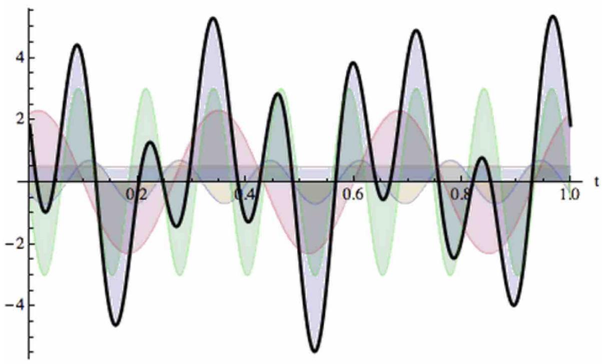
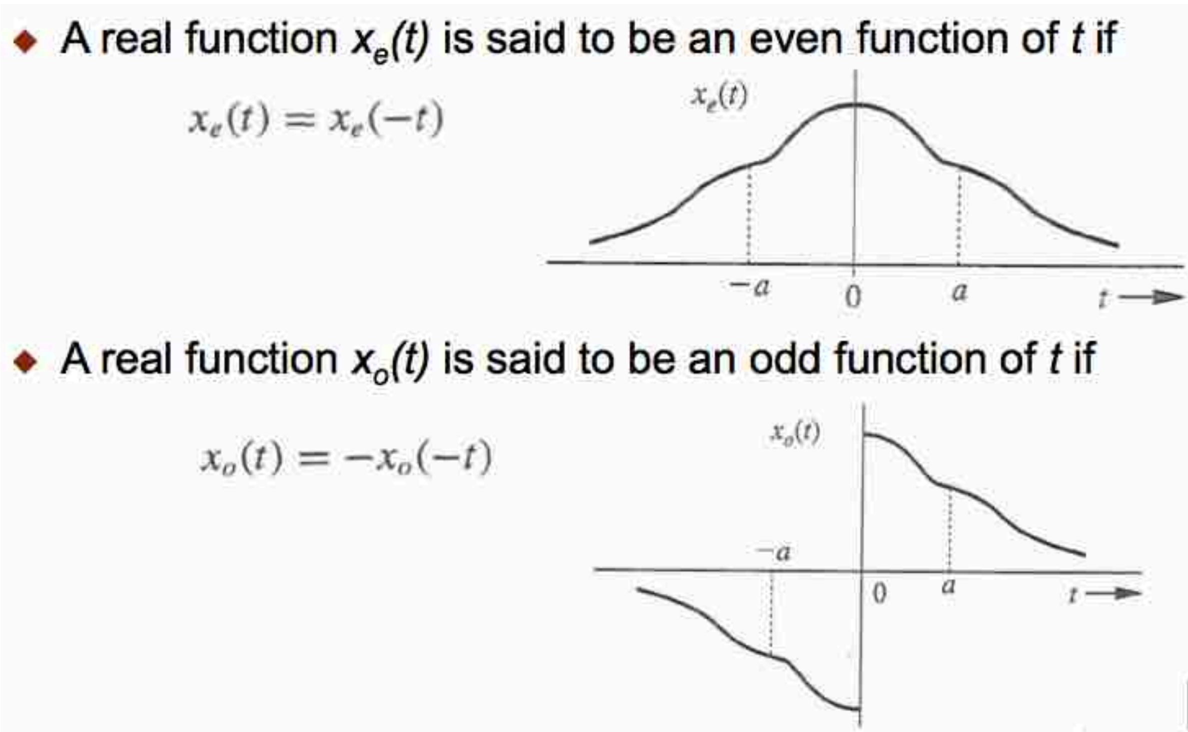
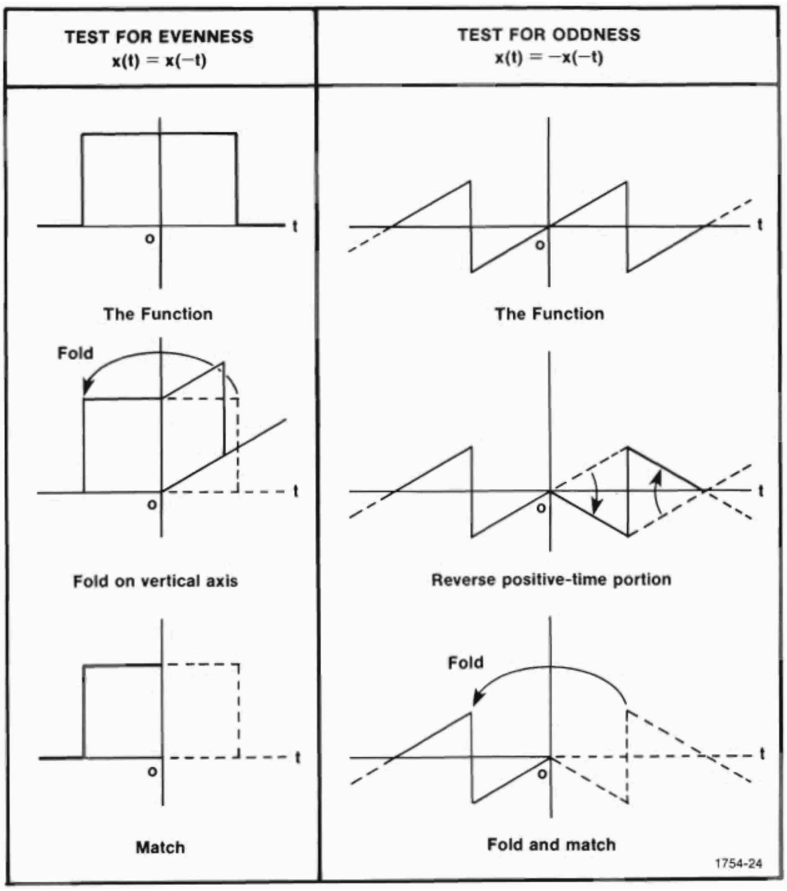
Σήματα και Συστήματα
στο
Πεδίο του Χρόνου



ΣΗΜΑΤΑ

ΑΡΤΙΑ - ΠΕΡΙΤΤΗ





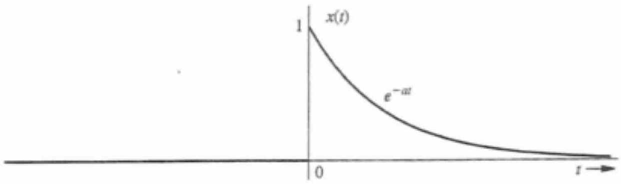
- Even and odd functions have the following properties:
  - Even x Odd = Odd
  - Odd x Odd = Even
  - Even x Even = Even
- Every signal *x(t)* can be expressed as a sum of even and odd components because:

$$x(t) = \underbrace{\tfrac{1}{2}[x(t) + x(-t)]}_{\text{even}} + \underbrace{\tfrac{1}{2}[x(t) - x(-t)]}_{\text{odd}}$$

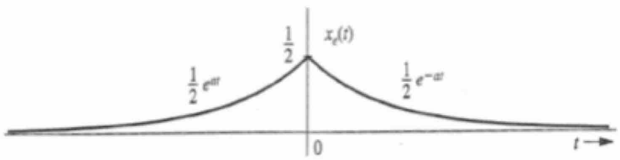
ΑΡΤΙΑ - ΠΕΡΙΤΤΗ

- Consider the causal exponential function $x(t) = e^{-at}u(t)$

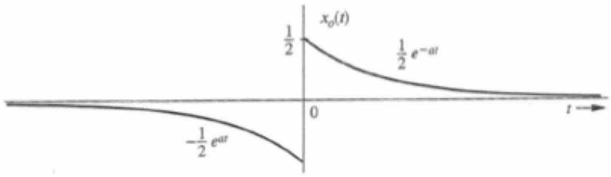
$$x(t) = x_e(t) + x_o(t)$$



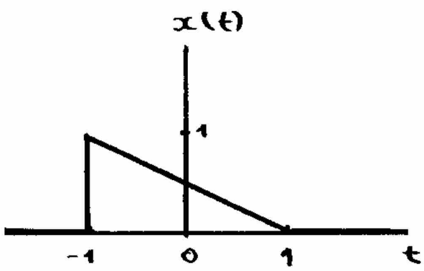
$$x_e(t) = \tfrac{1}{2}[e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t)]$$

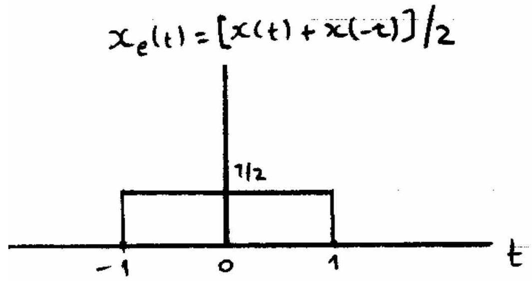


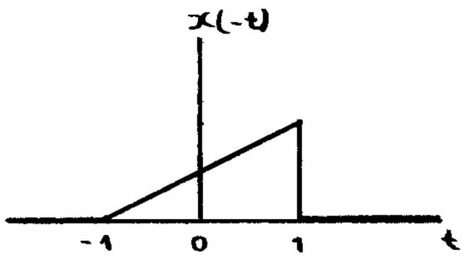
$$x_o(t) = \tfrac{1}{2}[e^{-at}u(t) - e^{at}u(-t)]$$

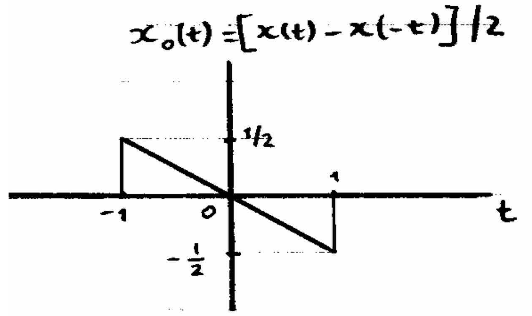


ΑΡΤΙΑ - ΠΕΡΙΤΤΗ

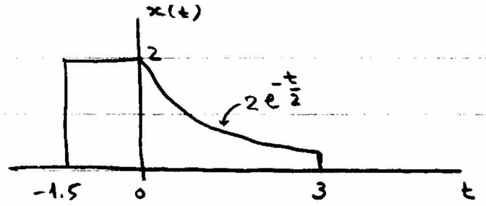




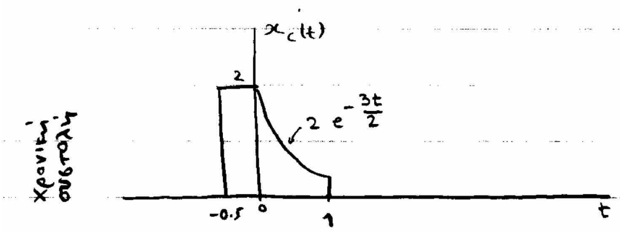




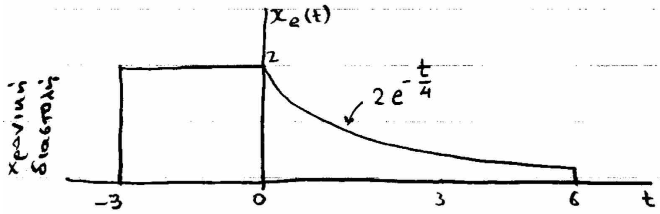
ΚΛΙΜΑΚΩΣΗ ΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ



$$x(t)=\begin{cases} 2 & -1.5\le t<0 \\ 2e^{-\frac{t}{2}} & 0\le t<3 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$



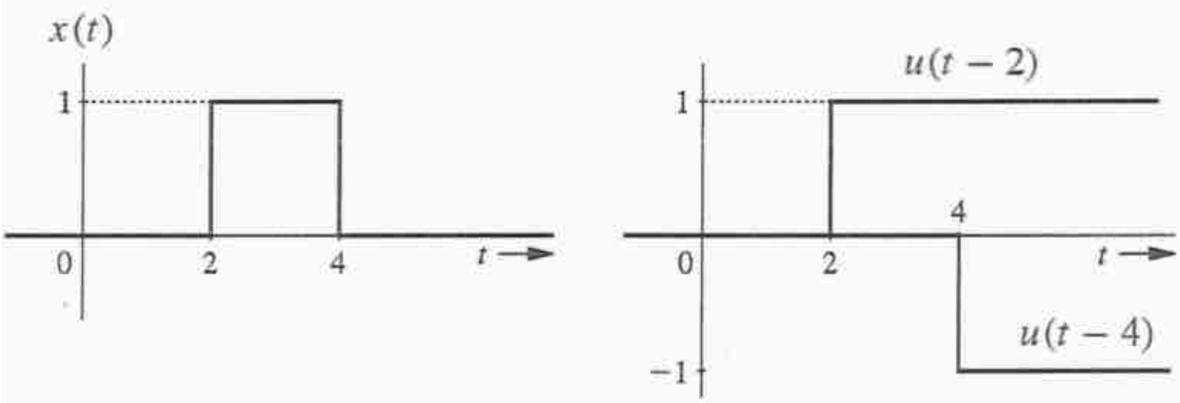
$$x_c(t)=x(3t)=\begin{cases} 2 & -1.5\le 3t<0 \quad \text{ή} \quad -0.5\le t<0 \\ 2e^{-\frac{3t}{2}} & 0\le 3t<3 \quad \text{ή} \quad 0\le t<1 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$



$$x_e(t)=x\left(\frac{t}{2}\right)=\begin{cases} 2 & -1.5\le \frac{t}{2}<0 \quad \text{ή} \quad -3\le t<0 \\ 2e^{-\frac{t}{4}} & 0\le \frac{t}{2}<3 \quad\quad 0\le t<6 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

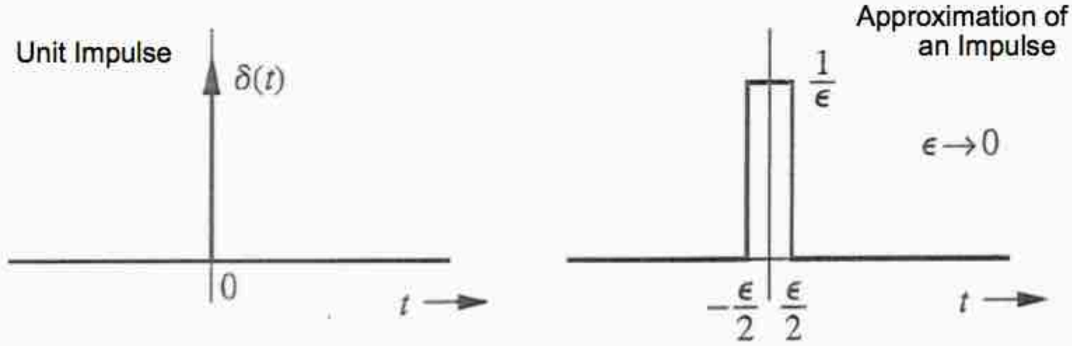
ΠΑΛΜΟΣ (ΩΣ ΔΙΑΦΟΡΑ ΒΗΜΑΤΙΚΩΝ)

$$x(t)=u(t-2)-u(t-4)$$



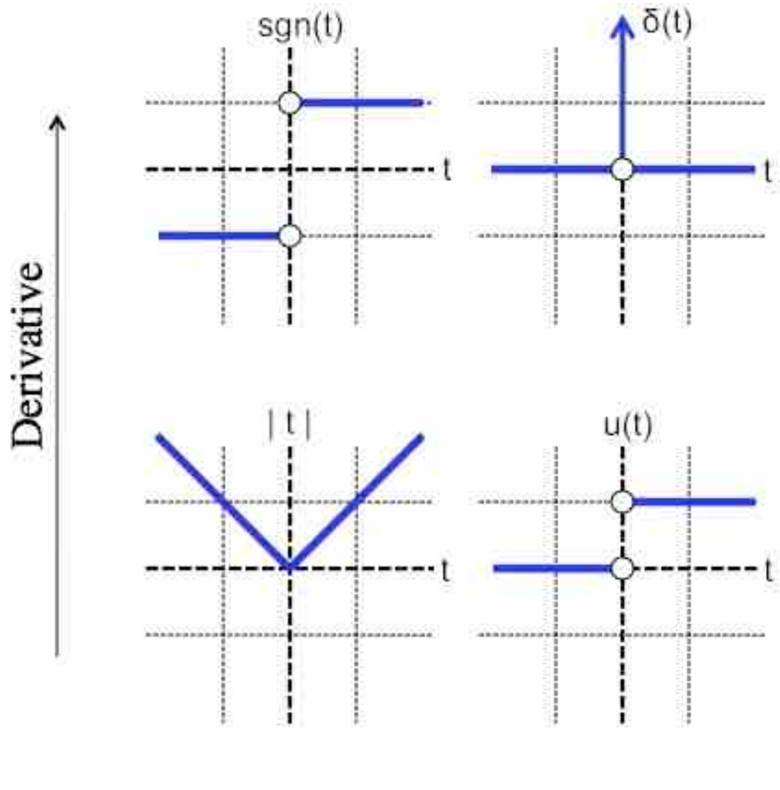
- First defined by Dirac as: $\delta(t) = 0 \qquad t \neq 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = 1$$



Properties of the Unit Impulse Function

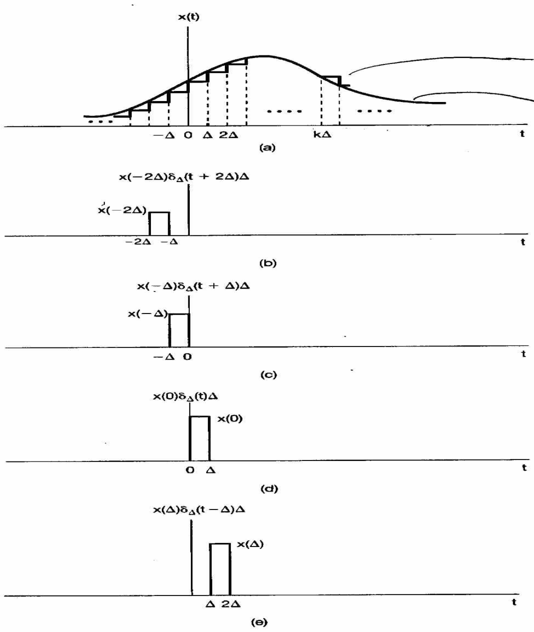
1. $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - t_0)\, dt = f(t_0)$, $f(t)$ continuous at $t = t_0$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(t - t_0)\delta(t)\, dt = f(-t_0)$, $f(t)$ continuous at $t = -t_0$
3. $f(t)\delta(t - t_0) = f(t_0)\delta(t - t_0)$, $f(t)$ continuous at $t = t_0$
4. $\delta(t - t_0) = \dfrac{d}{dt}u(t - t_0)$
5. $u(t - t_0) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau - t_0)\, d\tau = \begin{cases} 1, & t > t_0 \\ 0, & t < t_0 \end{cases}$
6. $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(at - t_0)\, dt = \dfrac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(t - \dfrac{t_0}{a}\right) dt$
7. $\delta(-t) = \delta(t)$



ΚΑΘΕ ΣΗΜΑ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΧΡΟΝΟΥ ΜΠΟΡΕΙ ΝΑ ΕΚΦΡΑΣΤΕΙ ΩΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΣΤΑΘΜΙΣΜΕΝΩΝ ΟΛΙΣΘΗΜΕΝΩΝ ΚΡΟΥΣΤΙΚΩΝ:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau$$

Έστω $\delta_\Delta(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta}, & 0 \le t < \Delta \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$ οπότε $\Delta\,\delta_\Delta(t)$ ισούται με τη μονάδα



$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\,\underbrace{\delta_\Delta(t-k\Delta)\,\Delta}_{1} \quad (*)$$

$$x(t) = \lim_{\Delta\to 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\,\delta_\Delta(t-k\Delta)\,\Delta$$

Καθώς $\Delta \to 0$ ~> $k\Delta$ τείνει να γίνει συνεχής μεταβλητή τ, Δ γίνεται $d\tau$ και το άθροισμα γίνεται ολοκλήρωμα:

Άρα:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau$$

[Εφαρμογή: Για $x(t) = u(t)$ έχουμε

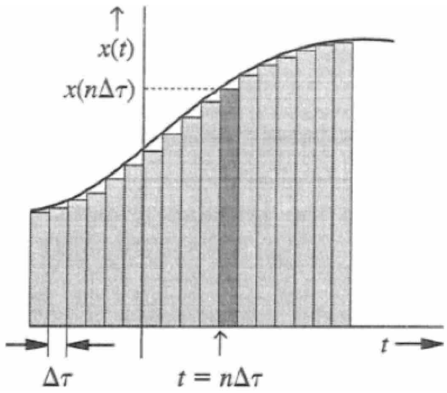
$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau = \int_{0}^{\infty} \delta(t-\tau)\,d\tau$$]

(*) Προσέγγιση της $x(t)$ ως γραμμικού συνδυασμού ολισθημένων παλμών

ΣΗΜΑΤΑ

ΣΗΜΑ ΩΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟ ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΚΡΟΥΣΤΙΚΩΝ

$$x(t) = \lim_{\Delta\tau \to 0} \sum_{r} x(n\Delta\tau)\, \delta(t - n\Delta\tau)\, \Delta\tau$$

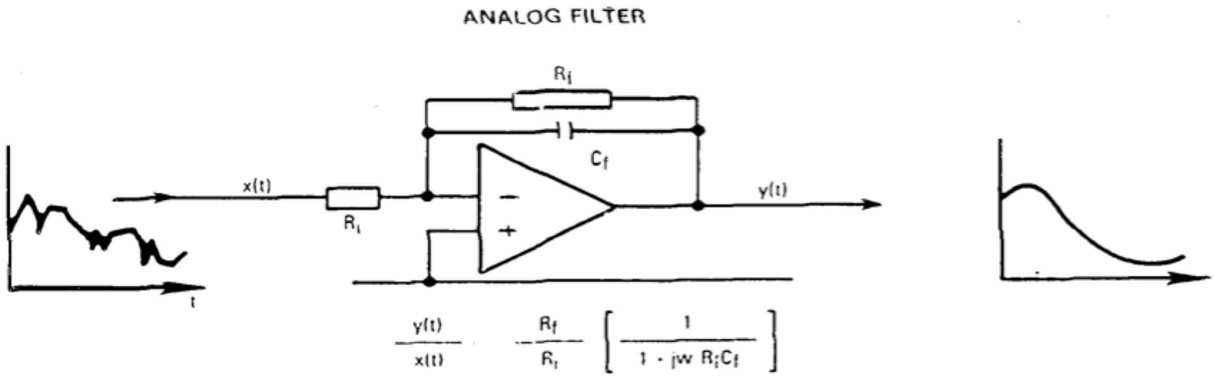


$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, \delta(t-\tau)\, d\tau$$

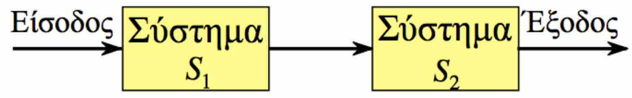
Οποιοδήποτε σήμα μπορεί να εκφραστεί ως ολοκλήρωμα σταθμισμένων (scaled) ολισθημένων (shifted) κρουστικών (impulses).

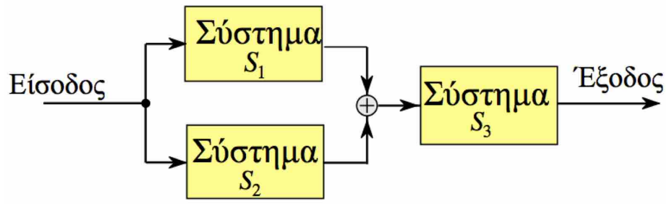
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

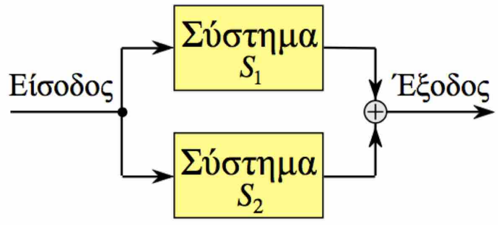
Παράδειγμα

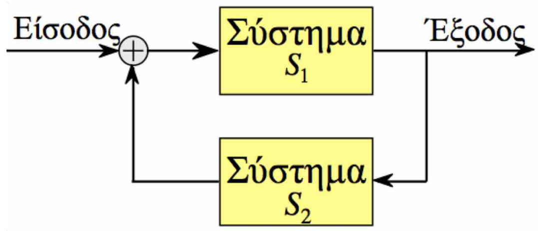


ΣΥΝΔΕΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ



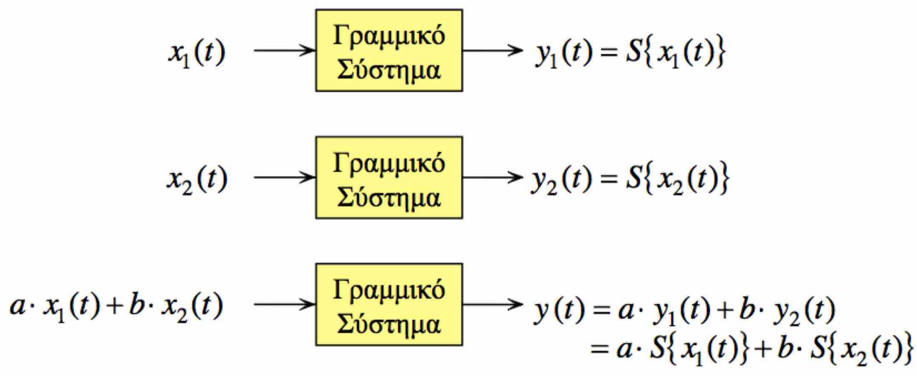






ΓΡΑΜΜΙΚΟΤΗΤΑ

Γραμμικότητα

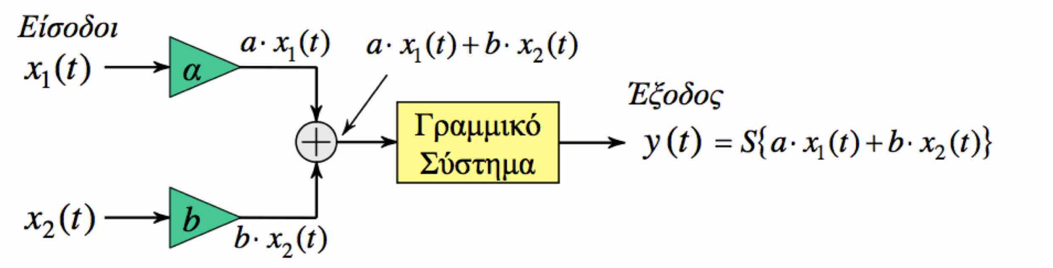


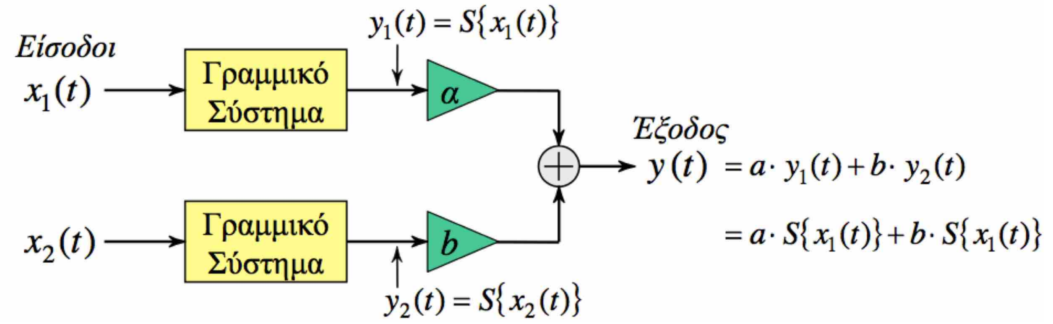
δηλαδή, η απόκριση του συστήματος σε μία είσοδο, που είναι ο γραμμικός συνδυασμός δύο σημάτων, ισούται με τον αντίστοιχο γραμμικό συνδυασμό των αποκρίσεων του συστήματος στο καθένα από τα σήματα αυτά.

$$y(t) = S\{a \cdot x_1(t) + b \cdot x_2(t)\} = a \cdot S\{x_1(t)\} + b \cdot S\{x_2(t)\} = a \cdot y_1(t) + b \cdot y_2(t)$$

Σχηματική περιγραφή της γραμμικότητας ενός συστήματος

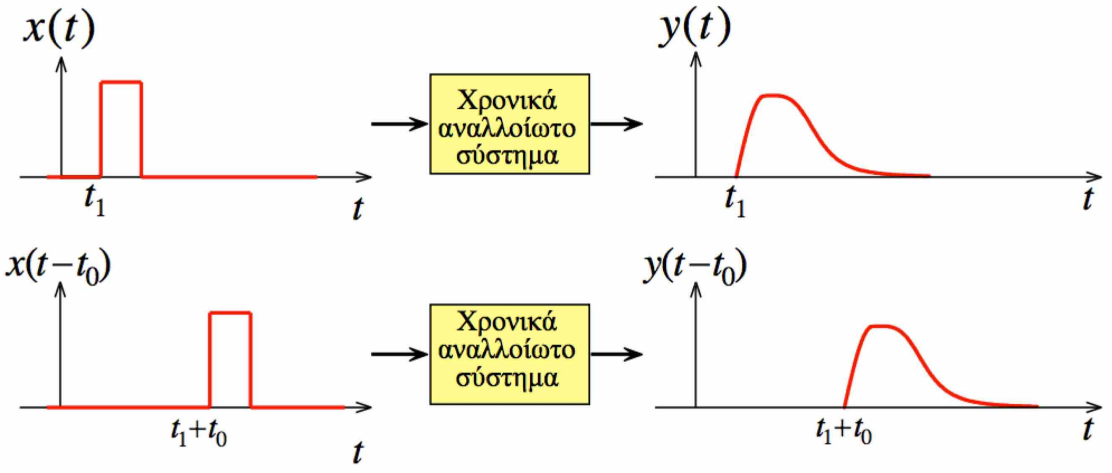
$$y(t)=S\{a\cdot x_1(t)+b\cdot x_2(t)\}=a\cdot S\{x_1(t)\}+b\cdot S\{x_2(t)\}=a\cdot y_1(t)+b\cdot y_2(t)$$





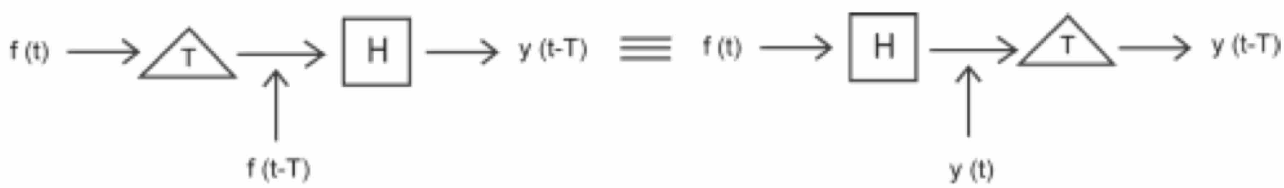
Χρονικά Αναλλοίωτα Συστήματα

Ένα σύστημα λέγεται ***χρονικά αναλλοίωτο (ΧΑ) (αμετάβλητο)*** αν και μόνο αν χρονικές ολισθήσεις του σήματος εισόδου μεταφράζονται σε αντίστοιχες χρονικές ολισθήσεις στην έξοδο.



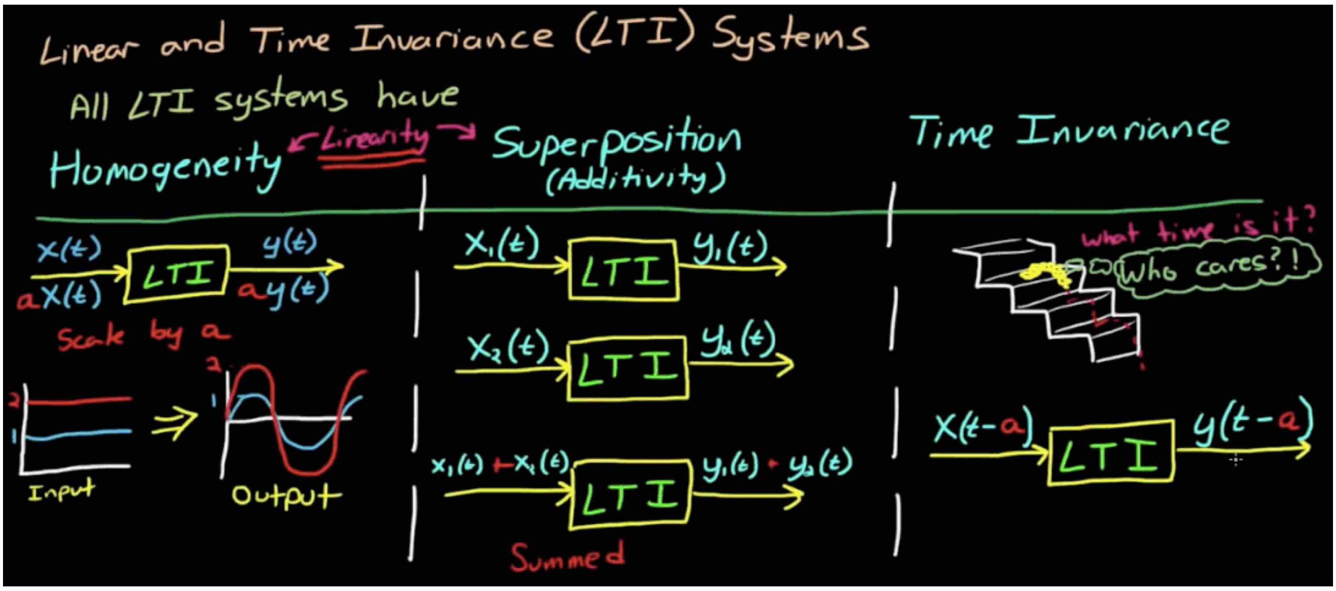
ΟΛΙΣΘΗΣΗ ΣΤΟ ΧΡΟΝΟ

$$HS_T = S_T H$$



Η έξοδος είναι η ίδια ανεξαρτήτως εάν η καθυστέρηση (ολίσθηση) τοποθετείται στην είσοδο ή στην έξοδο του συστήματος.

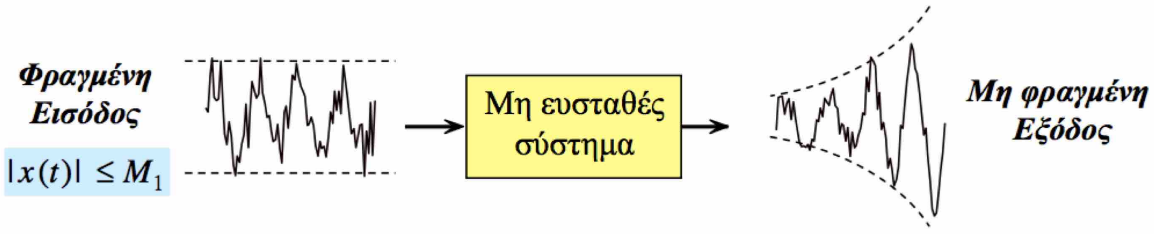
Οι συντελεστές των χρονικά αμετάβλητων συστημάτων είναι σταθερές.



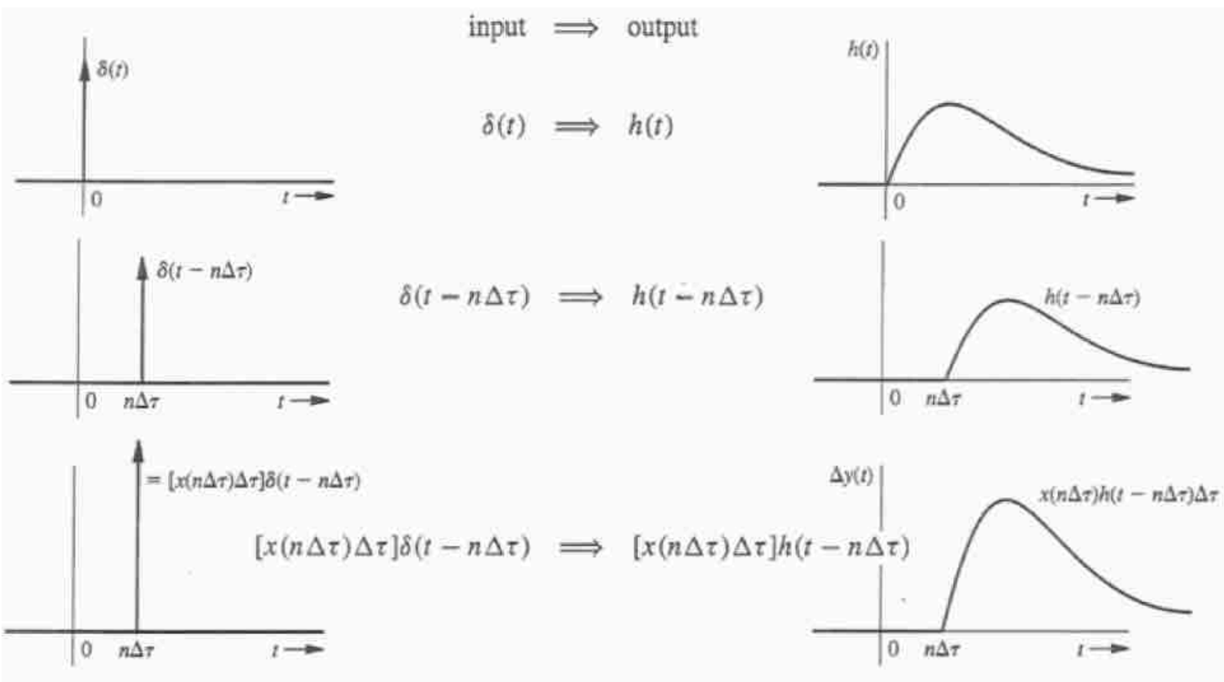
Ευστάθεια

Ένα σύστημα λέγετε ότι είναι ***ΦΕΦΕ ευσταθές*** (ευστάθεια *Φραγμένης Εισόδου Φραγμένης Εξόδου*) (*Bounded Input Bounded Output* (*BIBO*) *stable*) αν και μόνον αν για κάθε φραγμένη είσοδο η έξοδός του παραμένει φραγμένη.

Σύστημα ευσταθές.

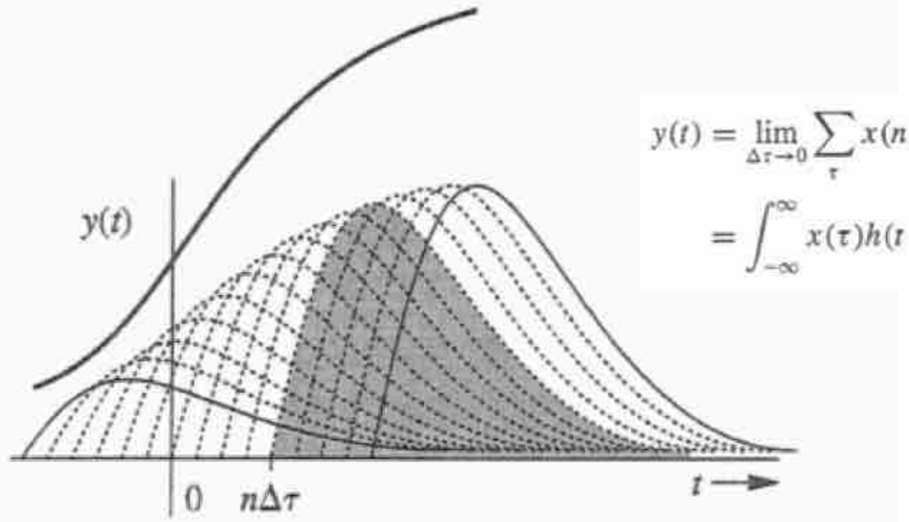


Σύστημα μη ευσταθές

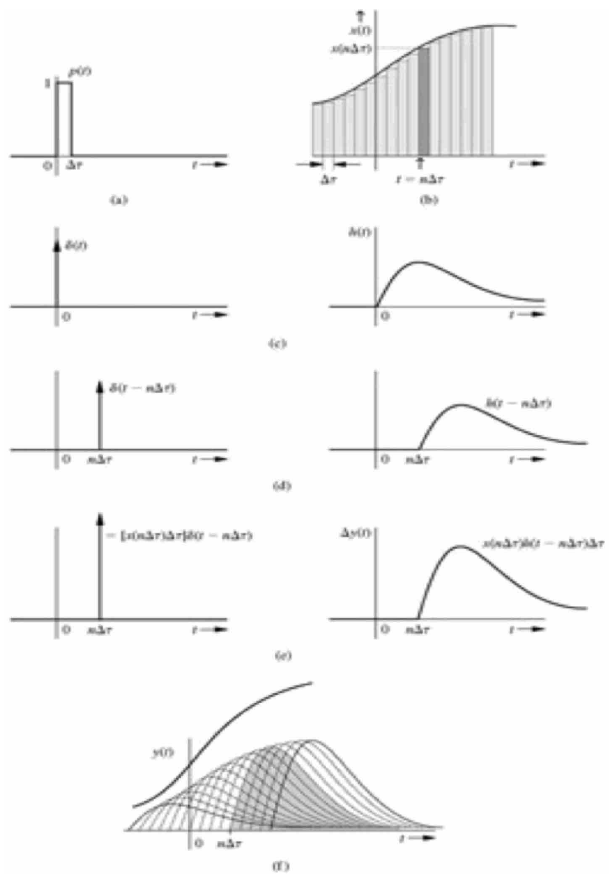


$$\text{input} \Longrightarrow \text{output}$$

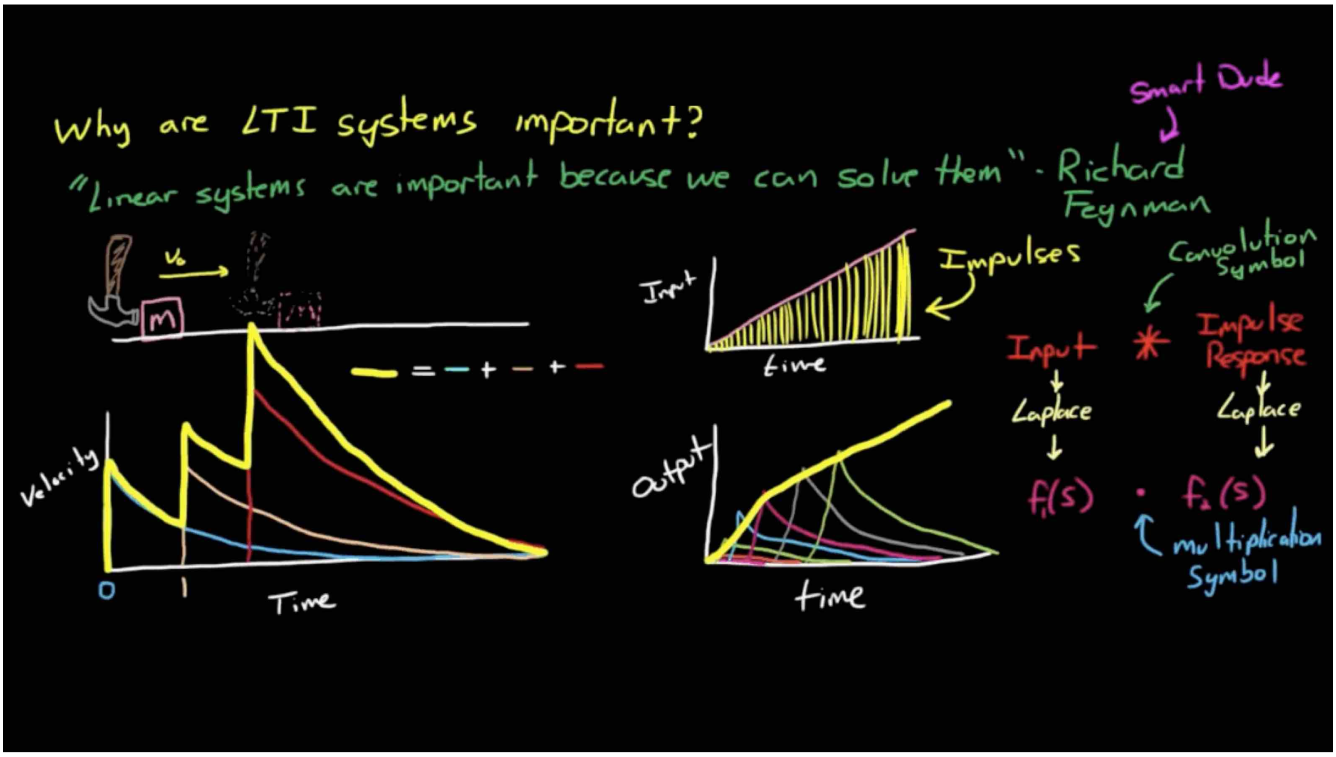
$$\underbrace{\lim_{\Delta\tau\to 0}\sum_{\tau} x(n\Delta\tau)\delta(t-n\Delta\tau)\,\Delta\tau}_{x(t)} \Longrightarrow \underbrace{\lim_{\Delta\tau\to 0}\sum_{\tau} x(n\Delta\tau)h(t-n\Delta\tau)\Delta\tau}_{y(t)}$$

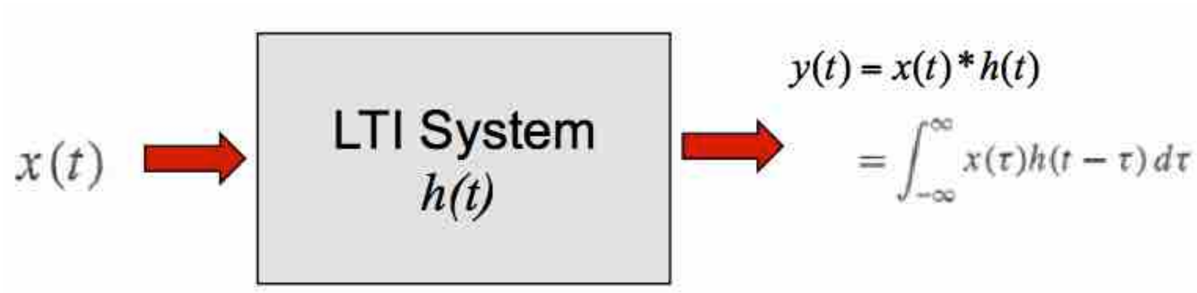


$$y(t) = \lim_{\Delta\tau\to 0}\sum_{\tau} x(n\Delta\tau)h(t-n\Delta\tau)\Delta\tau$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau$$



$$y(t) = \lim_{\Delta\tau\to 0}\sum_{\tau} x(n\Delta\tau)h(t-n\Delta\tau)\Delta\tau$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau$$

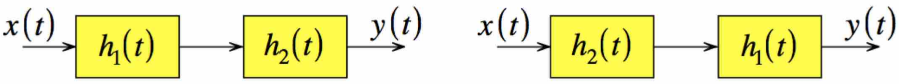




$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

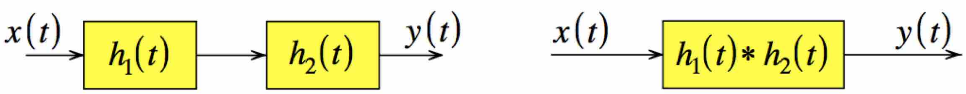
- *Αντιμεταθετική ιδιότητα:*

$$h_1(t) * h_2(t) = h_2(t) * h_1(t)$$



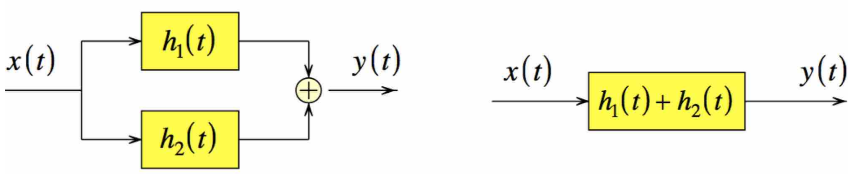
- *Προσεταιριστική ιδιότητα*

$$h_2(t) * [h_1(t) * x(t)] = [h_2(t) * h_1(t)] * x(t)$$



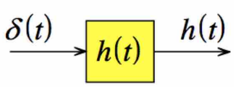
- *Επιμεριστική ιδιότητα*

$$[h_1(t) + h_2(t)] * x(t) = h_1(t) * x(t) + h_2(t) * x(t)$$



- *Ταυτοτική ιδιότητα:*

$$\delta(t) * h(t) = h(t)$$



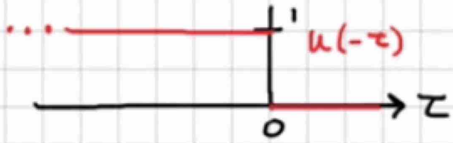
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΣΥΝΕΛΙΞΗΣ ΒΗΜΑΤΙΚΩΝ

Compute $y(t)=u(t)*u(t)$

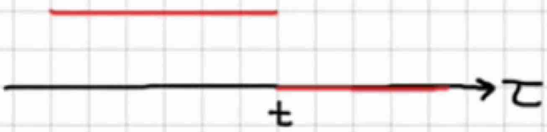
$$\Rightarrow y(t)=\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)u(t-\tau)\,d\tau}_{\text{Definition of } u(t)*u(t)}$$

Sketch $u(\tau)$:

Sketch $u(-\tau)$:

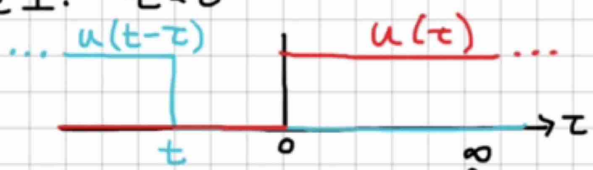


Sketch $u(t-\tau)$:



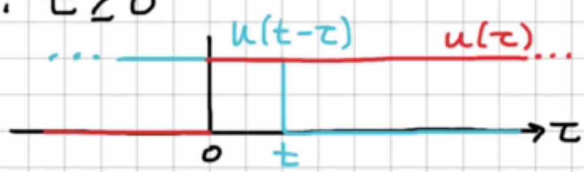
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΣΥΝΕΛΙΞΗΣ ΒΗΜΑΤΙΚΩΝ

Case 1: $t<0$

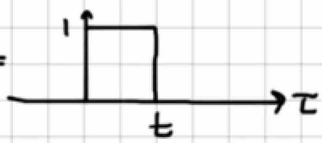


$$u(\tau)u(t-\tau)=0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)u(t-\tau)\,d\tau=\int_{-\infty}^{\infty} 0\,d\tau=0$$

Case 2: $t\geq 0$



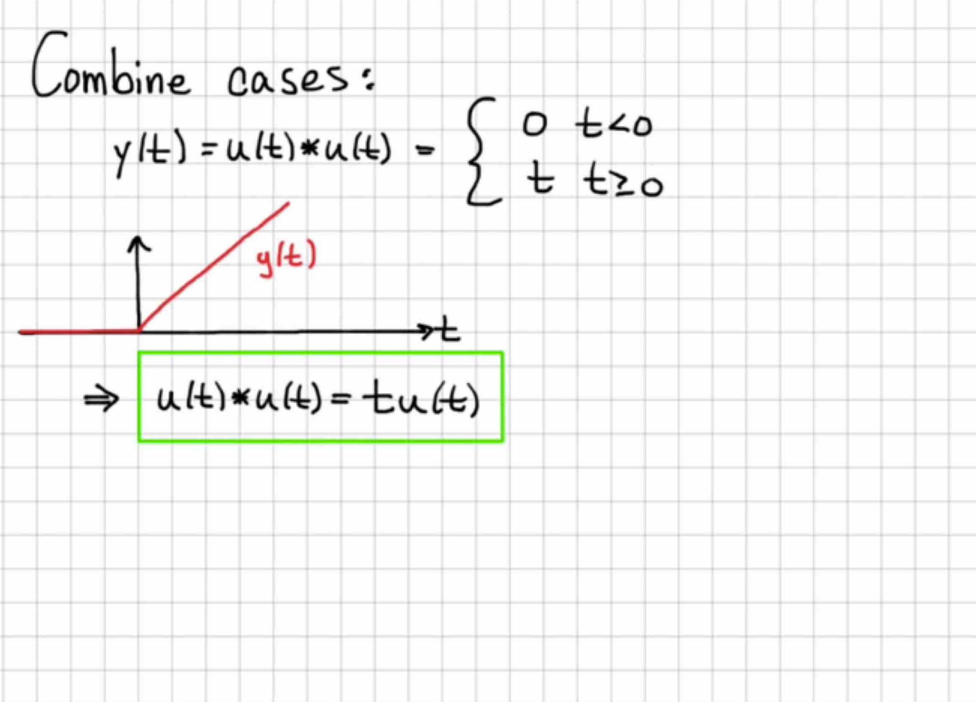
$u(\tau)u(t-\tau)=$



$$\int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)u(t-\tau)\,d\tau$$

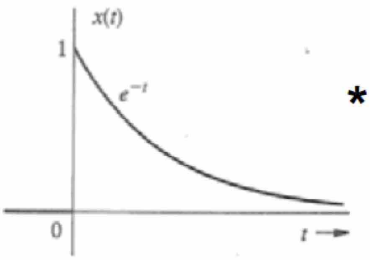
$$=\int_{0}^{t} 1\,d\tau=t$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΣΥΝΕΛΙΞΗΣ ΒΗΜΑΤΙΚΩΝ

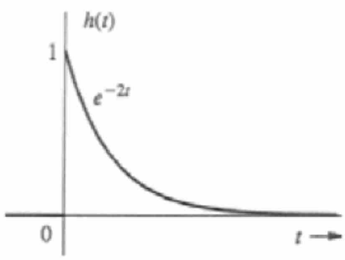


Πηγή: Adam Panagos `http://www.youtube.com/watch?v=iAuVYJLjsII`

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΣΥΝΕΛΙΞΗΣ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ



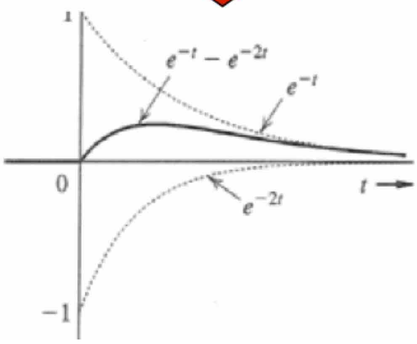
$*$



$$x(t) = e^{-t}u(t)$$

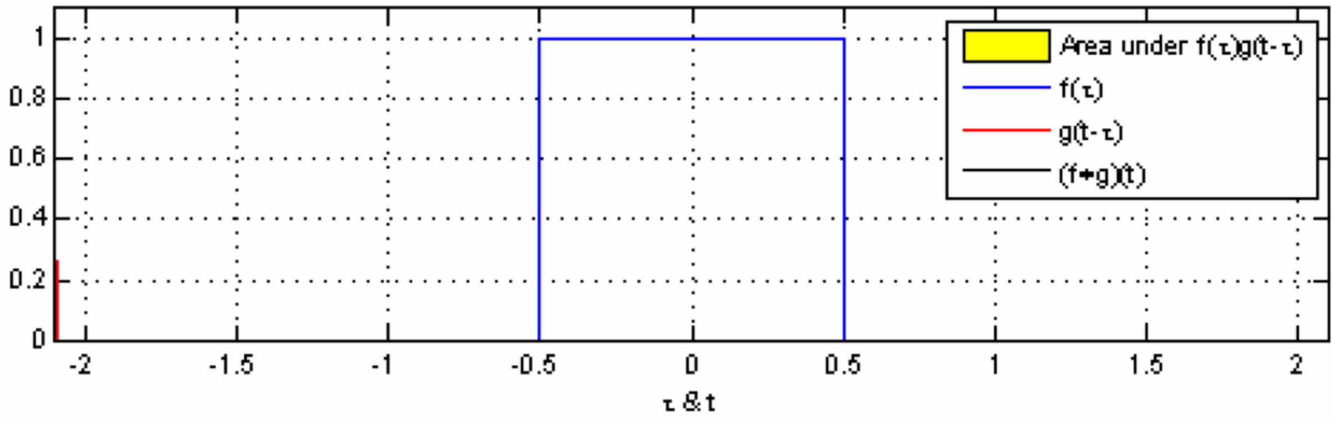
$$h(t) = e^{-2t}u(t)$$

$$y(t) = \int_0^t e^{-\tau} e^{-2(t-\tau)}\, d\tau \qquad t \geq 0$$

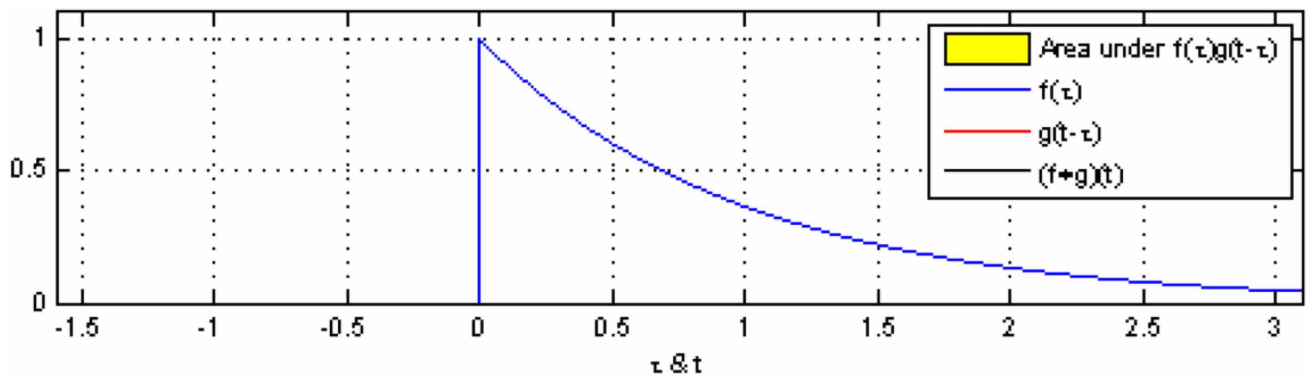


$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * h(t) \\ &= \int_0^t x(\tau)h(t-\tau)d\tau \\ &= \int_0^t e^{-\tau} e^{-2(t-\tau)} d\tau \\ &= (e^{-t} - e^{-2t})u(t) \end{aligned}$$

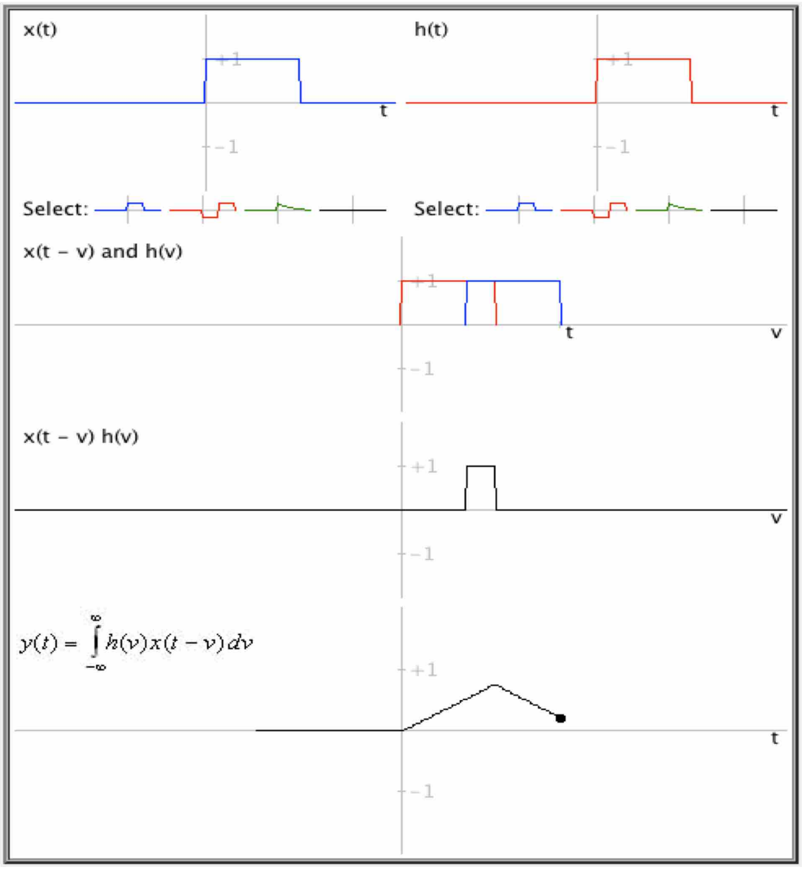
ΓΡΑΦΙΚΟΣ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ



ΓΡΑΦΙΚΟΣ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ



ΓΡΑΦΙΚΟΣ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ



http://pages.jh.edu/~signals/convolve/

ΠΙΝΑΚΑΣ ΖΕΥΓΩΝ ΣΥΝΕΛΙΞΗΣ

No.	$x_1(t)$	$x_2(t)$	$x_1(t) * x_2(t) = x_2(t) * x_1(t)$	
1	$x(t)$	$\delta(t-T)$	$x(t-T)$	
2	$e^{\lambda t}u(t)$	$u(t)$	$\dfrac{1-e^{\lambda t}}{-\lambda}u(t)$	
3	$u(t)$	$u(t)$	$tu(t)$	
4	$e^{\lambda_1 t}u(t)$	$e^{\lambda_2 t}u(t)$	$\dfrac{e^{\lambda_1 t}-e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1-\lambda_2}u(t)$	$\lambda_1 \neq \lambda_2$
5	$e^{\lambda t}u(t)$	$e^{\lambda t}u(t)$	$te^{\lambda t}u(t)$	
6	$te^{\lambda t}u(t)$	$e^{\lambda t}u(t)$	$\dfrac{1}{2}t^2e^{\lambda t}u(t)$	

ΣΥΝΕΛΙΞΗ

ΠΙΝΑΚΑΣ ΖΕΥΓΩΝ ΣΥΝΕΛΙΞΗΣ

No.	$x_1(t)$	$x_2(t)$	$x_1(t) * x_2(t) = x_2(t) * x_1(t)$
7	$t^N u(t)$	$e^{\lambda t} u(t)$	$\frac{N!\,e^{\lambda t}}{\lambda^{N+1}} u(t) - \sum_{k=0}^{N} \frac{N!\,t^{N-k}}{\lambda^{k+1}(N-k)!} u(t)$
8	$t^M u(t)$	$t^N u(t)$	$\frac{M!N!}{(M+N+1)!} t^{M+N+1} u(t)$
9	$t e^{\lambda_1 t} u(t)$	$e^{\lambda_2 t} u(t)$	$\frac{e^{\lambda_2 t} - e^{\lambda_1 t} + (\lambda_1 - \lambda_2) t e^{\lambda_1 t}}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2} u(t)$
10	$t^M e^{\lambda t} u(t)$	$t^N e^{\lambda t} u(t)$	$\frac{M!\,N!}{(N+M+1)!} t^{M+N+1} e^{\lambda t} u(t)$
11	$t^M e^{\lambda_1 t} u(t)$	$t^N e^{\lambda_2 t} u(t)$	$\sum_{k=0}^{M} \frac{(-1)^k M!(N+k)!\,t^{M-k} e^{\lambda_1 t}}{k!(M-k)!(\lambda_1 - \lambda_2)^{N+k+1}} u(t)$
	$\lambda_1 \neq \lambda_2$		$+ \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k N!(M+k)!\,t^{N-k} e^{\lambda_2 t}}{k!(N-k)!(\lambda_2 - \lambda_1)^{M+k+1}} u(t)$

ΣΥΝΕΛΙΞΗ

ΠΙΝΑΚΑΣ ΖΕΥΓΩΝ ΣΥΝΕΛΙΞΗΣ

No.	$x_1(t)$	$x_2(t)$	$x_1(t) * x_2(t) = x_2(t) * x_1(t)$
12	$e^{-\alpha t}\cos(\beta t + \theta) u(t)$	$e^{\lambda t} u(t)$	$\frac{\cos(\theta - \phi) e^{\lambda t} - e^{-\alpha t}\cos(\beta t + \theta - \phi)}{\sqrt{(\alpha + \lambda)^2 + \beta^2}} u(t)$
			$\phi = \tan^{-1}[-\beta/(\alpha + \lambda)]$
13	$e^{\lambda_1 t} u(t)$	$e^{\lambda_2 t} u(-t)$	$\frac{e^{\lambda_1 t} u(t) + e^{\lambda_2 t} u(-t)}{\lambda_2 - \lambda_1}$ $\quad \mathrm{Re}\,\lambda_2 > \mathrm{Re}\,\lambda_1$
14	$e^{\lambda_1 t} u(-t)$	$e^{\lambda_2 t} u(-t)$	$\frac{e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}}{\lambda_2 - \lambda_1} u(-t)$