ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

4 – ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΕΙΡΑ FOURIER

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ ΣΚΟΔΡΑΣ

2023 - 2024

Σειρά Fourier (ΣF)

$$\alpha_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\, e^{-jk\Omega_0 t}\, dt \qquad\qquad x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k\, e^{jk\Omega_0 t}$$

ανάλυση — σύνθεση

όπου $\Omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

- Για περιοδικά σήματα συνεχούς χρόνου με βασική (κυκλική) συχνότητα Ω_0 και βασική περίοδο T_0.

- Οι συντελεστές α_k ονομάζονται συντελεστές της σειράς Fourier ή φασματικοί συντελεστές ή φασματικές γραμμές του $x(t)$.

- Ο συντελεστής α_0 αποτελεί τη σταθερή συνιστώσα ή dc του $x(t)$ και ισούται με

$$\alpha_0 = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\, dt$$

Πρόκειται για τη μέση τιμή του $x(t)$ σε μια περίοδο.

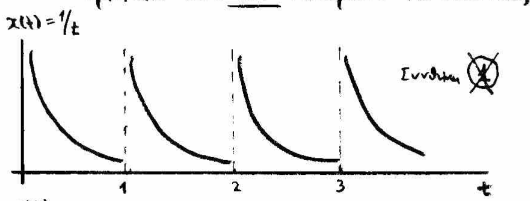
- Ο συντελεστής α_k αντιστοιχεί στην προβολή του σήματος $x(t)$ στην k-οστή ορθογώνια συνιστώσα $e^{jk\Omega_0 t}$, δηλώνει το φασματικό περιεχόμενο του $x(t)$ στη συχνότητα $k\Omega_0$ και ονομάζεται k-οστή αρμονική συνιστώσα.

- Το ανάπτυγμα ενός σήματος $x(t)$ σε σειρά Fourier υπάρχει όταν πληρούνται οι ακόλουθες συνθήκες Dirichlet:

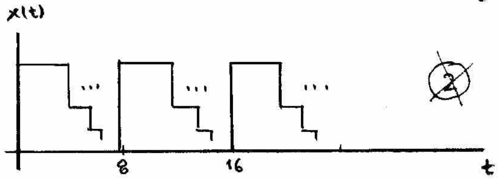
Συναρτήσεις που δεν πληρούν τις συνθήκες

① Η $x(t)$ είναι ολοκληρώσιμη κατ' απόλυτη τιμή στο διάστημα μιας περιόδου T_0

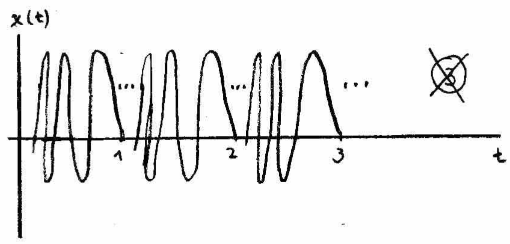
$$\int_{T_0} |x(t)|\, dt < \infty$$



② Η $x(t)$, σε κάθε πεπερασμένο χρονικό διάστημα, είναι συνεχής ή περιέχει πεπερασμένο αριθμό ασυνεχειών πεπερασμένου ύψους η καθεμία.



③ Η $x(t)$, σε κάθε πεπερασμένο χρονικό διάστημα, είναι φραγμένης κύμανσης, δηλ. υπάρχει πεπερασμένος αριθμός μεγίστων και ελαχίστων στο διάστημα αυτό.



ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΕΙΡΑΣ FOURIER

Ιδιότητα	Περιοδικό Σήμα	Συντελεστές ΣF
	$x(t)$, $y(t)$ } Περιοδικά με βασική περίοδο T_0 και βασική συχνότητα $\Omega_0 = 2\pi/T_0$	a_k b_k
Γραμμικότητα	$Ax(t) + By(t)$	$Aa_k + Bb_k$
Ολίσθηση στο χρόνο	$x(t-t_0)$	$e^{-jk\Omega_0 t_0} a_k$
Ολίσθηση στη συχνότητα	$e^{jM\Omega_0 t} x(t)$	a_{k-M}
Κλιμάκωση στο χρόνο	$x(at)$, $a>0$ (περιοδικό με περίοδο T_0/a)	a_k (Προσοχή: το ανάπτυγμα έχει αλλάξει λόγω αλλαγής της βασικής συχν.)
Περιοδική Συνέλιξη	$\int_{T_0} x(\tau)\, y(t-\tau)\, d\tau$	$T_0 a_k b_k$
Πολλαπλασιασμός	$x(t)\, y(t)$	$\sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l b_{k-l}$
Παραγώγιση	$\frac{dx(t)}{dt}$	$jk\Omega_0 a_k$
Ολοκλήρωση	$\int_{-\infty}^{t} x(t)\, dt$	$\frac{1}{jk\Omega_0} a_k$
Κατοπτρισμός	$x(-t)$	a_{-k}
Συζυγία	$x^*(t)$	a^*_{-k}
Συζυγής Συμμετρία για Πραγματικά Σήματα	$x(t)$ πραγματικό	$a_k = a^*_{-k}$ $Re\{a_k\} = Re\{a_{-k}\}$ $Im\{a_k\} = -Im\{a_{-k}\}$ $\lvert a_k \rvert = \lvert a_{-k} \rvert$ $\angle a_k = -\angle a_{-k}$
Πραγματικά & Άρτια Πραγματικά & Περιττά	$x(t)$ πραγματικό & άρτιο $x(t)$ πραγματικό & περιττό	a_k πραγματικός & άρτιος a_k φανταστικός & περιττός
Parseval για περιοδικά σήματα	$\frac{1}{T_0}\int_{T_0} \lvert x(t)\rvert^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lvert a_k \rvert^2$	

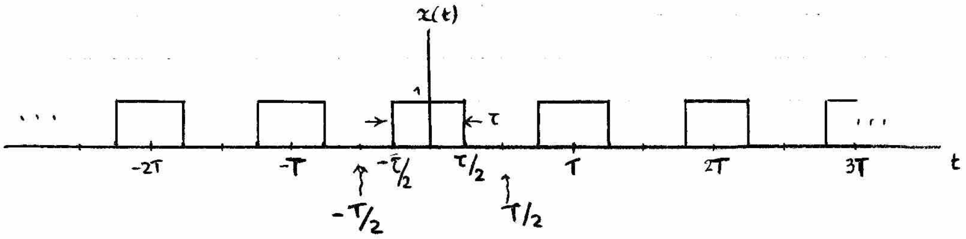
Παράδειγμα 5.4: Να υπολογιστούν οι συντελεστές της σειράς Fourier του σήματος

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < \tau/2 \\ 0, & \tau/2 < |t| < \frac{T}{2} \end{cases}$$

όπου T η βασική περίοδος του σήματος και $\Omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ η βασική συχνότητα.

Λύση

Πρόκειται για την περιοδική τετραγωνική κυματομορφή του σχήματος.



Λόγω της συμμετρίας γύρω από το 0 επιλέγουμε ως περίοδο ολοκλήρωσης T το διάστημα $-\frac{T}{2} \le t < \frac{T}{2}$. Στο ίδιο αποτέλεσμα θα καταλήγαμε και για οποιοδήποτε άλλο διάστημα αν επιλέγαμε.

Για $k=0$ έχουμε:

$$\alpha_0 = \frac{1}{T}\int_T x(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} dt = \frac{\tau}{T}$$

Σημειώνεται ότι ο συντελεστής α_0 αντιπροσωπεύει τη μέση τιμή του σήματος σε μια περίοδο. Στην προκειμένη περίπτωση βλέπουμε ότι ισούται με το τμήμα της περιόδου κατά το οποίο $x(t)=1$.

Για $k \neq 0$ έχουμε:

$$\alpha_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)\,e^{-jk\Omega_0 t}\,dt = \frac{1}{T}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-jk\Omega_0 t}\,dt = -\frac{1}{jk\Omega_0 T}\, e^{-jk\Omega_0 t}\Big|_{-\tau/2}^{\tau/2} =$$

$$= \frac{2}{k\Omega_0 T}\left[\frac{e^{jk\Omega_0 \tau/2} - e^{-jk\Omega_0 \tau/2}}{2j}\right] = \frac{2\sin(k\Omega_0 \tau/2)}{k\Omega_0 T} = \frac{\sin(k\Omega_0 \tau/2)}{k\pi}$$

$T=2\tau$ ▶ Στην ειδική περίπτωση κατά την οποία $T=2\tau$, δηλαδή έχουμε έναν περιοδικό τετραγωνικό παλμό ο οποίος έχει πλάτος ίσο με τη μονάδα στο μισό της περιόδου και μηδέν στο άλλο μισό (duty cycle = 50%), οι παραπάνω συντελεστές ισούνται με:

$$\alpha_0 = \frac{1}{2}, \quad \alpha_k = \frac{\sin(k\frac{\pi}{2})}{k\pi}, \quad k \neq 0$$

Παρατηρούμε ότι $\alpha_k = 0$ για k άρτιο και διάφορο του μηδενός. Επίσης, το $\sin(k\frac{\pi}{2})$ εναλλάσσεται μεταξύ ± 1 για διαδοχικές περιττές τιμές k.

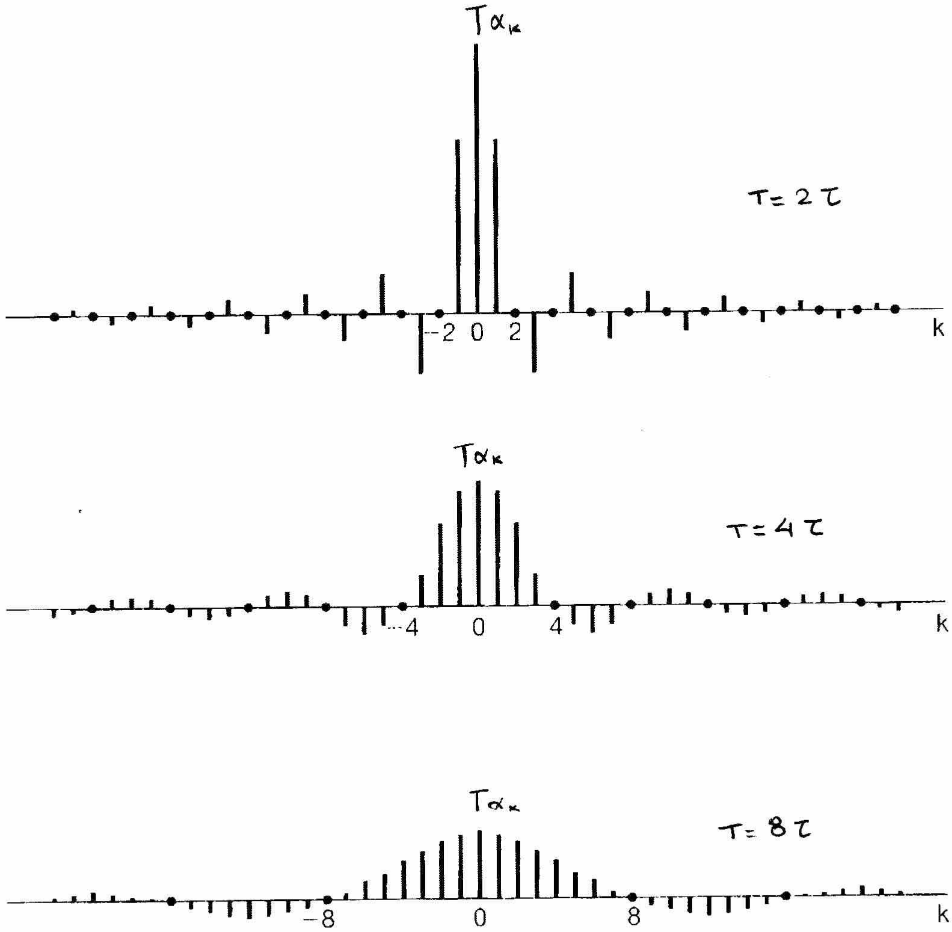
$$\alpha_1 = \alpha_{-1} = \frac{1}{\pi}$$

$$\alpha_3 = \alpha_{-3} = -\frac{1}{3\pi}$$

$$\alpha_5 = \alpha_{-5} = \frac{1}{5\pi}$$

$$\vdots$$

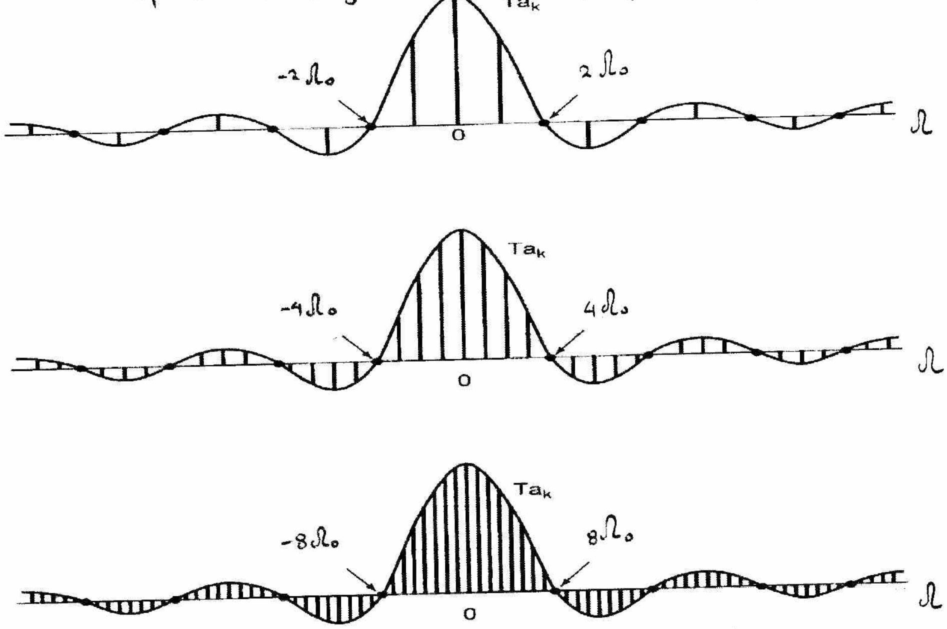
Η ειδική αυτή περίπτωση φαίνεται στο πρώτο σχήμα της επόμενης σελίδας.



Στο παραπάνω σχήμα δείχνονται
οι συντελεστές της εκθετικής σειράς Fourier της περιοδικής
τετραγωνικής κυματομορφής για σταθερό τ και διαφορετική περίοδο T.

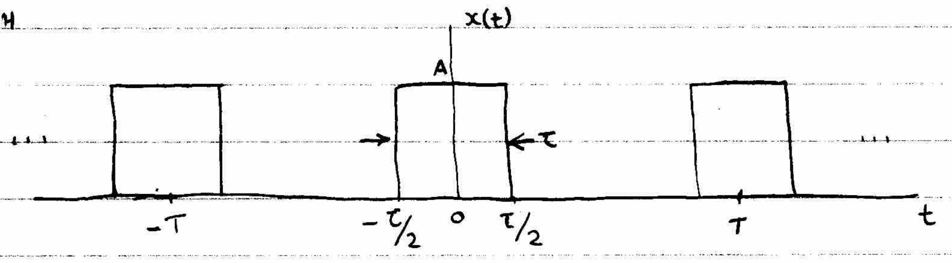
Παρατηρούμε ότι οι συντελεστές αποτελούν ισαπέχοντα κατά $\frac{2\pi}{T}$
δείγματα της περιβάλλουσας συνάρτησης $\frac{2\sin(\Omega\tau/2)}{\Omega}$, όπου $\Omega = k\Omega_0$ και $\Omega_0 = \frac{2\pi}{T}$.

Η απόσταση μεταξύ των συντελεστών μειώνεται καθώς η βασική
περίοδος T αυξάνεται, όπως μπορεί να φανεί από τα επόμενα σχήματα.



ΑΣΚΗΣΗ Για το περιοδικό συμμετρικό τετραγωνικό σήμα του σχήματος, να σχεδιαστεί το φάσμα (μέτρο και φάση) για διάρκεια παλμού $\tau = T/5$.

Λύση



Οι συντελεστές της εκθετικής σειράς Fourier, όπως είχαν υπολογιστεί στο παράδειγμα 5.4, είναι:

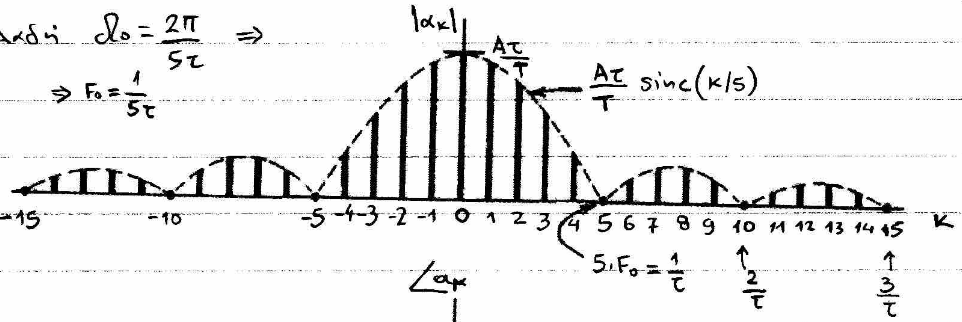
$$\alpha_0 = \frac{\tau}{T}A = \frac{A\tau}{T}$$

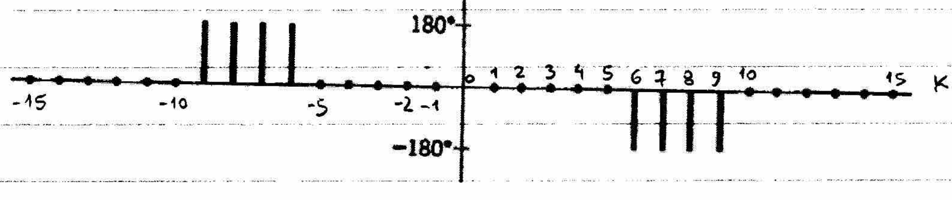
$$\alpha_k = A\,\frac{\sin(k\Omega_0\tau/2)}{k\pi} = A\,\frac{\sin\left(k\frac{2\pi}{T}\frac{\tau}{2}\right)}{k\pi} = \frac{A\tau}{T}\,\frac{\sin\left(k\pi\frac{\tau}{T}\right)}{k\pi\frac{\tau}{T}} = \frac{A\tau}{T}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{k\tau}{T}\right)$$

Το μέτρο του φάσματος $|\alpha_k| = \frac{A\tau}{T}\left|\mathrm{sinc}\left(\frac{k\tau}{T}\right)\right|$ και η φάση $\angle\alpha_k$ δείχνονται στο σχήμα για την περίπτωση $\tau = T/5 \Rightarrow \frac{\tau}{T} = \frac{1}{5}$

δηλαδή $\Omega_0 = \frac{2\pi}{5\tau} \Rightarrow$

$\Rightarrow F_0 = \frac{1}{5\tau}$





* για k>0.

Για παράδειγμα, έστω ότι $\alpha_k = -0.45$. Γράφουμε $\alpha_k = 0.45\,e^{-j\pi}$ όταν $k>0$ και $\alpha_k = 0.45\,e^{j\pi}$ όταν $k<0$. Έτσι, γίνεται φανερή η αντισυμμετρικότητα της φάσης και η αρνητική τιμή (καθυστέρηση)*

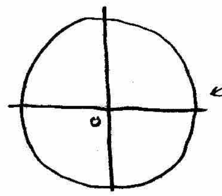
Παρατηρούμε ότι οι συντελεστές "διαμορφώνονται" από τη συνάρτηση $|\mathrm{sinc}(k/5)|$. Επίσης παρατηρούμε τη σταθερή απόσταση μεταξύ των συντελεστών, την άρτια συμμετρία του μέτρου ως αποτέλεσμα του ότι το σήμα είναι πραγματικό, τους μηδενικούς συντελεστές για συχνότητες πολλαπλάσιες της $5 \cdot F_0 = \frac{1}{\tau}$. Η φάση έχει περιττή συμμετρία.

Η φάση του φάσματος έχει προκύψει παρατηρώντας ότι οι συντελεστές α_k είναι πάντοτε πραγματικοί, αλλά ορισμένες φορές αρνητικοί. Έτσι, "απορροφώντας" τα αρνητικά πλάτη στη φάση, έχουμε $\angle\alpha_k = 0$ όταν $\mathrm{sinc}(k/5) \geq 0$ και $\angle\alpha_k = \pm 180°$ όταν $\mathrm{sinc}(k/5) < 0$.

Σημείωση

Σχετικά με την κατανόηση της φάσης για έναν πραγματικό αριθμό θετικό ή αρνητικό, μπορούμε να δούμε τα εξής παραδείγματα

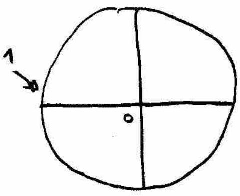
1. $\alpha =$ θετικός πραγματικός, έστω $\alpha = 0,45$



$$\alpha = |\alpha| e^{j\varphi} = |\alpha| (\cos\varphi + j \sin\varphi) =$$
$$= 0,45 (\underbrace{\cos\varphi}_{1} + j \underbrace{\sin\varphi}_{0})$$

Αυτό ισχύει για $\varphi = 0$ ή γενικότερα $\varphi = 2k\pi$ όπου k ακέραιος.

2. $\alpha =$ αρνητικός πραγματικός, έστω $\alpha = -0.45$



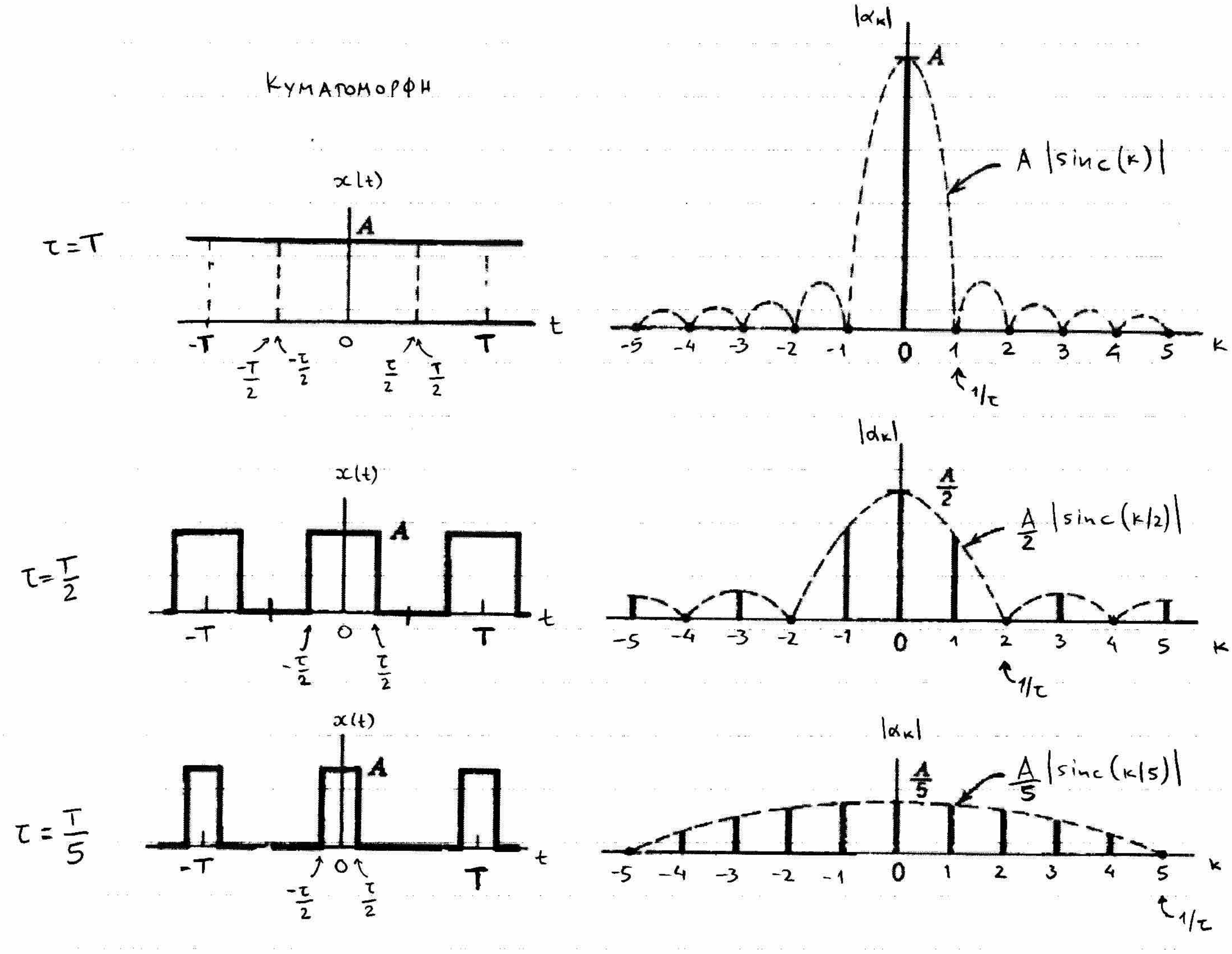
$$\alpha = |\alpha| e^{j\varphi} = |\alpha| (\cos\varphi + j \sin\varphi) =$$
$$= 0.45 (\underbrace{\cos\varphi}_{-1} + j \underbrace{\sin\varphi}_{0})$$

Αυτό ισχύει για $\varphi = \pi$ ή $\varphi = -\pi$ ή γενικότερα $\varphi = (2k \pm 1)\pi$

Ειδικά για την περίπτωση του υπολογισμού της φάσης του μετασχηματισμού Fourier ενός πραγματικού σήματος, επιλέγουμε $\varphi = -\pi$ για θετικές συχνότητες και $\varphi = \pi$ για αρνητικές συχνότητες. Με τον τρόπο αυτό διατηρούμε την αντισυμμετρικότητα της φάσης, όπως ισχύει για τον μετασχηματισμό Fourier πραγματικών σημάτων (συναρτήσεων).

ΑΣΚΗΣΗ Να σχεδιαστεί το μέτρο του φάσματος των περιοδικών συμμετρικών τετραγωνικών σημάτων με διάρκεια παλμών $\tau = T$, $\tau = T/2$, $\tau = T/5$.

ΛΥΣΗ



Το πλάτος (amplitude) του παλμού A και η περίοδος T διατηρούνται σταθερά. Αυτό που μεταβάλλεται είναι το εύρος τ του παλμού.

- Όταν $\tau = T$, τότε ο παλμός εκφυλίζεται σε ένα σήμα σταθερής τιμής A.
  Στην περίπτωση αυτή $\alpha_k = \frac{A\tau}{T}\,\mathrm{sinc}\left(k\frac{\tau}{T}\right) = A\,\mathrm{sinc}(k) = \begin{cases} A & \text{για } k=0 \\ 0 & \text{για } k\neq 0 \end{cases}$
  Το φάσμα αποτελείται από μία μόνο γραμμή, δηλαδή από τη συνεχή συνιστώσα DC, αφού πρόκειται για σήμα με σταθερή τιμή που δεν μεταβάλλεται με τον χρόνο και συνεπώς δεν περιέχει άλλες συχνότητες εκτός εκείνης για $k=0$ δηλ. $F=0$.

- Όταν $\tau = T/2$ το σήμα μας γίνεται η γνωστή τετραγωνική κυματομορφή με κύκλο εργασίας (duty cycle) 50% και μέση τιμή $A/2$. Το σήμα αυτό παρουσιάζει συμμετρία μισού-κύματος (half-wave symmetry), γεγονός που απεικονίζεται στο ότι οι άρτιες αρμονικές είναι μηδενικές.

- Όταν η διάρκεια του παλμού μειώνεται, αντίστοιχα μειώνεται και η DC συνιστώσα, ενώ αυξάνονται τα πλάτη των υψηλών αρμονικών συχνοτήτων. Από φυσικής απόψεως αυτό είναι αναμενόμενο αφού οι υψηλές συχνότητες χρειάζονται για να αναπαραστήσουν τις ταχείες χρονικές μεταβολές των μικρής διάρκειας παλμών. Δηλαδή, όσο η διάρκεια των παλμών μειώνεται στο χρόνο, τόσο διευρύνεται το φάσμα συχνοτήτων, και αντίστροφα.

Όταν η διάρκεια του παλμού τείνει στο μηδέν ($\tau \to 0$), τότε έχουμε ένα τραίνο κρουστικών, οπότε το φάσμα αποτελείται από όλες τις συνιστώσες συχνότητας σταθερού πλάτους A/T.
(Βλ. παράδειγμα 5.13).

Παράδειγμα 5.5: Για το περιοδικό συμμετρικό τετραγωνικό σήμα του προηγουμένου παραδείγματος και για την περίπτωση που $T=2\tau$, να υπολογιστεί ο λόγος της μέσης ισχύος των συχνοτήτων του κεντρικού λοβού προς τη μέση ισχύ του σήματος.

Λύση

Η μέση ισχύς του σήματος είναι:

$$P = \frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2\,dt = \frac{1}{T}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} dt = \frac{\tau}{T} = \frac{1}{2} = 0.5$$

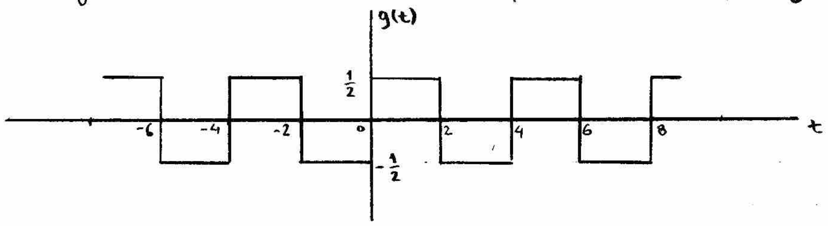
Η ισχύς των συχνοτήτων του κεντρικού λοβού ισούται με:

$$P' = \sum_{k=-2}^{2}|\alpha_k|^2 = |\alpha_{-2}|^2 + |\alpha_{-1}|^2 + |\alpha_0|^2 + |\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 =$$

$$= 0 + \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{\pi^2} + 0 = \frac{1}{4} + \frac{2}{\pi^2} \simeq 0.45$$

Άρα $\frac{P'}{P} = \frac{0.45}{0.5} = 0.9$ δηλαδή οι δύο αρμονικές και η μέση τιμή αποτελούν (συνεισφέρουν) το 90% της συνολικής ισχύος του σήματος.

Παράδειγμα 5.6: Να υπολογιστούν οι συντελεστές της εκθετικής σειράς Fourier του σήματος $g(t)$.



Λύση

Συγκρίνοντας τη κυματομορφή αυτή με εκείνη του Παραδείγματος 5.4, βλέπουμε ότι $\tau=2$, $T=4$ και ότι υπάρχει μια χρονική καθυστέρηση κατά 1, ενώ το πλάτος κυμαίνεται μεταξύ $-1/2$ και $1/2$ αντί μεταξύ 0 και 1. Συνεπώς, η $g(t)$ εκφράζεται σε σχέση με την $x(t)$ του παραδείγματος 5.4, ως εξής:

$x(t) \xleftrightarrow{F} a_k$

$x(t-1) \xleftrightarrow{F} b_k$

$g(t) \xleftrightarrow{F} g_k$

$$g(t) = x(t-1) - \frac{1}{2}$$

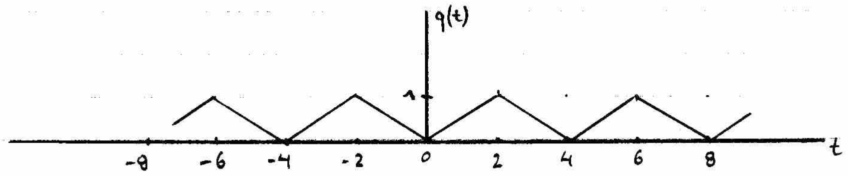
Οι συντελεστές Fourier της $x(t-1)$ θα είναι $b_k = e^{-jk\Omega_0 1} a_k = e^{-jk\frac{2\pi}{T}} a_k = e^{-jk\frac{\pi}{2}} a_k$

Για τη συνάρτηση $-\frac{1}{2}$ θα υπάρχει μόνο ο συντελεστής Fourier $C_0 = -\frac{1}{2}$, ενώ όλοι οι υπόλοιποι θα είναι μηδέν, δηλαδή $C_k = 0$ για $k \neq 0$

Τελικά, οι συντελεστές Fourier g_k της $g(t)$ θα ισούνται με:

$$g_k = e^{-jk\frac{\pi}{2}} a_k - C_k \Rightarrow g_k = \begin{cases} a_0 - \frac{1}{2}, & k=0 \\ a_k e^{-jk\frac{\pi}{2}}, & k \neq 0 \end{cases} \Rightarrow g_k = \begin{cases} 0 & \text{για } k=0 \\ \frac{\sin(k\frac{\pi}{2})}{k\pi} e^{-jk\frac{\pi}{2}} & \text{για } k \neq 0 \end{cases}$$

Παράδειγμα 5.7: Να υπολογιστούν οι συντελεστές Fourier του περιοδικού σήματος $q(t)$ του σχήματος.



Λύση

Η βασική περίοδος του σήματος είναι $T=4$ και συνεπώς η βασική συχνότητα

$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}$$

Παρατηρούμε ότι η παράγωγος του $q(t)$ μας δίνει το σήμα $g(t)$ του παραδείγματος 5.6, δηλαδή $g(t) = \frac{dq(t)}{dt}$

$g(t) \xleftrightarrow{F} g_k$

$q(t) \xleftrightarrow{F} q_k$

Άρα οι συντελεστές Fourier q_k του $q(t)$ μπορούν να υπολογιστούν από τους συντελεστές Fourier g_k του $g(t)$ μέσω της ιδιότητας παραγώγισης

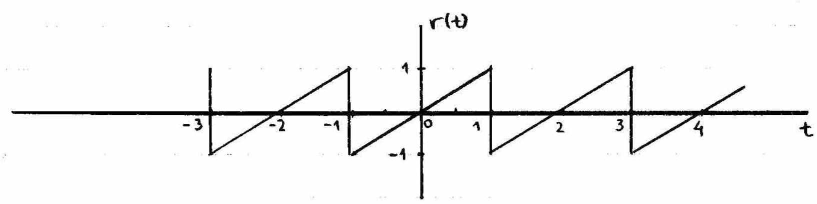
$$g_k = jk\Omega_0 q_k \Rightarrow q_k = \frac{1}{jk\Omega_0} g_k = \frac{1}{jk\frac{\pi}{2}} g_k = \frac{2}{jk\pi} g_k \Rightarrow$$

$$q_k = \frac{2}{jk\pi} \cdot \frac{\sin(k\frac{\pi}{2})}{k\pi} e^{-jk\frac{\pi}{2}} = \frac{2\sin(k\frac{\pi}{2})}{j(k\pi)^2} e^{-jk\frac{\pi}{2}} \quad \text{για } k \neq 0$$

Ο συντελεστής q_0 για $k=0$ προκύπτει από τον ορισμό

$$q_0 = \frac{1}{T}\int_T q(t)\,dt = \frac{1}{4} 2\int_0^2 \frac{t}{2}\,dt = \frac{1}{4} \frac{t^2}{2}\Big|_0^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{4}{2} - \frac{0}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Παράδειγμα 5.8: Να υπολογιστούν οι συντελεστές της μιγαδικής σειράς Fourier του σήματος $r(t)$.



Λύση

Η βασική περίοδος είναι $T=2$ και συνεπώς η βασική συχνότητα $\Omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \pi$.

Το σήμα περιγράφεται από τη σχέση $r(t) = t$, $|t|<1$.

Με βάση την εξίσωση ανάλυσης υπολογίζουμε τους συντελεστές Fourier a_k.

Για $k=0 \rightarrow a_0 = \frac{1}{T}\int_T r(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} t\,dt = \frac{1}{2}\frac{t^2}{2}\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{4}\left[1^2 - (-1)^2\right] = 0$

Για $k \neq 0 \rightarrow a_k = \frac{1}{T}\int_T r(t) e^{-jk\Omega_0 t}\,dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} t e^{-jk\pi t}\,dt = \frac{-1}{2jk\pi}\int_{-1}^{1} t\,de^{-jk\pi t} =$

= < με ολοκλήρωση κατά παράγοντες > =

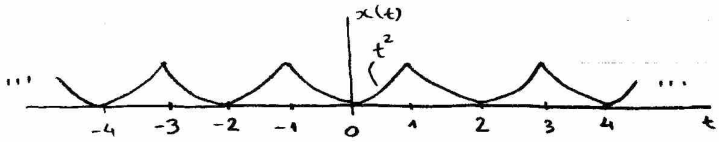
$$= \frac{-1}{2jk\pi}\left[t e^{-jk\pi t}\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} e^{-jk\pi t}\,dt\right] =$$

$$= \frac{-1}{2jk\pi}\left[e^{-jk\pi} + e^{jk\pi} + \frac{1}{jk\pi} e^{-jk\pi t}\Big|_{-1}^{1}\right] = \frac{j}{2k\pi}\left[2\cos(k\pi) - \cancelto{0}{\frac{1}{jk\pi} 2j\sin(k\pi)}\right] =$$

$$= \frac{j(-1)^k}{k\pi} \quad \text{αφού } \cos(k\pi) = (-1)^k \text{ και } \sin(k\pi) = 0$$

ΑΣΚΗΣΗ

Να αναπτυχθεί το περιοδικό σήμα του σχήματος σε μιγαδική σειρά Fourier.



Λύση

$$x(t) = t^2 \qquad -1 < t < 1 \quad \leadsto \quad T=2 \quad \leadsto \quad \Omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{T}\int_T x(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} t^2 dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\,t^3\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{6}\left[1-(-1)\right] = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\alpha_K = \frac{1}{T}\int_T x(t)\,e^{-jK\Omega_0 t}\,dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} t^2 e^{-jK\pi t}\,dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{-jK\pi}\int_{-1}^{1} t^2\, d\left(e^{-jK\pi t}\right) =$$

$= \langle$με ολοκλήρωση κατά παράγοντες$\rangle =$

$$= \frac{1}{-j2K\pi}\left[t^2 e^{-jK\pi t}\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} e^{-jK\pi t}\,dt^2\right] =$$

$$= \frac{1}{-j2K\pi}\left[\left(e^{-jK\pi} - e^{jK\pi}\right) - \int_{-1}^{1} e^{-jK\pi t}\,2t\,dt\right] =$$

$$= \frac{1}{K\pi}\cdot\frac{e^{jK\pi} - e^{-jK\pi}}{2j} + \frac{1}{j\cancel{2}K\pi}\cancel{2}\int_{-1}^{1} t\,e^{-jK\pi t}\,dt =$$

$= \frac{1}{K\pi}\sin(K\pi) + \frac{1}{jK\pi}\cdot\frac{1}{-jK\pi}\int_{-1}^{1} t\, d\left(e^{-jK\pi t}\right) = \langle$ολοκλήρωση κατά παράγοντες$\rangle =$

$$= \frac{1}{K\pi}\cdot 0 + \frac{1}{(K\pi)^2}\left[t\,e^{-jK\pi t}\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} e^{-jK\pi t}\,dt\right] =$$

$$= \frac{1}{(K\pi)^2}\left[\left(e^{-jK\pi} + e^{jK\pi}\right) - \frac{1}{-jK\pi}\,e^{-jK\pi t}\Big|_{-1}^{-1}\right] =$$

$$= \frac{1}{K^2\pi^2}\left[2\cos(K\pi) + \frac{1}{jK\pi}\left(e^{-jK\pi} - e^{jK\pi}\right)\right] =$$

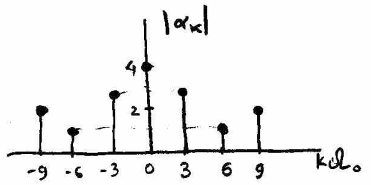
$$= \frac{1}{K^2\pi^2}\left[2\cdot(-1)^K + \frac{2}{K\pi}\,\cancel{\sin(K\pi)}^{\to 0}\right] = \frac{2(-1)^K}{K^2\pi^2}$$

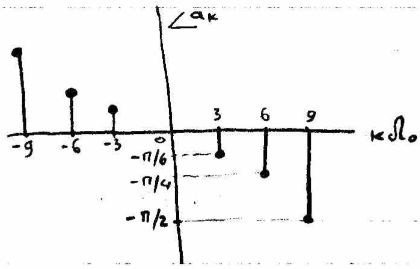
Τελικά, το περιοδικό σήμα x(t) εκφράζεται σε μιγαδική σειρά Fourier ως εξής:

$$x(t) = \frac{1}{3} + \frac{2}{\pi^2}\sum_{\substack{K=-\infty \\ (K\neq 0)}}^{\infty} \frac{(-1)^K}{K^2}\,e^{jK\pi t}$$

ΑΣΚΗΣΗ

Δίνεται το φάσμα της εκθετικής σειράς Fourier $x(t)$ του σχήματος. Να βρεθεί το πραγματικό σήμα $x(t)$.





Λύση

Από το σχήμα συνάγεται ότι $\Omega_0 = 3$ και:

$\alpha_0 = 4$

$\alpha_1 = 3e^{-j\frac{\pi}{6}} \qquad \alpha_{-1} = 3e^{j\frac{\pi}{6}}$

$\alpha_2 = 1 \cdot e^{-j\frac{\pi}{4}} \qquad \alpha_{-2} = 1 \cdot e^{j\frac{\pi}{4}}$

$\alpha_3 = 2 \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} \qquad \alpha_{-3} = 2 \cdot e^{j\frac{\pi}{2}}$

Άρα

$$x(t) = 4 + \alpha_1 e^{j\Omega_0 t} + \alpha_{-1} e^{-j\Omega_0 t} + \alpha_2 e^{j2\Omega_0 t} + \alpha_{-2} e^{-j2\Omega_0 t} + a_3 e^{j3\Omega_0 t} + a_{-3} e^{-j3\Omega_0 t} =$$

$$= 4 + 3e^{-j\frac{\pi}{6}} e^{j3t} + 3e^{j\frac{\pi}{6}} e^{-j3t} + e^{-j\frac{\pi}{4}} e^{j6t} + e^{j\frac{\pi}{4}} e^{-j6t} + 2e^{-j\frac{\pi}{2}} e^{j9t} + 2e^{j\frac{\pi}{2}} e^{-j9t} =$$

$$= 4 + 3\left(e^{j(3t-\frac{\pi}{6})} + e^{-j(3t-\frac{\pi}{6})}\right) + \left(e^{j(6t-\frac{\pi}{4})} + e^{-j(6t-\frac{\pi}{4})}\right) + 2\left(e^{j(9t-\frac{\pi}{2})} + e^{-j(9t-\frac{\pi}{2})}\right) =$$

$$= 4 + 6\cos\left(3t - \frac{\pi}{6}\right) + 2\cos\left(6t - \frac{\pi}{4}\right) + 4\cos\left(9t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Παράδειγμα 5.1: Να υπολογιστούν οι συντελεστές της σειράς Fourier του σήματος $x(t) = \cos(\Omega_0 t)$ του οποίου η βασική συχνότητα είναι Ω_0.

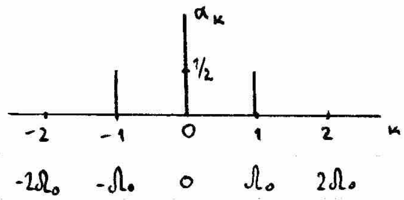
Λύση

Στην περίπτωση αυτή μας είναι ευκολότερο να αναπτύξουμε το σήμα ως γραμμικό συνδυασμό μιγαδικών εκθετικών, παρά να εφαρμόσουμε τον ορισμό. Έχουμε λοιπόν:

$$x(t) = \cos(\Omega_0 t) = \frac{1}{2} e^{j\Omega_0 t} + \frac{1}{2} e^{-j\Omega_0 t}$$

Συγκρίνοντας τη σχέση αυτή με την εξίσωση σύνθεσης της σειράς Fourier $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\Omega_0 t}$ διαπιστώνουμε ότι:

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_{-1} = \frac{1}{2}, \quad a_k = 0 \text{ για } k \neq \pm 1$$



← Αρμονική

← Συχνότητα (κυκλική)

Παράδειγμα 5.2: Να υπολογιστούν οι συντελεστές της εκθετικής σειράς Fourier του σήματος $x(t) = \sin(\Omega_0 t)$.

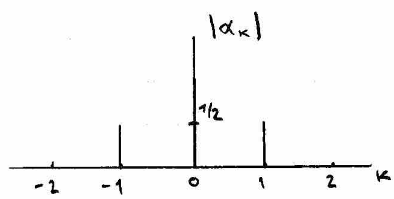
Λύση

Εκφράζοντας την $x(t)$ ως γραμμικό συνδυασμό μιγαδικών έχουμε:

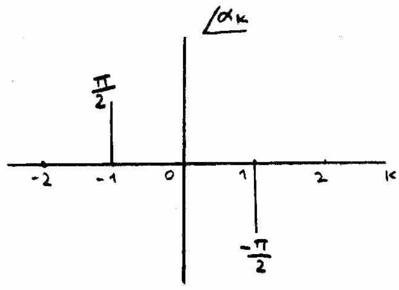
$$x(t) = \sin(\Omega_0 t) = \frac{1}{2j} e^{j\Omega_0 t} - \frac{1}{2j} e^{-j\Omega_0 t}$$

Συγκρίνοντας το αποτέλεσμα αυτό με τη σχέση σύνθεσης της εκθετικής σειράς Fourier $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\Omega_0 t}$ προσδιορίζουμε τους συντελεστές

$$a_1 = \frac{1}{2j}, \quad a_{-1} = \frac{-1}{2j}, \quad a_k = 0 \text{ για } k \neq \pm 1$$



Μέτρο



Φάση

Σημείωση: $a_1 = \frac{1}{2j} = -j\frac{1}{2} = 0 + j\left(-\frac{1}{2}\right) \rightarrow \angle a_1 = \tan^{-1}\left(\frac{-\frac{1}{2}}{0}\right) = -\frac{\pi}{2}$

Παράδειγμα 5.3: Να προσδιοριστούν οι συντελεστές της μιγαδικής σειράς Fourier του σήματος

$$x(t) = 1 + \sin(\Omega_0 t) + 2\cos(\Omega_0 t) + \cos\left(2\Omega_0 t + \frac{\pi}{4}\right)$$

Λύση

Το σήμα x(t) το οποίο έχει βασική συχνότητα Ω_0 το αναπτύσσουμε ως γραμμικό συνδυασμό μιγαδικών εκθετικών:

$$x(t) = 1 + \frac{1}{2j}\left[e^{j\Omega_0 t} - e^{-j\Omega_0 t}\right] + 2\cdot\frac{1}{2}\left[e^{j\Omega_0 t} + e^{-j\Omega_0 t}\right] + \frac{1}{2}\left[e^{j(2\Omega_0 t + \frac{\pi}{4})} + e^{-j(2\Omega_0 t + \frac{\pi}{4})}\right] =$$

$$= 1 + \left(1 + \frac{1}{2j}\right)e^{j\Omega_0 t} + \left(1 - \frac{1}{2j}\right)e^{-j\Omega_0 t} + \left(\frac{1}{2}e^{j\pi/4}\right)e^{j2\Omega_0 t} + \left(\frac{1}{2}e^{-j\pi/4}\right)e^{-j2\Omega_0 t}$$

Οι συντελεστές της σειράς Fourier είναι:

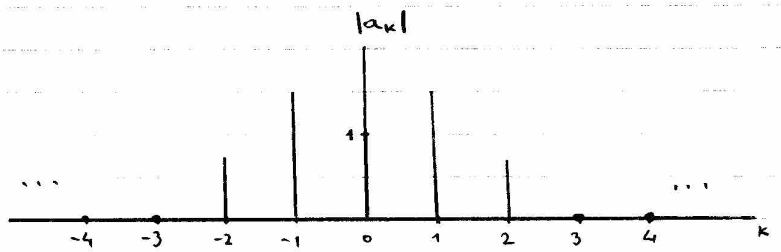
$a_0 = 1$

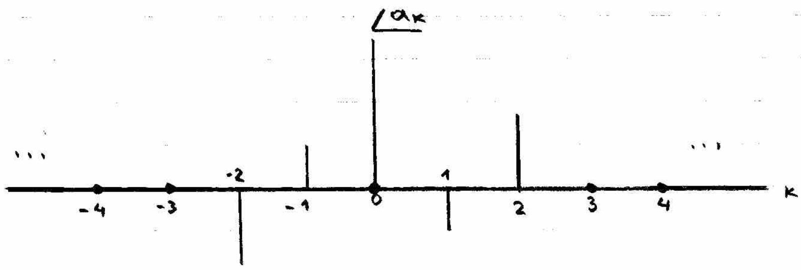
$a_1 = 1 + \frac{1}{2j} = 1 - j\frac{1}{2}$ $\qquad$ $a_{-1} = 1 - \frac{1}{2j} = 1 + j\frac{1}{2}$

$a_2 = \frac{1}{2}e^{j\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{4}(1+j)$ $\qquad$ $a_{-2} = \frac{1}{2}e^{-j\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{4}(1-j)$

$a_k = 0, \quad |k| > 2$

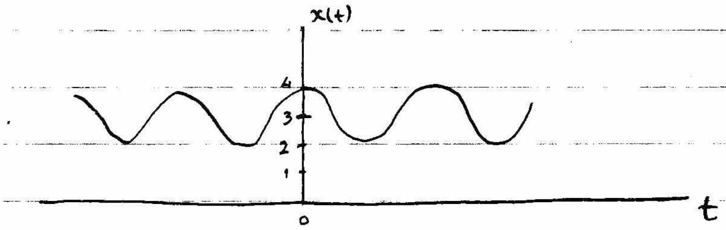
Το μέτρο και η φάση των συντελεστών Fourier είναι:





ΑΣΚΗΣΗ Να σχεδιαστεί το σήμα $x(t) = 3 + \cos\Omega_0 t$ και να αναπτυχθεί σε μιγαδική σειρά Fourier.

ΛΥΣΗ



Με βάση τη σχέση του Euler το σήμα $x(t)$ γράφεται ως:

$$x(t) = 3 + \frac{1}{2}\left(e^{j\Omega_0 t} + e^{-j\Omega_0 t}\right) = \underset{\uparrow \atop \alpha_0}{3} + \underset{\uparrow \atop \alpha_1}{\frac{1}{2}} e^{j\Omega_0 t} + \underset{\uparrow \atop \alpha_{-1}}{\frac{1}{2}} e^{-j\Omega_0 t}$$

Παρατηρούμε ότι η αναπαράσταση ενός ημιτονικού σήματος ως μέτρο και φάση αποτελεί ταυτόχρονα και την ανάπτυξή του σε μιγαδική σειρά Fourier.

Επίσης παρατηρούμε ότι η ανάπτυξη ενός σταθερού σήματος $c(t) = A$ σε σειρά Fourier είναι το ίδιο το σήμα, αφού δεν έχει άλλες συχνότητες πέραν της DC, δηλαδή της συχνότητας μηδέν.

$$c(t) = \alpha_0 + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} \alpha_k e^{jk\Omega_0 t} = A + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} 0 \cdot e^{jk\Omega_0 t}$$

Παράδειγμα 5.9: Να υπολογιστούν οι συντελεστές Fourier της $x(t) = \cos(4t)\cos(6t)$

Λύση

Εφαρμόζοντας την τριγωνομετρική σχέση

$$2\cos\theta_1 \cos\theta_2 = \cos(\theta_1-\theta_2) + \cos(\theta_1+\theta_2)$$

η $x(t)$ γράφεται:

$$x(t) = \frac{1}{2}\left[\cos(2t) + \cos(10t)\right] = \frac{1}{4}e^{j2t} + \frac{1}{4}e^{-j2t} + \frac{1}{4}e^{j10t} + \frac{1}{4}e^{-j10t}$$

Άρα οι συντελεστές της σειράς Fourier είναι:

$$\alpha_{\pm 1} = \alpha_{\pm 5} = \frac{1}{4} \quad \text{και} \quad \alpha_k = 0 \quad \text{για} \quad k \neq \pm 1 \ \text{και} \ k \neq \pm 5$$

Παράδειγμα 5.10: Να υπολογιστούν οι συντελεστές Fourier της $x(t) = \cos^2(2\pi t)$

Λύση

Εφαρμόζοντας την τριγωνομετρική σχέση $2\cos^2\theta = 1 + \cos(2\theta)$ και ακολούθως την ταυτότητα του Euler, έχουμε:

$$x(t) = \frac{1}{2}\left[1 + \cos(4\pi t)\right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{j4\pi t} + \frac{1}{4}e^{-j4\pi t}$$

Άρα οι συντελεστές της εκθετικής σειράς Fourier είναι:

$$\alpha_0 = \frac{1}{2}, \quad \alpha_{\pm 1} = \frac{1}{4}, \quad \alpha_k = 0 \quad \text{για} \quad k \neq 0 \ \text{και} \ k \neq \pm 1$$

Παράδειγμα 5.11: Να υπολογιστούν οι συντελεστές Fourier της $x(t) = \sin^5 t$

Λύση

Με βάση την ταυτότητα του Euler η $x(t)$ γράφεται:

$$x(t) = \left(\frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j}\right)^5 = \frac{1}{32j}\left[\binom{5}{0}\alpha^0\beta^5 + \binom{5}{1}\alpha^1\beta^4 + \binom{5}{2}\alpha^2\beta^3 + \binom{5}{3}\alpha^3\beta^2 + \binom{5}{4}\alpha^4\beta + \binom{5}{5}\alpha^5\beta^0\right]$$

$$= \langle \text{όπου } \alpha = e^{jt} \text{ και } \beta = -e^{-jt} \rangle = \frac{1}{32j}\left[\beta^5 + 5\alpha\beta^4 + 10\alpha^2\beta^3 + 10\alpha^3\beta^2 + 5\alpha^4\beta + \alpha^5\right] =$$

$$= \frac{1}{32j}\left[-e^{-j5t} + 5e^{jt}e^{-j4t} - 10e^{j2t}e^{-j3t} + 10e^{j3t}e^{-j2t} - 5e^{j4t}e^{-jt} + e^{j5t}\right] =$$

$$= \frac{1}{32j}\left[-e^{-j5t} + 5e^{-j3t} - 10e^{-jt} + 10e^{jt} - 5e^{j3t} + e^{j5t}\right] =$$

$$= \frac{1}{32j}\left[10e^{jt} - 10e^{-jt} - 5e^{j3t} + 5e^{-j3t} + e^{j5t} - e^{-j5t}\right]$$

Άρα $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = \frac{10}{32j} = -\alpha_{-1}$ $\quad \alpha_3 = \frac{-5}{32j} = -\alpha_{-3}$ $\quad \alpha_5 = \frac{1}{32j} = -\alpha_{-5}$

Όλοι οι υπόλοιποι συντελεστές είναι μηδέν.

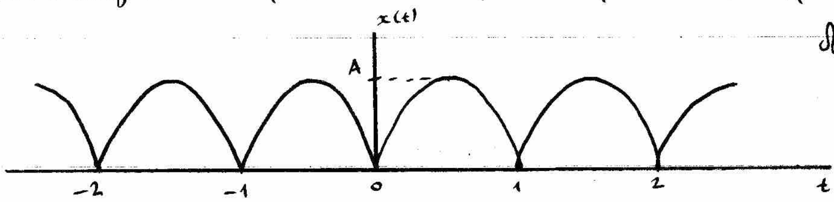
Σημείωση: $(\alpha+\beta)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\alpha^k\beta^{n-k}$ και $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$

Παράδειγμα 5.12: Να υπολογιστούν οι συντελεστές της μιγαδικής σειράς Fourier της $x(t)$

$$x(t) = A \sin \pi t\,, \quad 0<t<1\,, \quad x(t+1)=x(t)$$

Λύση

Πρόκειται για τη συνάρτηση της πλήρους ανόρθωσης με περίοδο $T=1$. $\Omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi$



$$\alpha_0 = \frac{1}{T}\int_T x(t)\,dt = A\int_0^1 \sin \pi t\, dt = -\frac{A}{\pi}\cos \pi t\Big|_0^1 = -\frac{A}{\pi}\left(\cos\pi - \cos 0\right) = \frac{2A}{\pi}$$

$$\alpha_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)\, e^{-jk\Omega_0 t}\,dt = \frac{1}{1}\int_0^1 A\cdot \sin \pi t\; e^{-jk2\pi t}\,dt =$$

$$= A\int_0^1 \frac{e^{j\pi t}-e^{-j\pi t}}{2j}\, e^{-jk2\pi t}\,dt = \frac{A}{2j}\int_0^1\left[e^{j\pi t(1-2k)} - e^{-j\pi t(1+2k)}\right]dt =$$

$$= \frac{A}{2j}\int_0^1 e^{-j\pi(2k-1)t}\,dt - \frac{A}{2j}\int_0^1 e^{-j\pi(2k+1)t}\,dt =$$

$$= \frac{A}{2j}\cdot\frac{1}{-j\pi(2k-1)}\, e^{-j\pi(2k-1)t}\Big|_0^1 - \frac{A}{2j}\,\frac{1}{-j\pi(2k+1)}\, e^{-j\pi(2k+1)t}\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{A}{2\pi(2k-1)}\left[e^{-j\pi(2k-1)} - 1\right] - \frac{A}{2\pi(2k+1)}\left[e^{-j\pi(2k+1)} - 1\right] =$$

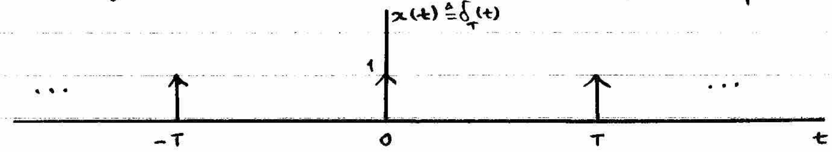
$$= \left\langle e^{-j2k\pi} = 1\,, \quad e^{-j\pi} = e^{j\pi} = -1 \right\rangle$$

$$= \frac{A}{2\pi(2k-1)}\left[e^{-j2k\pi}e^{j\pi} - 1\right] - \frac{A}{2\pi(2k+1)}\left[e^{-j2k\pi}e^{-j\pi} - 1\right] =$$

$$= \frac{A\left(e^{j\pi}-1\right)}{2\pi}\cdot\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right) = \frac{A\cdot(-2)}{2\pi}\cdot\frac{2}{4k^2-1} =$$

$$= -\frac{2A}{\pi(4k^2-1)} = \frac{2A}{(1-4k^2)\pi}$$

Παράδειγμα 5.13: Να υπολογιστούν οι συντελεστές Fourier του περιοδικού τραίνου κρουστικών.

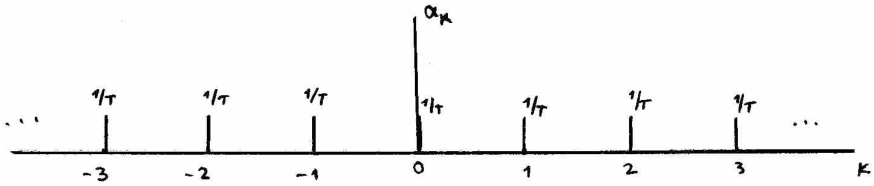


Το περιοδικό αυτό σήμα, του οποίου η περίοδος είναι T, μπορεί να εκφραστεί ως

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

Οι συντελεστές της σειράς Fourier μπορούν να υπολογιστούν από τον ορισμό και για περίοδο ολοκλήρωσης $-T/2 \le t \le T/2$, (ώστε να αποφύγουμε να έχουμε κρουστικές στα όρια ολοκλήρωσης).

$$\alpha_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \delta(t)\, e^{-jk\Omega_0 t}\, dt = \frac{1}{T}$$



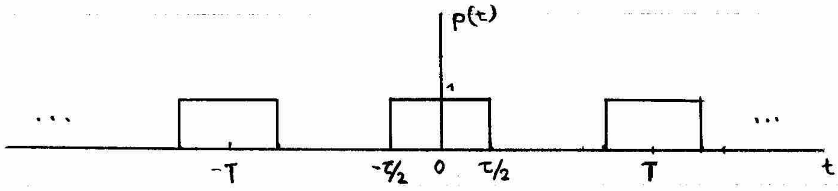
Άρα, με βάση την εξίσωση σύνθεσης το τραίνο κρουστικών εκφράζεται ως:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{jk\Omega_0 t} \Rightarrow$$

$$\delta_T(t) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\Omega_0 t}$$

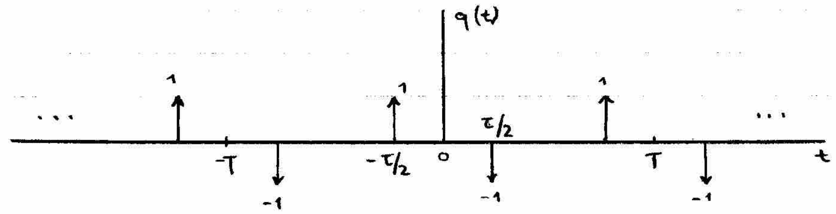
Παράδειγμα 5.14: Να υπολογιστούν οι συντελεστές Fourier του σήματος του παραδείγματος 5.4 με τη βοήθεια των συντελεστών του τραίνου κρουστικών.

Λύση



$p(t) \xleftrightarrow{F} p_k$

$q(t) \xleftrightarrow{F} q_k$



Η παράγωγος του $p(t)$ μας δίνει το $q(t)$, δηλαδή $q(t) = \dfrac{dp(t)}{dt}$.

Το σήμα $q(t)$ μπορεί να εκφραστεί με βάση το τραίνο κρουστικών του παραδείγματος 5.13 ως εξής:

$$q(t) = x\left(t+\frac{\tau}{2}\right) - x\left(t-\frac{\tau}{2}\right)$$

Έστω p_k οι συντελεστές Fourier του $p(t)$ και q_k οι συντελεστές Fourier του $q(t)$. Με βάση την ανωτέρω σχέση και την ιδιότητα ολίσθησης στο χρόνο:

$$q_k = e^{jk\Omega_0\tau/2} a_k - e^{-jk\Omega_0\tau/2} a_k = a_k\left[e^{jk\Omega_0\tau/2} - e^{-jk\Omega_0\tau/2}\right] =$$

$$= a_k \cdot 2j \sin\left(k\Omega_0\frac{\tau}{2}\right) = \frac{2j}{T}\sin\left(k\Omega_0\frac{\tau}{2}\right)$$

όπου $\Omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$, $a_k = \dfrac{1}{T}$ (Βλ. παρ. 5.13)

Από την ιδιότητα της παραγώγισης έχουμε:

$$q_k = jk\Omega_0 p_k \Rightarrow p_k = \frac{q_k}{jk\Omega_0} \Rightarrow$$

$$p_k = \frac{2j\sin(k\Omega_0\tau/2)}{jk\Omega_0 T} = \frac{\sin(k\Omega_0\tau/2)}{k\pi} \quad \text{για } k \neq 0$$

Ο συντελεστής p_0 δεν μπορεί να προσδιοριστεί από την ανωτέρω σχέση. Υπολογίζεται εύκολα όμως από τον ορισμό ή απλά ως η μέση τιμή του σήματος $p(t)$ στη διάρκεια μιας περιόδου.

$$p_0 = \frac{\tau}{T}$$

Φαινόμενο Gibbs

Στα παραδείγματα 5.4 και 5.14 υπολογίσαμε τους συντελεστές της σειράς Fourier α_k του περιοδικού τετραγωνικού τραίνου παλμών $x(t)$ με περίοδο T και διάρκεια παλμού τ.

$$\alpha_0 = \frac{\tau}{T}, \qquad \alpha_k = \frac{\sin(k\Omega_0 \tau/2)}{k\pi} \quad \text{για } k \neq 0$$

Ειδικά για την περίπτωση της συμμετρικής τετραγωνικής κυματομορφής κατά την οποία $T = 2\tau$, όπου T η βασική περίοδος και $\Omega_0 = \frac{2\pi}{T}$, οι παραπάνω σχέσεις γίνονται:

$$\alpha_0 = \frac{1}{2}, \qquad \alpha_k = \frac{\sin(k\frac{\pi}{2})}{k\pi} = \frac{1}{2}\,\frac{\sin(k\frac{\pi}{2})}{k\frac{\pi}{2}} \quad \text{για } k \neq 0$$

Άρα το περιοδικό τραίνο παλμών εκφράζεται ως:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\Omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{2}\,\frac{\sin(k\frac{\pi}{2})}{k\frac{\pi}{2}}}_{\text{άρτια συνάρτηση}} e^{jk\Omega_0 t} =$$

$$= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2}\,\frac{\sin(k\pi/2)}{k\pi/2} \cdot \left(e^{jk\Omega_0 t} + e^{-jk\Omega_0 t}\right) =$$

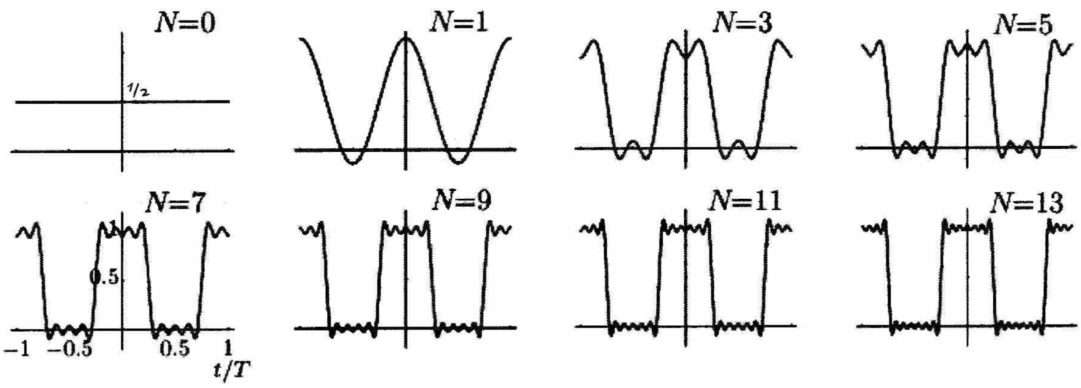
$$= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k\pi/2)}{k\pi/2} \cos(k\Omega_0 t) \qquad \text{όπου } \Omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

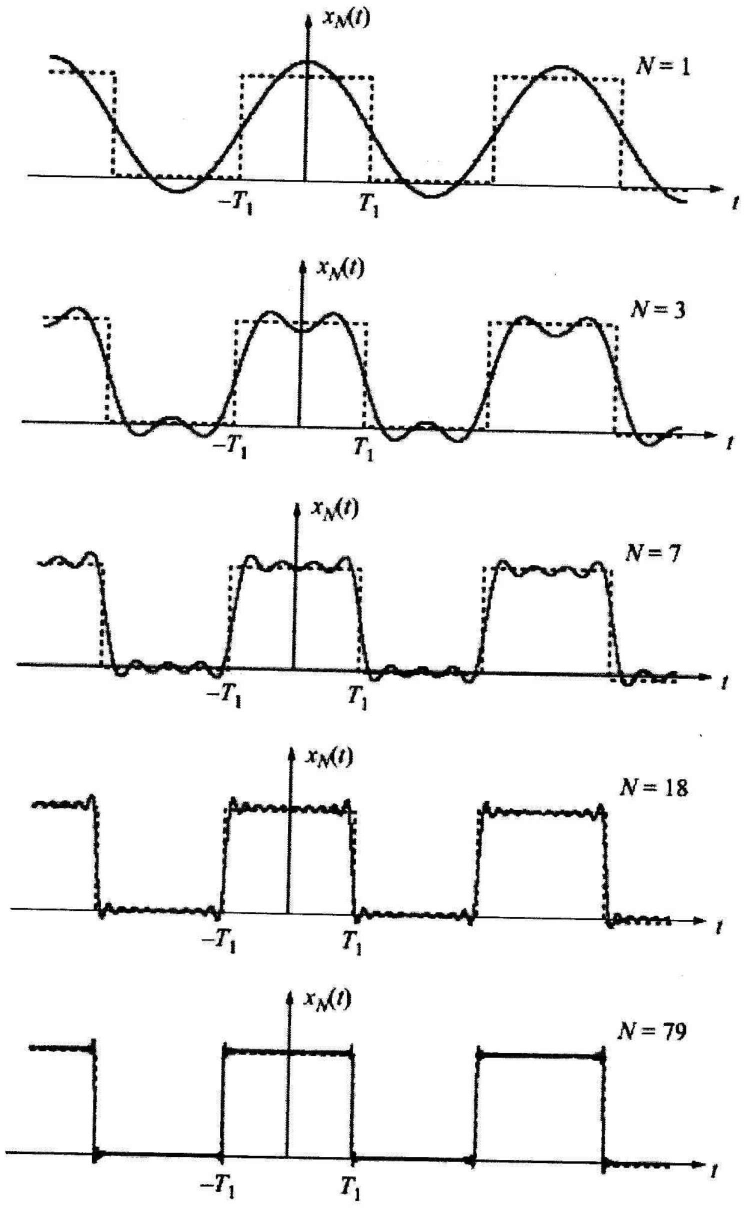
Παρατηρήστε ότι όλες οι άρτιες αρμονικές είναι μηδέν!

Παρατηρούμε ότι το περιοδικό τραίνο παλμών ανακατασκευάζεται πλήρως προσθέτοντας έναν <u>άπειρο</u>, αλλά <u>αριθμήσιμο</u>, αριθμό <u>περιττών αρμονικών</u>.

Τι συμβαίνει όμως εάν χρησιμοποιήσουμε τις πρώτες N αρμονικές, δηλαδή

$$x_N(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{N} \frac{\sin(k\pi/2)}{k\pi/2} \cos(k\Omega_0 t)$$





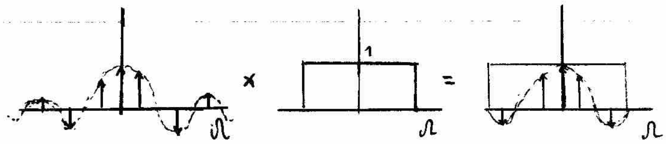
Παρατηρούμε ότι σε κάθε πλευρά της ασυνέχειας παρουσιάζονται ταλαντώσεις των οποίων το μέγιστο πλάτος είναι μέχρι 9% μεγαλύτερο ή μικρότερο του συνολικού πλάτους της ασυνέχειας και ανεξάρτητο του N.

Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται Gibbs προς τιμήν του Josiah Gibbs ο οποίος το μελέτησε και εξήγησε το 1899.

Ένας απλός τρόπος εξήγησης / κατανόησης του φαινομένου Gibbs είναι μέσω της διαδικασίας φιλτραρίσματος και των ιδιοτήτων συνέλιξης και πολλαπλασιασμού.

Επεξήγηση του φαινομένου Gibbs:

Το ότι από όλο το φάσμα των συχνοτήτων 'κρατάμε' (επιλέγουμε) έναν πεπερασμένο αριθμό N από αυτές, είναι ισοδύναμο με τον πολλαπλασιασμό του φάσματος με ένα τετραγωνικό παράθυρο.

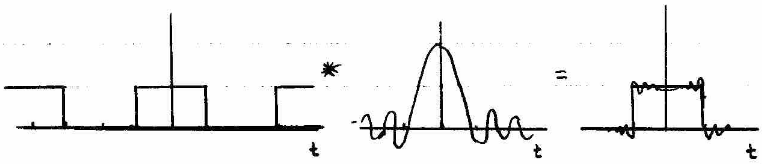


Πολλαπλασιασμός στη συχνότητα

⇕

Συνέλιξη στο χρόνο

Ισοδύναμα, στο πεδίο του χρόνου θα έχουμε συνέλιξη των αντίστοιχων κυματομορφών.



Καταλαβαίνουμε ότι εάν αντί του τετραγωνικού παραθύρου πεπερασμένης διάρκειας είχαμε ένα παράθυρο άπειρης διάρκειας (δηλ. ίσο με 1 σε όλο το φάσμα), τότε αυτό συνεπάγεται ότι έχουμε την κρουστική στο χρόνο (και όχι την sinx/x του σχήματος) και άρα δεν θα υπάρχουν ταλαντώσεις ως αποτέλεσμα της συνέλιξης.

Παράδειγμα 5.15: Να υπολογιστούν οι συντελεστές της μιγαδικής σειράς Fourier του σήματος $x(t)=e^{-0.1t}$ για το χρονικό διάστημα $-5<t<15$ sec. Να σχεδιαστεί το $x(t)$ καθώς και το σήμα που προκύπτει αν οι όροι της σειράς δεν είναι άπειροι αλλά $N=4$.

Λύση

Θεωρούμε ότι το σήμα μεταξύ $-5s$ και $15s$ αποτελεί μία περίοδο και επεκτείνεται περιοδικά επ' άπειρον. Άρα $T=20$ sec ή

$$\Omega_0=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{20}=\frac{\pi}{10} \text{ rad/sec}$$

Οι συντελεστές της σειράς Fourier υπολογίζονται από τον ορισμό:

$$\alpha_k=\frac{1}{T}\int_T x(t)\, e^{-jk\Omega_0 t}\,dt=\frac{1}{20}\int_{-5}^{15} e^{-t/10}\, e^{-jk\frac{\pi}{10}t}\,dt=$$

$$=\frac{1}{20}\cdot\frac{1}{-\frac{1}{10}(1+jk\pi)}\, e^{-\frac{t}{10}(1+jk\pi)}\Big|_{-5}^{15}=$$

$$=\frac{-1}{2(1+jk\pi)}\left[e^{-\frac{15}{10}(1+jk\pi)}-e^{\frac{5}{10}(1+jk\pi)}\right]=$$

$$=\frac{1}{2(1+jk\pi)}\left[e^{\frac{1}{2}}\,e^{jk\frac{\pi}{2}}-e^{-\frac{3}{2}}\,e^{-3jk\frac{\pi}{2}}\right]=\frac{0.5}{(1+jk\pi)}\left[1.649\,e^{jk\pi/2}-0.223\,e^{-j3k\pi/2}\right]$$

Άρα το σήμα $x(t)$ εκφράζεται ως:

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\underbrace{\frac{0.5}{(1+jk\pi)}\left[1.649\,e^{jk\pi/2}-0.223\,e^{-j3k\pi/2}\right]}_{\alpha_k}\, e^{jk\frac{\pi}{10}t}$$

Κρατώντας τους συντελεστές μέχρι $N=4$, θα έχουμε μια προσέγγιση $\hat{x}(t)$ του σήματος $x(t)$, δηλαδή

$$\hat{x}(t)=\sum_{k=-N}^{N}a_k\, e^{jk\frac{\pi}{10}t}=\sum_{k=-4}^{4}a_k\, e^{jk\frac{\pi}{10}t}$$

όπου

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_0&=0.713\\
\alpha_1&=0.216\,e^{j0.308}\\
\alpha_2&=0.112\,e^{j1.729}\\
\alpha_3&=0.075\,e^{-j3.036}\\
\alpha_4&=0.057\,e^{j1.494}
\end{aligned}\right\}\ \text{και επειδή } \alpha_{-k}=\alpha_k^{*}\ \left\{\begin{aligned}
\alpha_{-1}&=0.216\,e^{-j0.308}\\
\alpha_{-2}&=0.112\,e^{-j1.729}\\
\alpha_{-3}&=0.075\,e^{j3.036}\\
\alpha_{-4}&=0.057\,e^{j1.494}
\end{aligned}\right.$$

Τελικά:

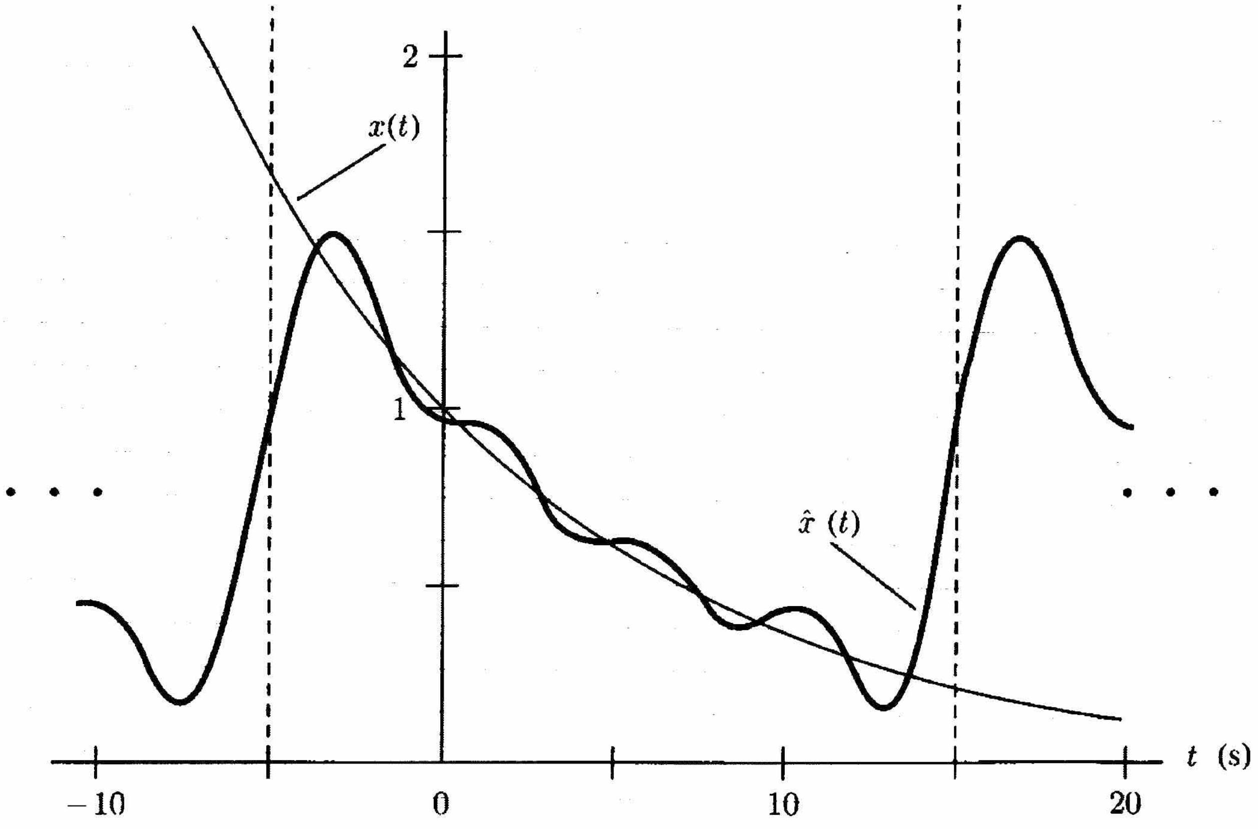
$$\hat{x}(t)=a_{-4}\,e^{-j\frac{4\pi}{10}t}+a_{-3}\,e^{-j\frac{3\pi}{10}t}+a_{-2}\,e^{-j\frac{2\pi}{10}t}+\alpha_{-1}\,e^{-j\frac{\pi}{10}t}+\alpha_0$$

$$+\alpha_4\,e^{j\frac{4\pi}{10}t}+a_3\,e^{j\frac{3\pi}{10}t}+a_2\,e^{j\frac{2\pi}{10}t}+\alpha_1\,e^{j\frac{\pi}{10}t}$$

συνεχίζεται

Οι κυματομορφές του σήματος $x(t)$ και του προσεγγιστικού σήματος $\hat{x}(t)$ στο διάστημα $-5<t<15$ sec, δείχνονται στο σχήμα που ακολουθεί.

Παρατηρούμε ότι και πάλι εμφανίζεται το φαινόμενο Gibbs.

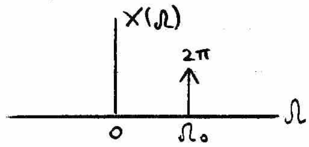


ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ FOURIER ΠΕΡΙΟΔΙΚΩΝ ΣΗΜΑΤΩΝ

Κατ' αρχήν υπενθυμίζουμε το ζεύγος MF για μη περιοδικά σήματα:

$$\boxed{X(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\Omega t}\, dt \quad \longleftrightarrow \quad x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega)\, e^{j\Omega t}\, d\Omega}$$

Έστω τώρα το σήμα $x(t)$ με MF $X(\Omega)$, ο οποίος είναι μια κρουστική εμβαδού 2π στο σημείο $\Omega = \Omega_0$, δηλαδή



$$X(\Omega) = 2\pi\, \delta(\Omega - \Omega_0).$$

Για να προσδιορίσουμε το σήμα $x(t)$ το οποίο έχει αυτόν τον MF, εφαρμόζουμε τον αντίστροφο MF

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{2\pi\, \delta(\Omega - \Omega_0)}_{X(\Omega)}\, e^{j\Omega t}\, d\Omega = e^{j\Omega_0 t}$$

Γενικά, εάν ο $X(\Omega)$ ισούται με τον γραμμικό συνδυασμό κρουστικών, οι οποίες ισαπέχουν στη συχνότητα, δηλαδή

$$X(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\, \alpha_k\, \delta(\Omega - k\Omega_0)$$

Τότε, με χρήση του αντίστροφου MF προκύπτει το σήμα $x(t)$:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega)\, e^{j\Omega t}\, d\Omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\, \alpha_k\, \delta(\Omega - k\Omega_0)\, e^{j\Omega t}\, d\Omega =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_0)\, e^{j\Omega t}\, d\Omega =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, e^{jk\Omega_0 t}$$

← Σειρά Fourier (εξίσωση σύνθεσης)

Τελικά το ζεύγος MF για περιοδικά σήματα είναι:

$$\boxed{X(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\, \alpha_k\, \delta(\Omega - k\Omega_0) \quad \longleftrightarrow \quad x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k\, e^{jk\Omega_0 t}}$$

Παρατηρούμε ότι ο MF ενός περιοδικού σήματος με συντελεστές σειράς Fourier $\{a_k\}$ μπορεί να αναπαρασταθεί ως ένα τραίνο κρουστικών οι οποίες εμφανίζονται σε αρμονικά σχετιζόμενες συχνότητες και για τις οποίες το εμβαδόν της κρουστικής στην κ-οστή αρμονική συχνότητα $k\Omega_0$, είναι 2π φορές του κ-οστού συντελεστή της σειράς Fourier a_k.

Παράδειγμα 5.16: Να υπολογιστεί ο MF της τετραγωνικής κυματομορφής του παραδείγματος 5.4.

Λύση

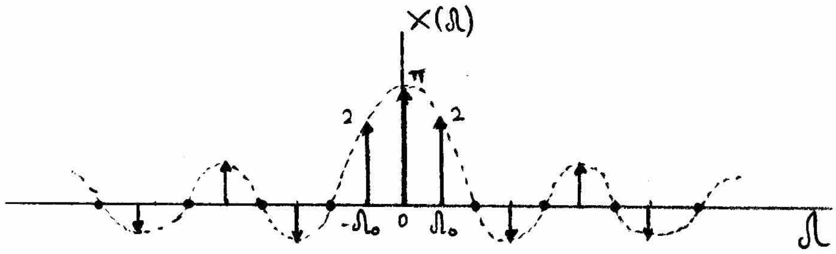
Οι συντελεστές της σειράς Fourier του σήματος έχουν ήδη υπολογιστεί στο παράδειγμα 5.4:

$$a_k = \frac{\sin(k\Omega_0 \tau/2)}{k\pi}$$

Άρα ο MF του σήματος είναι:

$$X(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\sin(k\Omega_0\tau/2)}{k}\,\delta(\Omega - k\Omega_0)$$

Για $T=2\tau$ ο MF δείχνεται στο ακόλουθο σχήμα:



Οι διαφορές σε σχέση με το αντίστοιχο σχήμα του παραδείγματος 5.4 προσδιορίζονται στον πολλαπλασιαστικό παράγοντα 2π και στη χρήση των κρουστικών αντί για τα ραβδογράμματα.

Παράδειγμα 5.17: Να υπολογιστεί και να σχεδιαστεί ο ΜF των σημάτων $x_1(t) = \cos \Omega_0 t$ και $x_2(t) = \sin \Omega_0 t$

Λύση

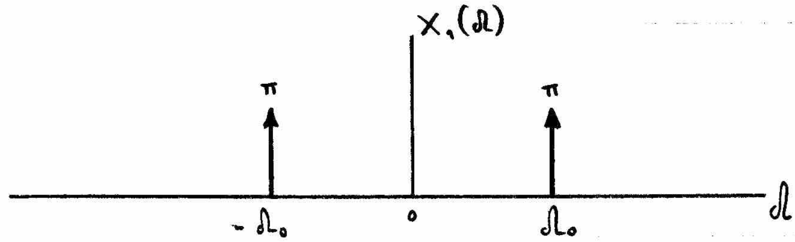
Οι συντελεστές της σειράς Fourier του σήματος $x_1(t)$ είναι:

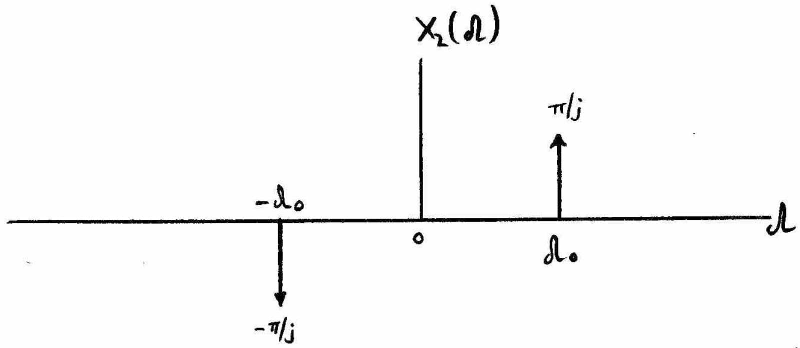
$$\alpha_1 = \alpha_{-1} = \frac{1}{2}, \quad \alpha_k = 0 \text{ για } k \neq 1,\ k \neq -1$$

Οι συντελεστές της σειράς Fourier του σήματος $x_2(t)$ είναι:

$$\alpha_1 = \frac{1}{2j}, \quad \alpha_{-1} = -\frac{1}{2j}, \quad \alpha_k = 0 \text{ για } k \neq 1,\ k \neq -1$$

Ο ΜF των σημάτων φαίνεται στα σχήματα που ακολουθούν.





Παράδειγμα 5.18: Να υπολογιστεί ο ΜF του περιοδικού τραίνου κρουστικών.

Λύση

Όπως είδαμε και στο παράδειγμα 5.13, το σήμα αυτό εκφράζεται ως

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)$$

όπου T είναι η περίοδος του σήματος. $\Omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ Οι συντελεστές της σειράς Fourier υπολογίζονται ως

$$\alpha_k = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-jk\Omega_0 t} dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} \delta(t)\, e^{-jk\Omega_0 t} dt = \frac{1}{T}$$

Με άλλα λόγια, καθένας από τους συντελεστές της σειράς Fourier του περιοδικού τραίνου κρουστικών έχει πλάτος $1/T$. Άρα, ο ΜF ισούται με:

$$X(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi \alpha_k \delta(\Omega - k\Omega_0) \Leftrightarrow X(\Omega) = \frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\Omega - k\frac{2\pi}{T}\right)$$

Παρατηρούμε ότι ο ΜF του περιοδικού τραίνου κρουστικών περιόδου T ισούται με ένα περιοδικό τραίνο κρουστικών στη συχνότητα, περιόδου $\frac{2\pi}{T}$.

Γίνεται φανερό ότι καθώς η περίοδος T αυξάνεται, δηλαδή η απόσταση μεταξύ των κρουστικών στον χρόνο αυξάνεται, η αντίστοιχη απόσταση μεταξύ των κρουστικών στη συχνότητα μειώνεται, δηλαδή η βασική συχνότητα μειώνεται.