ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

3 – ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ FOURIER

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ ΣΚΟΔΡΑΣ

2023 - 2024

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ FOURIER (MF)

$$X(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\Omega t}\, dt \qquad\qquad x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega)\, e^{j\Omega t}\, d\Omega$$

Ευθύς MF — Ανάλυση

Αντίστροφος MF — Σύνθεση

- Ο MF $X(\Omega)$ ενός μη περιοδικού σήματος $x(t)$ συχνά ονομάζεται και φάσμα του $x(t)$, αφού παρέχει την πληροφορία που απαιτείται για την περιγραφή του $x(t)$ ως γραμμικού συνδυασμού (ως ολοκληρώματος) των ημιτονοειδών σημάτων στις διάφορες συχνότητες.

- Ο MF υπάρχει, δηλαδή το $X(\Omega)$ είναι πεπερασμένο / συγκλίνει, όταν το σήμα $x(t)$ έχει πεπερασμένη ενέργεια (δηλαδή τετραγωνικά ολοκληρώσιμο):

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\, dt < \infty$$

Εναλλακτικά, η ύπαρξη του MF διασφαλίζεται όταν πληρούνται οι συνθήκες Dirichlet:

1. Το $x(t)$ να είναι ολοκληρώσιμο κατ' απόλυτη τιμή $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\, dt < \infty$

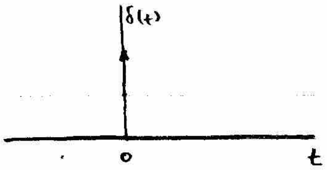
2. Το $x(t)$ να έχει πεπερασμένο αριθμό μεγίστων και ελαχίστων σε ένα πεπερασμένο διάστημα

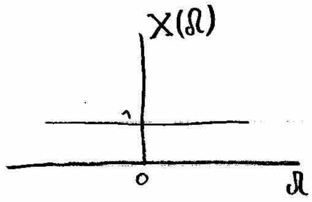
3. Το $x(t)$ να έχει πεπερασμένο αριθμό ασυνεχειών σε οποιοδήποτε πεπερασμένο διάστημα και επιπλέον καθεμία από τις ασυνέχειες να είναι πεπερασμένου ύψους.

Συμπέρασμα: Συνεχή σήματα που είναι ολοκληρώσιμα κατ' απόλυτη τιμή ή που έχουν πεπερασμένο αριθμό ασυνεχειών έχουν MF

Παράδειγμα 3.1: Να υπολογιστεί ο MF του $x(t)=\delta(t)$

$$X(\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\,e^{-j\Omega t}\,dt = e^{0} = 1$$ (βλ. υποσημείωση)





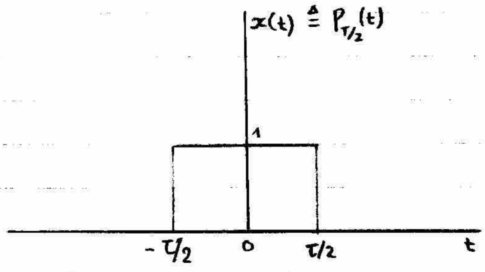
Η κρουστική έχει MF που αποτελείται από ίση συνεισφορά ΟΛΩΝ των συχνοτήτων!

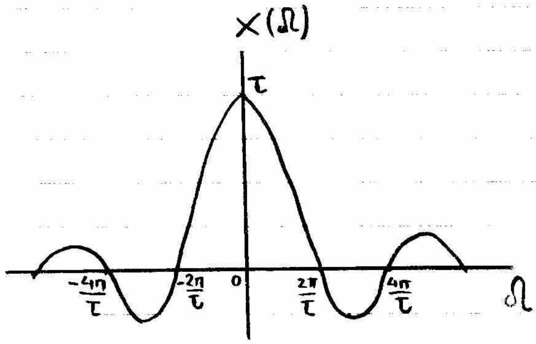
Παράδειγμα 3.2: Να υπολογιστεί ο MF του τετραγωνικού παλμού $x(t)=\begin{cases}1, & |t|<\frac{\tau}{2}\\ 0, & |t|>\frac{\tau}{2}\end{cases}$

$$X(\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\,e^{-j\Omega t}\,dt = \int_{-\tau/2}^{\tau/2}e^{-j\Omega t}\,dt = \frac{1}{-j\Omega}\,e^{-j\Omega t}\Big|_{-\tau/2}^{\tau/2} =$$

$$=\frac{1}{-j\Omega}\left(e^{-j\frac{\Omega\tau}{2}}-e^{j\frac{\Omega\tau}{2}}\right)=\frac{2}{\Omega}\left(\frac{e^{j\frac{\Omega\tau}{2}}-e^{-j\frac{\Omega\tau}{2}}}{2j}\right)=\frac{2}{\Omega}\sin\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right)=$$

$$=\tau\,\frac{\sin\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right)}{\frac{\Omega\tau}{2}}=\tau\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\Omega\tau}{2\pi}\right)$$ όπου $\mathrm{sinc}(x)=\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$





Σημείωση: Για τον υπολογισμό του MF του $x(t)=\delta(t)$ κάναμε χρήση της ιδιότητας της ολίσθησης της $\delta(t)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\,\delta(t-t_0)\,dt = x(t_0)$$

Παράδειγμα 3.3: Να βρεθεί το σήμα $x(t)$ του οποίου ο ΜF ισούται με:

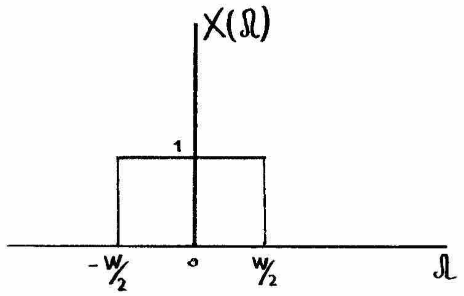
$$X(\Omega) = \begin{cases} 1, & |\Omega| < W/2 \\ 0, & |\Omega| > W/2 \end{cases}$$

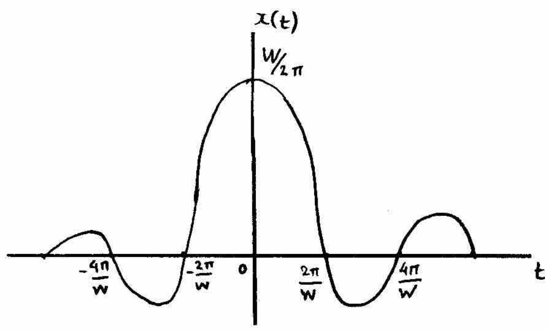
Από τον ορισμό του αντίστροφου ΜF βρίσκουμε:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega)\, e^{j\Omega t}\, d\Omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-W/2}^{W/2} e^{j\Omega t}\, d\Omega = \frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{jt}\, e^{j\Omega t}\Big|_{-\frac{W}{2}}^{\frac{W}{2}} =$$

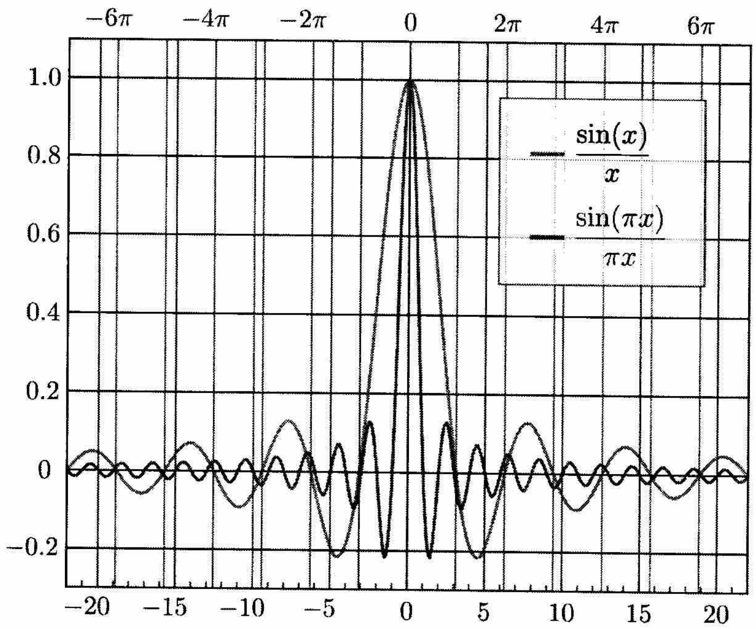
$$= \frac{1}{2\pi t j}\left(e^{jt\frac{W}{2}} - e^{-jt\frac{W}{2}}\right) = \frac{1}{\pi t}\left(\frac{e^{j\frac{Wt}{2}} - e^{-j\frac{Wt}{2}}}{2j}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi t}\sin\left(\frac{Wt}{2}\right) = \frac{W}{2\pi}\,\frac{\sin\left(\frac{Wt}{2}\right)}{\frac{Wt}{2}} = \frac{W}{2\pi}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{Wt}{2\pi}\right)$$

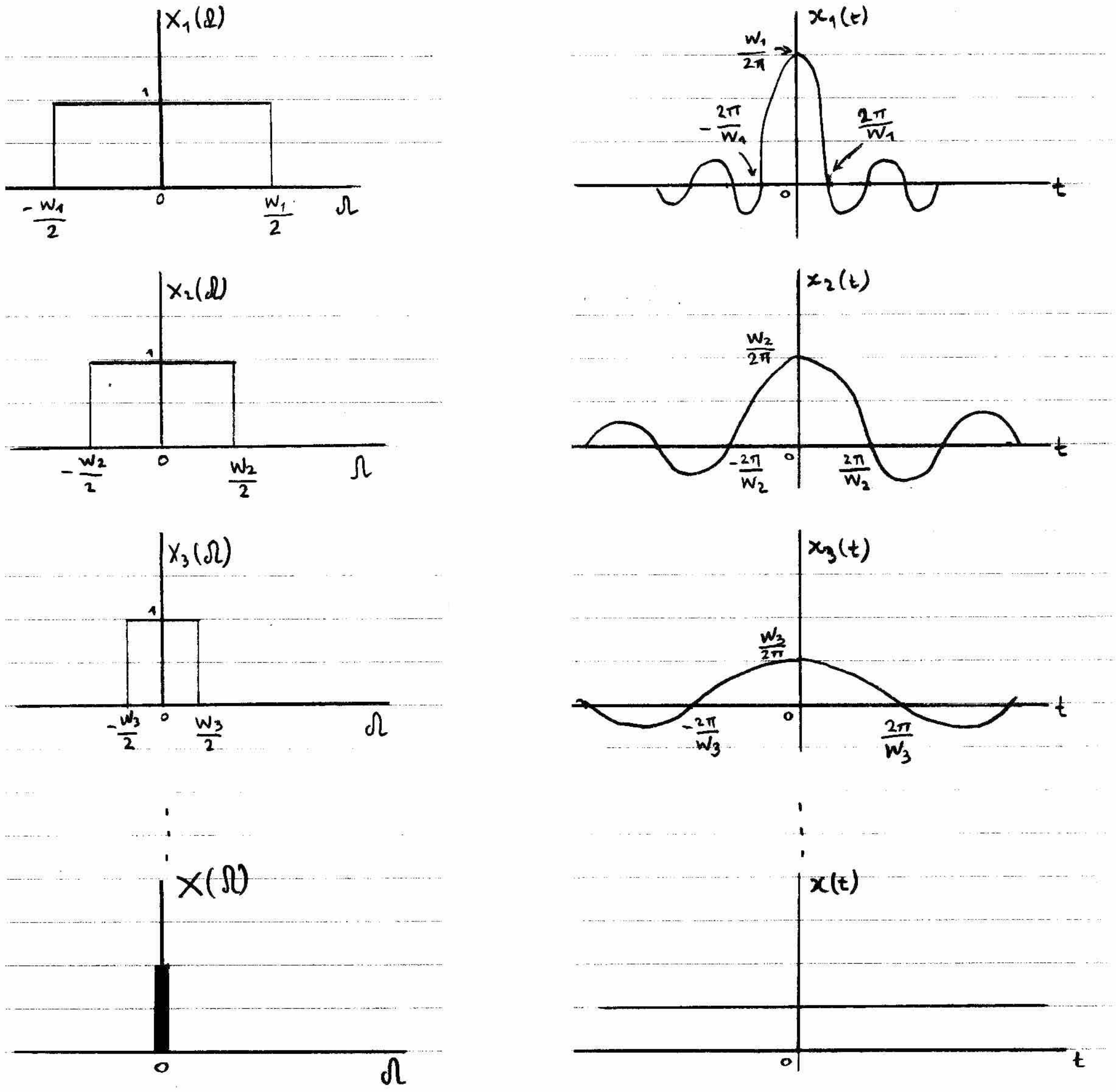




<u>Σημείωση:</u>



Source: https://en.wikipedia.org/wiki/Sinc_function


$X_1(\Omega)$
1
$-\frac{W_1}{2}$
0
$\frac{W_1}{2}$
Ω
$x_1(t)$
$\frac{W_1}{2\pi}$
$-\frac{2\pi}{W_1}$
$\frac{2\pi}{W_1}$
0
t
$X_2(\Omega)$
1
$-\frac{W_2}{2}$
0
$\frac{W_2}{2}$
Ω
$x_2(t)$
$\frac{W_2}{2\pi}$
$-\frac{2\pi}{W_2}$
0
$\frac{2\pi}{W_2}$
t
$X_3(\Omega)$
1
$-\frac{W_3}{2}$
0
$\frac{W_3}{2}$
Ω
$x_3(t)$
$\frac{W_3}{2\pi}$
$-\frac{2\pi}{W_3}$
0
$\frac{2\pi}{W_3}$
t
$X(\Omega)$
0
Ω
$x(t)$
0
t

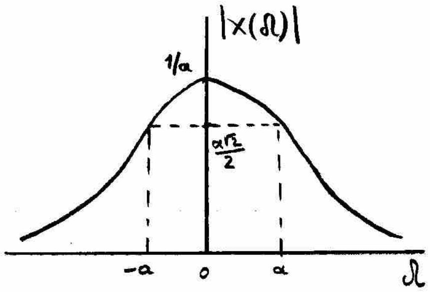
Παράδειγμα 3.4: Να υπολογιστεί ο ΜF της $x(t) = e^{-at} u(t)$, $a>0$.

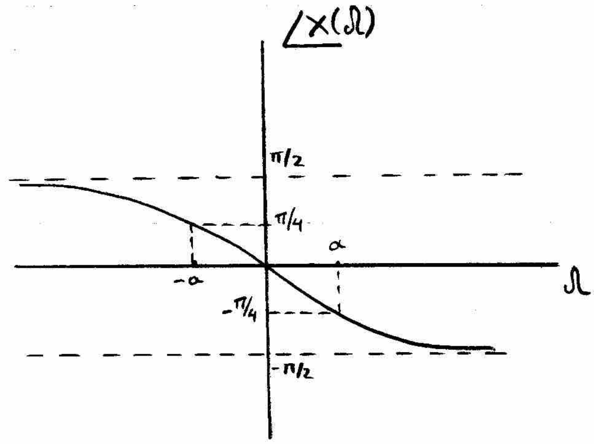
$$X(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt = \int_{0}^{\infty} e^{-at} e^{-j\Omega t} dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(a+j\Omega)t} dt =$$

$$= \frac{-1}{\alpha + j\Omega} e^{-(\alpha+j\Omega)t}\Big|_{0}^{\infty} = \frac{1}{\alpha + j\Omega}, \quad \alpha > 0$$

Ο ΜF έχει μιγαδικές τιμές οπότε υπολογίζουμε το μέτρο και τη φάση του:

$$|X(\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \Omega^2}} \qquad \angle X(\Omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{\Omega}{\alpha}\right)$$

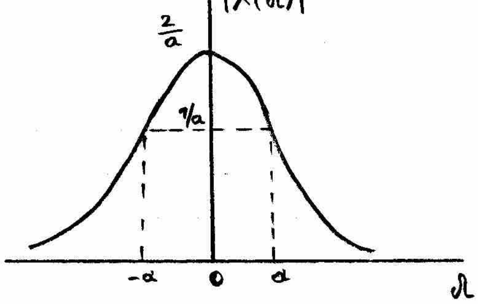


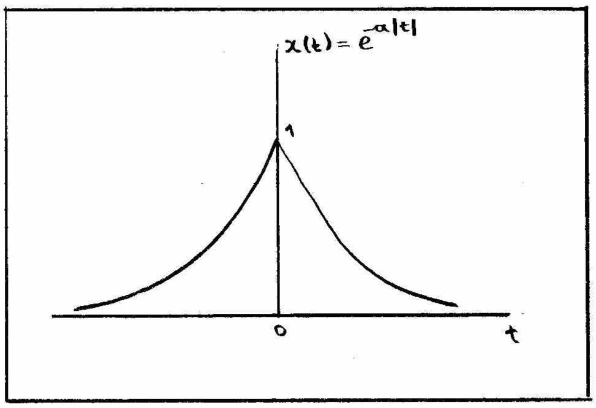


Παράδειγμα 3.5: Να υπολογιστεί ο ΜF της $x(t) = e^{-\alpha|t|}$, $\alpha > 0$

$$X(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|} e^{-j\Omega t} dt = \int_{-\infty}^{0} e^{at} e^{-j\Omega t} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-at} e^{-j\Omega t} dt =$$

$$= \frac{1}{\alpha - j\Omega} + \frac{1}{\alpha + j\Omega} = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \Omega^2}$$





ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί ο ΜΓ του σήματος $x(t)=t\,e^{-at}u(t)$

ΛΥΣΗ
$$X(\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\,e^{-j\Omega t}\,dt=$$
$$=\int_{0}^{\infty}t\,e^{-\alpha t}\,e^{-j\Omega t}\,dt=\int_{0}^{\infty}t\,e^{-(\alpha+j\Omega)t}\,dt=$$
$$=\frac{1}{-(\alpha+j\Omega)}\int_{0}^{\infty}t\,d\left(e^{-(\alpha+j\Omega)t}\right)=\langle\text{ολοκλήρωση κατά παράγοντες}\rangle=$$
$$=\frac{-1}{\alpha+j\Omega}\left[t\,e^{-(\alpha+j\Omega)t}\Big|_{0}^{\infty}-\int_{0}^{\infty}e^{-(\alpha+j\Omega)t}\,dt\right]=$$
$$=\frac{-1}{\alpha+j\Omega}\left[(0-0)-\frac{1}{-(\alpha+j\Omega)}\,e^{-(\alpha+j\Omega)t}\Big|_{0}^{\infty}\right]=$$
$$=\frac{-1}{(\alpha+j\Omega)^2}\,(0-1)=\frac{1}{(\alpha+j\Omega)^2}$$

Σημείωση: Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε και με βάση την ιδιότητα της παραγώγισης στη συχνότητα:
$$t\,g(t)\xleftrightarrow{F}j\,\frac{dG(\Omega)}{d\Omega}$$

Στην προκειμένη περίπτωση έχουμε: $x(t)=t\,\underbrace{e^{-\alpha t}u(t)}_{g(t)}=t\cdot g(t)$

Γνωρίζουμε ότι $G(\Omega)=F\left\{e^{-\alpha t}u(t)\right\}=\dfrac{1}{\alpha+j\Omega}$

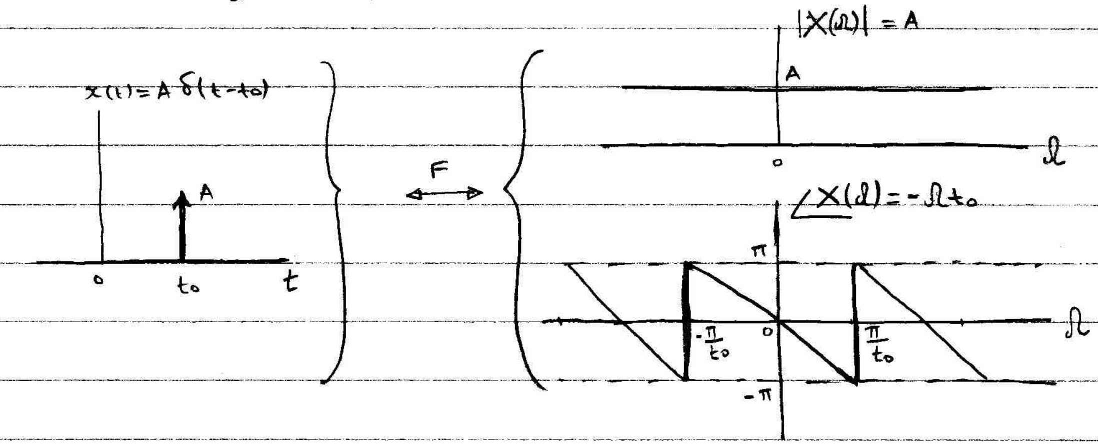
Η παράγωγος του $G(\Omega)$ μπορεί να υπολογιστεί με βάση τη σχέση
$\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{w}{v}\right)=\dfrac{v\frac{dw}{dx}-w\frac{dv}{dx}}{v^2}$. Για $w=1$ και $v=\alpha+j\Omega$, έχουμε:
$$\frac{d}{d\Omega}G(\Omega)=\frac{d}{d\Omega}\left(\frac{1}{\alpha+j\Omega}\right)=\frac{(\alpha+j\Omega)\cancelto{0}{\frac{d1}{d\Omega}}-1\cdot\frac{d}{d\Omega}(a+j\Omega)}{(a+j\Omega)^2}=\frac{-j}{(\alpha+j\Omega)^2}$$

Τελικά,
$$X(\Omega)=j\,\frac{dG(\Omega)}{d\Omega}=j\,\frac{-j}{(\alpha+j\Omega)^2}=\frac{1}{(\alpha+j\Omega)^2}$$

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί ο ΜF της συνάρτησης $x(t) = A\,\delta(t-t_0)$

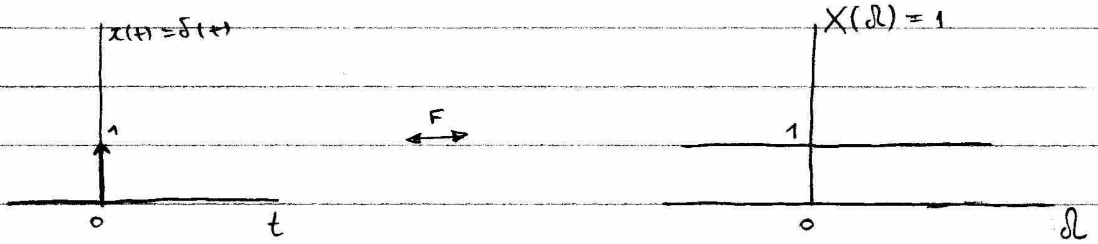
Λύση $$X(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\Omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} A\, \delta(t-t_0)\, e^{-j\Omega t}\, dt = A\, e^{-j\Omega t_0}$$

όπου για τον υπολογισμό έγινε χρήση της ιδιότητας κοσκινίσματος (sifting property) της κρουστικής συνάρτησης: $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)\, f(t)\, dt = f(t_0)$ για $f(t)$ συνεχή στο σημείο $t = t_0$.



Παρατηρούμε ότι το μέτρο του μετασχηματισμού Fourier είναι σταθερό και ίσο με A για όλες τις συχνότητες και ότι η γωνία της φάσης είναι γραμμική συνάρτηση της συχνότητας με κλίση ίση με $-t_0$

Ειδική περίπτωση: Για $A=1$ και $t_0=0$ έχουμε $x(t) = \delta(t)$ και $X(\Omega) = 1$



Το μέτρο του μετασχηματισμού Fourier ισούται με τη μονάδα για όλες τις συχνότητες, ενώ η φάση είναι μηδέν.

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί το σήμα του οποίου ο ΜF είναι η κρουστική συνάρτηση $X(\Omega)=\delta(\Omega-\Omega_0)$

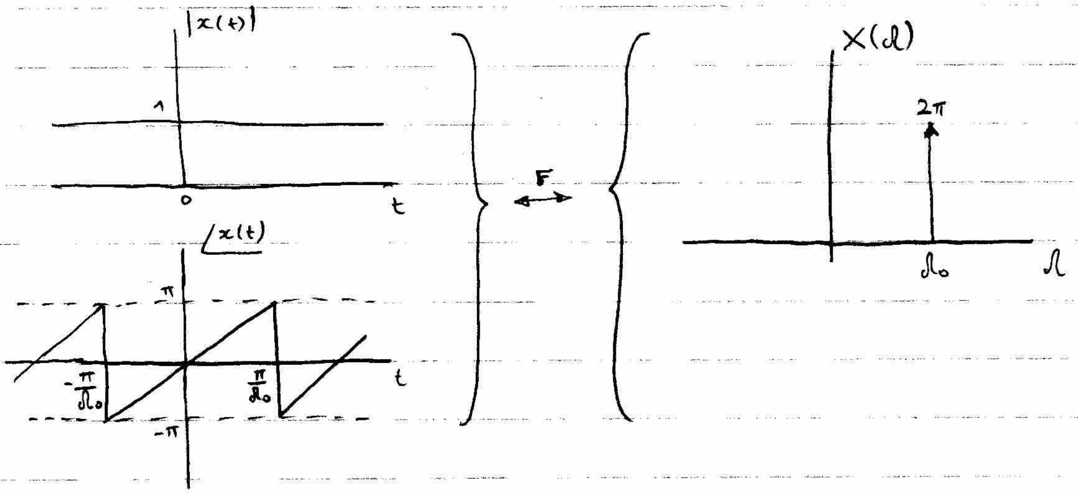
ΛΥΣΗ Από τον αντίστροφο ΜF βρίσκουμε:

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\Omega)\,e^{j\Omega t}\,d\Omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-\Omega_0)\,e^{j\Omega t}\,d\Omega=\frac{1}{2\pi}\,e^{j\Omega_0 t}$$

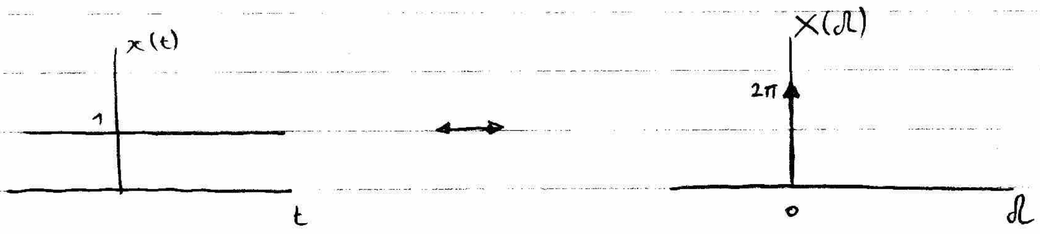
Πρόκειται για ένα μιγαδικό εκθετικό διάνυσμα σταθερού μέτρου το οποίο περιστρέφεται με συχνότητα Ω_0 rad/s.

Έχουμε λοιπόν το ζεύγος ΜF $\quad \frac{1}{2\pi}e^{j\Omega_0 t} \xleftrightarrow{F} \delta(\Omega-\Omega_0)$

ή καλύτερα $\quad e^{j\Omega_0 t} \xleftrightarrow{F} 2\pi\,\delta(\Omega-\Omega_0)$



Ειδική περίπτωση: Για $\Omega_0=0$ έχουμε $x(t)=1$ και $X(\Omega)=2\pi\,\delta(\Omega)$



ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί ο ΜF του σήματος $x(t) = \cos \Omega_0 t$

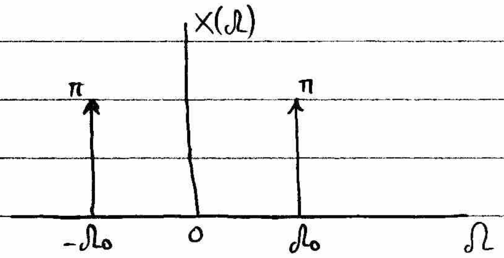
ΛΥΣΗ

$$X(\Omega) = F\{\cos \Omega_0 t\} = F\left\{ \frac{e^{j\Omega_0 t} + e^{-j\Omega_0 t}}{2} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[F\{e^{j\Omega_0 t}\} + F\{e^{-j\Omega_0 t}\}\right] = \langle \text{βλ. σημείωση} \rangle =$$

$$= \frac{1}{2}\left[2\pi\,\delta(\Omega-\Omega_0) + 2\pi\,\delta(\Omega+\Omega_0)\right] =$$

$$= \pi\left[\delta(\Omega-\Omega_0) + \delta(\Omega+\Omega_0)\right]$$



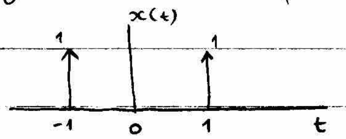
Σημείωση: Υπολογίζουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier $f(t)$ της $F(\Omega) = \delta(\Omega-\Omega_0)$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\Omega)\, e^{j\Omega t}\, d\Omega = \frac{1}{2\pi}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\Omega-\Omega_0)\, e^{j\Omega t}\, d\Omega}_{e^{j\Omega_0 t} \text{ από ιδιότητα κοσκινίσματος της κρουστικής}} = \frac{1}{2\pi}\, e^{j\Omega_0 t}$$

Άρα $\frac{1}{2\pi} e^{j\Omega_0 t} \overset{F}{\longleftrightarrow} \delta(\Omega-\Omega_0)$

ή $e^{j\Omega_0 t} \overset{F}{\longleftrightarrow} 2\pi\,\delta(\Omega-\Omega_0)$

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί ο ΜF του σήματος $x(t)$ του σχήματος.



Λύση Α' τρόπος μέσω του ορισμού του ΜF

$$x(t)=\delta(t+1)+\delta(t-1) \xrightarrow{F} X(\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\Omega t}\, dt$$

Άρα

$$X(\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t+1)\, e^{-j\Omega t}\, dt + \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-1)\, e^{-j\Omega t}\, dt = \left\langle \text{με χρήση της ιδιότητας } \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0) f(t)\, dt = f(t_0) \right\rangle$$

$$= e^{j\Omega} + e^{-j\Omega} = 2\cos\Omega$$

Β' τρόπος μέσω της ιδιότητας της ολίσθησης στο χρόνο

$$f(t-t_0) \xleftrightarrow{F} e^{-j\Omega t_0} F(\Omega)$$

Γνωρίζουμε ήδη από το παράδειγμα 3.1 ότι $\delta(t) \xleftrightarrow{F} 1$

Άρα

$$x(t)=\delta(t+1)+\delta(t-1) \Rightarrow$$

$$F\{x(t)\}=F\{\delta(t+1)\}+F\{\delta(t-1)\} \Rightarrow$$

$$X(\Omega) = e^{-j\Omega\cdot(-1)} + e^{-j\Omega\cdot 1} = e^{j\Omega}+e^{-j\Omega} = 2\cos\Omega$$

Άσκηση

Να υπολογιστεί η συνάρτηση $x(t)$ της οποίας ο ΜF είναι $X(\Omega) = 2\cos\left(3\Omega + \frac{\pi}{4}\right)$

Λύση

$$X(\Omega) = 2\cos\left(3\Omega + \frac{\pi}{4}\right) = e^{j\left(3\Omega + \frac{\pi}{4}\right)} + e^{-j\left(3\Omega + \frac{\pi}{4}\right)} \qquad (1)$$

Επομένως από τον ορισμό του αντίστροφου ΜF έχουμε:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega)\, e^{j\Omega t}\, d\Omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\left(3\Omega + \frac{\pi}{4}\right)} e^{j\Omega t}\, d\Omega + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\left(3\Omega + \frac{\pi}{4}\right)} e^{j\Omega t}\, d\Omega =$$

$$= e^{j\frac{\pi}{4}} \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j(t+3)\Omega}\, d\Omega}_{\updownarrow \atop \delta(t+3)} + e^{-j\frac{\pi}{4}} \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j(t-3)\Omega}\, d\Omega}_{\updownarrow \atop \delta(t-3)} \qquad (2)$$

Αλλά $\delta(t) \xleftrightarrow{F} 1$ οπότε η $\delta(t)$ προκύπτει από τον αντίστροφο ΜF της μονάδας ως: $\delta(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot e^{j\Omega t}\, d\Omega$

Κατά συνέπεια $\delta(t-t_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\Omega(t-t_0)}\, d\Omega$

Με βάση αυτές τις σχέσεις η (2) γίνεται:

$$x(t) = e^{j\frac{\pi}{4}}\,\delta(t+3) + e^{-j\frac{\pi}{4}}\,\delta(t-3)$$

Σημείωση: Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε και με χρήση της ιδιότητας της ολίσθησης στον χρόνο. $x(t-t_0) \xleftrightarrow{F} e^{-j\Omega t_0} X(\Omega)$

για $x(t) = \delta(t)$ και κατά συνέπεια $X(\Omega) = 1$.

Άρα: $\delta(t) \xleftrightarrow{F} 1$

$\delta(t-t_0) \xleftrightarrow{F} e^{-j\Omega t_0} \cdot 1 = e^{-j\Omega t_0}$

$\delta(t-3) \xleftrightarrow{F} e^{-j\Omega 3}$ και $\delta(t+3) \xleftrightarrow{F} e^{j\Omega 3}$

Με βάση αυτά, από την (1) έχουμε:

$$X(\Omega) = e^{j\left(3\Omega + \frac{\pi}{4}\right)} + e^{-j\left(3\Omega + \frac{\pi}{4}\right)} = e^{j\frac{\pi}{4}} e^{j3\Omega} + e^{-j\frac{\pi}{4}} e^{-j3\Omega} \quad F$$

$$x(t) = e^{j\frac{\pi}{4}}\,\delta(t+3) + e^{-j\frac{\pi}{4}}\,\delta(t-3)$$

F

Άσκηση

Να υπολογιστεί το σήμα x(t) του οποίου ο ΜF είναι $X(\Omega) = \dfrac{j\Omega}{\Omega^2 - 5j\Omega - 6}$

Λύση

Επειδή δεν είναι εύκολος ο απευθείας υπολογισμός του αντίστροφου ΜF της συνάρτησης $X(\Omega)$, την αναλύουμε σε απλά κλάσματα. Αρχικά υπολογίζουμε τις ρίζες του παρονομαστή που είναι $2j$ και $3j$.

$$X(\Omega) = \frac{j\Omega}{\Omega^2 - 5j\Omega - 6} = \frac{j\Omega}{(\Omega-2j)(\Omega-3j)} = \frac{A}{\Omega-2j} + \frac{B}{\Omega-3j}$$

Υπολογίζουμε τις τιμές A και B.

$$A = (\Omega-2j)\,X(\Omega)\Big|_{\Omega=2j} = \frac{j\Omega}{\Omega-3j}\Big|_{\Omega=2j} = \frac{j(2j)}{(2j)-3j} = \frac{-2}{-j} = \frac{2}{j} = -2j$$

$$B = (\Omega-3j)\,X(\Omega)\Big|_{\Omega=3j} = \frac{j\Omega}{\Omega-2j}\Big|_{\Omega=3j} = \frac{j(3j)}{(3j)-2j} = \frac{-3}{j} = 3j$$

Άρα

$$X(\Omega) = \frac{-2j}{\Omega-2j} + \frac{3j}{\Omega-3j} = \langle \text{πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρονομαστή επί } j \rangle =$$

$$= \frac{2}{j\Omega+2} + \frac{-3}{j\Omega+3} \quad \text{ή} \quad X(\Omega) = \frac{2}{2+j\Omega} - \frac{3}{3+j\Omega}$$

Τελικά η $x(t)$ προκύπτει από τον αντίστροφο ΜF της $X(\Omega)$ που υπολογίσαμε ως:

$$x(t) = F^{-1}\{X(\Omega)\} = 2\,F^{-1}\left\{\frac{1}{2+j\Omega}\right\} - 3\,F^{-1}\left\{\frac{1}{3+j\Omega}\right\} =$$

$$= 2 \cdot e^{-2t}\,u(t) - 3\,e^{-3t}\,u(t) \Rightarrow$$

$$x(t) = \left(2\,e^{-2t} - 3\,e^{-3t}\right) u(t)$$

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί ο ΜF της συνάρτησης προσήμου $x(t)=sgn(t)=\begin{cases}1 & \text{για } t>0\\ 0 & \text{για } t=0\\ -1 & \text{για } t<0\end{cases}$

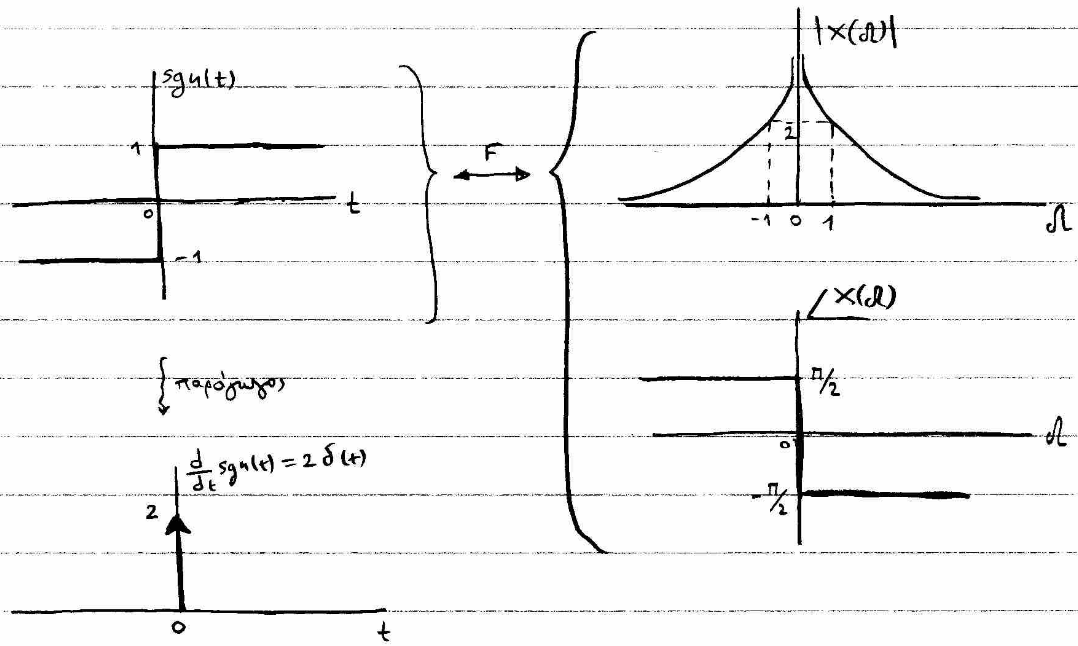
ΛΥΣΗ Παραγωγίζουμε την $x(t)$: $\frac{d}{dt}x(t)=2\delta(t)$ [βλ. υποσημείωση]

$$F\left\{\frac{d}{dt}x(t)\right\}=2F\{\delta(t)\} \Rightarrow j\Omega X(\Omega)=2\cdot 1 \Rightarrow$$

$$X(\Omega)=\frac{2}{j\Omega}+k\delta(\Omega)$$

Ο όρος $k\delta(\Omega)$ είναι μη μηδενικός μόνο για $\Omega=0$ και εκφράζει την μέση τιμή της συνάρτησης $x(t)$. Στην προκειμένη περίπτωση η μέση τιμή της $sgn(t)$ είναι μηδέν, οπότε $k=0$. Γενικά όμως, ο όρος αυτός πρέπει να υπάρχει γιατί η παραγώγιση στον χρόνο η οποία υπονοείται από την έκφραση $j\Omega X(\Omega)$ θα μπορούσε να προκαλέσει απώλεια πληροφορίας σχετικής με τη μέση τιμή του σήματος $x(t)$.

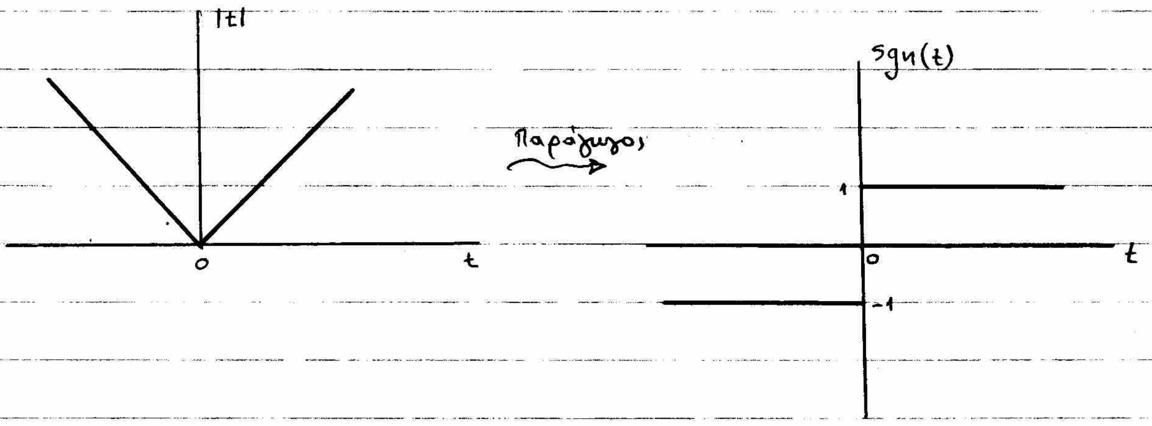
Τελικά υπολογίσαμε ότι $sgn(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} \frac{2}{j\Omega}$

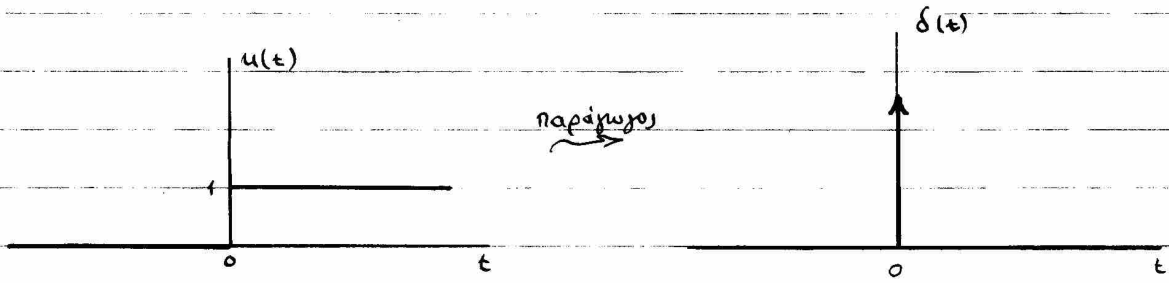


Σημείωση:

$$sgn(t)=2u(t)-1 \Rightarrow \frac{d}{dt}sgn(t)=2\frac{d}{dt}u(t)=2\delta(t)$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Παράγωγοι γνωστών συναρτήσεων





ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί ο ΜF (α) της συνάρτησης προσήμου sgn(t) και (β) της βηματικής συνάρτησης u(t).

ΛΥΣΗ

(α) Η συνάρτηση προσήμου μπορεί να εκφραστεί ως

$$sgn(t) = \lim_{\alpha \to 0} \left[e^{-\alpha t} u(t) - e^{\alpha t} u(-t) \right] \quad \text{όπου } \alpha > 0$$

οπότε

$$F\{sgn(t)\} = \lim_{\alpha \to 0} \left[F\{e^{-\alpha t} u(t)\} - F\{e^{\alpha t} u(-t)\} \right] =$$

⟨ κάνοντας χρήση του γεγονότος ότι $F\{e^{-\alpha t} u(t)\} = \frac{1}{\alpha + j\Omega}$ και της ιδιότητας $F\{x(-t)\} = F(-\Omega)$ ⟩

$$= \lim_{\alpha \to 0} \left[\frac{1}{\alpha + j\Omega} - \frac{1}{\alpha - j\Omega} \right] =$$

$$= \lim_{\alpha \to 0} \left[\frac{-2j\Omega}{\alpha^2 + \Omega^2} \right] =$$

$$= \frac{2}{j\Omega}$$

(β) Η μοναδιαία βηματική συνάρτηση u(t) μπορεί να εκφραστεί ως

$$u(t) = \frac{1}{2} sgn(t) + \frac{1}{2}$$

οπότε

$$F\{u(t)\} = F\left\{\frac{1}{2} sgn(t)\right\} + F\left\{\frac{1}{2}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2} F\{sgn(t)\} + \frac{1}{2} F\{1\} =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{2}{j\Omega} + \frac{1}{2} 2\pi \delta(\Omega) =$$

$$= \frac{1}{j\Omega} + \pi \delta(\Omega)$$

ΖΕΥΓΗ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ FOURIER

ΣΗΜΑ ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ	ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ FOURIER
$x(t)$	$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\Omega t}\, dt$
$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega)\, e^{j\Omega t}\, d\Omega$	$X(\Omega)$
$\delta(t)$	1
$A\,\delta(t-t_0)$	$A\, e^{-j\Omega t_0}$
1	$2\pi\,\delta(\Omega)$
K	$2\pi K\,\delta(\Omega)$
$u(t)$	$\frac{1}{j\Omega} + \pi\,\delta(\Omega)$
$\mathrm{sgn}(t)$	$\frac{2}{j\Omega}$
$e^{j\Omega_0 t}$	$2\pi\,\delta(\Omega-\Omega_0)$
$\cos\Omega_0 t$	$\pi\left[\delta(\Omega-\Omega_0) + \delta(\Omega+\Omega_0)\right]$
$\sin\Omega_0 t$	$\frac{\pi}{j}\left[\delta(\Omega-\Omega_0) - \delta(\Omega+\Omega_0)\right]$
$\cos\Omega_0 t\, u(t)$	$\frac{\pi}{2}\left[\delta(\Omega-\Omega_0) + \delta(\Omega+\Omega_0)\right] + \frac{j\Omega}{\Omega_0^2-\Omega^2}$
$\sin\Omega_0 t\, u(t)$	$\frac{\pi}{2j}\left[\delta(\Omega-\Omega_0) - \delta(\Omega+\Omega_0)\right] + \frac{\Omega}{\Omega_0^2-\Omega^2}$

Παρατηρούμε ότι ο ΜF των σημάτων ισχύος περιέχει κρουστικές συναρτήσεις.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ FOURIER

Γραμμικότητα: $\alpha x(t) + b\, y(t) \xleftrightarrow{F} \alpha X(\Omega) + b\, Y(\Omega)$

Ολίσθηση στο χρόνο: $x(t-t_0) \xleftrightarrow{F} e^{-j\Omega t_0} X(\Omega)$

Ολίσθηση στη συχνότητα: $e^{j\Omega_0 t} x(t) \xleftrightarrow{F} X(\Omega-\Omega_0)$

Κλιμάκωση στο χρόνο: $x(at) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\Omega}{a}\right) \overset{a=-1}{\rightarrow} x(-t) \xleftrightarrow{F} X(-\Omega)$

Κλιμάκωση στη συχνότητα: $\frac{1}{|a|} x\left(\frac{t}{a}\right) \xleftrightarrow{F} X(a\Omega)$

Παραγώγιση: $\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{F} j\Omega X(\Omega)$

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \xleftrightarrow{F} (j\Omega)^n X(\Omega)$$

Ολοκλήρωση: $\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau \xleftrightarrow{F} \frac{1}{j\Omega} X(\Omega) + \pi X(0)\, \delta(\Omega)$

Δυϊκότητα: $X(t) \xleftrightarrow{F} 2\pi x(-\Omega)$

Συνέλιξη: $y(t) = h(t) * x(t) \xleftrightarrow{F} Y(\Omega) = H(\Omega) \cdot X(\Omega)$

Πολλαπλασιασμός: $y(t) = s(t) \cdot x(t) \xleftrightarrow{F} Y(\Omega) = \frac{1}{2\pi}\left[S(\Omega) * X(\Omega)\right]$

Θεώρημα Parseval:
(Διατήρηση της ενέργειας)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\Omega)|^2\, d\Omega$$

Ολίσθηση στο χρόνο: $x(t-t_0) \xleftrightarrow{F} e^{-j\Omega t_0} X(\Omega)$

Απόδειξη Α:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega)\, e^{j\Omega t}\, d\Omega$$

Αντικαθιστώντας όπου t το $t-t_0$ έχουμε:

$$x(t-t_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega)\, e^{j\Omega(t-t_0)}\, d\Omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left[e^{-j\Omega t_0} X(\Omega)\right] e^{j\Omega t}\, d\Omega$$

Με βάση τον ορισμό συνάγεται ότι ο ΜF του $x(t-t_0)$ ισούται με $e^{-j\Omega t_0} X(\Omega)$,

ή $F\{x(t-t_0)\} = e^{-j\Omega t_0} X(\Omega)$

Απόδειξη Β:

$$F\{x(t)\} = X(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\Omega t}\, dt$$

Ο ΜF του $x(t-t_0)$ είναι:

$$F\{x(t-t_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-t_0)\, e^{-j\Omega t}\, dt =$$

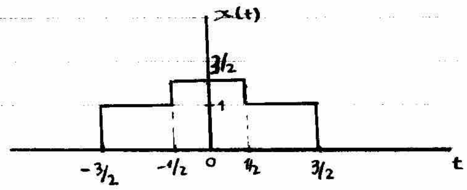
$$= \langle \text{θέτοντες } t-t_0 = \tau \rangle =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, e^{-j\Omega(\tau+t_0)}\, d(\tau+t_0) =$$

$$= e^{-j\Omega t_0} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, e^{-j\Omega \tau}\, d\tau}_{X(\Omega)} =$$

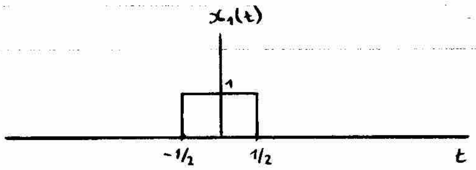
$$= e^{-j\Omega t_0} X(\Omega)$$

Παράδειγμα 3.7: Να υπολογιστεί ο MF του $x(t)$ του σχήματος.

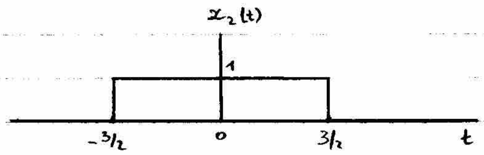


Το $x(t)$ μπορεί να εκφραστεί ως άθροισμα δύο σημάτων $x_1(t), x_2(t)$ δηλ. $x(t) = \frac{1}{2} x_1(t) + x_2(t)$

ΓΡΑΜΜΙΚΟΤΗΤΑ



$$\rightarrow X_1(\Omega) = \frac{\sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)}{\frac{\Omega}{2}}$$

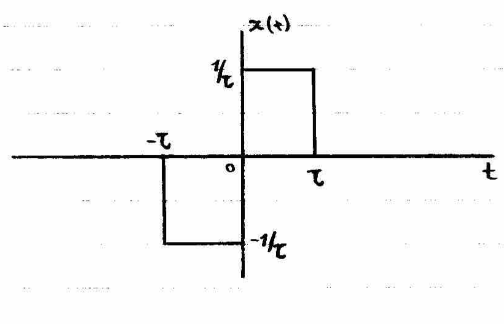


$$\rightarrow X_2(\Omega) = 3\,\frac{\sin\left(\frac{3\Omega}{2}\right)}{\frac{3\Omega}{2}}$$

Τελικά, λόγω της ιδιότητας της γραμμικότητας ο MF της $x(t)$ θα ισούται με:

$$X(\Omega) = \frac{1}{2} X_1(\Omega) + X_2(\Omega) = \frac{\sin\left(\frac{\Omega}{2}\right) + 2\sin\left(\frac{3\Omega}{2}\right)}{\Omega}$$

Παράδειγμα 3.8: Να υπολογιστεί ο MF του $x(t)$ του σχήματος.



ΓΡΑΜΜΙΚΟΤΗΤΑ & ΟΛΙΣΘΗΣΗ

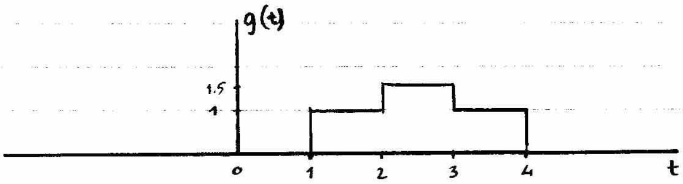
Παρατηρούμε ότι το $x(t)$ μπορεί να εκφραστεί ως διαφορά δύο παλμών

$$x(t) = \frac{1}{\tau}\left[p_{\tau/2}\left(t - \frac{\tau}{2}\right) - p_{\tau/2}\left(t + \frac{\tau}{2}\right)\right]$$

$$X(\Omega) = \frac{1}{\tau}\left[\tau\,\frac{\sin\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right)}{\frac{\Omega\tau}{2}} e^{-j\Omega\tau/2} - \tau\,\frac{\sin\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right)}{\frac{\Omega\tau}{2}} e^{+j\frac{\Omega\tau}{2}}\right]$$

$$= 2\,\frac{\sin\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right)}{\Omega\tau}\left[e^{-j\Omega\tau/2} - e^{j\Omega\tau/2}\right] = -4j\,\frac{\sin^2\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right)}{\Omega\tau}$$

Παράδειγμα 3.9: Να υπολογιστεί ο ΜF του g(t) του σχήματος



Παρατηρούμε ότι $g(t) = x(t-2.5) = x(t-\frac{5}{2})$

Άρα $G(\Omega) = e^{-j\Omega\frac{5}{2}} X(\Omega) = e^{-j\Omega\frac{5}{2}} \underbrace{\frac{\sin(\frac{\Omega}{2}) + 2\sin(\frac{3\Omega}{2})}{\Omega}}_{\text{από παράδειγμα 3.7}}$

Παράδειγμα 3.10: Να υπολογιστεί ο ΜF της σταθεράς 1

Γνωρίζουμε ότι $\delta(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} 1$

Με βάση την ιδιότητα της δυϊκότητας (duality property)

$$X(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} 2\pi\, x(-\Omega)$$

έχουμε

$$1 \overset{F}{\longleftrightarrow} 2\pi\, \delta(-\Omega) = 2\pi\,\delta(\Omega)$$

Επαλήθευση: Υπολογίζουμε τον αντίστροφο ΜF της $2\pi\delta(\Omega)$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega)\, e^{j\Omega t}\, d\Omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\,\delta(\Omega)\, e^{j\Omega t}\, d\Omega =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\Omega)\, e^{j\Omega t}\, d\Omega = \left\langle \text{λόγω της ιδιότητας κοσκινίσματος κρουστικής } \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\delta(t-t_0)\,dt = f(t_0) \right\rangle =$$

$$= e^{j0t} = 1$$

Παράδειγμα 3.11: Να υπολογιστεί ο ΜF της μοναδιαίας βηματικής συνάρτησης $u(t)$

- Τρόπος Α

Έστω $x(t) = u(t)$ και $g(t) = \delta(t)$

Γνωρίζουμε ότι ο ΜF της $\delta(t)$ ισούται με 1, δηλαδή

$$g(t) = \delta(t) \xleftrightarrow{F} G(\Omega) = 1$$

ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ

Η βηματική μπορεί να εκφραστεί ως ολοκλήρωμα της κρουστικής

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} g(\tau)\, d\tau$$

Λαμβάνοντας τον ΜF και των δύο μελών και με βάση την ιδιότητα ολοκλήρωσης

$$X(\Omega) = \frac{1}{j\Omega} G(\Omega) + \pi G(0)\delta(\Omega) = \frac{1}{j\Omega} + \pi\delta(\Omega)$$

ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ

Σημείωση: Θυμηθείτε ότι η $\delta(t)$ προκύπτει ως η πρώτη παράγωγος της βηματικής $u(t)$. Με βάση αυτό και την ιδιότητα της διαφόρισης μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι $\delta(t) \xleftrightarrow{F} 1$

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt} \xleftrightarrow{F} j\Omega\left[\frac{1}{j\Omega} + \pi\delta(\Omega)\right] = 1 \qquad \text{αφού } \Omega \cdot \delta(\Omega) = 0$$

- Τρόπος Β

Εκφράζουμε τη $u(t)$ ως άθροισμα συναρτήσεων

$$u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{sgn}(t)$$ όπου $\mathrm{sgn}(t)$ η συνάρτηση προσήμου

Έχουμε $\frac{1}{2} \xleftrightarrow{F} \pi\delta(\Omega)$

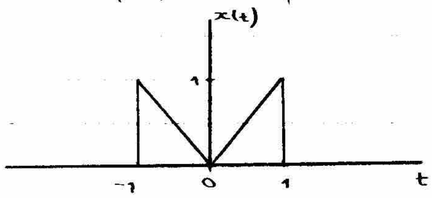
$$\mathrm{sgn}(t) \longleftrightarrow \frac{2}{j\Omega}$$

ΓΡΑΜΜΙΚΟΤΗΤΑ

Εφαρμόζοντας την ιδιότητα της γραμμικότητας έχουμε

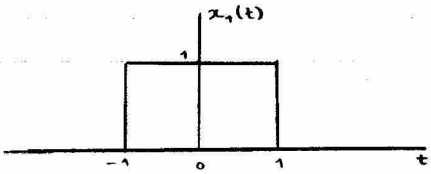
$$u(t) \xleftrightarrow{F} \pi\delta(\Omega) + \frac{1}{j\Omega}$$

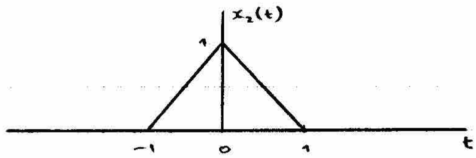
Παράδειγμα 3.20. Να υπολογιστεί το φάσμα του σήματος $x(t)$ του σχήματος



Λύση

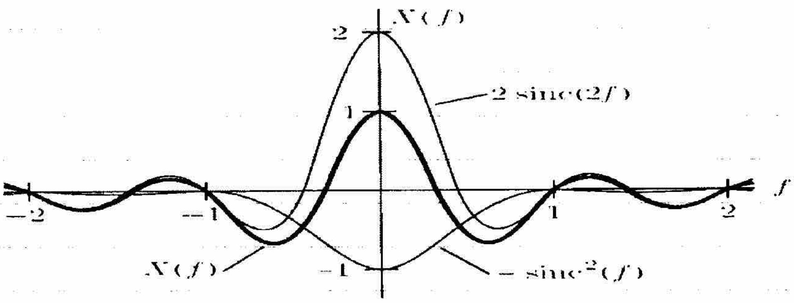
Το σήμα $x(t)$ μπορεί να εκφραστεί ως $x(t) = x_1(t) - x_2(t)$

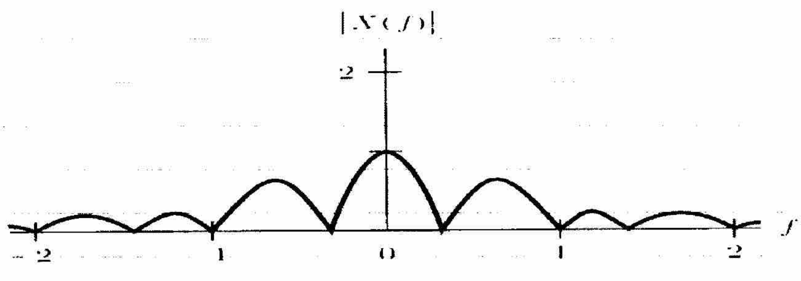


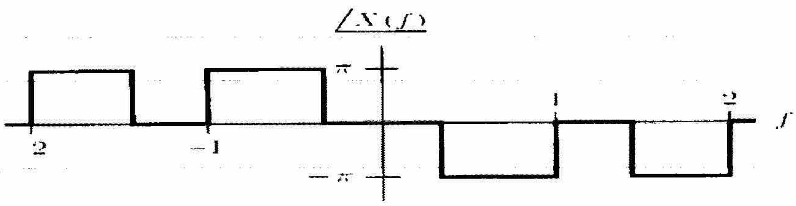


Άρα $\quad X(\Omega) = X_1(\Omega) - X_2(\Omega) = 2 \cdot \text{sinc}\left(\frac{\Omega}{\pi}\right) - 1 \cdot \text{sinc}^2\left(\frac{\Omega}{2\pi}\right)$

Οι γραφικές παραστάσεις του $X(\Omega)$ καθώς και του μέτρου και της φάσης δίνονται στη συνέχεια. (Προσοχή, οι γραφικές παραστάσεις είναι συνάρτηση της συχνότητας f, όπου $\Omega = 2\pi f$).







Ολίσθηση στη συχνότητα: $e^{j\Omega_0 t} x(t) \xleftrightarrow{F} X(\Omega - \Omega_0)$

Παράδειγμα 3.12: Να υπολογιστεί ο ΜF της $x(t) \cdot \cos\Omega_0 t$

Έχουμε $\cos\Omega_0 t = \frac{1}{2}\left[e^{j\Omega_0 t} + e^{-j\Omega_0 t}\right]$

Άρα $x(t)\cdot\cos\Omega_0 t = \frac{1}{2}\left[e^{j\Omega_0 t} x(t) + e^{-j\Omega_0 t} x(t)\right]$

Και λαμβάνοντας τον ΜF και των δύο μελών έχουμε:

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Διαμόρφωση πλάτους}}}{x(t)\cos\Omega_0 t} \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2}\left[X(\Omega-\Omega_0) + X(\Omega+\Omega_0)\right]$$

Παράδειγμα 3.13: Να υπολογιστεί ο ΜF της $x(t)\cdot\sin\Omega_0 t$

Έχουμε $\sin\Omega_0 t = \frac{1}{2j}\left[e^{j\Omega_0 t} - e^{-j\Omega_0 t}\right]$

Άρα $x(t)\cdot\sin\Omega_0 t = \frac{1}{2j}\left[e^{j\Omega_0 t} x(t) - e^{-j\Omega_0 t} x(t)\right]$

και τελικά ο ΜF και των δύο μελών δίνει:

$$x(t)\sin\Omega_0 t \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2j}\left[X(\Omega-\Omega_0) - X(\Omega+\Omega_0)\right]$$

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί ο ΜF της $x(t) = e^{-at}\cos(\Omega_0 t)\,u(t)$

ΛΥΣΗ Α' τρόπος

$$X(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,e^{-j\Omega t}\,dt = \int_0^{\infty} e^{-at}\cos(\Omega_0 t)\,e^{-j\Omega t}\,dt =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-at}\left[\frac{e^{j\Omega_0 t}+e^{-j\Omega_0 t}}{2}\right] e^{-j\Omega t}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-(a+j\Omega-j\Omega_0)t}\,dt + \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-(a+j\Omega+j\Omega_0)t}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\alpha+j(\Omega-\Omega_0)} + \frac{1}{\alpha+j(\Omega+\Omega_0)}\right] =$$

$$= \frac{\alpha+j\Omega}{\alpha^2+2j\Omega a+(\Omega_0^2-\Omega^2)}$$

Β' τρόπος

$$x(t) = e^{-\alpha t}\,\frac{e^{j\Omega_0 t}+e^{-j\Omega_0 t}}{2}\,u(t) =$$

$$= \frac{1}{2}\Big[e^{j\Omega_0 t}\underbrace{e^{-\alpha t}u(t)}_{g(t)} + e^{-j\Omega_0 t}\underbrace{e^{-\alpha t}u(t)}_{g(t)}\Big] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^{j\Omega_0 t}g(t) + e^{-j\Omega_0 t}g(t)\right]$$

Με βάση την ιδιότητα της ολίσθησης στη συχνότητα έχουμε ότι:

$$e^{j\Omega_0 t}g(t) \xleftrightarrow{F} G(\Omega-\Omega_0)$$

$$e^{-j\Omega_0 t}g(t) \xleftrightarrow{F} G(\Omega+\Omega_0)$$

Αλλά σε προηγούμενη άσκηση είχαμε υπολογίσει το $G(\Omega)$:

$$G(\Omega) = F\{e^{-\alpha t}u(t)\} = \frac{1}{\alpha+j\Omega}$$

Άρα τελικά

$$X(\Omega) = \frac{1}{2}\left[G(\Omega-\Omega_0) + G(\Omega+\Omega_0)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\alpha+j(\Omega-\Omega_0)} + \frac{1}{\alpha+j(\Omega+\Omega_0)}\right]$$

ΑΣΚΗΣΗ

Να υπολογιστεί ο ΜΕ του σήματος $x(t) = t\,e^{-\alpha t}\sin\beta t\,u(t)$

ΛΥΣΗ Α' τρόπος

Με βάση τον ορισμό του ΜΕ έχουμε:

$$X(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,e^{-j\Omega t}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} t\,e^{-\alpha t}\sin\beta t\,u(t)\,e^{-j\Omega t}\,dt =$$

$$= \int_{0}^{\infty} t\,e^{-\alpha t}\,\frac{e^{j\beta t}-e^{-j\beta t}}{2j}\,e^{-j\Omega t}\,dt =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2j}\int_{0}^{\infty} t\,e^{-(\alpha-j\beta+j\Omega)t}\,dt}_{X_1(\Omega)} - \underbrace{\frac{1}{2j}\int_{0}^{\infty} t\,e^{-(\alpha+j\beta+j\Omega)t}\,dt}_{X_2(\Omega)} \qquad (1)$$

Αλλά

$$I = \int_{0}^{\infty} t\,e^{-At}\,dt = -\frac{1}{A}\int_{0}^{\infty} t\,d\left(e^{-At}\right) = \langle \text{ολοκλήρωση κατά παράγοντες} \rangle =$$

$$= -\frac{1}{A}\left[t\,e^{-At}\Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} e^{-At}\,dt\right] =$$

$$= -\frac{1}{A}\left[0 - 0 - \left(-\frac{1}{A}\right)e^{-At}\Big|_0^{\infty}\right] =$$

$$= \frac{-1}{A^2}e^{-At}\Big|_0^{\infty} = \frac{-1}{A^2}(0-1) = \frac{1}{A^2} \qquad (2)$$

Με βάση το αποτέλεσμα (2) η $X_1(\Omega)$ προκύπτει για $A = \alpha - j\beta + j\Omega$ και η $X_2(\Omega)$ για $A = \alpha + j\beta + j\Omega$. Συνεπώς έχουμε:

$$X(\Omega) = \frac{1}{2j}\left[\frac{1}{(\alpha - j\beta + j\Omega)^2} - \frac{1}{(\alpha + j\beta + j\Omega)^2}\right]$$

Β' τρόπος

$$x(t) = t e^{-at} \sin\beta t \, u(t) =$$
$$= t e^{-at} \frac{e^{j\beta t} - e^{-j\beta t}}{2j} u(t) =$$
$$= \frac{1}{2j}\Big[\underbrace{t e^{-(\alpha - j\beta)t} u(t)}_{x_1(t)} - \underbrace{t e^{-(\alpha + j\beta)t} u(t)}_{x_2(t)}\Big]$$

Έχουμε όμως σε προηγούμενη άσκηση υπολογίσει τον ΜF της $t e^{-At} u(t)$, δηλαδή

$$F\{t e^{-At} u(t)\} = \frac{1}{(A + j\Omega)^2}$$

Στην προκειμένη περίπτωση $A = \alpha - j\beta$ για την $x_1(t)$ και $A = \alpha + j\beta$ για την $x_2(t)$. Άρα ο ΜF της $x(t)$ θα ισούται με:

$$X(\Omega) = \frac{1}{2j}\left[\frac{1}{(\alpha - j\beta + j\Omega)^2} - \frac{1}{(\alpha + j\beta + j\Omega)^2}\right]$$

Γ' τρόπος

$$x(t) = t e^{-at} \sin\beta t \, u(t) =$$
$$= t e^{-at} \frac{e^{j\beta t} - e^{-j\beta t}}{2j} u(t) =$$
$$= \frac{1}{2j} e^{j\beta t} \underbrace{t e^{-at} u(t)}_{g(t)} - \frac{1}{2j} e^{-j\beta t} \underbrace{t e^{-at} u(t)}_{g(t)} =$$
$$= \frac{1}{2j}\left[e^{j\beta t} g(t) - e^{-j\beta t} g(t)\right]$$

Με βάση την ιδιότητα της ολίσθησης στη συχνότητα έχουμε ότι:

$$e^{j\beta t} g(t) \stackrel{F}{\longleftrightarrow} G(\Omega - \beta)$$
$$e^{-j\beta t} g(t) \stackrel{F}{\longleftrightarrow} G(\Omega + \beta) \qquad \text{όπου} \quad G(\Omega) = \frac{1}{(\alpha + j\Omega)^2}$$

Άρα $X(\Omega) = \frac{1}{2j}\left[\frac{1}{[\alpha + j(\Omega - \beta)]^2} - \frac{1}{[\alpha + j(\Omega + \beta)]^2}\right] =$

$$= \frac{1}{2j}\left[\frac{1}{(\alpha - j\beta + j\Omega)^2} - \frac{1}{(\alpha + j\beta + j\Omega)^2}\right]$$

Άσκηση Να υπολογιστεί ο ΜF του σήματος $x_3(t) = x_1(t)\cdot x_2(t)$

για $x_1(t) = 2\cos(200\pi t)$ και $x_2(t) = 5\cos(1000\pi t)$

Λύση

$$x_3(t) = 10\cos(200\pi t)\cos(1000\pi t) =$$

$$= 10\cos(200\pi t)\left[\frac{e^{j1000\pi t} + e^{-j1000\pi t}}{2}\right] =$$

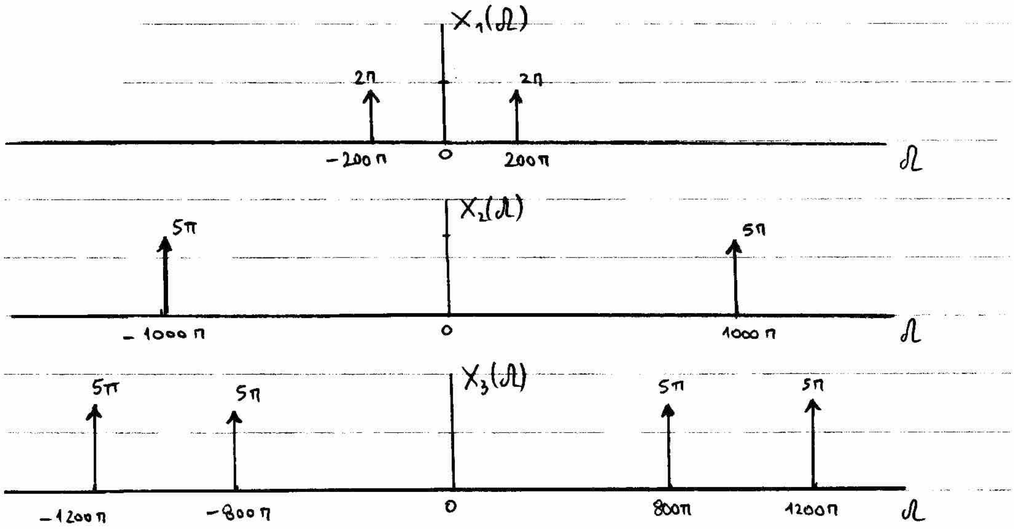
$$= 5\cos(200\pi t)\, e^{j1000\pi t} + 5\cos(200\pi t)\, e^{-j1000\pi t}$$

Κάνοντας χρήση της ιδιότητας της ολίσθησης (μετατόπισης) στη συχνότητα και του ζεύγους ΜF $\cos(\Omega_0 t) \xleftrightarrow{F} \pi\left[\delta(\Omega-\Omega_0)+\delta(\Omega+\Omega_0)\right]$ έχουμε:

$$X_3(\Omega) = 5\pi\left[\delta(\Omega - 200\pi - 1000\pi) + \delta(\Omega + 200\pi - 1000\pi)\right] +$$

$$+ 5\pi\left[\delta(\Omega - 200\pi + 1000\pi) + \delta(\Omega + 200\pi + 1000\pi)\right] =$$

$$= 5\pi\left[\delta(\Omega - 1200\pi) + \delta(\Omega - 800\pi) + \delta(\Omega + 800\pi) + \delta(\Omega + 1200\pi)\right]$$



Παρατήρηση 1: Εάν υπολογίσουμε το $x_3(t)$ ως τον αντίστροφο ΜF του $X_3(\Omega)$ βρίσκουμε:

$$x_3(t) = F^{-1}\{X_3(\Omega)\} = F^{-1}\{5\pi[\delta(\Omega-1200\pi) + \delta(\Omega+1200\pi)\} +$$

$$+ F^{-1}\{5\pi[\delta(\Omega-800\pi) + \delta(\Omega+800\pi)\} =$$

$$= 5\cos 1200\pi t + 5\cos 800\pi t$$

Το αποτέλεσμα αυτό φαίνεται διαφορετικό από αυτό που περιμέναμε όμως είναι σωστό!

Θυμηθείτε την τριγωνομετρική σχέση:

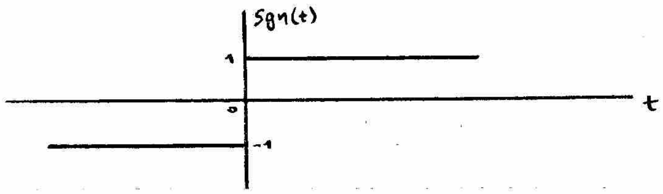
$$2\cos x \cdot \cos y = \cos(x+y) + \cos(x-y)$$

Παρατήρηση 2: Η άσκηση αυτή θα μπορούσε να λυθεί και με βάση την ιδιότητα του πολλ/μού του ΜF:

$$x_1(t) \cdot x_2(t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2\pi}[X_1(\Omega) * X_2(\Omega)]$$

Παράδειγμα 3.14: Να υπολογιστεί ο ΜF της συνάρτησης προσήμου

$$sgn(t) = \begin{cases} 1, & t>0 \\ -1, & t<0 \end{cases}$$



Η sgn(t) μπορεί να εκφραστεί ως

$$sgn(t) = 2u(t) - 1$$

Άρα

$$sgn(t) \xleftrightarrow{F} 2\left[\frac{1}{j\Omega} + \pi\delta(\Omega)\right] - 2\pi\delta(\Omega) = \frac{2}{j\Omega}$$

Παράδειγμα 3.15: Να υπολογιστεί ο ΜF της $x(t) = \cos(\Omega_0 t)\, u(t)$

Από τη σχέση του Euler $e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi$ προκύπτει ότι $\cos\varphi = \frac{1}{2}\left[e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}\right]$, οπότε η $x(t)$ γράφεται ως:

$$x(t) = \frac{1}{2} e^{j\Omega_0 t} u(t) + \frac{1}{2} e^{-j\Omega_0 t} u(t)$$

Λόγω της ιδιότητας της ολίσθησης στη συχνότητα

$$e^{j\Omega_0 t} x(t) \xleftrightarrow{F} X(\Omega - \Omega_0)$$

και του ΜF της u(t): $\quad u(t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{j\Omega} X(\Omega) + \pi\delta(\Omega)$

υπολογίζουμε τελικά τον ΜF της x(t):

$$\cos(\Omega_0 t)\, u(t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2}\left[U(\Omega - \Omega_0)\right] + \frac{1}{2}\left[U(\Omega + \Omega_0)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{j(\Omega - \Omega_0)} + \pi\delta(\Omega - \Omega_0)\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{j(\Omega + \Omega_0)} + \pi\delta(\Omega + \Omega_0)\right] =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[\delta(\Omega - \Omega_0) + \delta(\Omega + \Omega_0)\right] + \frac{j\Omega}{\Omega_0^2 - \Omega^2}$$

Παράδειγμα 3.16: Να υπολογιστεί ο ΜΦ της συνάρτησης προσήμου (βλ. και παράδειγμα 3.14)

Η sgn(t) μπορεί να εκφραστεί ως

$$sgn(t) = u(t) - u(-t)$$

χρήση της ιδιότητας κλιμάκωσης για $\alpha=-1$ $\quad x(-t) \xleftrightarrow{F} X(-\Omega)$

Άρα

$$sgn(t) \xleftrightarrow{F} U(\Omega) - U(-\Omega) = \left[\frac{1}{j\Omega} + \pi\delta(\Omega)\right] - \left[\frac{1}{-j\Omega} + \pi\delta(-\Omega)\right] =$$

$$= \frac{2}{j\Omega} + \cancel{\pi\delta(\Omega) - \pi\delta(\Omega)}$$

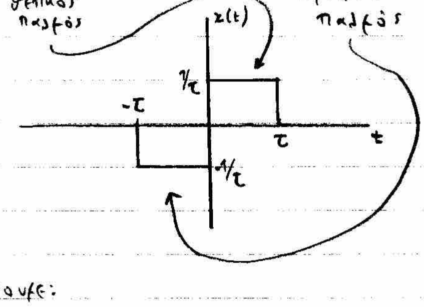
$$= \frac{2}{j\Omega}$$

χρήση της ιδιότητας $\delta(\Omega) = \delta(-\Omega)$ αφού η συνάρτηση δέλτα είναι μια άρτια κατανομή

Παράδειγμα 3.17: Να υπολογιστεί ο ΜΦ του σήματος του παραδείγματος 3.8 μέσω του ΜΦ της βηματικής συνάρτησης.

Η $x(t)$ μπορεί να εκφραστεί ως

$$x(t) = \frac{1}{\tau}\underbrace{\left[u(t) - u(t-\tau)\right]}_{\text{θετικός παλμός}} - \frac{1}{\tau}\underbrace{\left[u(t+\tau) - u(t)\right]}_{\text{αρνητικός παλμός}} = \frac{1}{\tau}\left[2u(t) - u(t-\tau) - u(t+\tau)\right]$$



Συνεπώς έχουμε:

$$X(\Omega) = \frac{1}{\tau}\left[2U(\Omega) - e^{-j\Omega\tau}U(\Omega) - e^{j\Omega\tau}U(\Omega)\right] =$$

$$= \frac{1}{\tau}U(\Omega)\left[2 - (e^{j\Omega\tau} + e^{-j\Omega\tau})\right] =$$

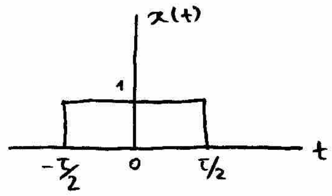
$$= \frac{1}{\tau}U(\Omega)\left[2 - 2\cdot\cos(\Omega\tau)\right] = \frac{2}{\tau}U(\Omega)\left[1 - \left(1 - 2\sin^2\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right)\right)\right] =$$

$$= \frac{4}{\tau}U(\Omega)\sin^2\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right) = \frac{4}{\tau}\sin^2\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right)\left[\frac{1}{j\Omega} + \pi\delta(\Omega)\right] =$$

$$= \frac{4}{j\Omega\tau}\sin^2\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right) + \underbrace{\frac{4\pi}{\tau}\sin^2\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right)\delta(\Omega)}_{0} = -4j\frac{\sin^2\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right)}{\Omega\tau}$$

διότι για $\Omega=0$
$\delta(\Omega)=1$ και $\sin^2\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right) = \sin^2(0) = 0$

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί το φάσμα του σήματος $x(t)$ του σχήματος.



ΛΥΣΗ

$$x(t) = u\left(t+\frac{\tau}{2}\right) - u\left(t-\frac{\tau}{2}\right)$$

F

$$X(\Omega) = F\left\{u\left(t+\frac{\tau}{2}\right)\right\} - F\left\{u\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right\} =$$

$$= e^{j\Omega\frac{\tau}{2}}U(\Omega) - e^{-j\Omega\frac{\tau}{2}}U(\Omega) =$$

$$= U(\Omega)\left(e^{j\Omega\frac{\tau}{2}} - e^{-j\Omega\frac{\tau}{2}}\right) =$$

$$= \left[\frac{1}{j\Omega} + \pi\delta(\Omega)\right] 2j\sin\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{\cancel{j}\Omega}\cdot 2\cancel{j}\sin\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right) + \pi\delta(\Omega)\,2j\sin\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right) =$$

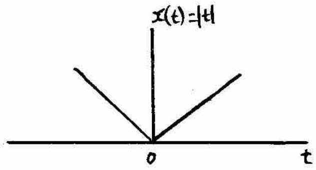
$$= \frac{2\sin\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right)}{\Omega} + 2\pi j\underbrace{\delta(\Omega)\sin\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right)}_{\delta(\Omega)\cdot\sin\left(\frac{0\tau}{2}\right) = \delta(\Omega)\cdot\sin(0) = 0} =$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right)}{\frac{\Omega}{2}} =$$

$$= \tau\frac{\sin\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right)}{\frac{\Omega\tau}{2}} =$$

$$= \tau\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\Omega\tau}{2\pi}\right) \qquad \text{όπου} \quad \mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

Παράδειγμα 3.18: Να υπολογιστεί ο MF της $x(t) = |t|$.



Παρατηρούμε ότι $\frac{d}{dt} x(t) = \mathrm{sgn}(t)$

Άρα

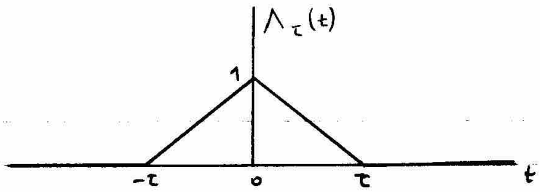
$$F\left\{\frac{d}{dt} x(t)\right\} = F\{\mathrm{sgn}(t)\} \Rightarrow$$

$$j\Omega\, X(\Omega) = \frac{2}{j\Omega} \Rightarrow$$

$$X(\Omega) = \frac{-2}{\Omega^2}$$

Παράδειγμα 3.19: Να υπολογιστεί ο MF του τριγωνικού παλμού

$$\Lambda_\tau(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{\tau} & |t| < \tau \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$



ΛΥΣΗ

Α' τρόπος

$$F\{\Lambda_\tau(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \Lambda_\tau(t)\, e^{-j\Omega t} dt = \int_{-\tau}^{0} \left(1 - \frac{-t}{\tau}\right) e^{-j\Omega t} dt + \int_{0}^{\tau} \left(1 - \frac{t}{\tau}\right) e^{-j\Omega t} dt =$$

$$= \int_{-\tau}^{0} e^{-j\Omega t} dt + \frac{1}{\tau}\int_{-\tau}^{0} t\, e^{-j\Omega t} dt + \int_{0}^{\tau} e^{-j\Omega t} dt - \frac{1}{\tau}\int_{0}^{\tau} t\, e^{-j\Omega t} dt =$$

$$= \frac{1}{-j\Omega} e^{-j\Omega t}\Big|_{-\tau}^{0} + \frac{1}{\tau}\cdot\frac{1}{-j\Omega}\int_{-\tau}^{0} t\, d\left(e^{-j\Omega t}\right) + \frac{1}{-j\Omega} e^{-j\Omega t}\Big|_{0}^{\tau} - \frac{1}{\tau}\cdot\frac{1}{-j\Omega}\int_{0}^{\tau} t\, d\left(e^{-j\Omega t}\right) =$$

$$= \frac{-1}{j\Omega}\left(1 - e^{j\Omega\tau}\right) + \frac{-1}{j\Omega\tau}\left[t\cdot e^{-j\Omega t}\Big|_{-\tau}^{0} - \int_{-\tau}^{0} e^{-j\Omega t} dt\right] +$$

$$+ \frac{-1}{j\Omega}\left(e^{-j\Omega\tau} - 1\right) + \frac{1}{j\Omega\tau}\left[t\, e^{-j\Omega t}\Big|_{0}^{\tau} - \int_{0}^{\tau} e^{-j\Omega t} dt\right] =$$

$$= \frac{1}{j\Omega} e^{j\Omega\tau} - \cancel{\frac{1}{j\Omega}} - \frac{1}{j\Omega\tau}\left[0 - (-\tau)\, e^{j\Omega\tau} - \frac{1}{-j\Omega}\, e^{-j\Omega t}\Big|_{-\tau}^{0}\right]$$

$$- \frac{1}{j\Omega} e^{-j\Omega\tau} + \cancel{\frac{1}{j\Omega}} + \frac{1}{j\Omega\tau}\left[\tau\, e^{-j\Omega\tau} - 0 - \frac{1}{-j\Omega}\, e^{-j\Omega t}\Big|_{0}^{\tau}\right] =$$

$$= \frac{1}{j\Omega}\left(e^{j\Omega\tau} - e^{-j\Omega\tau}\right) - \frac{1}{j\Omega\tau}\left[\tau\, e^{j\Omega\tau} + \frac{1}{j\Omega}\left(1 - e^{j\Omega\tau}\right)\right]$$

$$+ \frac{1}{j\Omega\tau}\left[\tau\, e^{-j\Omega\tau} + \frac{1}{j\Omega}\left(e^{-j\Omega\tau} - 1\right)\right] =$$

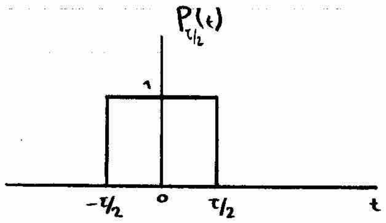
$$= \cancel{\frac{1}{j\Omega}\left(e^{j\Omega\tau} - e^{-j\Omega\tau}\right)} - \cancel{\frac{1}{j\Omega}\left(e^{j\Omega\tau} - e^{-j\Omega\tau}\right)} + \frac{1}{\Omega^2\tau}\left(1 - e^{j\Omega\tau}\right) - \frac{1}{\Omega^2\tau}\left(e^{-j\Omega\tau} - 1\right) =$$

$$= \frac{1}{\Omega^2\tau}\left(1 - e^{j\Omega\tau} - e^{-j\Omega\tau} + 1\right) = \frac{1}{\Omega^2\tau}\left[2 - \left(e^{j\Omega\tau} + e^{-j\Omega\tau}\right)\right] =$$

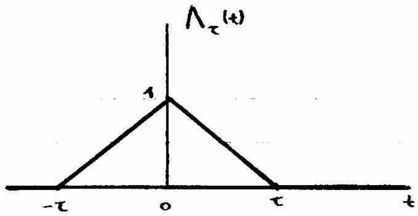
$$= \frac{1}{\Omega^2\tau}\left[2 - 2\cdot\cos(\Omega\tau)\right] = \frac{1}{\Omega^2\tau}\cdot\left[2 - 2\left(1 - 2\sin^2\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right)\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{\Omega^2\tau}\left[\cancel{2} - \cancel{2} + 4\sin^2\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right)\right] = \tau\,\frac{\sin^2\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right)}{\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right)^2} = \tau\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{\Omega\tau}{2\pi}\right)$$

<u>ΣΗΜΕΙΩΣΗ</u>



$$P_{\tau/2}(t) = \begin{cases} 1 & |t| < \tau/2 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases} \quad \overset{F}{\longleftrightarrow} \quad \tau\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\Omega\tau}{2\pi}\right)$$

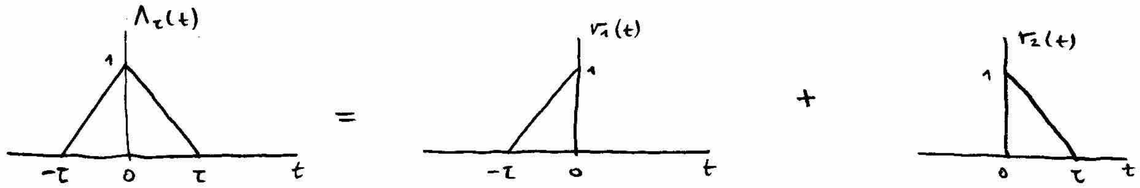


$$\Lambda_\tau(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{\tau} & |t| < \tau \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases} \quad \overset{F}{\longleftrightarrow} \quad \tau\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{\Omega\tau}{2\pi}\right)$$

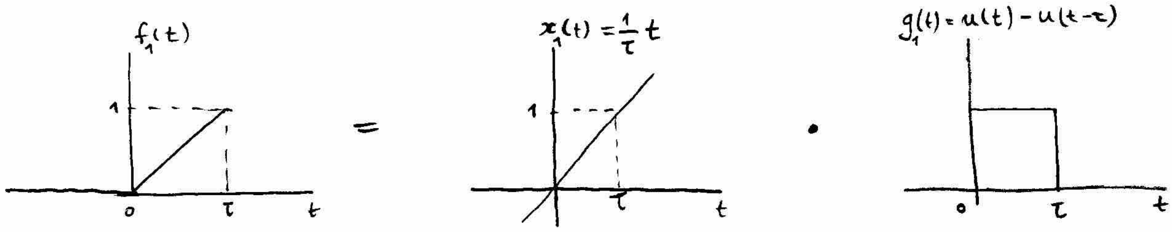
όπου $\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$

Β' τρόπος

Ένας άλλος τρόπος υπολογισμού του MF του τριγωνικού παλμού είναι εκφράζοντας τη συνάρτηση $\Lambda_\tau(t)$ ως συνδυασμό γνωστών συναρτήσεων.



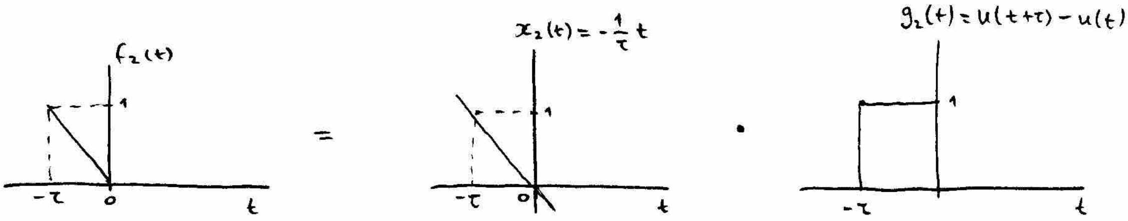
$$\Lambda_\tau(t) = r_1(t) + r_2(t) \qquad (1)$$



$$f_1(t) = x_1(t) \cdot g_1(t) = \frac{1}{\tau}t\left[u(t) - u(t-\tau)\right] \qquad (2)$$

Τελικά η ζητούμενη $r_1(t)$ είναι ίση με την $f_1(t)$ μετατοπισμένη προς τα αριστερά κατά χρόνο τ, δηλαδή

$$r_1(t) = f_1(t+\tau) = \langle \text{λόγω της (2)} \rangle =$$
$$= \frac{1}{\tau}(t+\tau)\left[u(t+\tau) - u(t)\right] \qquad (3)$$



$$f_2(t) = x_2(t) \cdot g_2(t) = -\frac{1}{\tau}t\left[u(t+\tau) - u(t)\right] \qquad (4)$$

Η ζητούμενη $r_2(t)$ είναι ίση με την $f_2(t)$ μετατοπισμένη προς τα δεξιά (delayed) κατά χρόνο τ, δηλαδή

$$r_2(t) = f_2(t-\tau) = -\frac{1}{\tau}(t-\tau)\left[u(t) - u(t-\tau)\right] \qquad (5)$$

Από τις (1), (3), (5) υπολογίζουμε την $\Lambda_\tau(t)$:

$$\Lambda_\tau(t) = r_1(t) + r_2(t) =$$

$$= \frac{1}{\tau}(t+\tau)\left[u(t+\tau) - u(t)\right] - \frac{1}{\tau}(t-\tau)\left[u(t) - u(t-\tau)\right] =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\tau}(t+\tau)\,u(t+\tau)}_{r(t+\tau)} - \frac{1}{\tau}(t+\tau)\,u(t) - \frac{1}{\tau}(t-\tau)\,u(t) + \underbrace{\frac{1}{\tau}(t-\tau)\,u(t-\tau)}_{r(t-\tau)} =$$

$$= \frac{1}{\tau}\,r(t+\tau) - \frac{1}{\tau}\left(t+\cancel{\tau}+t-\cancel{\tau}\right)u(t) + \frac{1}{\tau}\,r(t-\tau) =$$

$$= \frac{1}{\tau}\left[r(t+\tau) - 2\,r(t) + r(t-\tau)\right] \qquad (6)$$

όπου $r(t) = t\,u(t)$ η συνάρτηση μοναδιαίας κλίσης (ramp)

Η παράγωγος της $r(t)$ μας δίνει την $u(t)$ και η παράγωγος της $u(t)$ μας δίνει την $\delta(t)$.

Παραγωγίζουμε και τα δύο μέλη της (6) και έχουμε:

$$\Lambda'_\tau(t) = \frac{1}{\tau}\left[u(t+\tau) - 2\,u(t) + u(t-\tau)\right] \qquad (7)$$

$$\Lambda''_\tau(t) = \frac{1}{\tau}\left[\delta(t+\tau) - 2\,\delta(t) + \delta(t-\tau)\right] \qquad (8)$$

Παίρνουμε τον ΜF της (8):

$$F\{\Lambda''_\tau(t)\} = \frac{1}{\tau}\left[F\{\delta(t+\tau)\} - 2\,F\{\delta(t)\} + F\{\delta(t-\tau)\}\right] =$$

$$= \frac{1}{\tau}\left[e^{j\Omega\tau} - 2\cdot 1 + e^{-j\Omega\tau}\right] =$$

$$= \frac{1}{\tau}\left[e^{j\Omega\tau} + e^{-j\Omega\tau} - 2\right] = \frac{1}{\tau}\left[2\cos\Omega\tau - 2\right] = \frac{2}{\tau}\left[\cancel{1} - 2\sin^2\!\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right) - \cancel{1}\right] =$$

$$= -\frac{4}{\tau}\sin^2\!\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right) \qquad (9)$$

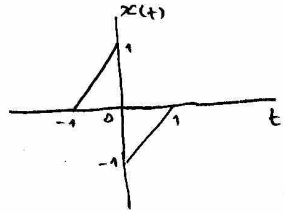
Αλλά από την ιδιότητα της παραγώγισης έχουμε $F\{\Lambda''_\tau(t)\} = (j\Omega)^2\,F\{\Lambda_\tau(t)\}$

και τελικά

$$F\{\Lambda_\tau(t)\} = \frac{1}{(j\Omega)^2}\,F\{\Lambda''_\tau(t)\} = \frac{-1}{\Omega^2}\cdot\frac{-4}{\tau}\sin^2\!\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right) = \frac{4\tau}{\Omega^2\tau^2}\sin^2\!\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right) =$$

$$= \tau\cdot\frac{\sin^2(\Omega\tau/2)}{\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right)^2} = \tau\left(\frac{\sin\Omega\tau/2}{\frac{\Omega\tau}{2}}\right)^2 = \tau\,\mathrm{sinc}^2\!\left(\frac{\Omega\tau}{2\pi}\right)$$

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί ο ΜF του σήματος $x(t)$



ΛΥΣΗ Από το σχήμα συνάγεται ότι $x(t) = \begin{cases} t+1 & \text{για } -1 \le t < 0 \\ t-1 & \text{για } 0 < t \le 1 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$

$$X(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\Omega t}\, dt = \int_{-1}^{0} (t+1)\, e^{-j\Omega t}\, dt + \int_{0}^{1} (t-1)\, e^{-j\Omega t}\, dt =$$

$$= \int_{-1}^{0} t\, e^{-j\Omega t}\, dt + \int_{-1}^{0} e^{-j\Omega t}\, dt + \int_{0}^{1} t\, e^{-j\Omega t}\, dt - \int_{0}^{1} e^{-j\Omega t}\, dt =$$

$$= \frac{1}{-j\Omega} \int_{-1}^{0} t\, d\left(e^{-j\Omega t}\right) + \frac{1}{-j\Omega}\, e^{-j\Omega t}\Big|_{-1}^{0} + \frac{1}{-j\Omega} \int_{0}^{1} t\, d\left(e^{-j\Omega t}\right) - \frac{1}{-j\Omega}\, e^{-j\Omega t}\Big|_{0}^{1} =$$

$$= \frac{1}{-j\Omega}\Bigg[\left(t\, e^{-j\Omega t}\Big|_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} e^{-j\Omega t}\, dt\right) + \left(e^{0} - e^{j\Omega}\right) +$$

$$+ \left(t\, e^{-j\Omega t}\Big|_{0}^{1} - \int_{0}^{1} e^{-j\Omega t}\, dt\right) - \left(e^{-j\Omega} - e^{0}\right)\Bigg] =$$

$$= \frac{1}{-j\Omega}\Bigg[\left(0 + e^{j\Omega}\right) - \frac{1}{-j\Omega}\, e^{-j\Omega t}\Big|_{-1}^{0} + \left(1 - e^{j\Omega}\right) +$$

$$+ \left(e^{-j\Omega} - 0\right) - \frac{1}{-j\Omega}\, e^{-j\Omega t}\Big|_{0}^{1} - \left(e^{-j\Omega} - 1\right)\Bigg] =$$

$$= \frac{1}{-j\Omega}\Bigg[\cancel{e^{j\Omega}} - \frac{1}{-j\Omega}\left(e^{0} - e^{j\Omega}\right) + 1 - \cancel{e^{j\Omega}} +$$

$$+ \cancel{e^{-j\Omega}} - \frac{1}{-j\Omega}\left(e^{-j\Omega} - e^{0}\right) + 1 - \cancel{e^{-j\Omega}}\Bigg] =$$

$$= \frac{1}{-j\Omega}\left[2 - \frac{1}{-j\Omega}\left(\cancel{1} - e^{j\Omega} + e^{-j\Omega} - \cancel{1}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{-j\Omega}\left[2 + \frac{1}{-j\Omega}\left(e^{j\Omega} - e^{-j\Omega}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{-j\Omega}\left[2 + \frac{1}{-j\Omega}\, 2j \sin\Omega\right] = \frac{2}{-j\Omega}\left(1 - \frac{\sin\Omega}{\Omega}\right) =$$

$$= \frac{-2}{j2\pi F}\left(1 - \frac{\sin 2\pi F}{2\pi F}\right) = \frac{j}{\pi F}\left[1 - \text{sinc}(2F)\right]$$

Δυϊκότητα: $X(t) \xleftrightarrow{F} 2\pi\, x(-\Omega)$

Απόδειξη: $x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega)\, e^{j\Omega t}\, d\Omega$

θέτω όπου t το $-t$

$$2\pi\, x(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega)\, e^{-j\Omega t}\, d\Omega$$

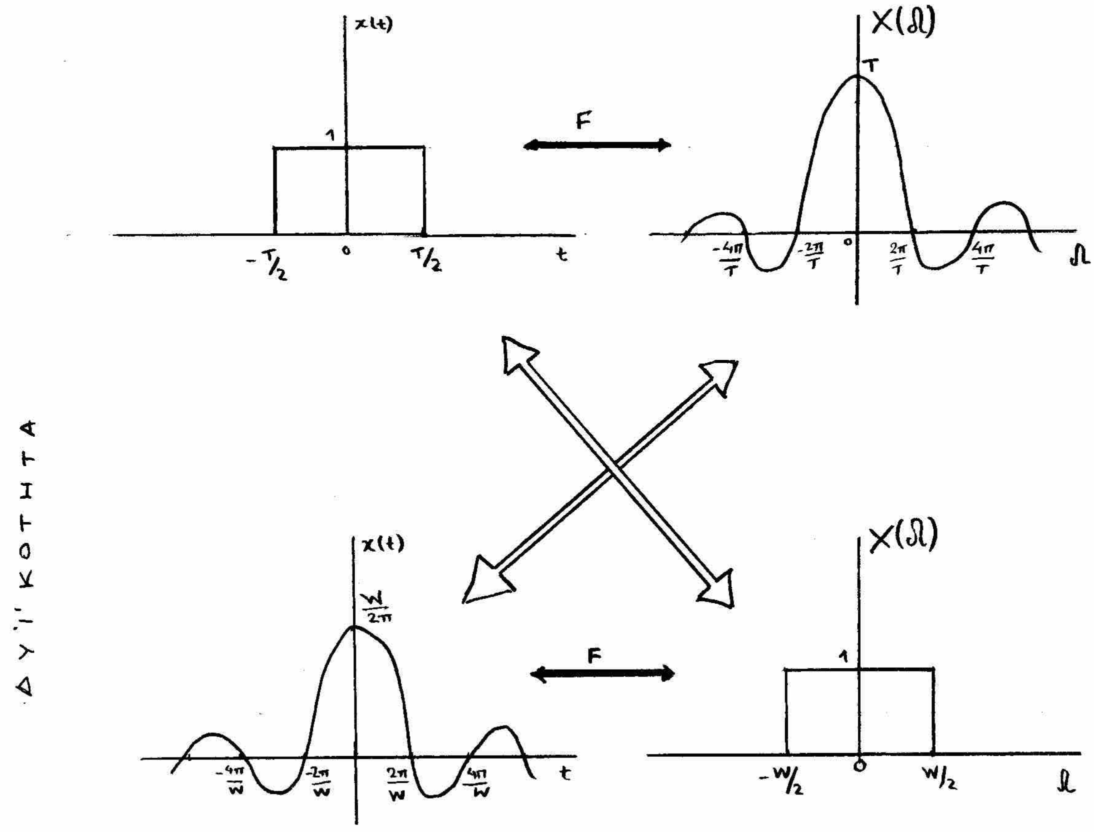
εναλλάσσω t και Ω: $2\pi\, x(-\Omega) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} X(t)\, e^{-j\Omega t}\, dt}_{F\{X(t)\}}$

Με βάση την ιδιότητα της δυϊκότητας μπορούμε να εξηγήσουμε κάποιες από τις γνωστές μας ιδιότητες, όπως αυτή της ολίσθησης στη συχνότητα, ή να εξαγάγουμε άλλες ιδιότητες, όπως εκείνες της παραγώγισης και ολοκλήρωσης στη συχνότητα:

Ολίσθηση στη συχνότητα: $e^{j\Omega_0 t}\, x(t) \xleftrightarrow{F} X(\Omega - \Omega_0)$

Παραγώγιση στη συχνότητα: $-jt\, x(t) \xleftrightarrow{F} \dfrac{dX(\Omega)}{d\Omega}$

Ολοκλήρωση στη συχνότητα: $-\dfrac{1}{jt}\, x(t) + \pi\, x(0)\, \delta(t) \xleftrightarrow{F} \displaystyle\int_{-\infty}^{\Omega} x(w)\, dw$



Σημαντική παρατήρηση: Ένα σήμα περιορισμένης χρονικής διάρκειας <u>δεν</u> μπορεί να είναι περιορισμένου εύρους συχνοτήτων. Αντίστοιχα, ένα σήμα περιορισμένου εύρους συχνοτήτων <u>δεν</u> μπορεί να είναι περιορισμένης χρονικής διάρκειας.

Θεώρημα Συνέλιξης: $h(t) * x(t) \xleftrightarrow{F} H(\Omega)\cdot X(\Omega)$

Απόδειξη: Συνέλιξη ΓΧΑ συστήματος: $y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)\,d\tau$

ΜF $y(t)$: $Y(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\,x(t-\tau)\,d\tau\right] e^{-j\Omega t}\,dt$

= < εναλλάσσοντας τη σειρά ολοκλήρωσης > =

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)\, e^{-j\Omega t}\,dt\right] d\tau$$

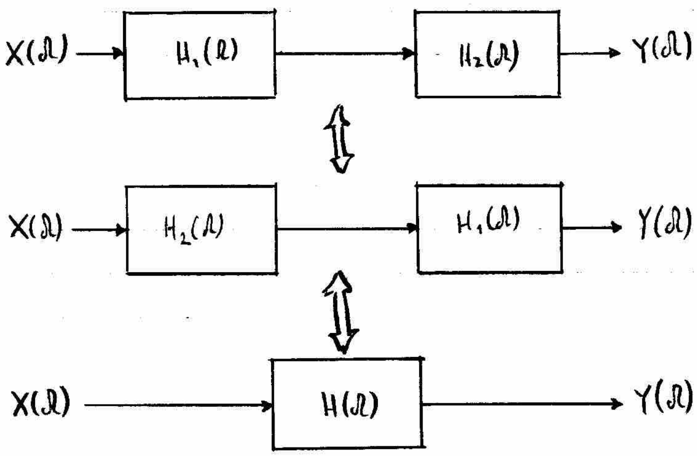
= < θέτοντας $\xi = t-\tau$ > =

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, e^{-j\Omega\tau}\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\xi)\, e^{-j\Omega\xi}\,d\xi\right] d\tau$$

$$= \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, e^{-j\Omega\tau}\,d\tau\right]\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\xi)\, e^{-j\Omega\xi}\,d\xi\right]$$

$$= H(\Omega)\cdot X(\Omega)$$

Παράδειγμα Διασύνδεση ΓΧΑ συστημάτων σε σειρά (cascade connection)



$$H(\Omega) = H_1(\Omega)\,H_2(\Omega) = H_2(\Omega)\,H_1(\Omega)$$

Παραγώγιση: $\frac{d}{dt}x(t) \xleftrightarrow{F} j\Omega\, X(\Omega)$

! Ενίσχυση των υψηλών συχνοτήτων

Απόδειξη: Από τον ορισμό του ΜF έχουμε:

$$F\left\{\frac{d}{dt}x(t)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx(t)}{\cancel{dt}} e^{-j\Omega t} \cancel{dt} = $$

< με χρήση της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες, δηλαδή

$d(uv) = u\,dv + v\,du \Rightarrow$

$u\,dv = d(uv) - v\,du \Rightarrow$

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$ >

$$= x(t)\, e^{-j\Omega t}\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \frac{d(e^{-j\Omega t})}{dt} dt$$

$$= \lim_{l\to\infty}\left\{ x(t)\, e^{-j\Omega t}\Big|_{-l}^{l}\right\} + j\Omega \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\Omega t} dt}_{X(\Omega)} =$$

$$= \underbrace{\lim_{l\to\infty}\{x(l)\, e^{-j\Omega l}\}}_{0} - \underbrace{\lim_{l\to\infty}\{x(-l)\, e^{j\Omega l}\}}_{0} + j\Omega X(\Omega) = j\Omega\, X(\Omega)$$

θεωρώντας ότι για $l \to \pm\infty$, $x(l) \to 0$

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί ο ΜF της συνάρτησης προσήμου (signum).

Η συνάρτηση προσήμου ορίζεται ως $\quad sgn(t) = \begin{cases} 1 & t>0 \\ -1 & t<0 \end{cases}$

Αυτή μπορεί να εκφραστεί ως $\quad sgn(t) = 2u(t) - 1$

και κατά συνέπεια $\quad \frac{d}{dt}(sgn(t)) = 2\,\delta(t)$

Λαμβάνοντας τον ΜF και των δύο μελών έχουμε:

$$F\left\{\frac{d}{dt} sgn(t)\right\} = F\{2\,\delta(t)\} \Rightarrow$$

$$j\Omega\, F\{sgn(t)\} = 2 \quad \Rightarrow \quad F\{sgn(t)\} = \frac{2}{j\Omega}$$

Με βάση την τελευταία σχέση, μπορούμε να υπολογίσουμε τον ΜF της βηματικής $u(t)$, ως εξής:

$$u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} sgn(t) \Rightarrow F\{u(t)\} = F\left\{\frac{1}{2}\right\} + \frac{1}{2} F\{sgn(t)\} =$$

$$= \pi\,\delta(\Omega) + \frac{1}{j\Omega}$$

Ολοκλήρωση : $$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau \overset{F}{\longleftrightarrow} \frac{1}{j\Omega} X(\Omega) + \pi X(0)\, \delta(\Omega)$$

! Εξασθένιση των υψηλών συχνοτήτων

Απόδειξη : $$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, u(t-\tau)\, d\tau \triangleq x(t) * u(t)$$

Λαμβάνοντας τον ΜF και των δύο μελών και με βάση το θεώρημα της συνέλιξης έχουμε:

$$F\{y(t)\} = F\{x(t) * u(t)\} \Rightarrow$$

$$Y(\Omega) = X(\Omega) \cdot U(\Omega) =$$

$$= X(\Omega) \cdot \left[\frac{1}{j\Omega} + \pi\, \delta(\Omega)\right] =$$

$$= \frac{1}{j\Omega} X(\Omega) + \pi X(\Omega)\, \delta(\Omega)$$

Λόγω της $\delta(\Omega)$ η μόνη τιμή του $X(\Omega)$ που υπεισέρχεται είναι η $X(0)$, οπότε

$$Y(\Omega) = \frac{1}{j\Omega} X(\Omega) + \pi X(0)\, \delta(\Omega)$$

Παράδειγμα Να υπολογιστεί ο ΜF της εξόδου ενός ΓΧΑ συστήματος του οποίου η κρουστική απόκριση ισούται με $\delta(t-t_0)$.

$$h(t) = \delta(t-t_0) \quad \rightsquigarrow \quad H(\Omega) = e^{-j\Omega t_0}$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\delta(t-t_0)} \longrightarrow y(t)$$

Άρα $\quad Y(\Omega) = H(\Omega)\,X(\Omega) = e^{-j\Omega t_0} X(\Omega)$

Το αποτέλεσμα αυτό ήταν αναμενόμενο, αφού για $h(t)=\delta(t-t_0)$ η είσοδος $x(t)$ παράγει έξοδο $y(t)=x(t-t_0)$ και με βάση την ιδιότητα της ολίσθησης στον χρόνο, ο ΜF της $y(t)$ είναι: $Y(\Omega) = e^{-j\Omega t_0} X(\Omega)$

Παράδειγμα Να υπολογιστεί η $H(\Omega)$ ενός συστήματος διαφόρισης (διαφοριστή)

Η έξοδος $y(t)$ ενός ΓΧΑ συστήματος διαφόρισης του οποίου η είσοδος είναι $x(t)$, δίνεται από τη σχέση

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\frac{d}{dt}} \longrightarrow y(t)$$

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

Από την ιδιότητα της διαφόρισης έχουμε

$$Y(\Omega) = j\Omega\, X(\Omega)$$

και συνεπώς

$$H(\Omega) = j\Omega$$

Παράδειγμα Να υπολογιστεί η $H(\Omega)$ ενός συστήματος ολοκλήρωσης (ολοκληρωτή)

Η έξοδος $y(t)$ ενός ΓΧΑ συστήματος ολοκλήρωσης του οποίου η είσοδος είναι $x(t)$, δίνεται από τη σχέση

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\int_{-\infty}^{t}} \longrightarrow y(t)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau$$

Από την ιδιότητα της ολοκλήρωσης έχουμε

$$Y(\Omega) = \frac{1}{j\Omega} X(\Omega) + \pi X(0)\,\delta(\Omega) =$$

$$= \frac{1}{j\Omega} X(\Omega) + \pi X(\Omega)\,\delta(\Omega) =$$

$$= \left[\frac{1}{j\Omega} + \pi\,\delta(\Omega)\right] X(\Omega)$$

και συνεπώς

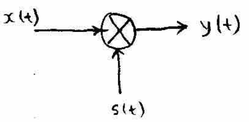
$$H(\Omega) = \frac{1}{j\Omega} + \pi\,\delta(\Omega)$$

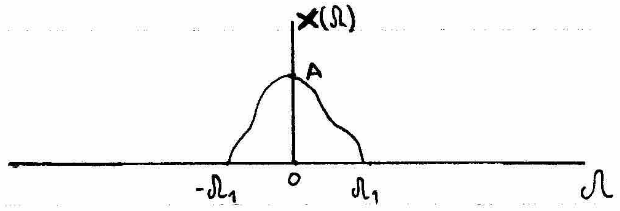
που δεν είναι άλλο από τον ΜF της βηματικής συνάρτησης.
Σημειώστε ότι στο πεδίο του χρόνου θα έχουμε τη συνέλιξη με τη βηματική, δηλ. $x(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau$

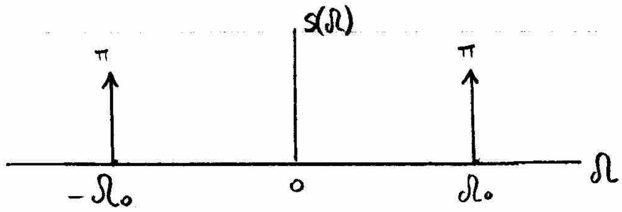
Πολλαπλασιασμός ή Διαμόρφωση Πλάτους

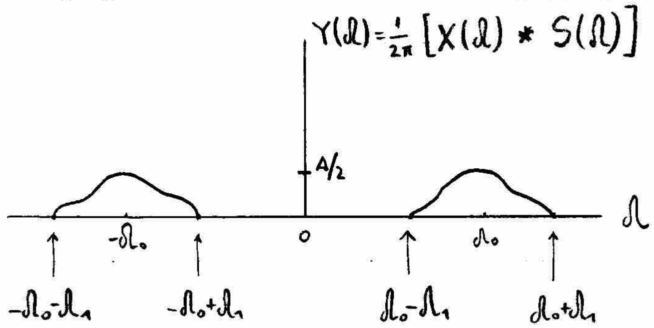
$$s(t)\cdot x(t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2\pi}\left[S(\Omega) * X(\Omega)\right]$$

Παράδειγμα Να σχεδιαστεί το φάσμα του σήματος $y(t)=s(t)\,x(t)$, όπου $s(t)=\cos\Omega_0 t$ και $x(t)$ σήμα το φάσμα του οποίου είναι αυτό του σχήματος



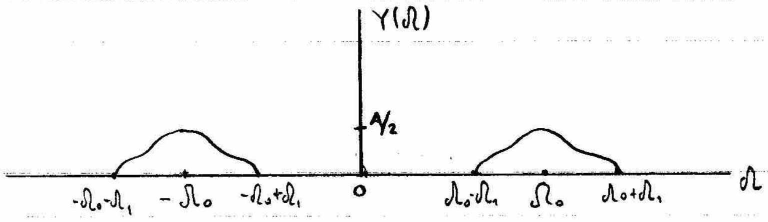


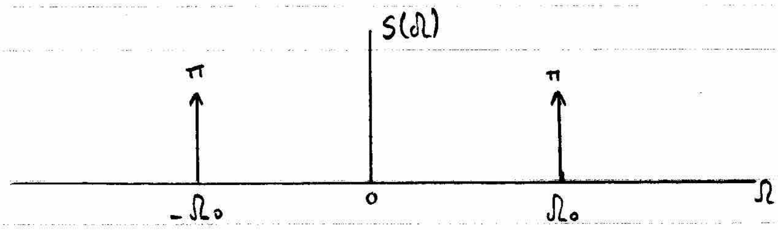


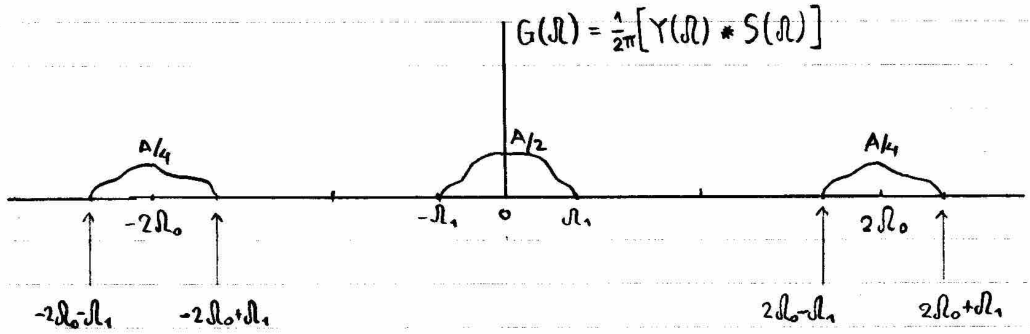


- Ο πολλαπλασιασμός δύο σημάτων αναφέρεται ως <u>διαμόρφωση πλάτους</u>
- Από την ιδιότητα της ολίσθησης στη συχνότητα (βλ. παράδειγμα 3.12) είχαμε καταλήξει στο ίδιο αποτέλεσμα: $Y(\Omega)=\frac{1}{2}\left[X(\Omega-\Omega_0)+X(\Omega+\Omega_0)\right]$
- Έχουμε υποθέσει ότι $\Omega_0>\Omega_1$ ώστε να μην υπάρχει επικάλυψη φασμάτων
- Παρατηρούμε ότι με τον πολλαπλασιασμό του σήματος $x(t)$ με ένα ημιτονοειδές σήμα, όλη η πληροφορία του σήματος $x(t)$ διατηρείται, αν και η πληροφορία αυτή έχει ολισθήσει σε υψηλότερες συχνότητες.

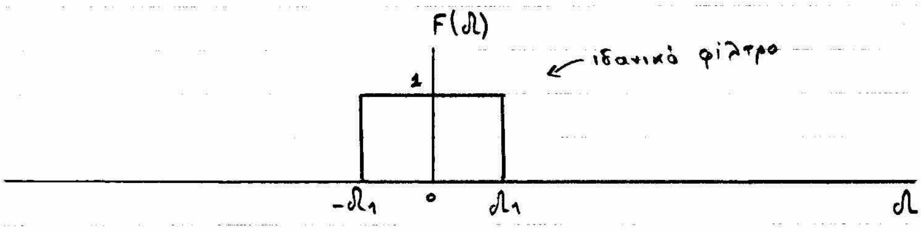
Παράδειγμα Να σχεδιαστεί το φάσμα του σήματος $g(t)=s(t)\,y(t)$, όπου $s(t)$, $y(t)$ τα σήματα του προηγούμενου παραδείγματος.

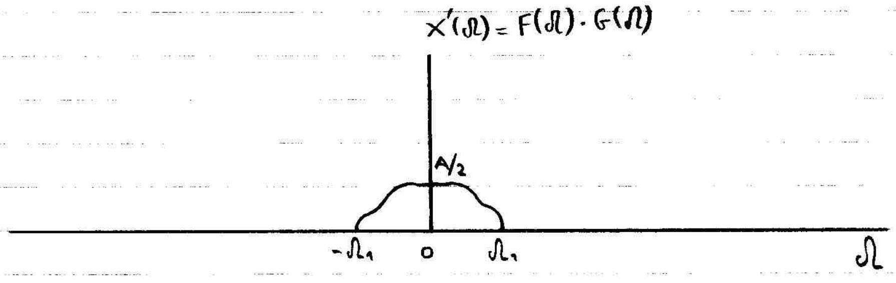




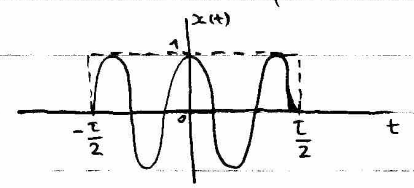


- Εφαρμόζοντας ένα βαθυπερατό φίλτρο (lowpass), όπως αυτό του παρακάτω σχήματος, μπορούμε να πάρουμε ένα σταθμισμένο (scaled) αντίγραφο του αρχικού φάσματος $X(\Omega)$.





ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί ο ΜF του σήματος του σχήματος.



ΛΥΣΗ Το σήμα αυτό μπορεί να εκφραστεί ως το γινόμενο ενός τετραγωνικού παλμού $p_{\tau/2}(t)$ και ενός συνημιτονικού σήματος $\cos\Omega_0 t$, δηλαδή

$$x(t) = p_{\tau/2}(t)\,\cos\Omega_0 t$$

Σημειώνεται ότι τέτοιου είδους σήματα τα συναντάμε σε διάφορα ηλεκτρονικά συστήματα επικοινωνιών καθώς και σε συστήματα radar και sonar.

Γνωρίζουμε ότι $F\{p_{\tau/2}(t)\} = \tau\cdot\mathrm{sinc}\left(\frac{\Omega\tau}{2\pi}\right)$

$F\{\cos\Omega_0 t\} = \pi\left[\delta(\Omega-\Omega_0) + \delta(\Omega+\Omega_0)\right]$

Από τις ιδιότητες του ΜF γνωρίζουμε ότι πολλαπλασιασμός στον χρόνο ισοδυναμεί με συνέλιξη στη συχνότητα.

$$F\left\{p_{\tau/2}(t)\cdot\cos\Omega_0 t\right\} = \frac{1}{2\pi}\,F\left\{p_{\tau/2}(t)\right\} * F\left\{\cos\Omega_0 t\right\} \Rightarrow$$

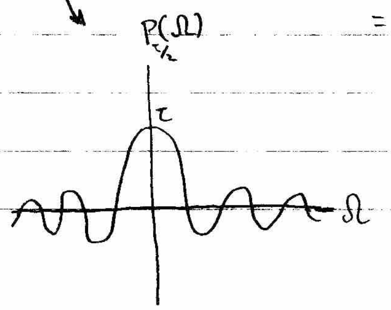
$$X(\Omega) = \frac{1}{2\pi}\,\tau\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\Omega\tau}{2\pi}\right) * \pi\left[\delta(\Omega-\Omega_0) + \delta(\Omega+\Omega_0)\right] =$$

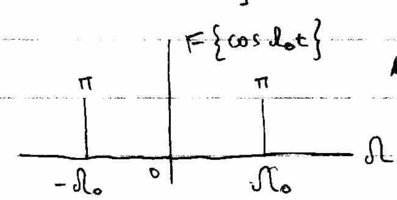
$$= \frac{\tau}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{sinc}\left(\frac{\lambda\tau}{2\pi}\right)\left[\delta(\Omega-\Omega_0-\lambda) + \delta(\Omega+\Omega_0-\lambda)\right]d\lambda =$$

$$= \frac{\tau}{2}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{sinc}\left(\frac{\lambda\tau}{2\pi}\right)\delta(\Omega-\Omega_0-\lambda)\,d\lambda + \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{sinc}\left(\frac{\lambda\tau}{2\pi}\right)\delta(\Omega+\Omega_0-\lambda)\,d\lambda\right] =$$

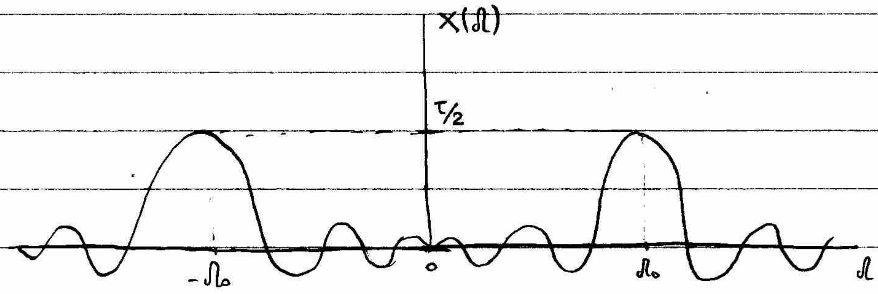
$= \langle$ με χρήση της ιδιότητας κοσκινίσματος κρουστικής $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\delta(t-t_0)\,dt = f(t_0)\rangle =$

$$= \frac{\tau}{2}\left[\mathrm{sinc}\,\frac{(\Omega-\Omega_0)\tau}{2\pi} + \mathrm{sinc}\,\frac{(\Omega+\Omega_0)\tau}{2\pi}\right]$$





Το φάσμα συχνοτήτων $X(\Omega)$ του σήματος $x(t) = p_{\tau/2}(t)\cos\Omega_0 t$ δείχνεται στο σχήμα που ακολουθεί.



Παρατηρούμε ότι οι κυματομορφές sinc που δημιουργήθηκαν από τον τετραγωνικό παλμό μετατοπίστηκαν ώστε τα κέντρα τους να βρίσκονται στις συχνότητες Ω_0 και $-\Omega_0$, ενώ το πλάτος τους (ύψος κυματομορφών) μειώθηκε στο μισό.

Οι κυματομορφές αυτές έχουν μη μηδενικές συχνότητες σε ένα άπειρο εύρος συχνοτήτων και κατά συνέπεια θα υπάρχει επικάλυψη των συχνοτήτων των δύο sinc συναρτήσεων. Εφόσον όμως $\Omega_0 \gg \frac{2\pi}{\tau}$, το φαινόμενο της επικάλυψης αυτής είναι αμελητέο για πρακτικές εφαρμογές.

Σημείωση: Την άσκηση αυτή θα μπορούσαμε να την είχαμε λύσει βασιζόμενοι στο παράδειγμα 3.15 και εκφράζοντας την $x(t)$ ως εξής:

$$x(t) = \cos\Omega_0 t \cdot p_{\tau/2}(t) = \cos\Omega_0 t\left[u(t+\tfrac{\tau}{2}) - u(t-\tfrac{\tau}{2})\right] =$$
$$= \cos\Omega_0 t\, u(t+\tfrac{\tau}{2}) - \cos\Omega_0 t\, u(t-\tfrac{\tau}{2})$$

ΑΣΚΗΣΗ

Να υπολογιστεί ο MF του σήματος $x(t) = \dfrac{\sin t \cdot \sin(t/2)}{\pi t^2}$

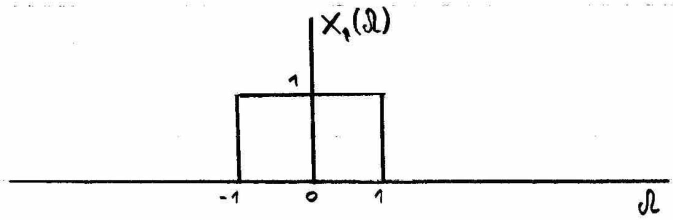
Το $x(t)$ μπορεί να εκφραστεί ως γινόμενο δύο σημάτων:

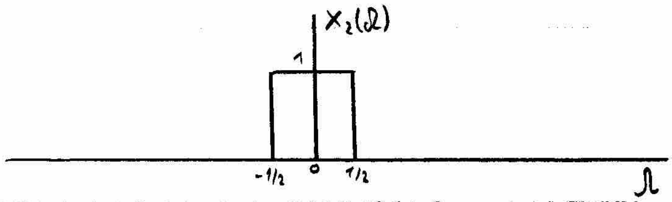
$$x(t) = \pi \underbrace{\left(\frac{1}{\pi}\,\frac{\sin t}{t}\right)}_{x_1(t)} \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi}\,\frac{\sin(t/2)}{t/2}\right)}_{x_2(t)} = \pi\, x_1(t)\cdot x_2(t)$$

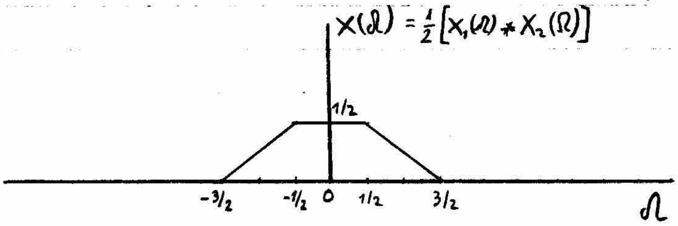
Άρα με βάση την ιδιότητα του πολ/μού

$$X(\Omega) = \frac{1}{2}\left[X_1(\Omega) * X_2(\Omega)\right]$$

Οι $X_1(\Omega)$, $X_2(\Omega)$ είναι τετραγωνικοί παλμοί (βλ. παράδειγμα 3.3)







Θεώρημα του Parseval: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(\Omega)|^2 d\Omega$

Απόδειξη:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, x^*(t)\, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X^*(\Omega)\, e^{-j\Omega t} d\Omega\right] dt =$$

$= \langle$ αναστρέφοντας τη σειρά ολοκλήρωσης $\rangle =$

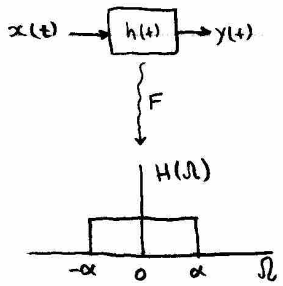
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X^*(\Omega) \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\Omega t} dt\right]}_{X(\Omega)} d\Omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X^*(\Omega)\, X(\Omega)\, d\Omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(\Omega)|^2 d\Omega$$

- Η συνολική ενέργεια του σήματος $x(t)$ μπορεί να υπολογιστεί είτε από την <u>ενέργεια ανά μονάδα χρόνου</u> $|x(t)|^2$ και ολοκλήρωση σε όλο τον χρόνο, είτε από την <u>ενέργεια ανά μονάδα συχνότητας</u> $|X(\Omega)|^2/2\pi$ και ολοκλήρωση σε όλες τις συχνότητες.

- Η $|X(\Omega)|^2$ ονομάζεται και <u>φάσμα πυκνότητας της ενέργειας</u> ή <u>φασματική πυκνότητα ενέργειας</u> (energy-density spectrum).

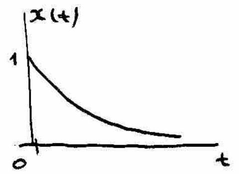
ΑΣΚΗΣΗ

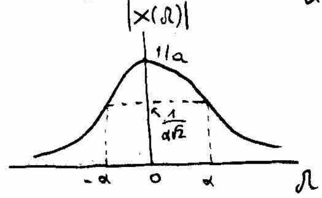


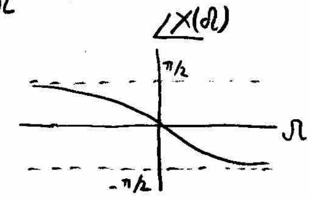
Να υπολογιστεί ο λόγος της ενέργειας του φάσματος για $|\Omega| \le \alpha$ προς την ολική ενέργεια του σήματος $x(t) = e^{-at}u(t)$.

Λύση

Στο παράδειγμα 3.4 είχαμε υπολογίσει $X(\Omega) = \dfrac{1}{\alpha + j\Omega}$ για $\alpha > 0$



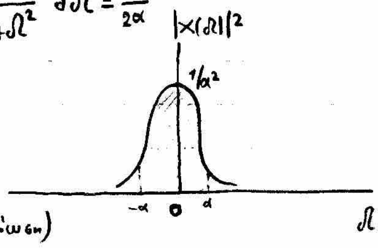




Η συνολική ενέργεια του φάσματος ισούται με

$$E = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(\Omega)|^2 \, d\Omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2+\Omega^2}\, d\Omega = \frac{1}{2\alpha}$$

όπου $|X(\Omega)|^2 = \dfrac{1}{\alpha^2+\Omega^2}$



(Ο υπολογισμός της ενέργειας δίνεται ως υποσημείωση)

Στο ίδιο ακριβώς αποτέλεσμα καταλήγουμε υπολογίζοντας την ενέργεια στο πεδίο του χρόνου:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt = \int_{0}^{\infty} e^{-2at}\, dt = \frac{1}{-2a}\, e^{-2at}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{-2\alpha}\left[\lim_{t\to\infty} e^{-2at} - e^{0}\right] =$$

$$= \frac{1}{-2a}\,[0 - 1] = \frac{1}{2a}$$

Άρα και η συνολική ενέργεια του φάσματος είναι $E = \dfrac{1}{2\alpha}$

Όταν από το φάσμα κρατήσουμε μόνο τις συχνότητες $|\Omega| \le a$, τότε η ενέργεια E_α ισούται με:

$$E_a = \frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{1}{a^2+\Omega^2}\, d\Omega = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{\alpha}\tan^{-1}\left(\frac{\Omega}{\alpha}\right)\Big|_{-a}^{\alpha} =$$

$$= \frac{1}{2\pi a}\left[\tan^{-1}\left(\frac{a}{a}\right) - \tan^{-1}\left(-\frac{a}{a}\right)\right] = \langle \text{λόγω } \tan^{-1}(-\varphi) = -\tan^{-1}(\varphi) \rangle$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}\pi a}\cdot \cancel{2}\tan^{-1}(1) = \frac{1}{\cancel{\pi} a}\cdot\frac{\cancel{\pi}}{4} = \frac{1}{4a} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{2a} = \frac{1}{2}E \Rightarrow \frac{E_a}{E} = \frac{1}{2}$$

Συμπέρασμα: Η μισή ενέργεια του σήματος εμπεριέχεται μεταξύ των συχνοτήτων $[-a, a]$.

(κυκλικών συχνοτήτων)

$$E = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2+\Omega^2}\, d\Omega = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{\alpha}\tan^{-1}\left(\frac{\Omega}{\alpha}\right)\right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{2a\pi}\left[\lim_{\Omega\to\infty}\tan^{-1}\left(\frac{\Omega}{\alpha}\right) - \lim_{\Omega\to-\infty}\tan^{-1}\left(\frac{\Omega}{\alpha}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2a\pi}\left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{1}{2a\pi}\cdot\pi = \frac{1}{2a}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Εύρος συχνοτήτων (frequency bandwidth ή bandwidth) ενός μη περιοδικού σήματος ορίζεται ως η περιοχή των θετικών συχνοτήτων για την οποία το σήμα έχει ενέργεια.

Σημειώνεται ότι οι αρνητικές και θετικές συχνότητες ενός δίπλευρου φάσματος συνδυάζονται για να δώσουν τα χαρακτηριστικά του σήματος σε κάποια συχνότητα. Συνεπώς, οι αρνητικές συχνότητες δεν αποτελούν επιπλέον εύρος συχνοτήτων.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Εύρος συχνοτήτων (bandwidth) ενός περιοδικού σήματος ορίζεται ως η περιοχή των θετικών συχνοτήτων για την οποία το σήμα έχει ισχύ (power).

ΟΡΙΣΜΟΣ: Περιορισμένου-χρόνου (time-limited) σήμα είναι εκείνο το οποίο έχει μη μηδενικές τιμές για πεπερασμένο χρονικό διάστημα.

Παράδειγμα τέτοιου σήματος αποτελεί ο τετραγωνικός παλμός του παραδ. 3.2.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Περιορισμένου-εύρους συχνοτήτων (band-limited) σήμα είναι εκείνο το οποίο έχει μη μηδενικό φάσμα για πεπερασμένη περιοχή συχνοτήτων.

Παράδειγμα τέτοιου σήματος αποτελεί το $x(t)=sinc(\pi t)$ του παραδ. 3.3.

ΙΔΙΟΤΗΤΑ Ι: Ένα σήμα το οποίο είναι περιορισμένου-χρόνου δεν μπορεί να είναι περιορισμένου-εύρους συχνοτήτων
και
ένα σήμα περιορισμένου-εύρους συχνοτήτων δεν μπορεί να είναι περιορισμένου-χρόνου.

ΙΔΙΟΤΗΤΑ ΙΙ: Ο αντίστροφος ΜF ενός τμήματος του όλου φάσματος (truncated spectrum) παρουσιάζει το φαινόμενο Gibbs στις ασυνέχειες του σήματος.

ΙΔΙΟΤΗΤΑ III: Πραγματικά και άρτια σήματα έχουν πραγματικούς και άρτιους ΜF.

ΙΔΙΟΤΗΤΑ IV: Πραγματικά και περιττά σήματα έχουν φανταστικούς και περιττούς ΜF.

ΙΔΙΟΤΗΤΑ V: Τα φάσματα πλάτους και φάσης ενός πραγματικού σήματος είναι αντίστοιχα άρτιες και περιττές συναρτήσεις.

Απόδειξη:

Κάθε πραγματικό σήμα $x(t)$ μπορεί να εκφραστεί ως άθροισμα ενός πραγματικού και άρτιου σήματος $x_e(t)$ και ενός πραγματικού και περιττού σήματος $x_o(t)$:

$$x(t) = x_e(t) + x_o(t) \quad \text{όπου} \quad x_e(t) = \frac{1}{2}\left[x(t) + x(-t)\right]$$

$$x_o(t) = \frac{1}{2}\left[x(t) - x(-t)\right]$$

Συνεπώς

$$X(\Omega) = X_e(\Omega) + X_o(\Omega) \quad \text{όπου} \quad X_e(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_e(t)\, e^{-j\Omega t}\, dt$$

$$X_o(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_o(t)\, e^{-j\Omega t}\, dt$$

Με βάση το θεώρημα του Euler οι παραπάνω γίνονται:

$$X_e(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_e(t)\cos(\Omega t)\, dt - j\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x_e(t)\sin(\Omega t)\, dt}_{\substack{0 \\ \text{μηδέν ως ολοκλήρωμα περιττής συνάρτησης}}} = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x_e(t)\cos(\Omega t)\, dt}_{Re[X(\Omega)]}$$

$$X_o(\Omega) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x_o(t)\cos(\Omega t)\, dt}_{\substack{0 \\ \text{μηδέν ως ολοκλήρωμα} \\ \text{περιττής συνάρτησης}}} - j\int_{-\infty}^{\infty} x_o(t)\sin(\Omega t)\, dt = j\underbrace{\left[-\int_{-\infty}^{\infty} x_o(t)\sin(\Omega t)\, dt\right]}_{Im[X(\Omega)]}$$

Παρατηρούμε ότι:

- το πραγματικό μέρος του MF προέρχεται από το άρτιο μέρος του σήματος, ενώ το φανταστικό μέρος του MF προέρχεται από το περιττό μέρος του σήματος.
- $Re[X(\Omega)]$ είναι άρτια συνάρτηση και $Im[X(\Omega)]$ είναι περιττή συνάρτηση, αφού το $\cos(\Omega t)$, $\sin(\Omega t)$ είναι άρτιες και περιττές συναρτήσεις αντίστοιχα.

ΣΗΜΑΤΑ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ (Energy signals)

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt < \infty$$

Τέτοια σήματα είναι γενικά μη περιοδικά σήματα πεπερασμένης χρονικής διάρκειας, όπως για παράδειγμα ο τετραγωνικός παλμός, καθώς και σήματα που τείνουν ασυμπτωτικά στο μηδέν για $t \to \infty$.

Τα σήματα ενέργειας είναι και ολοκληρώσιμα κατ' απόλυτη τιμή, $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| \, dt < \infty$, οπότε ικανοποιείται η ικανή συνθήκη για την ύπαρξη του μετασχηματισμού Fourier.

ΣΗΜΑΤΑ ΙΣΧΥΟΣ (Power signals)

$$P = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 \, dt < \infty$$

Τέτοια σήματα δεν είναι σήματα ενέργειας και συνεπώς δεν είναι ολοκληρώσιμα κατ' απόλυτη τιμή. Στην κατηγορία αυτή ανήκουν τα πολύ γνωστά σήματα της μοναδιαίας βηματικής συνάρτησης, της συνάρτησης προσήμου, καθώς και όλες οι περιοδικές συναρτήσεις. Τα σήματα αυτά που έχουν πεπερασμένη ισχύ και ικανοποιούν τις άλλες συνθήκες Dirichlet (όχι αυτή της ολοκληρωσιμότητας κατ' απόλυτη τιμή) έχουν μετασχηματισμό Fourier.

Ο μετασχηματισμός Fourier των σημάτων ισχύος περιέχει κρουστικές συναρτήσεις στη συχνότητα!

Σημείωση: Πρακτικά, για τα σήματα που καλούμαστε να αναλύσουμε ως μηχανικοί, μπορούμε να πούμε ότι, εφόσον μπορούμε να σχεδιάσουμε την κυματομορφή του σήματος, το σήμα αυτό έχει μετασχηματισμό Fourier.

Why Amplitude Modulation?

The use of amplitude modulation to change the frequency content of a message from its baseband frequencies to higher frequencies makes the transmission of the message over the airwaves possible. Let us explore why it is necessary to use AM to transmit a music or a speech signal. Typically, music signals are audible up to frequencies of about 22 kHz, while speech signals typically have frequencies from about 100 Hz to about 5 kHz. Thus music and speech signals are relatively low-frequency signals. When radiating a signal with an antenna, the length of the antenna is about a quarter of the wavelength

$$\lambda = 3\times10^8 / f \quad \text{meters}$$

where f is the frequency in Hz (or 1/sec) of the signal being radiated and 3×10^8 meters per second is the speed of light. Thus if we assume that frequencies up to f = 30 kHz are present in the signal (this would include music and speech in the signal) the wavelength is 10 kilometers and the size of the antenna is 2.5 kilometers—a mile-and-a-half long antenna! Thus, for music or a speech signal to be transmitted with a reasonable-size antenna requires to increase the frequencies present in the signal. Amplitude modulation provides an efficient way to shift an acoustic or speech signal to a desirable frequency.

And Biblio "Signals & Systems
Using MatLab"
2nd Ed.
by Luis Chaparro
Academic Press, 2015

Ζεύγη μετασχηματισμών Fourier	
$\delta(t), \ \delta(t-\tau)$	$1, \ e^{-j\Omega\tau}$
$u(t), \ u(-t)$	$\dfrac{1}{j\Omega} + \pi\delta(\Omega), \ \dfrac{-1}{j\Omega} + \pi\delta(\Omega)$
$\text{sgn}(t) = 2[u(t) - 0.5]$	$\dfrac{2}{j\Omega}$
$A, \ Ae^{-at}u(t), \ a > 0$	$2\pi A\delta(\Omega), \ \dfrac{A}{j\Omega + a}$
$Ate^{-at}u(t), \ a > 0$	$\dfrac{A}{(j\Omega + a)^2}$
$e^{-a\|t\|}, \ a > 0$	$\dfrac{2a}{a^2 + \Omega^2}$
$\cos(\Omega_0 t), \ -\infty < t < \infty$	$\pi[\delta(\Omega - \Omega_0) + \delta(\Omega + \Omega_0)]$
$\sin(\Omega_0 t), \ -\infty < t < \infty$	$-j\pi[\delta(\Omega - \Omega_0) - \delta(\Omega + \Omega_0)]$
$p(t) = A[u(t+\tau) - u(t-\tau)]$	$2A\tau\dfrac{\sin(\Omega\tau)}{\Omega\tau}$

Από το βιβλίο:
L. F. Chaparro and A. Akan: “Signals and Systems Using MATLAB”, 3rd Ed., Academic Press, 2019

Βασικές ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier		
Διαστολή/συστολή	$x(\alpha t),\ \alpha \neq 0$	$\frac{1}{\lvert\alpha\rvert} X\left(\frac{\Omega}{\alpha}\right)$
Κατοπτρισμός	$x(-t)$	$X(-\Omega)$
Εξίσωση του Parseval	$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} \lvert x(t)\rvert^2 dt$	$E_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lvert X(\Omega)\rvert^2 d\Omega$
Δυϊκότητα	$X(t)$	$2\pi x(-\Omega)$
Παραγώγιση	$\frac{d^n x(t)}{dt^n},\ n \geq 1$	$(j\Omega)^n X(\Omega)$
Ολοκλήρωση	$\int_{-\infty}^{t} x(t')dt'$	$\frac{X(\Omega)}{j\Omega} + \pi X(0)\delta(\Omega)$
Ολίσθηση	$x(t-\alpha),\ e^{j\Omega_0 t}x(t)$	$e^{-j\alpha\Omega}X(\Omega),\ X(\Omega-\Omega_0)$
Διαμόρφωση	$x(t)\cos(\Omega_c t)$	$0.5[X(\Omega-\Omega_c)+X(\Omega+\Omega_c)]$
Περιοδικότητα	$x(t) = \sum_k X_k e^{jk\Omega_0 t}$	$X(\Omega) = \sum_k 2\pi X_k \delta(\Omega - k\Omega_0)$
Συμμετρία	$x(t)$ πραγματικό	$\lvert X(\Omega)\rvert = \lvert X(-\Omega)\rvert,$ $\angle X(\Omega) = -\angle X(-\Omega)$
Συνέλιξη	$z(t) = [x * y](t)$	$Z(\Omega) = X(\Omega)Y(\Omega)$

Από το βιβλίο:
L. F. Chaparro and A. Akan: “Signals and Systems Using MATLAB”, 3rd Ed., Academic Press, 2019

ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

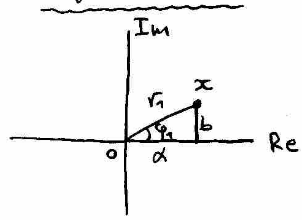
$x = \alpha + jb = r_1 \cdot e^{j\varphi_1}$ όπου $r_1 = \sqrt{\alpha^2 + b^2}$ (μέτρο), $\varphi_1 = \arctan\left(\frac{b}{\alpha}\right)$

$y = c + jd = r_2 \cdot e^{j\varphi_2}$ όπου $r_2 = \sqrt{c^2 + d^2}$, $\varphi_2 = \arctan\left(\frac{d}{c}\right)$

$$x \cdot y = (\alpha + jb)(c + jd) = r_1 \cdot r_2 \, e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{\alpha + jb}{c + jd} = \frac{r_1}{r_2} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

Μιγαδικό Επίπεδο



Συζυγείς: $x^* = \alpha - jb = r_1 e^{-j\varphi_1}$

$y^* = c - jd = r_2 e^{-j\varphi_2}$

Ειδικές Περιπτώσεις:

1. Έστω x πραγματικός, δηλαδή $x = \alpha$ (και άρα $b = 0$)

   Τότε $r_1 = \alpha$, $\varphi_1 = 0$

2. Έστω x φανταστικός, δηλαδή $x = jb$ (και άρα $\alpha = 0$)

   Τότε $r_1 = b$, $\varphi_1 = \pm 90^\circ$ ($+90^\circ$ για b θετικό ή -90° για b αρνητικό)

Ιδιότητες Μιγαδικών Αριθμών - Καρτεσιανή Μορφή	
Ιδιότητα	**Μαθηματική περιγραφή**
	$z_1 = x + jy$
	$z_2 = u + jv$
Άθροισμα	$az_1 + bz_2 = (ax + bu) + j(ay + bv)$
Διαφορά	$az_1 - bz_2 = (ax - bu) + j(ay - bv)$
Πολλαπλασιασμός	$z_1 z_2 = (xu - yv) + j(yu + xv)$
Διαίρεση	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 z_2^*}{z_2 z_2^*} = \left(\frac{xu + yv}{u^2 + v^2}\right) + j\left(\frac{uy - xv}{u^2 + v^2}\right)$
Συζυγία	$z_1^* = x - jy$
Άθροισμα συζυγών	$z_1 + z_1^* = 2\Re\{z_1\}$
Διαφορά συζυγών	$z_1 - z_1^* = 2j\Im\{z_1\}$
Γινόμενο συζυγών	$z_1 z_1^* = x^2 + y^2$
Πηλίκο συζυγών	$\frac{z_1}{z_1^*} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + j\frac{2xy}{x^2 + y^2}$
Ιδιότητες συζυγίας	$(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$ $(z_1 - z_2)^* = z_1^* - z_2^*$ $(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*$ $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^* = \frac{z_1^*}{z_2^*}$
Αμοιβαιότητα	$\frac{1}{z_1} = \frac{z_1^*}{z_1 z_1^*} = \frac{x}{x^2 + y^2} - j\frac{y}{x^2 + y^2}$
Ισότητα	$z_1 = z_2$ αν και μόνο αν $\Re\{z_1\} = \Re\{z_2\}$ και $\Im\{z_1\} = \Im\{z_2\}$
$z \in \Re$	$z = z^*$
$z \in \Im$	$z = -z^*$

Ιδιότητες Μιγαδικών Αριθμών - Πολική Μορφή	
Ιδιότητα	**Μαθηματική περιγραφή**
	$z_1 = \rho_1 e^{j\phi_1},\ \rho_1 > 0$
	$z_2 = \rho_2 e^{j\phi_2},\ \rho_2 > 0$
Άθροισμα	$az_1 + bz_2 = \rho_1 e^{j\phi_1} + \rho_2 e^{j\phi_2}$
Διαφορά	$az_1 - bz_2 = \rho_1 e^{j\phi_1} - \rho_2 e^{j\phi_2}$
Πολλαπλασιασμός	$z_1 z_2 = \rho_1 e^{j\phi_1} \rho_2 e^{j\phi_2} = \rho_1 \rho_2 e^{j(\phi_1 + \phi_2)}$
Διαίρεση	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1 e^{j\phi_1}}{\rho_2 e^{j\phi_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{j(\phi_1 - \phi_2)}$
Συζυγία	$z_1^* = \rho e^{-j\phi_1}$
Άθροισμα συζυγών	$z_1 + z_1^* = 2\Re\{z_1\} = 2\rho\cos(\phi_1)$
Διαφορά συζυγών	$z_1 - z_1^* = 2j\Im\{z_1\} = 2j\rho\sin(\phi_1)$
Γινόμενο συζυγών	$z_1 z_1^* = \rho_1 \rho_1 e^{j\phi_1} e^{-j\phi_1} = \rho_1^2 = \lvert z_1 \rvert^2$
Πηλίκο συζυγών	$\frac{z_1}{z_1^*} = \frac{\rho_1 e^{j\phi_1}}{\rho_1 e^{-j\phi_1}} = e^{j2\phi_1}$
Ιδιότητες συζυγίας	$(z_1 + z_2)^* = \rho_1 e^{-j\phi_1} + \rho_2 e^{-j\phi_2}$ $(z_1 - z_2)^* = \rho_1 e^{-j\phi_1} - \rho_2 e^{-j\phi_2}$ $(z_1 z_2)^* = \rho_1 \rho_2 e^{-j(\phi_1 + \phi_2)}$ $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^* = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{-j(\phi_1 - \phi_2)}$
Αμοιβαιότητα	$\frac{1}{z_1} = \frac{1}{\rho_1 e^{j\phi_1}} = \frac{1}{\rho_1} e^{-j\phi_1}$
Ισότητα	$z_1 = z_2$ αν και μόνο αν $\lvert\rho_1\rvert = \lvert\rho_2\rvert$ και $\phi_1 = \phi_2 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Πηγή: Βιβλίο Γ. Π. Καφεντζή "Επεξεργασία Σήματος Συνεχούς και Διακριτού Χρόνου: Μια πρώτη εισαγωγή", Εκδόσεις Gutenberg, 2019

- **Μέτρο** μιγαδικού αριθμού $z = x + jy$ ονομάζεται το μήκος του διανύσματος που τον αναπαριστά στο μιγαδικό επίπεδο
    - Αλλιώς, μέτρο ονομάζεται η ευκλείδεια απόσταση του μιγαδικού αριθμού από την αρχή των αξόνων

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

- **Φάση** μιγαδικού αριθμού $z = x + jy$ ονομάζεται η γωνία φ που σχηματίζει με τον οριζόντιο άξονα (των πραγματικών αριθμών) κατά την ορθή μαθηματική φορά
    - Συμβολίζεται και ως $\arg(z)$ ή $\angle z$

$$\varphi = \begin{cases} \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right), & x > 0 \\ \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + \pi, & x < 0, y \geq 0 \\ \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) - \pi, & x < 0, y < 0 \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0, y > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & x = 0, y < 0 \\ \alpha\pi\rho o\sigma\delta\iota\acute{o}\rho\iota\sigma\tau o, & x = 0, y = 0 \end{cases}$$

Συνήθεις πολικές μορφές	
Φάση ϕ	Πολική μορφή
0	$e^{j0} = 1$
$\pm\pi$	$e^{\pm j\pi} = -1$
$\pm k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$	$e^{\pm jk\pi} = (-1)^k = \begin{cases} 1, & k \text{ άρτιος} \\ -1, & k \text{ περιττός} \end{cases}$
$\pm 2\pi$	$e^{\pm j2\pi} = 1$
$\pm 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$	$e^{\pm j2k\pi} = 1$
$\pm\frac{\pi}{2}$	$e^{\pm j\pi/2} = \pm j$

Πηγή: Βιβλίο Γ. Π. Καφεντζή "Επεξεργασία Σήματος Συνεχούς και Διακριτού Χρόνου: Μια πρώτη εισαγωγή", Εκδόσεις Gutenberg, 2019