Παρασκευάς Μιχάλης
Δρ Ηλεκτρολόγος Μηχανικός,
Πανεπιστήμιο Πατρών

Σήματα και Συστήματα Συνεχούς Χρόνου με Matlbab

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΤΖΙΟΛΑ

Παράδειγμα 3.13

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης $x(t) = Ae^{-at}u(t)$.

Απάντηση: Από την εξίσωση ορισμού του μετασχηματισμού Fourier θα έχουμε:

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = A \int_{0}^{+\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt = A \int_{0}^{+\infty} e^{-(a+j\omega)t} dt$$

$$= -\frac{A}{a+j\omega} e - (a+j\omega) \Big|_{0}^{+\infty}$$

$$= -\frac{A}{a+j\omega} \left[\lim_{t\to\infty} e^{-(a+j\omega)t} - e^{0} \right] = -\frac{A}{a+j\omega} \left[\lim_{t\to\infty} \left(e^{-at} - e^{-j\omega t} \right) - 1 \right]$$

$$= -\frac{A}{a+j\omega} \left[\lim_{t\to\infty} e^{-at} \left(\cos\omega t - j\sin\omega t \right) - 1 \right] = -\frac{A}{a+j\omega} [0-1]$$

$$\text{άρα} \quad H(\omega) = \frac{A}{a+j\omega}$$

Ακολουθεί ο κώδικας στο Matlab για $A = 1$:

```
syms w t
A=1; a=1;
u(t) = heaviside(t);
x(t) = A*exp(-a*t) * u(t);
X(w) = fourier(x(t), w);
X(w) = simplify(X(w))
```

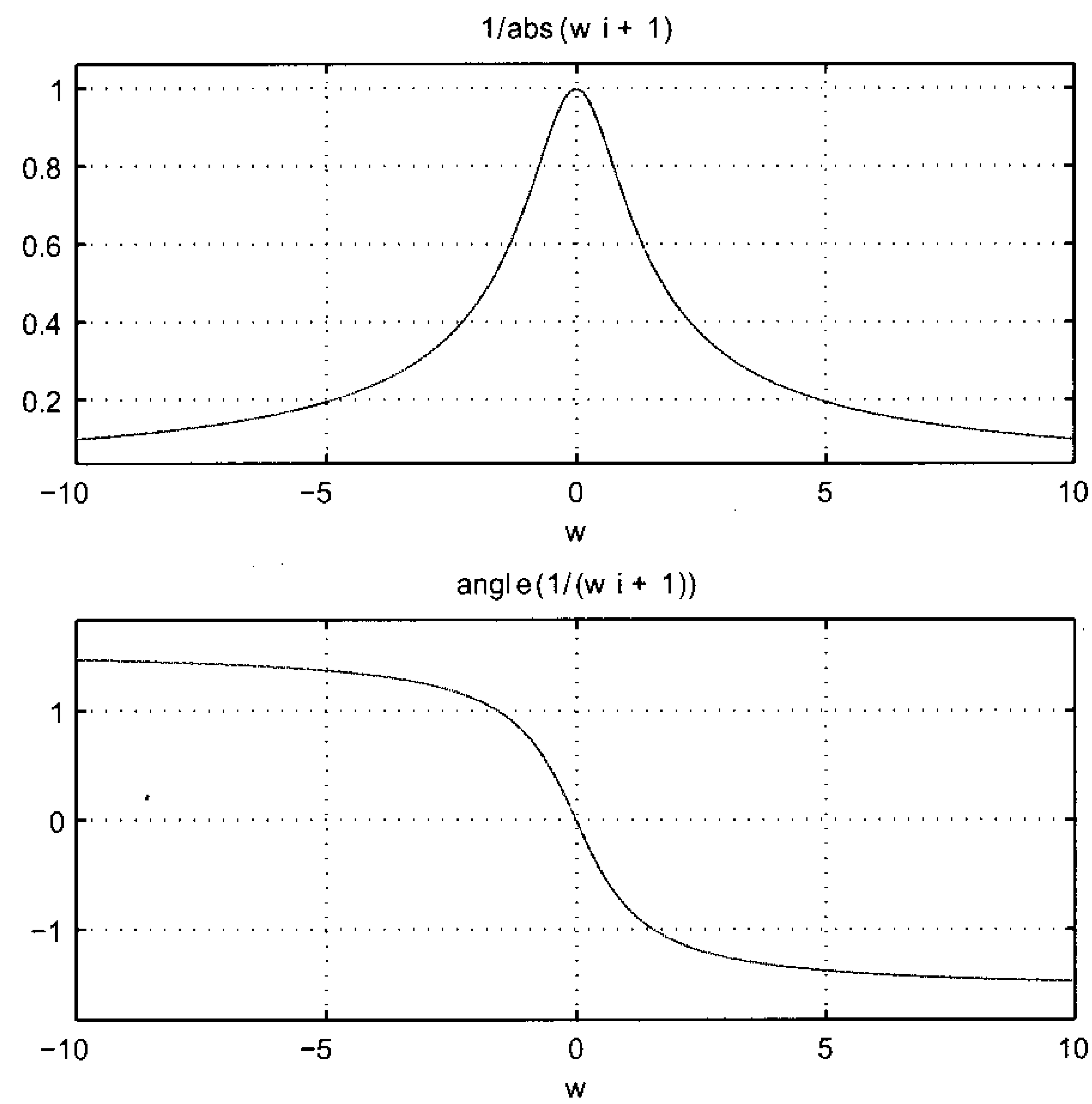
Η συνάρτηση **`simplify()`** απλοποιεί την παράσταση $X(w)$ και μας δίνει το παρακάτω αποτέλεσμα:

```
X(w) = 1/(w*i + 1)
```

Ακολουθούν οι γνωστές εντολές σχεδιασμού των φασμάτων πλάτους και φάσης:

```
subplot(211); ezplot(abs(X(w)), [-10,10]); grid on
subplot(212); ezplot(angle(X(w)), [-10,10]); grid on
```

Από τη μορφή του φάσματος πλάτους προκύπτει ότι το δοθέν σήμα είναι χαμηλών συχνοτήτων επειδή η περισσότερη ισχύς του είναι συγκεντρωμένη στις χαμηλές συχνότητες.



(α)

(β)

Σχήμα 3.14 (α) Φάσμα πλάτους $|X(\omega)|$, (β) Φάσμα φάσης RX(ω).

Παράδειγμα 3.14

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης

$$x(t)=e^{-at}\,cos(\omega_0 t)u(t)$$

Απάντηση: Από τον ορισμό του μετασχηματισμού Fourier και αντικαθιστώντας το συνημίτονο από τον τύπο του Euler, προκύπτει:

$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{0}^{+\infty} e^{-(a+j\omega)t}\,0.5\left[e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t}\right]dt=$$

$$=0.5\int_{0}^{+\infty} e^{-(a+j\omega)t}\,e^{j\omega_0 t}dt+0.5\int_{0}^{+\infty} e^{-(a+j\omega)t}\,e^{-j\omega_0 t}dt$$

$$=0.5\left[\int_{0}^{\infty} e^{-(a+j(\omega-\omega_0))t}dt+\int_{0}^{\infty} e^{-(a+j(\omega-\omega_0))t}dt\right]$$

$$=0.5\left[\frac{1}{a+j(\omega-\omega_0)}+\frac{1}{a+j(\omega+\omega_0)}\right]$$

$$=\frac{a+j\omega}{a^2+2j\omega a+\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}$$