow F_0 = \frac{1}{5\tau}$





Παράδειγμα

: Να υπολογιστούν οι συντελεστές της εκθετικής σειράς Fourier του σήματος $g(t)$.



Λύση

Συγκρίνοντας τη κυματομορφή αυτή με εκείνη του Παραδείγματος 5.4, βλέπουμε ότι $\tau = 2$, $T = 4$ και ότι υπάρχει μια χρονική καθυστέρηση κατά 1, ενώ το πλάτος κυμαίνεται μεταξύ $-1/2$ και $1/2$ αντί μεταξύ 0 και 1. Συνεπώς, η $g(t)$ εκφράζεται σε σχέση με την $x(t)$ του παραδείγματος 5.4, ως εξής:

$$g(t) = x(t-1) - \frac{1}{2}$$

Οι συντελεστές Fourier της $x(t-1)$ θα είναι $b_k = e^{-jk\Omega_0 1} a_k = e^{-jk\frac{2\pi}{T}} a_k = e^{-jk\frac{\pi}{2}} a_k$

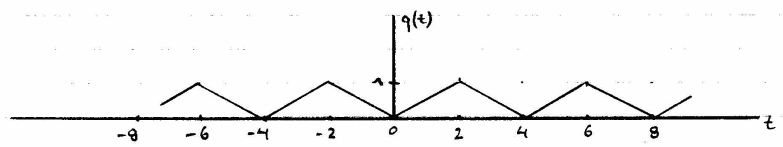
Για τη συνάρτηση $-\frac{1}{2}$ θα υπάρχει μόνο ο συντελεστής Fourier $C_0 = -\frac{1}{2}$, ενώ όλοι οι υπόλοιποι θα είναι μηδέν, δηλαδή $C_k = 0$ για $k \neq 0$

Τελικά, οι συντελεστές Fourier g_k της $g(t)$ θα ισούνται με:

$$g_k = e^{-jk\frac{\pi}{2}} a_k - C_k \Rightarrow g_k = \begin{cases} a_0 - \frac{1}{2}, & k=0 \\ a_k e^{-jk\frac{\pi}{2}}, & k \neq 0 \end{cases} \Rightarrow g_k = \begin{cases} 0 & \text{για } k=0 \\ \frac{\sin(k\frac{\pi}{2})}{k\pi} e^{-jk\frac{\pi}{2}} & \text{για } k \neq 0 \end{cases}$$

Παράδειγμα

Να υπολογιστούν οι συντελεστές Fourier του περιοδικού σήματος $q(t)$ του σχήματος.



Λύση

Η βασική περίοδος του σήματος είναι $T=4$ και συνεπώς η βασική συχνότητα $\Omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}$

Παρατηρούμε ότι η παράγωγος του $q(t)$ μας δίνει το σήμα $g(t)$ του παραδείγματος 5.6, δηλαδή $g(t) = \frac{dq(t)}{dt}$

Άρα οι συντελεστές Fourier S_k του $q(t)$ μπορούν να υπολογιστούν από τους συντελεστές Fourier d_k του $g(t)$ μέσω της ιδιότητας παραγώγισης

$$d_k = jk\Omega_0 S_k \Rightarrow S_k = \frac{1}{jk\Omega_0} d_k \Rightarrow S_k = \frac{1}{jk\frac{\pi}{2}} d_k = \frac{2}{jk\pi} d_k \Rightarrow$$

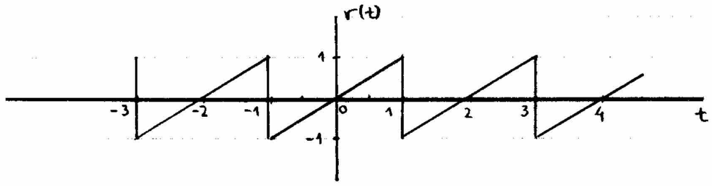
$$S_k = \frac{2}{jk\pi} \cdot \frac{\sin(k\frac{\pi}{2})}{k\pi} e^{-jk\frac{\pi}{2}} = \frac{2\sin(k\frac{\pi}{2})}{j(k\pi)^2} e^{-jk\frac{\pi}{2}} \quad \text{για } k \neq 0$$

Ο συντελεστής S_0 για $k=0$ προκύπτει από τον ορισμό

$$S_0 = \frac{1}{T}\int_T q(t)\,dt = \frac{1}{4} 2\int_0^2 \frac{t}{2}\,dt = \frac{1}{4} \frac{t^2}{2}\Big|_0^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{4}{2} - \frac{0}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Παράδειγμα

Να υπολογιστούν οι συντελεστές της μιγαδικής σειράς Fourier του σήματος $r(t)$.



Λύση

Η βασική περίοδος είναι $T=2$ και συνεπώς η βασική συχνότητα $\Omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \pi$

Το σήμα περιγράφεται από τη σχέση $r(t) = t$, $|t|<1$.

Με βάση την εξίσωση ανάλυσης υπολογίζουμε τους συντελεστές Fourier a_k.

Για $k=0 \rightsquigarrow a_0 = \frac{1}{T}\int_T r(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} t\,dt = \frac{1}{2}\,\frac{t^2}{2}\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{4}\left[1^2-(-1)^2\right] = 0$

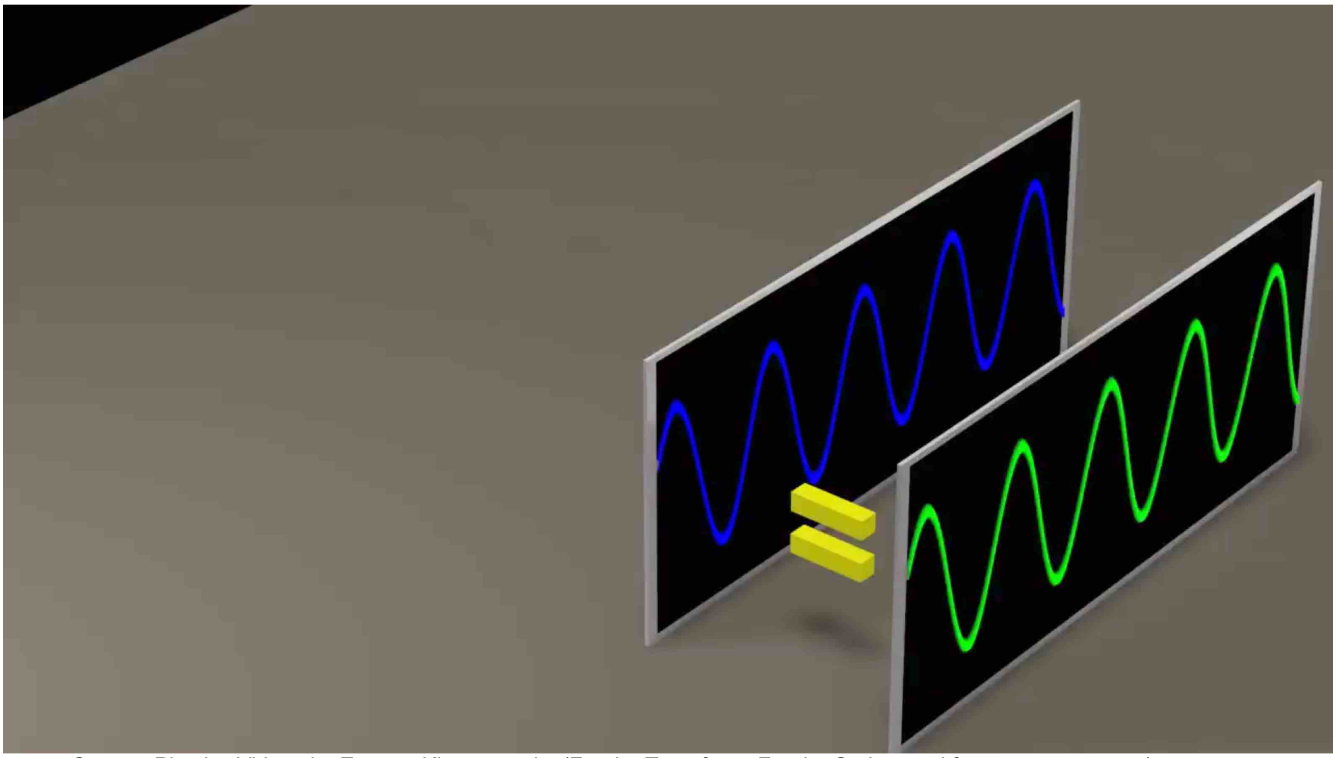
Για $k\neq 0 \rightsquigarrow a_k = \frac{1}{T}\int_T r(t)\,e^{-j\Omega_0 k t}\,dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} t\,e^{-jk\pi t}\,dt = \frac{-1}{2jk\pi}\int_{-1}^{1} t\,d e^{-jk\pi t} =$

$= \langle$ με ολοκλήρωση κατά παράγοντες $\rangle =$

$$= \frac{-1}{2jk\pi}\left[t\,e^{-jk\pi t}\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} e^{-jk\pi t}\,dt\right] =$$

$$= \frac{-1}{2jk\pi}\left[e^{-jk\pi} + e^{jk\pi} + \frac{1}{jk\pi}\,e^{-jk\pi t}\Big|_{-1}^{1}\right] = \frac{j}{2k\pi}\left[2\cos(k\pi) - \frac{1}{jk\pi}\,2j\sin(k\pi)\right] =$$

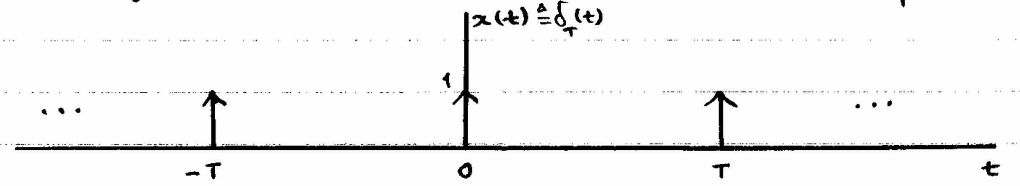
$= \frac{j(-1)^k}{k\pi}$ αφού $\cos(k\pi) = (-1)^k$ και $\sin(k\pi) = 0$



Source: Physics Videos by Eugene Khutoryansky (Fourier Transform, Fourier Series, and frequency spectrum)
https://www.youtube.com/watch?v=r18Gi8lSkfM

Παράδειγμα

Να υπολογιστούν οι συντελεστές Fourier του περιοδικού τραίνου κρουστικών.

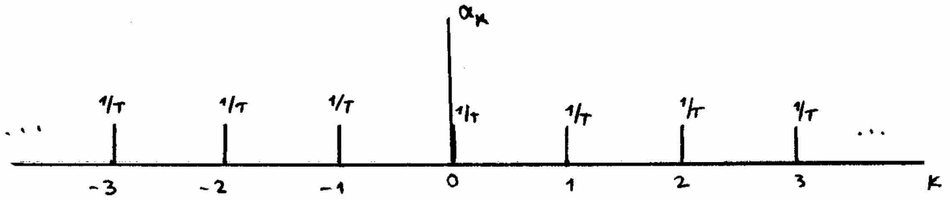


Το περιοδικό αυτό σήμα, του οποίου η περίοδος είναι T, μπορεί να εκφραστεί ως

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$$

Οι συντελεστές της σειράς Fourier μπορούν να υπολογιστούν από τον ορισμό και για περίοδο ολοκλήρωσης $-T/2 \le t \le T/2$, (ώστε να αποφύγουμε να έχουμε κρουστικές στα όρια ολοκλήρωσης).

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \delta(t)\, e^{-jk\Omega_0 t}\, dt = \frac{1}{T}$$



Άρα, με βάση την εξίσωση σύνθεσης το τραίνο κρουστικών εκφράζεται ως:

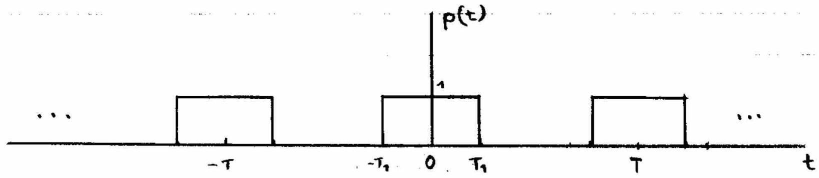
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\Omega_0 t} \Rightarrow$$

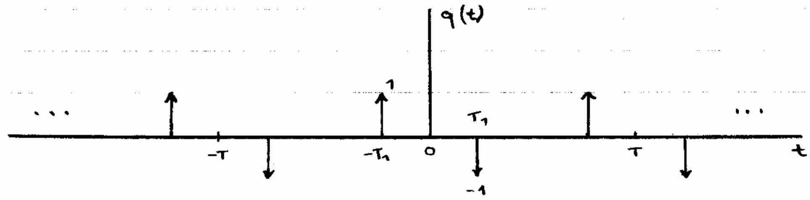
$$\delta_T(t) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\Omega_0 t}$$

Παράδειγμα

Να υπολογιστούν οι συντελεστές Fourier του σήματος του παραδείγματος 5.4 με τη βοήθεια των συντελεστών του τραίνου κρουστικών.

Λύση





Η παράγωγος του p(t) μας δίνει το q(t), δηλαδή $q(t)=\frac{dp(t)}{dt}$

Το σήμα q(t) μπορεί να εκφραστεί με βάση το τραίνο κρουστικών του παραδείγματος 5.13 ως εξής:

$$q(t)=x(t+T_1)-x(t-T_1)$$

Έστω p_k οι συντελεστές Fourier του p(t) και q_k οι συντελεστές Fourier του q(t). Με βάση την ανωτέρω σχέση και την ιδιότητα ολίσθησης στο χρόνο:

$$q_k = e^{jk\Omega_0 T_1} a_k - e^{-jk\Omega_0 T_1} a_k = a_k\left[e^{jk\Omega_0 T_1} - e^{-jk\Omega_0 T_1}\right] =$$

$$= a_k \cdot 2j\sin(k\Omega_0 T_1) = \frac{2j}{T}\sin(k\Omega_0 T_1)$$

όπου $\Omega_0=\frac{2\pi}{T}$, $a_k=\frac{1}{T}$ (βλ. παρ. 5.13)

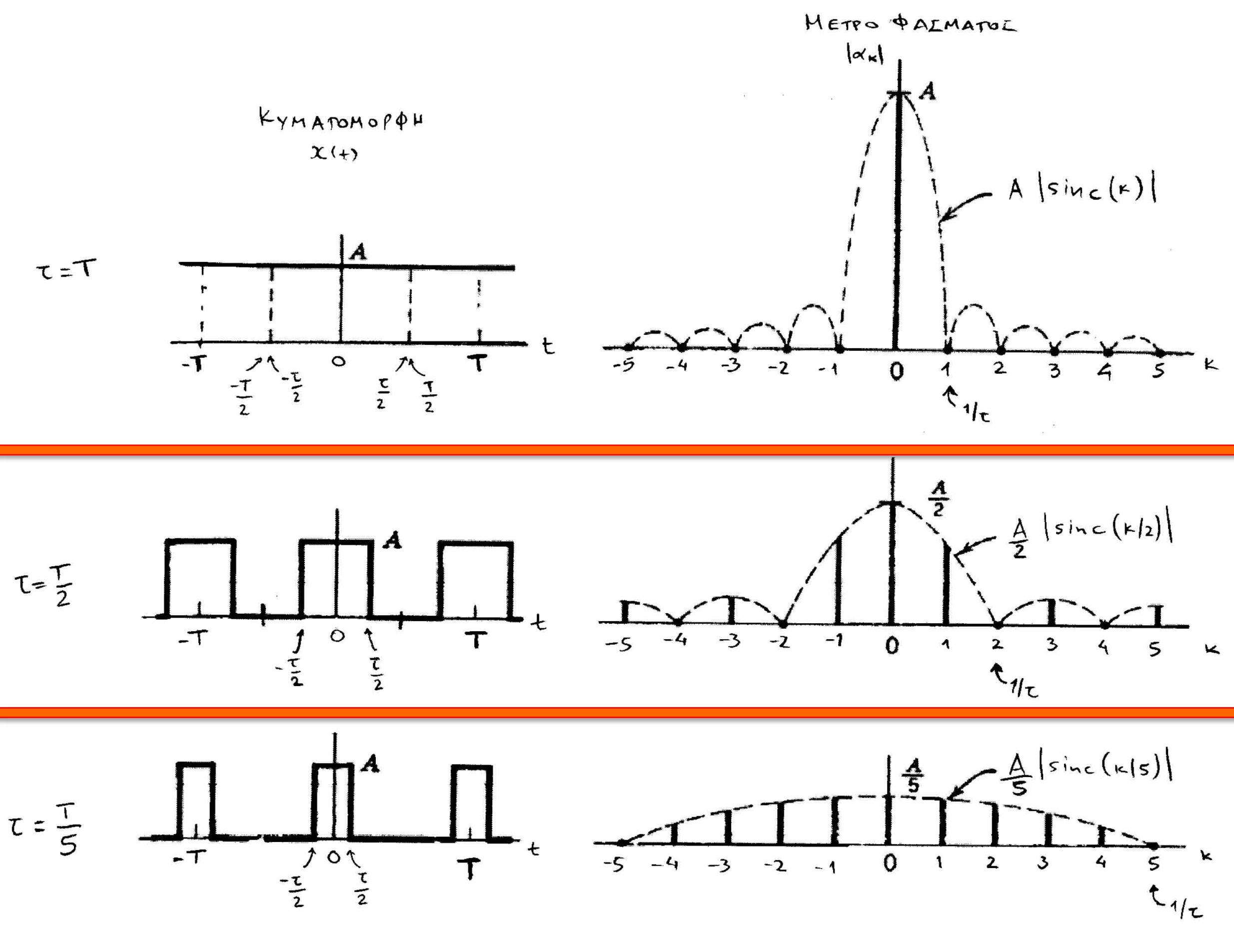
Από την ιδιότητα της παραγώγισης έχουμε:

$$q_k = jk\Omega_0 p_k \Rightarrow p_k = \frac{q_k}{jk\Omega_0} \Rightarrow$$

$$p_k = \frac{2j\sin(k\Omega_0 T_1)}{jk\Omega_0 T} = \frac{\sin(k\Omega_0 T_1)}{k\pi} \quad \text{για } k \neq 0$$

Ο συντελεστής p_0 δεν μπορεί να προσδιοριστεί από την ανωτέρω σχέση. Υπολογίζεται εύκολα όμως από τον ορισμό ή απλά ως η μέση τιμή του σήματος p(t) στη διάρκεια μιας περιόδου.

$$p_0 = \frac{2T_1}{T}$$



Στα παραδείγματα 5.4 και 5.14 υπολογίσαμε τους συντελεστές της σειράς Fourier α_k του περιοδικού τετραγωνικού τραίνου παλμών $x(t)$ με περίοδο T και διάρκεια παλμού τ.

$$\alpha_0 = \frac{\tau}{T}, \qquad \alpha_k = \frac{\sin(k\Omega_0\tau/2)}{k\pi} \quad \text{για } k \neq 0$$

Ειδικά για την περίπτωση της συμμετρικής τετραγωνικής κυματομορφής κατά την οποία $T = 2\tau$, όπου T η βασική περίοδος και $\Omega_0 = \frac{2\pi}{T}$, οι παραπάνω σχέσεις γίνονται:

$$\boxed{\alpha_0 = \frac{1}{2}, \qquad \alpha_k = \frac{\sin(k\frac{\pi}{2})}{k\pi} = \frac{1}{2}\,\frac{\sin(k\frac{\pi}{2})}{k\frac{\pi}{2}} \quad \text{για } k \neq 0}$$

Άρα το περιοδικό τραίνο παλμών εκφράζεται ως:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\Omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{2}\,\frac{\sin(k\frac{\pi}{2})}{k\frac{\pi}{2}}}_{\text{άρτια συνάρτηση}} e^{jk\Omega_0 t} =$$

$$= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2}\,\frac{\sin(k\pi/2)}{k\pi/2}\cdot\left(e^{jk\Omega_0 t} + e^{-jk\Omega_0 t}\right) =$$

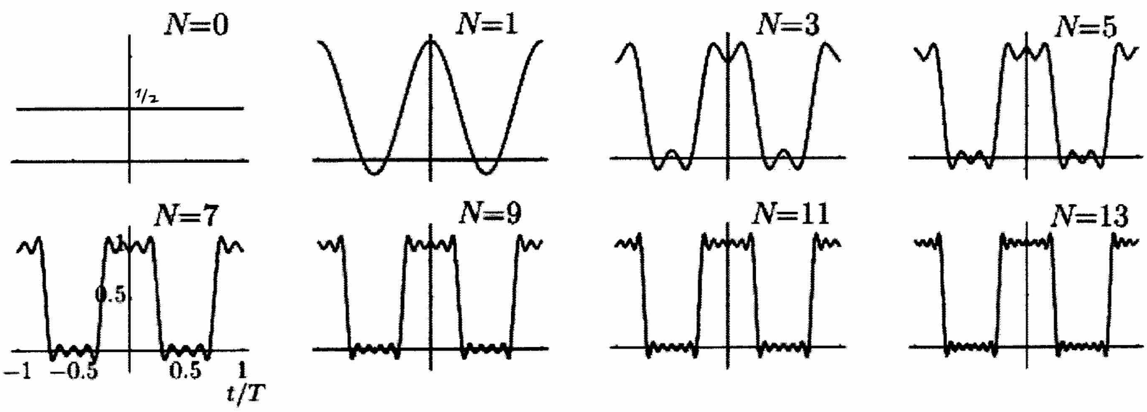
$$= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k\pi/2)}{k\pi/2}\cos(k\Omega_0 t) \qquad \text{όπου } \Omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

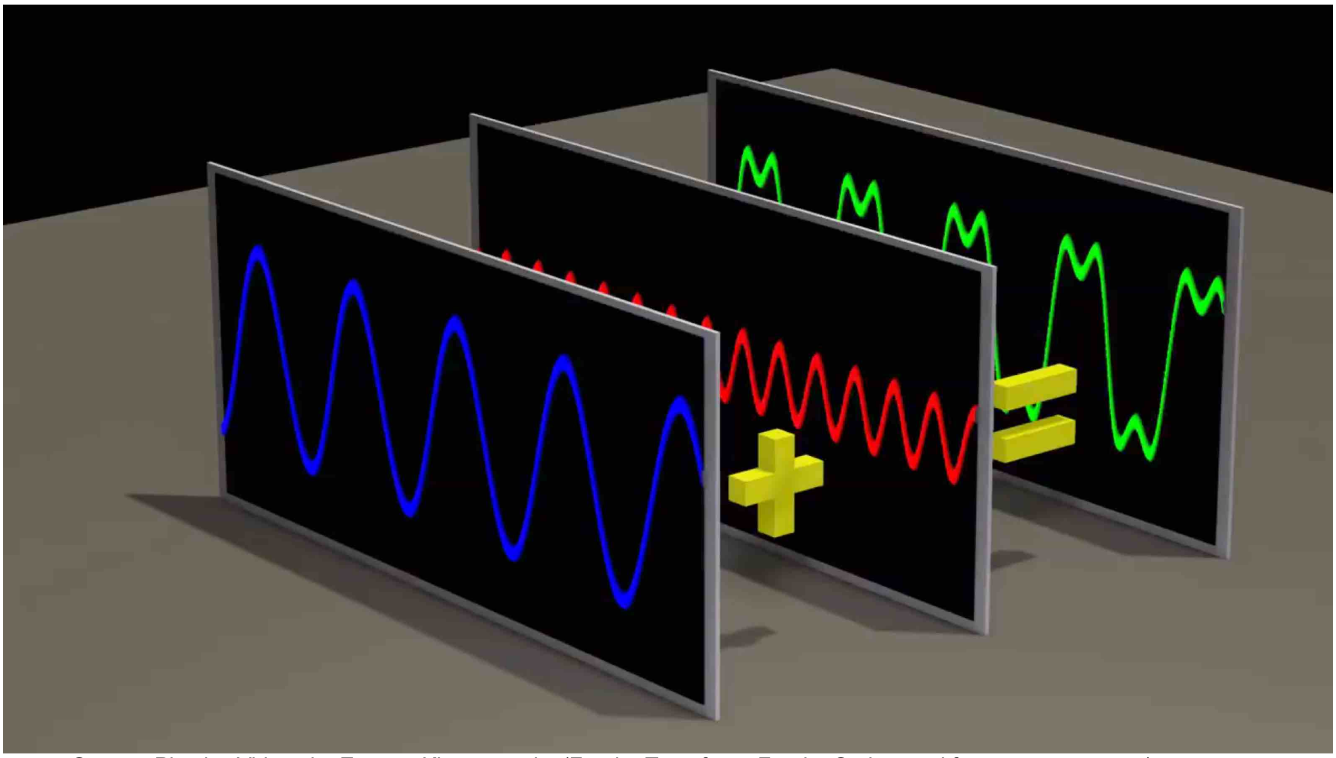
Παρατηρήστε ότι όλες οι άρτιες αρμονικές είναι μηδέν!

Παρατηρούμε ότι το περιοδικό τραίνο παλμών ανακατασκευάζεται πλήρως προσθέτοντας έναν άπειρο, αλλά αριθμήσιμο, αριθμό περιττών αρμονικών.

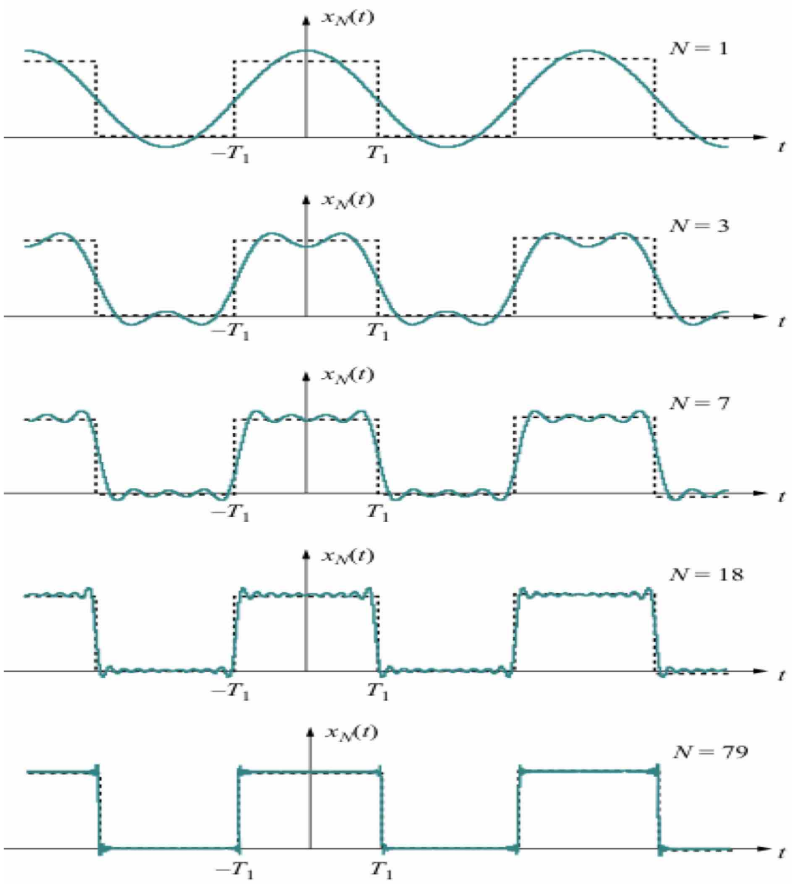
Τι συμβαίνει όμως εάν χρησιμοποιήσουμε τις πρώτες N αρμονικές, δηλαδή

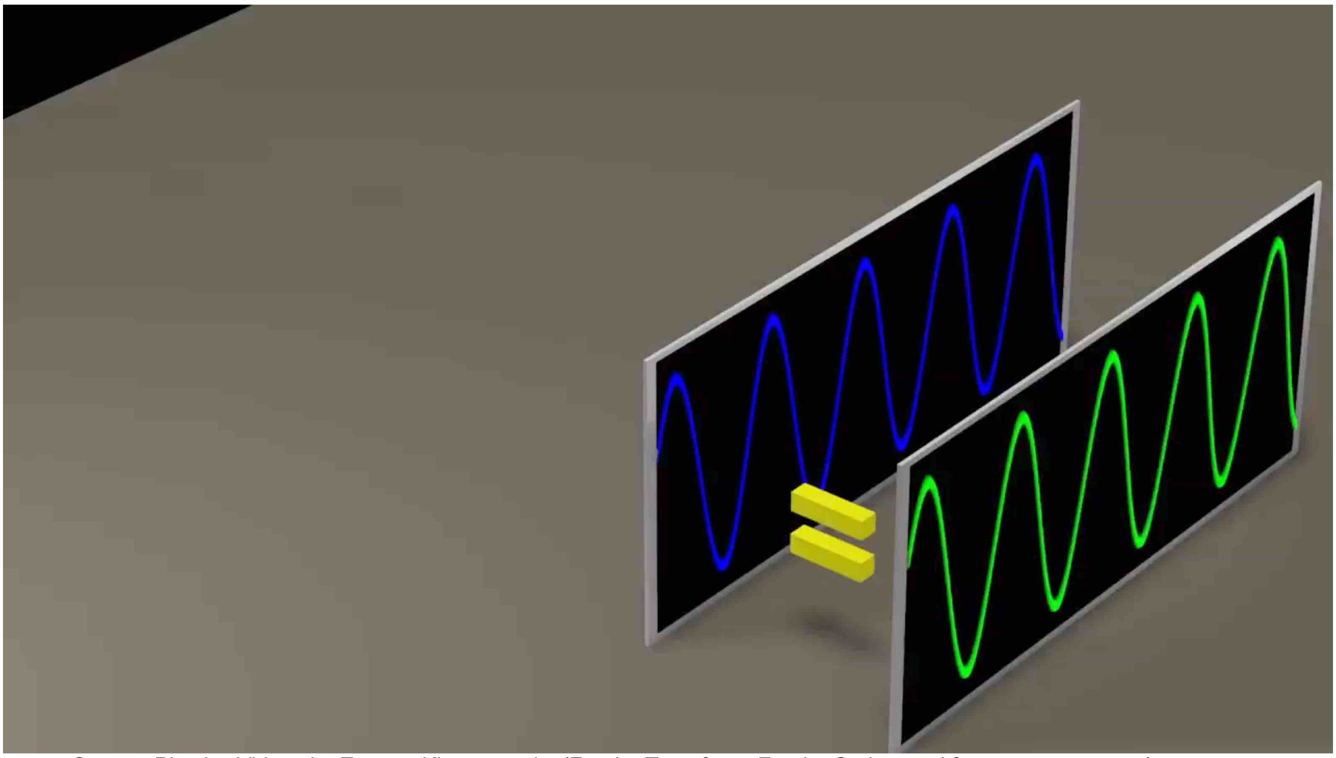
$$x_N(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{N} \frac{\sin(k\pi/2)}{k\pi/2} \cos(k\omega_0 t)$$



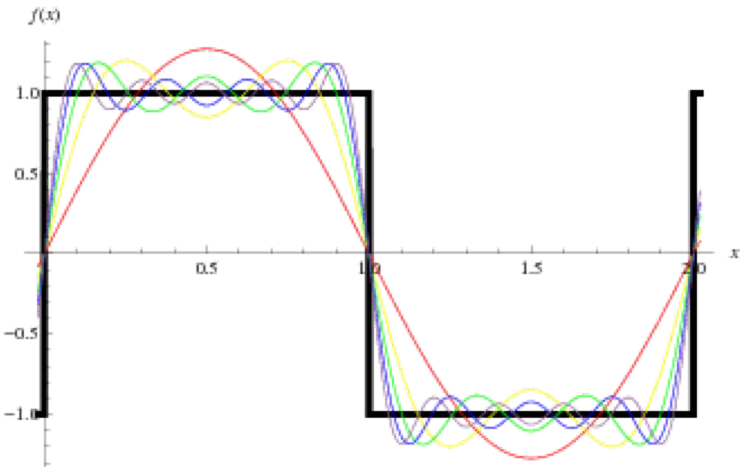


Source: Physics Videos by Eugene Khutoryansky (Fourier Transform, Fourier Series, and frequency spectrum)
https://www.youtube.com/watch?v=r18Gi8lSkfM





Source: Physics Videos by Eugene Khutoryansky (Fourier Transform, Fourier Series, and frequency spectrum)
https://www.youtube.com/watch?v=r18Gi8lSkfM



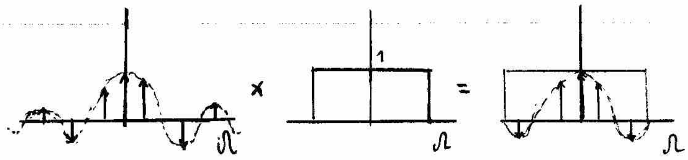
Παρατηρούμε ότι σε κάθε πλευρά της ασυνέχειας παρουσιάζονται ταλαντώσεις των οποίων το μέγιστο πλάτος είναι κατά <u>9%</u> μεγαλύτερο ή μικρότερο του συνολικού πλάτους της ασυνέχειας και <u>ανεξάρτητο του N.</u>

Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται Gibbs προς τιμήν του Josiah Gibbs ο οποίος το μελέτησε και εξήγησε το 1899.

Ένας απλός τρόπος εξήγησης / κατανόησης του φαινομένου Gibbs είναι μέσω της διαδικασίας φιλτραρίσματος και των ιδιοτήτων συνέλιξης και πολλαπλασιασμού.

Επεξήγηση του Φαινομένου Gibbs

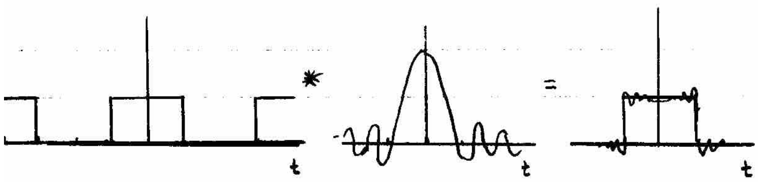
Το ότι από όλο το φάσμα των συχνοτήτων 'κρατάμε' (επιλέγουμε) έναν πεπερασμένο αριθμό N από αυτές, είναι ισοδύναμο με τον πολλαπλασιασμό του φάσματος με ένα τετραγωνικό παράθυρο.



Πολλαπλασιασμός στη συχνότητα

Συνέλιξη στο χρόνο

Ισοδύναμα, στο πεδίο του χρόνου θα έχουμε συνέλιξη των αντίστοιχων κυματομορφών.



Καταλαβαίνουμε ότι εάν αντί του τετραγωνικού παραθύρου πεπερασμένης διάρκειας είχαμε ένα παράθυρο άπειρης διάρκειας (δηλ. ίσο με 1 σε όλο το φάσμα), τότε αυτό συνεπάγεται ότι έχουμε την κρουστική στο χρόνο (και όχι την sinx/x του σχήματος) και άρα δεν θα υπάρχουν ταλαντώσεις ως αποτέλεσμα της συνέλιξης