ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

2 - ΣΥΝΕΛΙΞΗ

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

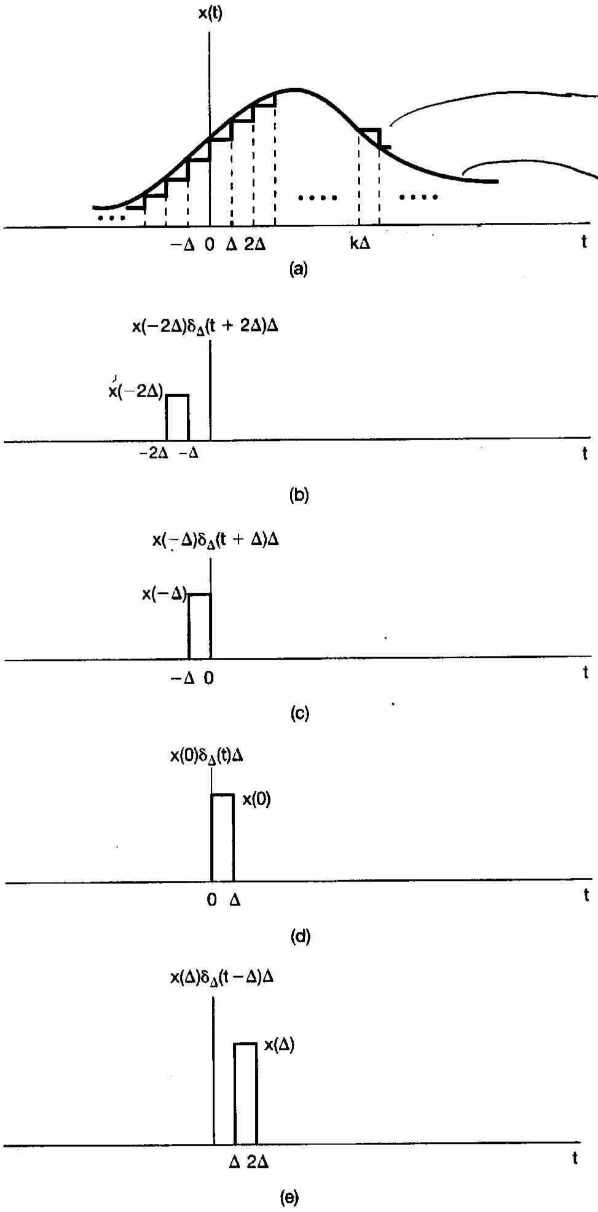
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ ΣΚΟΔΡΑΣ

2023 - 2024

ΚΑΘΕ ΣΗΜΑ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΧΡΟΝΟΥ ΜΠΟΡΕΙ ΝΑ ΕΚΦΡΑΣΤΕΙ ΩΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΣΤΑΘΜΙΣΜΕΝΩΝ ΟΛΙΣΘΗΜΕΝΩΝ ΚΡΟΥΣΤΙΚΩΝ:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau$$

Έστω $\delta_\Delta(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta}, & 0 \le t < \Delta \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$ οπότε $\Delta\,\delta_\Delta(t)$ ισούται με τη μονάδα



$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\,\underbrace{\delta_\Delta(t-k\Delta)\,\Delta}_{1} \quad (*)$$

$$x(t) = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\,\delta_\Delta(t-k\Delta)\,\Delta$$

Καθώς $\Delta \to 0$ ⇝ $k\Delta$ τείνει να γίνει συνεχής μεταβλητή τ, Δ γίνεται $d\tau$ και το άθροισμα γίνεται ολοκλήρωμα:

Άρα:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau$$

[Εφαρμογή: Για $x(t) = u(t)$ έχουμε

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau = \int_{0}^{\infty} \delta(t-\tau)\,d\tau$$]

(*) Προσέγγιση της $x(t)$ ως γραμμικού συνδυασμού ολισθημένων παλμών

Μια ακόμα απόδειξη της σχέσης: $x(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau$

Κρουστική συνάρτηση: Ορισμός 1: $\delta(t-t_0)=0,\ t\neq t_0$ και $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)\,dt=1$

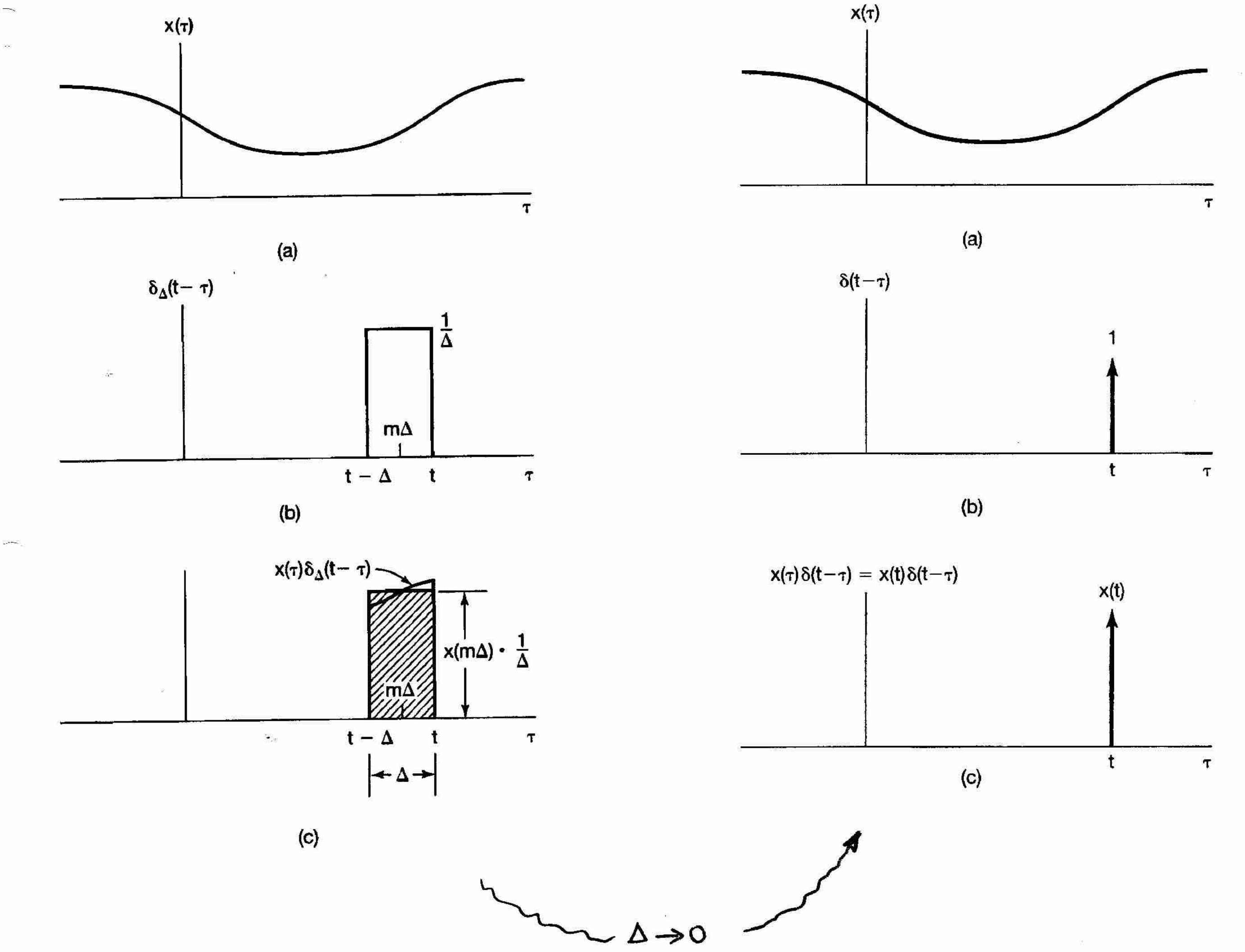
Ορισμός 2: $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,\delta(t-t_0)\,dt = x(t_0)$ όπου $x(t)$ συνεχής στο $t=t_0$

ιδιότητα κοσκινίσματος (sifting property)

$$x(t)\,\delta(t-t_0)=x(t_0)\,\delta(t-t_0)$$

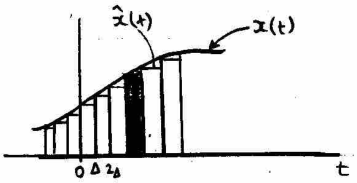
Θέτω $t_0=\tau$ οπότε έχω $x(t)\,\delta(t-\tau)=x(\tau)\,\delta(t-\tau)$

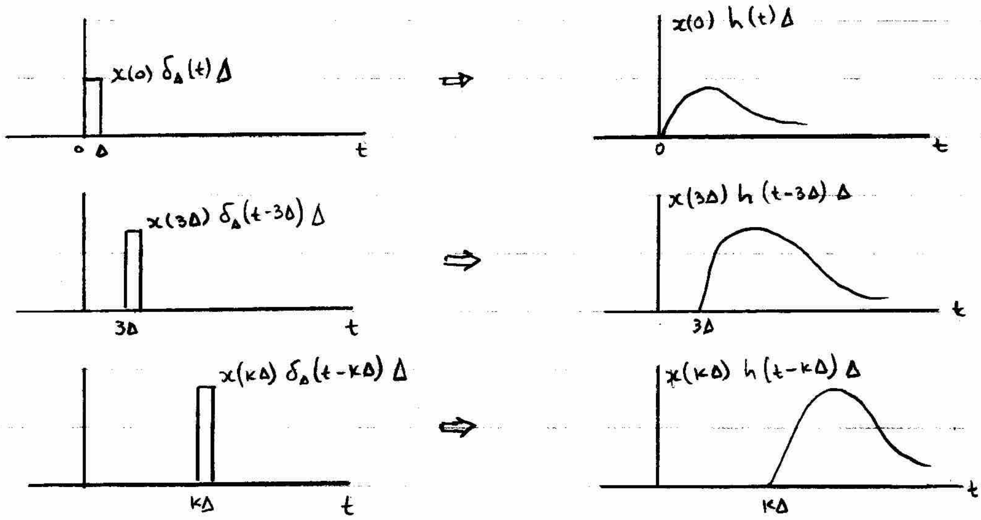
Οπότε $\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,\delta(t-\tau)\,d\tau = x(t)\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-\tau)\,d\tau}_{1} = x(t)$

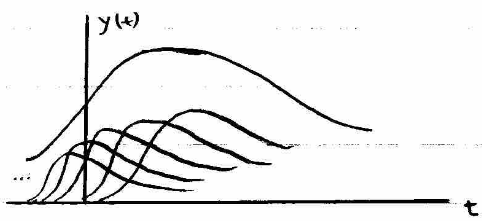


ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΣΥΝΕΛΙΞΗΣ
(CONVOLUTION INTEGRAL)

$$\delta(t) \longrightarrow \boxed{\Gamma X A} \longrightarrow h(t) \qquad\qquad x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$





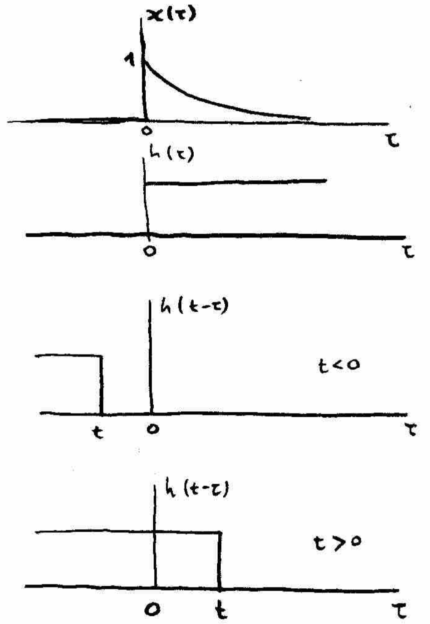


Είσοδος		Έξοδος
$\delta_\Delta(t)$	$\rightarrow$	$h(t)$
$\delta_\Delta(t-k\Delta)$	$\rightarrow$	$h(t-k\Delta)$
$x(k\Delta)\,\delta_\Delta(t-k\Delta)\,\Delta$	$\rightarrow$	$x(k\Delta)\, h(t-k\Delta)\,\Delta$

$$\underbrace{\lim_{\Delta\to 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\,\delta_\Delta(t-k\Delta)\,\Delta}_{x(t)} \rightarrow \underbrace{\lim_{\Delta\to 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\, h(t-k\Delta)\,\Delta}_{y(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί η έξοδος $y(t)$ ενός ΓΧΑ συστήματος του οποίου η κρουστική απόκριση είναι $h(t)=u(t)$, όταν η είσοδος ισούται με $x(t)=e^{-\alpha t}u(t)$, όπου $\alpha>0$.

ΛΥΣΗ



Παρατηρούμε ότι το γινόμενο $x(\tau)\,h(t-\tau)$ είναι διάφορο του μηδενός μόνον όταν $0<\tau<t$:

$$x(\tau)\,h(t-\tau)=\begin{cases} e^{-\alpha\tau} & 0<\tau<t \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

Συνεπώς η έξοδος $y(t)$ υπολογίζεται ως η συνέλιξη των $x(t)$ και $h(t)$:

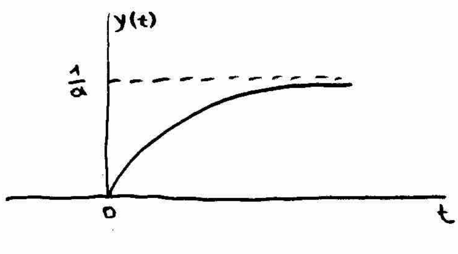
$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau=\int_{0}^{t}e^{-\alpha\tau}\,d\tau=-\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha\tau}\Big|_{0}^{t}=$$

$$=\frac{1}{\alpha}\left(1-e^{-\alpha t}\right)$$

Τελικά η $y(t)$ για όλα τα t είναι:

$$y(t)=\frac{1}{\alpha}\left(1-e^{-\alpha t}\right)u(t)$$

Η γραφική παράσταση της εξόδου είναι η ακόλουθη:



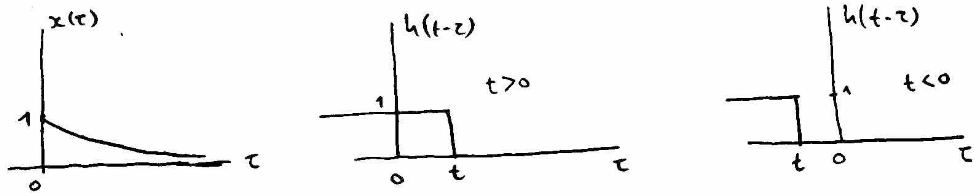
Αναλυτικά, η διαδικασία αυτή σε βήματα έχει ως εξής:

Βήμα 1ο: Γράφουμε τις εξισώσεις των σημάτων (συναρτήσεων)

$$x(t) = e^{-\alpha t}u(t) \qquad h(t) = u(t) = \begin{cases} 1 & \text{για } t>0 \\ 0 & \text{για } t<0 \end{cases}$$

Βήμα 2ο: Γράφουμε τις εξισώσεις $x(\tau)$ και $h(t-\tau)$, και τις σχεδιάζουμε.

$$x(\tau) = e^{-\alpha \tau}u(\tau) \qquad h(t-\tau) = u(t-\tau) = \begin{cases} 1 & \text{για } t-\tau>0 \Rightarrow \tau<t \\ 0 & \text{για } t-\tau<0 \Rightarrow \tau>t \end{cases}$$

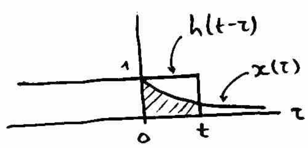


Βήμα 3ο: Υπολογίζουμε το ορισμένο ολοκλήρωμα του γινομένου $x(\tau)\,h(t-\tau)$ για διαφορετικά διαστήματα όπου το γινόμενο αυτό είναι διάφορο του μηδενός.

Περίπτωση 1η: $t<0$

Στην περίπτωση αυτή η $x(\tau)=0$, οπότε και το γινόμενο $x(\tau)\,h(t-\tau)$ είναι μηδέν.

Περίπτωση 2η: $t>0$



Στην περίπτωση αυτή το γινόμενο $x(\tau)\,h(t-\tau)$ είναι διάφορο του μηδενός μεταξύ 0 και t (βλ. γραμμοσκιασμένο τμήμα στο σχήμα). Άρα, η συνέλιξη των $x(t)$ και $h(t)$ στο διάστημα αυτό θα είναι:

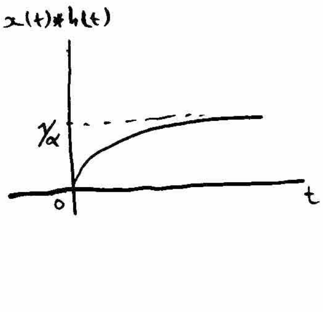
$$x(t)*h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha\tau}\underbrace{u(\tau)\,u(t-\tau)}_{1}\,d\tau =$$

$$= \int_{0}^{t} e^{-\alpha\tau}\,d\tau = \frac{1}{-\alpha}\,e^{-\alpha\tau}\Big|_0^t =$$

$$= \frac{1}{-\alpha}\left(e^{-\alpha t} - e^{0}\right) =$$

$$= \frac{1}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha t}\right)$$



Τελικά,

$$x(t)*h(t) = \begin{cases} 0 & \text{για } t<0 \\ \frac{1}{\alpha}\left(1-e^{-\alpha t}\right) & \text{για } t>0 \end{cases}$$

ή

$$x(t)*u(t) = \frac{1}{\alpha}\left(1-e^{-\alpha t}\right)u(t)$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

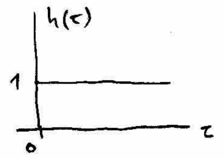
Στα προηγούμενα υπολογίσαμε την συνέλιξη $x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$

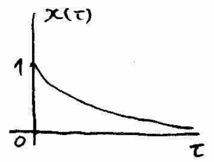
Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε αν υπολογίσουμε την συνέλιξη $h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t-\tau)\, d\tau$

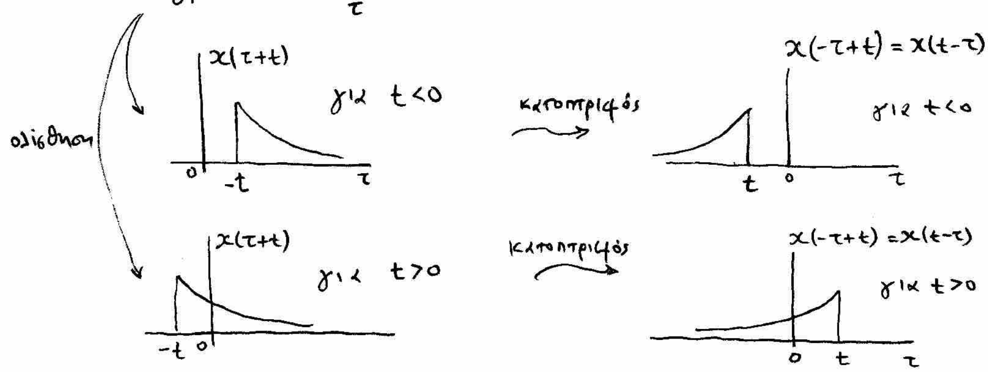
Βήμα 1ο: Γράφουμε τις εξισώσεις των σημάτων (συναρτήσεων)

$$x(t) = e^{-\alpha t} u(t) \qquad h(t) = u(t) = \begin{cases} 1 & \text{για } t>0 \\ 0 & \text{για } t<0 \end{cases}$$

Βήμα 2ο: Γράφουμε τις εξισώσεις $h(\tau)$ και $x(t-\tau)$ και τις σχεδιάζουμε





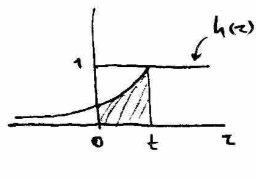


Βήμα 3ο: Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα του $h(\tau)\, x(t-\tau)$ για διαφορετικές περιπτώσεις

Περίπτωση 1η: $t<0$

Για $t<0$ η $h(\tau)=0$ οπότε το γινόμενο $h(\tau)\,x(t-\tau)=0$ και συνεπώς και το ολοκλήρωμα

Περίπτωση 2η: $t>0$

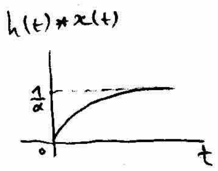


Στην περίπτωση αυτή το γινόμενο $h(\tau)\,x(t-\tau)$ είναι διάφορο του μηδενός μόνον μεταξύ 0 και t (γραμμοσκιασμένο τμήμα στο σχήμα). Άρα η συνέλιξη θα είναι:

$$h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{u(\tau)}_{h(\tau)}\, \underbrace{e^{-\alpha(t-\tau)} u(t-\tau)}_{x(t-\tau)}\, d\tau =$$

$$= \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)}\, d\tau = e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha\tau}\, d\tau =$$

$$= e^{-\alpha t} \frac{1}{\alpha}\, e^{\alpha\tau}\Big|_0^t = \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha t}\left(e^{\alpha t} - e^{0}\right) = \frac{1}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha t}\right)$$

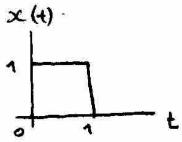


Τελικά, $h(t) * x(t) = \begin{cases} 0 & \text{για } t<0 \\ \frac{1}{\alpha}\left(1-e^{-\alpha t}\right) & \text{για } t>0 \end{cases}$

ή

$$h(t) * x(t) = \frac{1}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha t}\right) u(t)$$

ΑΣΚΗΣΗ (ΣΥΝΕΧΕΙΑ)



$h(t) = e^{-t}u(t)$

Λύση

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = \langle \text{εκφράζοντας } x(t) = u(t) - u(t-1) \rangle$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} [u(\tau) - u(\tau-1)]\, h(t-\tau)\, d\tau =$$

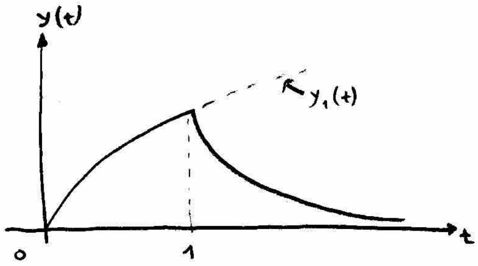
$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau}_{y_1(t)} - \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} u(\tau-1)\, h(t-\tau)\, d\tau}_{y_2(t)}$$

Σε προηγούμενη άσκηση υπολογίσαμε ότι $y_1(t) = u(t) * e^{-t}u(t) = (1-e^{-t})u(t)$

Παρατηρούμε ότι η $y_2(t)$, λόγω χρονικής αμεταβλητότητας του συστήματος, θα ισούται με: $y_2(t) = y_1(t-1) = (1-e^{-(t-1)})\, u(t-1)$

Άρα η έξοδος $y(t)$ θα είναι τελικά:

$$y(t) = y_1(t) - y_2(t) = (1-e^{-t})u(t) - \left[1-e^{-(t-1)}\right]u(t-1)$$



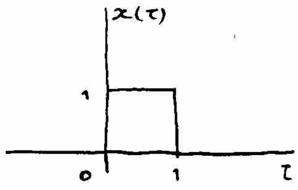
Ένας άλλος τρόπος για την επίλυση της άσκησης είναι και ο εξής:

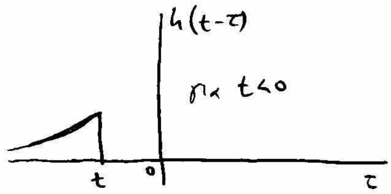
Βήμα 1ο: Γράφουμε τις εξισώσεις των σημάτων (συναρτήσεων)

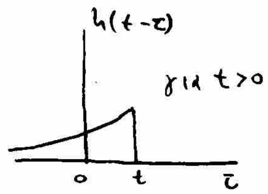
$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{για } 0<t<1 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases} \qquad h(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{για } t>0 \\ 0 & \text{για } t<0 \end{cases}$$

Βήμα 2ο: Γράφουμε και σχεδιάζουμε τις συναρτήσεις $x(\tau)$ και $h(t-\tau)$

$$x(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{για } 0<\tau<1 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases} \qquad h(t-\tau) = \begin{cases} e^{-(t-\tau)} & \text{για } t-\tau>0 \Rightarrow \tau<t \\ 0 & \text{για } t-\tau<0 \Rightarrow \tau>t \end{cases}$$





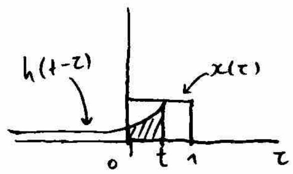


Βήμα 3ο: Υπολογίζουμε το ορισμένο ολοκλήρωμα του γινομένου $x(\tau)\,h(t-\tau)$ για διαφορετικά διαστήματα όπου το γινόμενο αυτό είναι διάφορο του μηδενός.

Περίπτωση 1η: $t<0$

Η $x(\tau)$ είναι μηδέν, οπότε και το γινόμενο $x(\tau)\,h(t-\tau)$ είναι μηδέν.

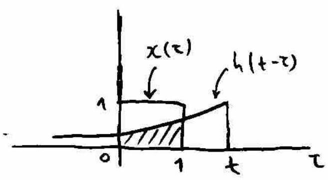
Περίπτωση 2η: $0<t<1$



Στο διάστημα μεταξύ 0 και t, το γινόμενο $x(\tau)\,h(t-\tau)$ είναι διάφορο του μηδενός. Υπάρχει επικάλυψη, όπως φαίνεται από το γραμμοσκιασμένο τμήμα του σχήματος.

$$y_2(t) = \int_0^t e^{-(t-\tau)}d\tau = \int_0^t e^{-t}e^{\tau}d\tau = e^{-t}\int_0^t e^{\tau}d\tau = e^{-t}e^{\tau}\Big|_0^t = e^{-t}(e^{t}-e^{0}) = 1-e^{-t}$$

Περίπτωση 3η: $t>1$

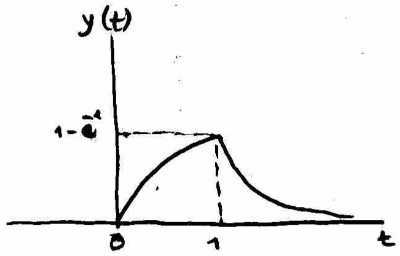


Το γινόμενο $x(\tau)\,h(t-\tau)$ είναι διάφορο του μηδενός στο διάστημα μεταξύ 0 και 1.

$$y_3(t) = \int_0^1 e^{-(t-\tau)}d\tau = \int_0^1 e^{-t}e^{\tau}d\tau = e^{-t}\int_0^1 e^{\tau}d\tau = e^{-t}e^{\tau}\Big|_0^1 = e^{-t}(e^{1}-e^{0}) = e^{1-t}-e^{-t}$$

Τελικά, η έξοδος $y(t)$ που συστήματος θα ισούται με:

$$y(t)=\begin{cases} 0 & \text{για } t<0 \\ 1-e^{-t} & \text{για } 0<t<1 \\ e^{1-t}-e^{-t} & \text{για } t>1 \end{cases}$$



ΑΣΚΗΣΗ (ΣΥΝΕΧΕΙΑ)

Να υπολογιστούν οι συναρτήσεις $y(t)$.

(α) $y(t) = u(t) * u(t)$ (β) $y(t) = e^{-at}u(t) * e^{-bt}u(t)$

(γ) $y(t) = t\,u(t) * u(t)$ (δ) $y(t) = \sin t\, u(t) * u(t)$

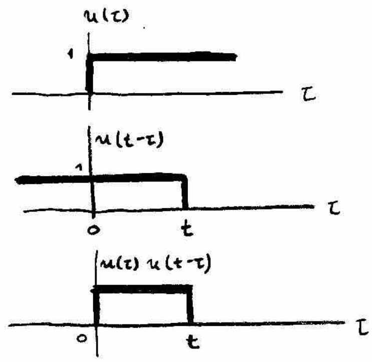
(ε) $y(t) = \cos t\, u(t) * u(t)$

ΛΥΣΗ

(α) $$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\, u(t-\tau)\, d\tau =$$

$$= \int_0^t 1 \cdot d\tau =$$

$$= \tau \Big|_0^t = t - 0 = t$$



→ Βλ. Σημείωση

Άρα $y(t) = \begin{cases} t & \text{για } t \geq 0 \\ 0 & \text{για } t < 0 \end{cases}$

ή $y(t) = t\, u(t)$

(β) $$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha\tau} u(\tau) \cdot e^{-b(t-\tau)} u(t-\tau)\, d\tau =$$

$$= \int_0^t e^{-a\tau} e^{-b(t-\tau)}\, d\tau = e^{-bt} \int_0^t e^{(b-\alpha)\tau}\, d\tau =$$

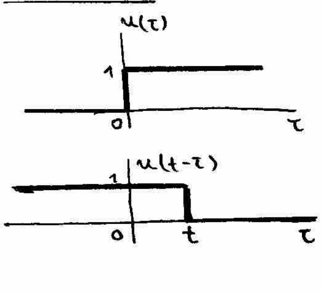
$$= \frac{e^{-bt}}{b-a}\, e^{(b-a)\tau} \Big|_0^t = \frac{e^{-bt}}{b-a}\left[e^{(b-a)t} - 1\right] =$$

$$= \frac{e^{-bt} e^{bt} e^{-\alpha t} - e^{-bt}}{b-\alpha} = \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{b-a}$$

Αφού και οι δύο συναρτήσεις είναι αιτιατές, η συνέλιξή τους θα είναι μηδέν για $t<0$, οπότε η $y(t)$ γράφεται:

$$y(t) = \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{b-a} \cdot u(t)$$

Σημείωση



$$u(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{για } \tau \geq 0 \\ 0 & \text{για } \tau < 0 \end{cases} \Rightarrow u(t-\tau) = \begin{cases} 1 & \text{για } t-\tau \geq 0 \Rightarrow t \geq \tau \\ 0 & \text{για } t-\tau < 0 \Rightarrow t < \tau \end{cases}$$

(γ) $y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} \tau u(\tau)\, u(t-\tau)\,d\tau = \int_{0}^{t} \tau\, d\tau = \frac{1}{2}\tau^2 \Big|_0^t = \frac{t^2}{2}$ για $t \geq 0$

Άρα $y(t) = \frac{t^2}{2} u(t)$

(δ) $y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} \sin\tau\, u(\tau)\, u(t-\tau)\, d\tau = \int_{0}^{t} \sin\tau\, d\tau = -\cos\tau \Big|_0^t = -(\cos t - 1) = 1-\cos t$

Άρα $y(t) = (1-\cos t)\, u(t)$

(ε) $y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} \cos\tau\, u(\tau)\, u(t-\tau)\, d\tau = \int_{0}^{t} \cos\tau\, d\tau = \sin\tau \Big|_0^t = \sin t$

Άρα $y(t) = \sin t\; u(t)$

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί η βηματική απόκριση του ΓΧΑ συστήματος $h(t) = e^{-\alpha|t|}$

ΛΥΣΗ Η $h(t)$ γράφεται ως $h(t) = e^{-\alpha|t|} = e^{-\alpha t}u(t) + e^{\alpha t}u(-t)$ (1)

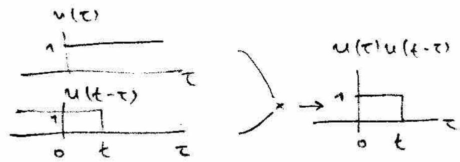
Η βηματική απόκριση $s(t)$ υπολογίζεται ως

$$
\begin{aligned}
s(t) &= h(t) * u(t) = \\
&= \left[e^{-\alpha t}u(t) + e^{\alpha t}u(-t)\right] * u(t) = \\
&= \underbrace{e^{-\alpha t}u(t) * u(t)}_{q_1(t)} + \underbrace{e^{\alpha t}u(-t) * u(t)}_{q_2(t)}
\end{aligned}
\qquad (2)
$$

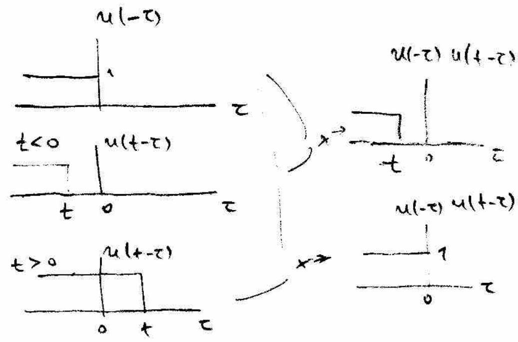
(3)

Αλλά

$$
\begin{aligned}
q_1(t) &= e^{-\alpha t}u(t) * u(t) = \\
&= \int_{\tau=-\infty}^{\infty} e^{-\alpha\tau}\, u(\tau)\cdot u(t-\tau)\, d\tau \\
&= \int_{\tau=0}^{t} e^{-\alpha\tau}\, d\tau = \\
&= \frac{1}{-\alpha} e^{-\alpha\tau}\Big|_0^t = \frac{-1}{\alpha}\left(e^{-\alpha t} - 1\right) = \frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha}
\end{aligned}
\qquad (4)
$$



$$
\begin{aligned}
q_2(t) &= e^{\alpha t}u(-t) * u(t) = \\
&= \int_{\tau=-\infty}^{\infty} e^{\alpha\tau}\, u(-\tau)\, u(t-\tau)\, d\tau
\end{aligned}
$$



Περίπτωση 1η: $t<0$

$$
q_2(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{\alpha\tau}\, d\tau = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha\tau}\Big|_{-\infty}^{t} = \frac{1}{\alpha}\left(e^{\alpha t} - 0\right) = \frac{e^{\alpha t}}{\alpha} \qquad (5\alpha)
$$

Περίπτωση 2η: $t>0$

$$
q_2(t) = \int_{-\infty}^{0} e^{\alpha\tau}\, d\tau = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha\tau}\Big|_{-\infty}^{0} = \frac{1}{\alpha}(1-0) = \frac{1}{\alpha} \qquad (5\beta)
$$

Τελικά

$$
\begin{aligned}
s(t) = q_1(t) + q_2(t) &= \frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha}u(t) + \frac{e^{\alpha t}}{\alpha}u(-t) + \frac{1}{\alpha}u(t) = \\
&= \frac{1}{\alpha}\left[e^{\alpha t}u(-t) + \left(2-e^{-\alpha t}\right)u(t)\right]
\end{aligned}
$$

ΣΥΝΕΛΙΞΗ ΜΕ ΤΗΝ ΚΡΟΥΣΤΙΚΗ ΓΙΑ ΓΧΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Είδαμε ότι κάθε σήμα μπορεί να εκφραστεί ως:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, \delta(t-\tau)\, d\tau \qquad (1)$$

Από τον ορισμό της συνέλιξης έχουμε

$$x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, \delta(t-\tau)\, d\tau = x(t) \qquad (2)$$

Δηλαδή $\quad x(t) * \delta(t) = x(t) \qquad (3)$

Επειδή πρόκειται για ΓΧΑ σύστημα, εύκολα συμπεραίνουμε ότι

$$x(t) * \delta(t-t_0) = x(t-t_0) \qquad (4)$$

Για την ειδική περίπτωση κατά την οποία $x(t) = \delta(t+t_0)$ η (4) είναι:

$$\delta(t+t_0) * \delta(t-t_0) = \delta(t)$$

ΑΣΚΗΣΗ

Να υπολογιστεί η απόκριση μηδενικής κατάστασης του συστήματος $h(t) = -\delta(t) + 2e^{-t}u(t)$ για είσοδο $x(t) = e^{t}u(-t)$. Να σχεδιαστούν οι κυματομορφές εισόδου, εξόδου.

Λύση

$$y(t) = h(t) * x(t) = \left[-\delta(t) + 2e^{-t}u(t)\right] * \left[e^{t}u(-t)\right] =$$

$$= \underbrace{\left[-\delta(t)\right] * \left[e^{t}u(-t)\right]}_{y_1(t)} + \underbrace{\left[2e^{-t}u(t)\right] * \left[e^{t}u(-t)\right]}_{y_2(t)} = y_1(t) + y_2(t)$$

$$y_1(t) = -\delta(t) * e^{t}u(-t) = \langle \text{λόγω της σχέσης (3)} \rangle = -e^{t}u(-t)$$

Από τον πίνακα συνελίξεων (βλ. βιβλίο Lathi, πίνακα 2.1) έχουμε:

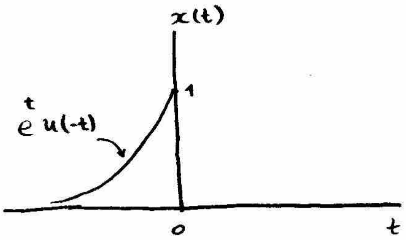
$$e^{At}u(t) * e^{Bt}u(-t) = \frac{e^{At}u(t) + e^{Bt}u(-t)}{B-A} \quad \text{όπου } \operatorname{Re} B > \operatorname{Re} A$$

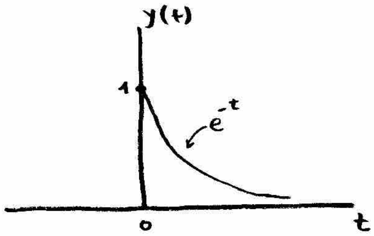
Για $A=-1$, $B=1$ προκύπτει η συνέλιξη της $y_2(t)$.

$$y_2(t) = 2\frac{e^{-t}u(t) + e^{t}u(-t)}{1-(-1)} = e^{-t}u(t) + e^{t}u(-t)$$

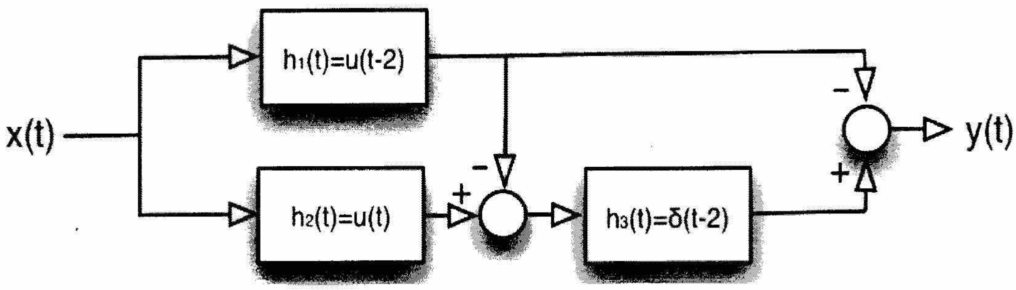
Τελικά

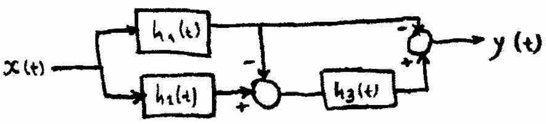
$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = \cancel{-e^{t}u(-t)} + e^{-t}u(t) + \cancel{e^{t}u(-t)} = e^{-t}u(t)$$



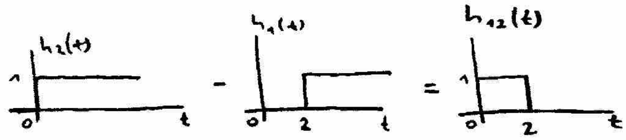


Να υπολογίσετε και να σχεδιάσετε την **έξοδο y(t)** του συστήματος, όταν η είσοδος είναι **x(t)=(-1)δ(t-3).**

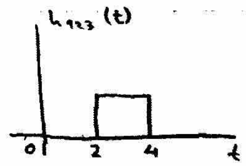




$$h_{12}(t) = h_2(t) - h_1(t) = u(t) - u(t-2)$$

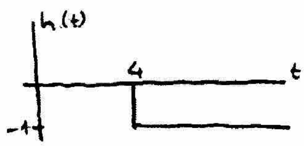


$$h_{123}(t) = h_{12}(t) * h_3(t) = h_{12}(t) * \delta(t-2) = h_{12}(t-2) = u(t-2) - u(t-4)$$



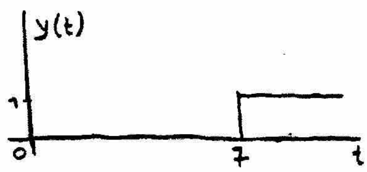
Τελικά:

$$h(t) = h_{123}(t) - h_1(t) = \underbrace{[u(t-2) - u(t-4)]}_{h_{123}(t)} - \underbrace{u(t-2)}_{h_1(t)} = -u(t-4)$$



Η έξοδος y(t) ισούται με:

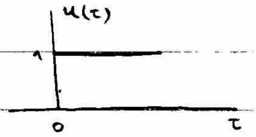
$$y(t) = h(t) * x(t) = h(t) * [-\delta(t-3)] = [-u(t-4)] * [-\delta(t-3)] = u(t-7)$$



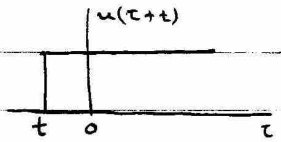
ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί η συνέλιξη της μοναδιαίας βηματικής συνάρτησης $u(t)$ με ένα οποιοδήποτε σήμα συνεχούς χρόνου $x(t)$.

ΛΥΣΗ

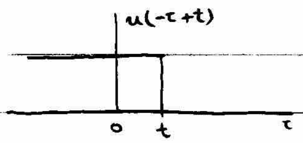
$$y(t) = x(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, u(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\cdot(1)\, d\tau + \int_{t}^{\infty} x(\tau)\cdot(0)\, d\tau = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau$$



$$u(\tau) = \begin{cases} 1 & \tau > 0 \\ 0 & \tau < 0 \end{cases}$$



Θέτω όπου τ το $t-\tau$ και έχω:



$$u(t-\tau) = \begin{cases} 1 & t-\tau > 0 \rightarrow t > \tau \\ 0 & t-\tau < 0 \rightarrow t < \tau \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι η συνέλιξη του σήματος $x(t)$ με τη μοναδιαία βηματική συνάρτηση $u(t)$ έχει ως αποτέλεσμα την ολοκλήρωση του σήματος σε όλες τις προγενέστερες τιμές μέχρι και την τρέχουσα. Πρόκειται δηλαδή για έναν ολοκληρωτή.

ΑΣΚΗΣΗ (ΣΥΝΕΛΙΞΗ)

Να υπολογιστούν οι συνελίξεις:

(α) $y(t) = e^{At}u(t) * e^{Bt}u(t)$ για $A \neq B$

(β) $y(t) = e^{At}u(t) * e^{At}u(t)$

(γ) $y(t) = te^{At}u(t) * e^{At}u(t)$

ΛΥΣΗ

(α) $$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{A\tau}u(\tau)\, e^{B(t-\tau)}u(t-\tau)\, d\tau =$$

$$= \int_0^t e^{A\tau} e^{B(t-\tau)}\, d\tau = e^{Bt}\int_0^t e^{(A-B)\tau}\, d\tau =$$

$$= \frac{e^{Bt}}{A-B}\, e^{(A-B)\tau}\Big|_0^t = \frac{e^{Bt}}{A-B}\left[e^{(A-B)t} - e^{0}\right] =$$

$$= \frac{e^{Bt}e^{At}e^{-Bt} - e^{Bt}}{A-B} = \frac{e^{At} - e^{Bt}}{A-B} \quad \text{ή} \quad y(t) = \left(\frac{e^{At} - e^{Bt}}{A-B}\right)u(t) \quad \text{για } A \neq B$$

(β) $$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{A\tau}u(\tau)\, e^{A(t-\tau)}u(t-\tau)\, d\tau =$$

$$= \int_0^t e^{A\tau} e^{At} e^{-A\tau}\, d\tau = e^{At}\int_0^t d\tau = e^{At}\,\tau\Big|_0^t = te^{At} \quad \text{ή} \quad y(t) = te^{At}u(t)$$

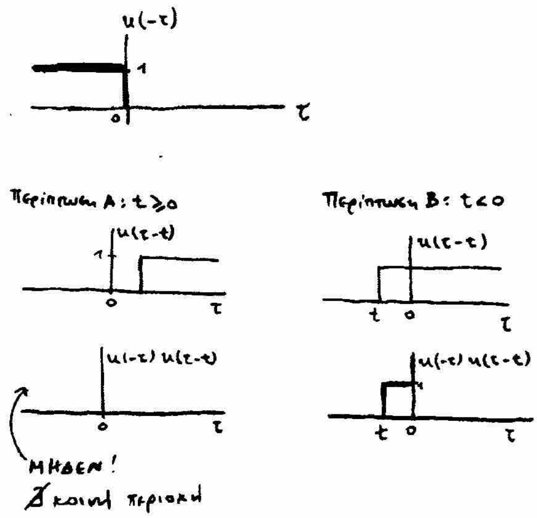
(γ) $$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tau e^{A\tau}u(\tau)\, e^{A(t-\tau)}u(t-\tau)\, d\tau =$$

$$= \int_0^t \tau e^{A\tau} e^{At} e^{-A\tau}\, d\tau = e^{At}\int_0^t \tau\, d\tau = e^{At}\frac{\tau^2}{2}\Big|_0^t = \frac{1}{2}t^2 e^{At} \quad \text{ή} \quad y(t) = \frac{1}{2}t^2 e^{At}u(t)$$

ΑΣΚΗΣΗ (ΣΥΝΕΧΕΙΑ)

Να υπολογιστούν οι συναρτήσεις y(t).

(α) $y(t) = e^{At}u(-t) * e^{Bt}u(-t)$



ΛΥΣΗ

(α) $$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{A\tau} u(-\tau)\, e^{B(t-\tau)} \underbrace{u(-(t-\tau))}_{u(\tau-t)}\, d\tau$$

Περίπτωση Α: $t \geq 0$

$y(t) = 0$

Περίπτωση Β: $t < 0$

$$y(t) = \int_{t}^{0} e^{A\tau} e^{B(t-\tau)}\, d\tau =$$

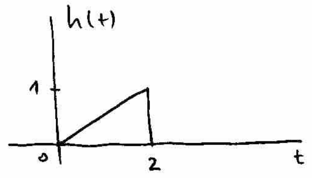
$$= e^{Bt}\int e^{(A-B)\tau}\, d\tau = \frac{e^{Bt}}{A-B}\, e^{(A-B)\tau}\Big|_{t}^{0} =$$

$$= \frac{e^{Bt}}{A-B}\left[e^{0} - e^{(A-B)t}\right] =$$

$$= \frac{e^{Bt} - e^{Bt}e^{At}e^{-Bt}}{A-B} = \frac{e^{Bt} - e^{At}}{A-B}$$

Τελικά, $$y(t) = \frac{e^{At} - e^{Bt}}{B-A}\, u(-t)$$

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί η έξοδος ενός ΓΧΑ συστήματος για είσοδο $x(t)=h(t)$, όπου $h(t)$ αυτή του σχήματος.



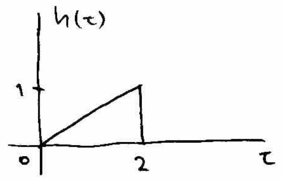
ΛΥΣΗ Η έξοδος $y(t)$ του συστήματος ισούται με τη συνέλιξη των $x(t)$ και $h(t)$.

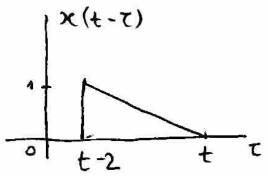
$$y(t)=h(t)*x(t)=\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\,x(t-\tau)\,d\tau$$

Βήμα 1ο: Γράφουμε τις εξισώσεις των $x(t)$ και $h(t)$

$$x(t)=h(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}t & \text{για } 0\le t\le 2\\ 0 & \text{αλλού}\end{cases}$$

Βήμα 2ο: Γράφουμε τις εξισώσεις των $h(\tau)$ και $x(t-\tau)$ και σχεδιάζουμε τις γραφικές τους παραστάσεις.



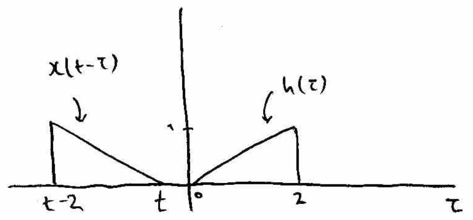


$$h(\tau)=\begin{cases}\frac{1}{2}\tau & 0\le t\le 2\\ 0 & \text{αλλού}\end{cases}$$

$$x(t-\tau)=\begin{cases}\frac{1}{2}(t-\tau) & 0\le t-\tau\le 2 \Rightarrow t-2\le \tau\le t\\ 0 & \text{αλλού}\end{cases}$$

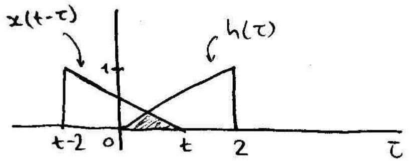
Βήμα 3ο: Υπολογίζουμε το ορισμένο ολοκλήρωμα (για τα διαφορετικά διαστήματα που το γινόμενο $h(\tau)\,x(t-\tau)$ είναι διάφορο του μηδενός).

Περίπτωση 1η: $t<0$



Στην περίπτωση αυτή δεν υπάρχει επικάλυψη των $x(t-\tau)$ και $h(\tau)$, οπότε το γινόμενό τους είναι μηδέν. Συνεπώς και $y(t)=0$

Περίπτωση 2η: $0 \le t < 2$



$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot x(t-\tau)\, d\tau + \int_{0}^{t} h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau + \int_{t}^{+\infty} h(\tau) \cdot 0\, d\tau =$$

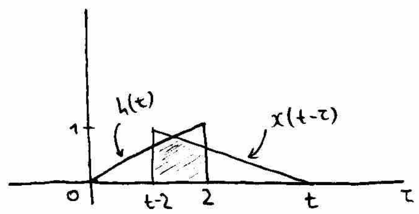
$$= 0 + \int_{0}^{t} \frac{1}{2}\tau \cdot \frac{1}{2}(t-\tau)\, d\tau + 0 =$$

$$= \frac{1}{4}\int_{0}^{t} (t\tau - \tau^2)\, d\tau = \frac{1}{4}\left[t\,\frac{\tau^2}{2}\Big|_0^t - \frac{\tau^3}{3}\Big|_0^t \right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{t}{2}t^2 - \frac{t^3}{3} \right] = \frac{1}{4}\left(\frac{t^3}{2} - \frac{t^3}{3} \right) =$$

$$= \frac{1}{24}t^3 \quad \text{για} \quad 0 \le t < 2$$

Περίπτωση 3η: $0 \le t-2 < 2 \Rightarrow 2 \le t < 4$



$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{t-2} h(\tau) \cdot 0 \cdot d\tau + \int_{t-2}^{2} h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau + \int_{2}^{\infty} 0 \cdot x(t-\tau)\, d\tau =$$

$$= 0 + \int_{t-2}^{2} \frac{1}{2}\tau\, \frac{1}{2}(t-\tau)\, d\tau + 0 =$$

$$= \frac{1}{4}\int_{t-2}^{2} (t\tau - \tau^2)\,d\tau = \frac{1}{4}\left[t\,\frac{\tau^2}{2}\Big|_{t-2}^{2} - \frac{\tau^3}{3}\Big|_{t-2}^{2} \right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{t}{2}\left[2^2 - (t-2)^2\right] - \frac{1}{3}\left[2^3 - (t-2)^3\right] \right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{t}{2}\left(\cancel{4} - t^2 + 4t - \cancel{4}\right) - \frac{1}{3}\left[8 - \left(t^3 - 3t^2 2 + 3t\,2^2 - 2^3\right)\right] \right] =$$

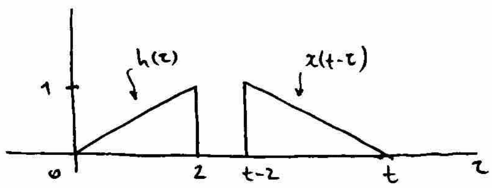
$$= \frac{1}{4}\left[-\frac{t^3}{2} + 2t^2 - \frac{1}{3}\left(8 - t^3 + 6t^2 - 12t + 8\right) \right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left[-\frac{t^3}{2} \cancel{+2t^2} - \frac{16}{3} + \frac{t^3}{3} \cancel{-2t^2} + 4t \right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left[-\frac{t^3}{6} + 4t - \frac{16}{3} \right] =$$

$$= -\frac{1}{24}t^3 + t - \frac{4}{3} \qquad \text{για} \qquad 2 \le t < 4$$

Περίπτωση 4η: $t-2 \geq 2 \Rightarrow t \geq 4$

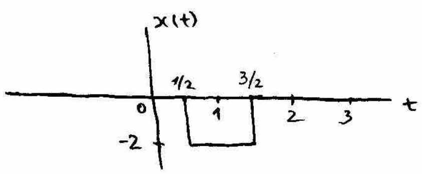


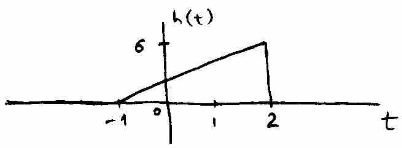
Στο διάστημα αυτό δεν υπάρχει επικάλυψη των $h(\tau)$ και $x(t-\tau)$, οπότε το γινόμενό τους είναι μηδέν και άρα $y(t)=0$.

Τελικά η έξοδος $y(t) = x(t) * h(t)$ θα ισούται με:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \begin{cases} \frac{1}{24}t^3 & 0 \le t < 2 \\ -\frac{1}{24}t^3 + t - \frac{4}{3} & 2 \le t < 4 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί η συνέλιξη των σημάτων $x(t)$, $h(t)$.





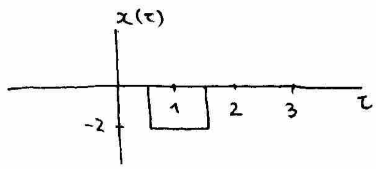
ΛΥΣΗ

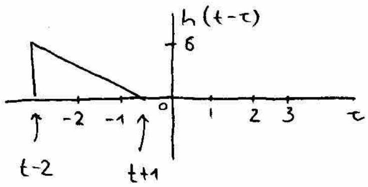
$$x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

Βήμα 1ο: Γράφουμε τις εξισώσεις των σημάτων (συναρτήσεων).

$$x(t) = \begin{cases} -2 & \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{2} \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases} \qquad h(t) = \begin{cases} 2t+2 & -1 \leq t \leq 2 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

Βήμα 2ο: Γράφουμε τις εξισώσεις $x(\tau)$ και $h(t-\tau)$ και σχεδιάζουμε τις γραφικές παραστάσεις τους.

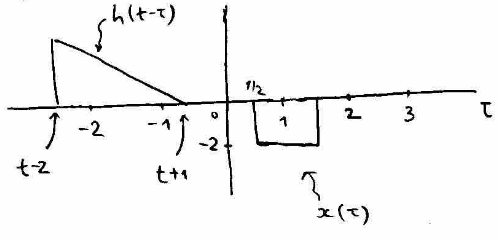




$$x(\tau) = \begin{cases} -2 & \frac{1}{2} \leq \tau \leq \frac{3}{2} \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases} \qquad h(t-\tau) = \begin{cases} 2(t-\tau)+2 & -1 \leq t-\tau \leq 2 \Rightarrow t-2 \leq \tau \leq t+1 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

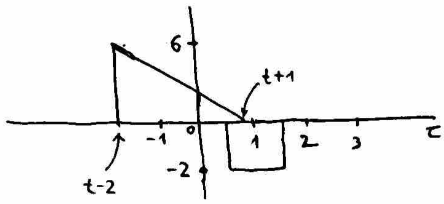
Βήμα 3ο: Υπολογίζουμε το ορισμένο ολοκλήρωμα (για τα διαφορετικά διαστήματα που το γινόμενο $x(\tau)\cdot h(t-\tau)$ είναι διάφορο του μηδενός). Με άλλα λόγια, ολισθαίνουμε την $h(t-\tau)$ από το $-\infty$ έως το $+\infty$ (δηλαδή για διαφορετικά t) και υπολογίζουμε το εμβαδό του κοινού τμήματος των $x(\tau)$ και $h(t-\tau)$.

Περίπτωση 1η: $t+1 < \frac{1}{2} \Rightarrow t < -\frac{1}{2}$



Στην περίπτωση αυτή δεν υπάρχει επικάλυψη, οπότε το γινόμενο είναι μηδέν και άρα η συνέλιξη είναι μηδέν.

Περίπτωση 2η: $\frac{1}{2} \le t+1 < \frac{3}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} \le t < \frac{1}{2}$



$$x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{1/2} 0 \cdot h(t-\tau)\, d\tau + \int_{1/2}^{t+1} (-2) \cdot [2(t-\tau)+2]\, d\tau +$$

$$+ \int_{t+1}^{+\infty} x(\tau) \cdot 0\, d\tau = 0 + \int_{1/2}^{t+1} (-2) \cdot 2\,[t-\tau+1]\, d\tau + 0 =$$

$$= -4 \int_{1/2}^{t+1} [(t+1)-\tau]\, d\tau = -4 \int_{1/2}^{t+1} (t+1)\, d\tau + 4 \int_{1/2}^{t+1} \tau\, d\tau =$$

$$= -4(t+1)\,\tau \Big|_{1/2}^{t+1} + 4\, \frac{\tau^2}{2} \Big|_{1/2}^{t+1} =$$

$$= -4(t+1)\left(t+1-\frac{1}{2}\right) + 2\left[(t+1)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] =$$

$$= -4(t+1)\left(t+\frac{1}{2}\right) + 2\left(t^2+2t+1-\frac{1}{4}\right) =$$

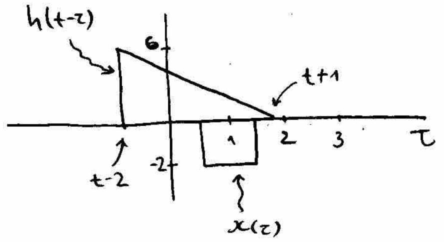
$$= -4\left(t^2+\frac{1}{2}t+t+\frac{1}{2}\right) + 2\left(t^2+2t+\frac{3}{4}\right) =$$

$$= -4t^2 - 2t - \cancel{4t} - 2 + 2t^2 + \cancel{4t} + \frac{3}{2} =$$

$$= -2t^2 - 2t - \frac{1}{2} \qquad \text{για } -\frac{1}{2} \le t < \frac{1}{2}$$

Περίπτωση 3η:

$$\left.\begin{array}{l} t+1 \geq \frac{3}{2} \Rightarrow t \geq \frac{1}{2} \\ t-2 < \frac{1}{2} \Rightarrow t < \frac{5}{2} \end{array}\right\} \quad \frac{1}{2} \leq t < \frac{5}{2}$$



$$x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{1/2} 0 \cdot h(t-\tau)\, d\tau + \int_{1/2}^{3/2} (-2)\, h(t-\tau)\, d\tau +$$

$$+ \int_{3/2}^{+\infty} 0 \; h(t-\tau)\, d\tau = 0 + \int_{1/2}^{3/2} (-2) \left[2(t-\tau) + 2\right] d\tau + 0 =$$

$$= \int_{1/2}^{3/2} (-4) \left[(t+1) - \tau\right] d\tau =$$

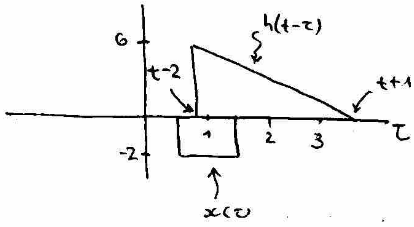
$$= -4 \int_{1/2}^{3/2} (t+1)\, d\tau + 4 \int_{1/2}^{3/2} \tau\, d\tau =$$

$$= -4 (t+1)\, \tau \Big|_{1/2}^{3/2} + 4 \, \frac{\tau^2}{2} \Big|_{1/2}^{3/2} =$$

$$= -4 (t+1) \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right) + 2 \left(\frac{9}{4} - \frac{1}{4}\right) =$$

$$= -4t - \cancel{4} + \cancel{4} = -4t \quad \text{για} \quad \frac{1}{2} \leq t < \frac{5}{2}$$

Περίπτωση 4η: $\frac{1}{2} \le t-2 < \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{5}{2} \le t < \frac{7}{2}$



$$x(t)*h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{t-2} x(\tau)\cdot 0\,d\tau + \int_{t-2}^{3/2} (-2)\,h(t-\tau)\,d\tau + \int_{3/2}^{+\infty} 0\cdot h(t-\tau)\,d\tau =$$

$$= 0 + \int_{t-2}^{3/2} (-2)\left[2(t-\tau)+2\right] d\tau + 0 =$$

$$= -4\int_{t-2}^{3/2} \left[(t+1)-\tau\right] d\tau = -4\int_{t-2}^{3/2} (t+1)\,d\tau + 4\int_{t-2}^{3/2} \tau\,d\tau =$$

$$= -4(t+1)\,\tau\Big|_{t-2}^{3/2} + 4\,\frac{\tau^2}{2}\Big|_{t-2}^{3/2} =$$

$$= -4(t+1)\left[\frac{3}{2}-(t-2)\right] + 2\left[\left(\frac{3}{2}\right)^2 - (t-2)^2\right] =$$

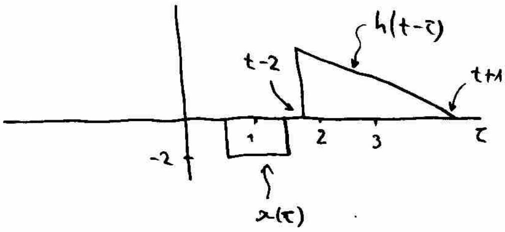
$$= -4(t+1)\left(\frac{3}{2}-t+2\right) + 2\left[\frac{9}{4} - \left(t^2-4t+4\right)\right] =$$

$$= -4(t+1)\left(\frac{7}{2}-t\right) + \frac{9}{2} - 2t^2 - 8t - 8 =$$

$$= 4t^2 + 10t - 14 - 2t^2 - 8t - \frac{7}{2} =$$

$$= 2t^2 - 2t - \frac{35}{2} \qquad \text{για} \quad \frac{5}{2} \le t < \frac{7}{2}$$

Περίπτωση 5η: $t-2 \geqslant \frac{3}{2} \Rightarrow t \geqslant \frac{7}{2}$



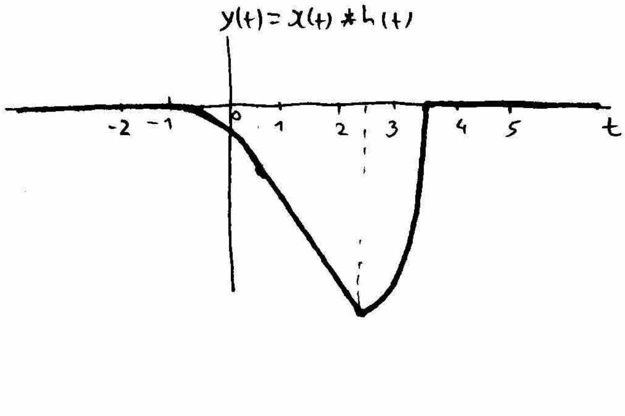
Στην περιοχή αυτή οι $x(\tau)$ και $h(t-\tau)$ δεν έχουν κανένα κοινό σημείο και συνεπώς το γινόμενό τους είναι μηδέν. Άρα και η συνέλιξη των $x(t)$ και $h(t)$ είναι μηδέν, δηλαδή

$$x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = 0$$

Τελικά η συνέλιξη $y(t) = x(t) * h(t)$ ισούται με:

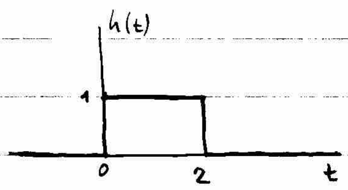
$$y(t) = x(t) * h(t) = \begin{cases} -2t^2 - 2t - \frac{1}{2} & \text{για} \quad -\frac{1}{2} \leq t < \frac{1}{2} \\ -4t & \text{για} \quad \frac{1}{2} \leq t < \frac{5}{2} \\ 2t^2 - 2t - \frac{35}{2} & \text{για} \quad \frac{5}{2} \leq t < \frac{7}{2} \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

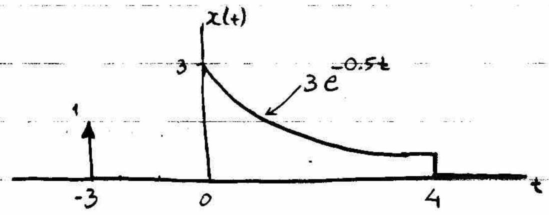
Η γραφική παράσταση της $y(t) = x(t) * h(t)$ είναι:



ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί η έξοδος $y(t)$ ενός ΓΧΑ συστήματος του οποίου η κρουστική απόκριση είναι $h(t) = u(t) - u(t-2)$ όταν η είσοδος ισούται με $x(t) = \delta(t+3) + 3e^{-0.5t}[u(t) - u(t-4)]$.

Λύση



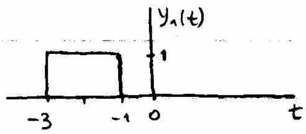


$$x(t) = \underbrace{\delta(t+3)}_{x_1(t)} + \underbrace{3e^{-0.5t}[u(t) - u(t-4)]}_{x_2(t)}$$

$$y(t) = x(t) * h(t) = [x_1(t) + x_2(t)] * h(t) = \underbrace{x_1(t) * h(t)}_{y_1(t)} + \underbrace{x_2(t) * h(t)}_{y_2(t)}$$

$$y_1(t) = x_1(t) * h(t) = \delta(t+3) * h(t) = h(t+3) = u(t+3) - u(t+1)$$

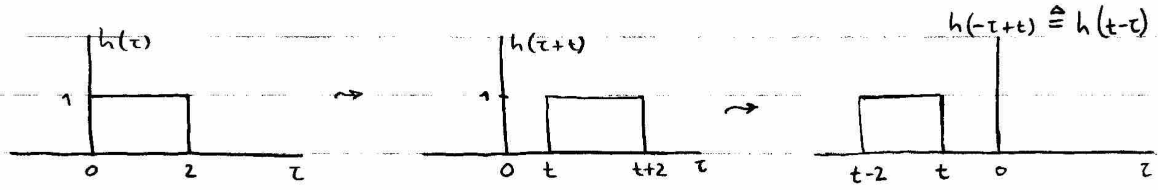
Η γραφική παράσταση της $y_1(t)$ είναι:



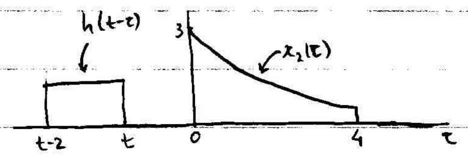
Υπολογισμός $y_2(t)$:

$$y_2(t) = x_2(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_2(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

Σχεδιάζουμε το σήμα $h(t-\tau)$:



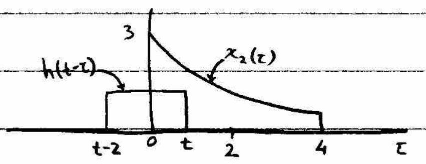
① $t < 0$



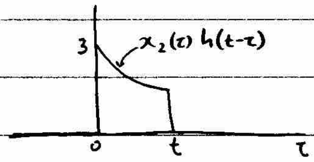
$$y_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_2(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} (0)\, h(t-\tau)\, d\tau + \int_{0}^{\infty} x_2(\tau)(0)\, d\tau = 0$$

② $0 \leq t \leq 2$



$\Rightarrow$

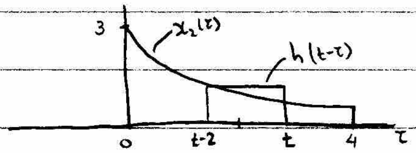


$$y_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_2(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{0} (0)\, h(t-\tau)\, d\tau + \int_{0}^{t} 3 e^{-0.5\tau} d\tau + \int_{t}^{\infty} x_2(\tau)\,(0)\, d\tau =$$

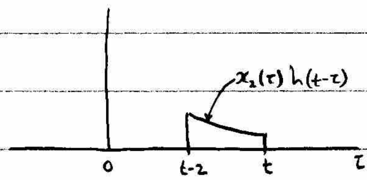
$$= 0 + \frac{3}{-0.5} e^{-0.5\tau}\Big|_{0}^{t} + 0 =$$

$$= -6\left(e^{-0.5t} - 1\right) = 6\left(1 - e^{-0.5t}\right) \quad \text{για} \quad 0 \leq t \leq 2$$

③ $2 < t \leq 4$



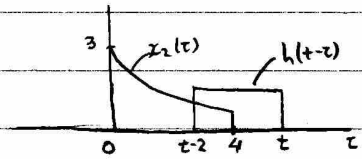
$\Rightarrow$



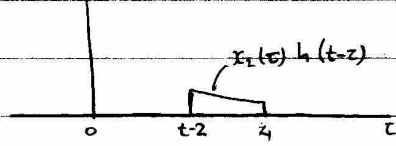
$$y_2(t) = \int_{t-2}^{t} 3 e^{-0.5\tau} d\tau = \frac{3}{-0.5} e^{-0.5\tau}\Big|_{t-2}^{t} = -6\left(e^{-0.5t} - e^{-0.5(t-2)}\right) =$$

$$= 6 e^{-0.5t}\left(e^{1} - 1\right) = 10.31\, e^{-0.5t} \quad \text{για} \quad 2 < t \leq 4$$

④ $4 < t \leq 6$



$\Rightarrow$

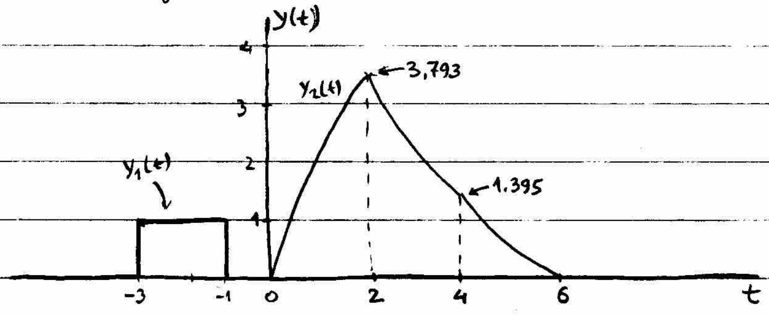


$$y_2(t) = \int_{t-2}^{4} 3 e^{-0.5\tau} d\tau = \frac{6}{-0.5} e^{-0.5\tau}\Big|_{t-2}^{4} = 6\left[e^{-0.5(t-2)} - e^{-2}\right] \quad \text{για} \quad 4 < t \leq 6$$

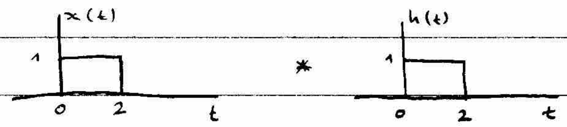
⑤ $t > 6$

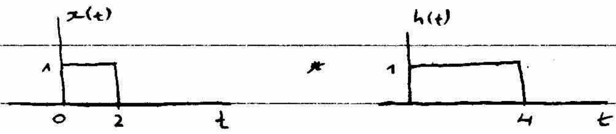
$$y_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_2(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{4} x_2(\tau)\,(0)\, d\tau + \int_{4}^{\infty} (0)\, h(t-\tau)\, d\tau = 0 \qquad \text{για } t>6$$

Τελικά η γραφική παράσταση της εξόδου $y(t)$ είναι:



ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί η συνέλιξη των σημάτων

α. 

b. 

γ. 

ΛΥΣΗ α. $x(t)=u(t)-u(t-2)$ $\qquad h(t)=u(t)-u(t-2)$

$$y(t)=x(t)*h(t)=[u(t)-u(t-2)]*[u(t)-u(t-2)]=$$

$$=u(t)*u(t)-\underbrace{u(t)*u(t-2)}-\underbrace{u(t-2)*u(t)}+u(t-2)*u(t-2)=$$

$$=\underbrace{u(t)*u(t)}_{y_1(t)}-2\,\underbrace{u(t)*u(t-2)}_{y_2(t)}+\underbrace{u(t-2)*u(t-2)}_{y_3(t)}=y_1(t)-2y_2(t)+y_3(t)$$

Παρατηρούμε ότι τα σήματα $y_2(t)$ και $y_3(t)$ είναι μετατοπισμένα (ολισθημένα) αντίστοιχα του $y_1(t)$, ήτοι $y_2(t)=y_1(t-2)$ και $y_3(t)=y_1(t-4)$

Γνωρίζουμε ότι $y_1(t)=t\,u(t)$, οπότε το σήμα $y(t)$ υπολογίζεται ως:

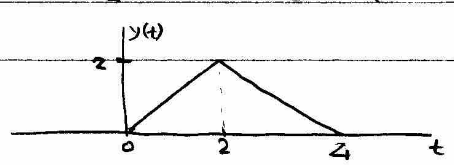
$$y(t)=y_1(t)-2y_1(t-2)+y_1(t-4)=$$

$$=t\,u(t)-2(t-2)u(t-2)+(t-4)u(t-4)=$$

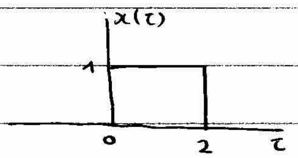
$$=t\,u(t)-2t\,u(t-2)+4u(t-2)+t\,u(t-4)-4u(t-4)=$$

$$=\underbrace{t\,u(t)-t\,u(t-2)}_{t[u(t)-u(t-2)]}\underbrace{\underbrace{-t\,u(t-2)+4u(t-2)}_{(-t+4)u(t-2)}\underbrace{+t\,u(t-4)-4u(t-4)}_{-(-t+4)u(t-4)}}_{(-t+4)[u(t-2)-u(t-4)]}=$$

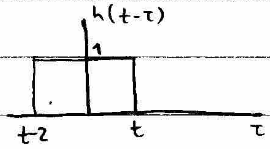
$$=t[u(t)-u(t-2)]+(-t+4)[u(t-2)-u(t-4)]$$



Η άσκηση αυτή θα μπορούσε να επιλυθεί και γραφικά ως εξής:

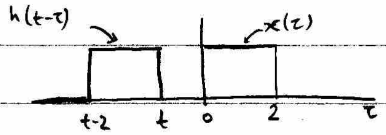


$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$



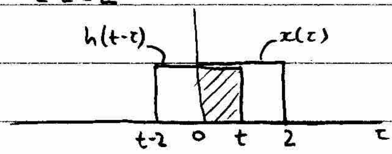
Καθώς το σήμα $h(t-\tau)$ διατρέχει όλον τον άξονα των χρόνων από $-\infty$ έως $+\infty$, διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

① $t<0$



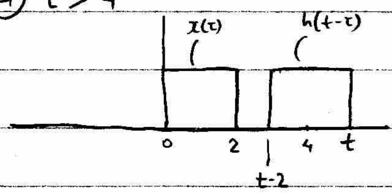
$x(\tau)\, h(t-\tau) = 0 \rightarrow y(t)=0$

② $0 \leq t \leq 2$



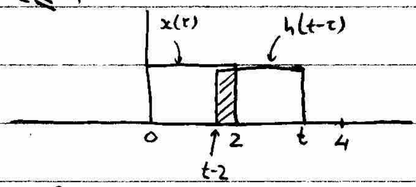
$y(t) = \int_0^t 1\, d\tau = \tau \Big|_0^t = t$ για $0 \leq t \leq 2$

④ $t>4$



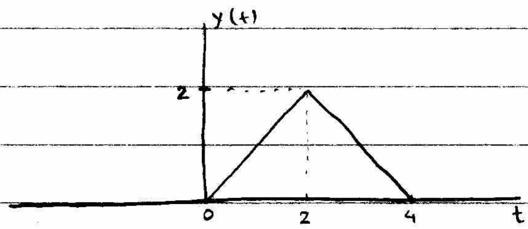
$x(\tau)\, h(t-\tau) = 0 \rightarrow y(t)=0$

③ $2<t\leq 4$



$y(t) = \int_{t-2}^{2} 1\, d\tau = \tau \Big|_{t-2}^{2} = 2-(t-2) = -t+4$

Τελικά $y(t) = \begin{cases} t & \text{για } 0 \leq t \leq 2 \\ -t+4 & \text{για } 2<t\leq 4 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$



β. $x(t) = u(t) - u(t-2) \qquad h(t) = u(t) - u(t-4)$

$$y(t) = x(t) * h(t) = [u(t) - u(t-2)] * [u(t) - u(t-4)] =$$

$$= \underbrace{u(t) * u(t)}_{y_1(t)} - \underbrace{u(t-2) * u(t)}_{y_1(t-2)} - \underbrace{u(t) * u(t-4)}_{y_1(t-4)} + \underbrace{u(t-2) * u(t-4)}_{y_1(t-6)} =$$

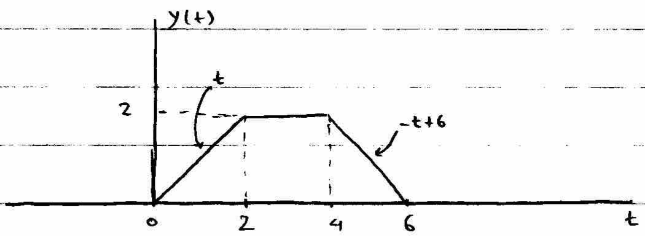
$$= t\,u(t) - (t-2)\,u(t-2) - (t-4)\,u(t-4) + (t-6)\,u(t-6) =$$

$$= \underbrace{t\,u(t) - t\,u(t-2)}_{t[u(t)-u(t-2)]} + 2u(t-2) - t\,u(t-4) + \underset{\substack{\uparrow \\ 6-2}}{4}u(t-4) + t\,u(t-6) - 6u(t-6) =$$

$$= t[u(t) - u(t-2)] + \underbrace{2u(t-2) - 2u(t-4)}_{2[u(t-2)-u(t-4)]} \underbrace{\underbrace{- t\,u(t-4) + 6u(t-4)}_{(-t+6)u(t-4)} \underbrace{+ t\,u(t-6) - 6u(t-6)}_{-(-t+6)u(t-6)}}_{(-t+6)[u(t-4)-u(t-6)]} =$$

$$= t[u(t) - u(t-2)] + 2[u(t-2) - u(t-4)] + (-t+6)[u(t-4) - u(t-6)]$$

Η γραφική παράσταση του $y(t)$ είναι:



γ. $x(t) = u(t) - u(t-2)$ $\qquad h(t) = u(t-1) - u(t-4)$

$$y(t) = x(t) * h(t) = [u(t) - u(t-2)] * [u(t-1) - u(t-4)] =$$

$$= \underbrace{u(t) * u(t-1)}_{y_1(t-1)} - \underbrace{u(t) * u(t-4)}_{y_1(t-4)} - \underbrace{u(t-2) * u(t-1)}_{y_1(t-3)} + \underbrace{u(t-2) * u(t-4)}_{y_1(t-6)} =$$

όπου $y_1(t) = u(t) * u(t) = t\,u(t)$

Άρα έχουμε:

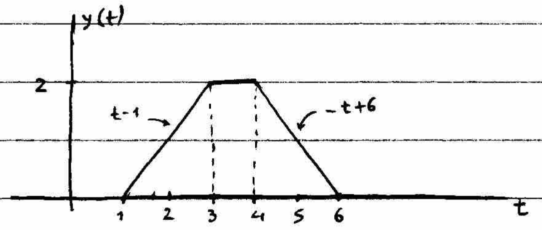
$$y(t) = (t-1)\,u(t-1) - (t-4)\,u(t-4) - (t-3)\,u(t-3) + (t-6)\,u(t-6) =$$

$$= (t-1)\,u(t-1) - (t-6+2)\,u(t-4) - (t-1-2)\,u(t-3) + (t-6)\,u(t-6) =$$

$$= (t-1)\,u(t-1) - (t-6)\,u(t-4) - 2\,u(t-4) - (t-1)\,u(t-3) + 2\,u(t-3) + (t-6)\,u(t-6) =$$

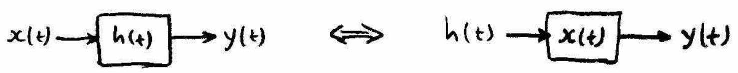
$$= (t-1)[u(t-1) - u(t-3)] + 2[u(t-3) - u(t-4)] + (-t+6)[u(t-4) - u(t-6)]$$

Η γραφική παράσταση του σήματος $y(t)$ είναι:

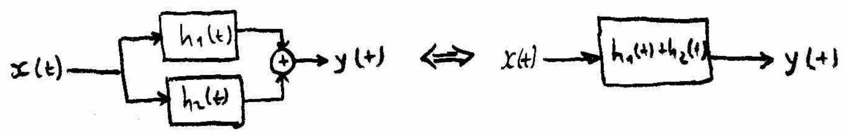


ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ Γ.Χ.Α. ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

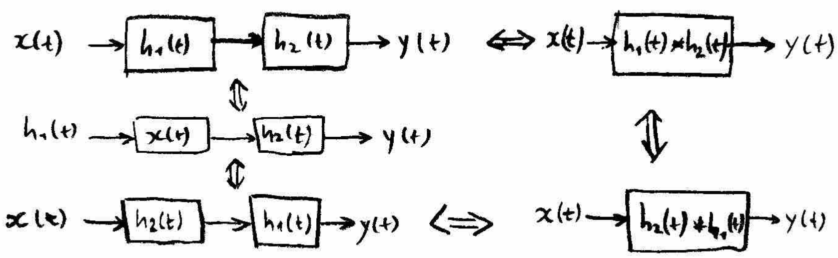
ΑΝΤΙΜΕΤΑΘΕΤΙΚΗ: $x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$



ΕΠΙΜΕΡΙΣΤΙΚΗ: $x(t) * [h_1(t) + h_2(t)] = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t)$



ΠΡΟΣΕΤΑΙΡΙΣΤΙΚΗ: $x(t) * [h_1(t) * h_2(t)] = [x(t) * h_1(t)] * h_2(t)$



ΑΙΤΙΑΤΟΤΗΤΑ: Ένα ΓΧΑ σύστημα είναι αιτιατό εάν $h(t) = 0$ για $t < 0$.
Στην περίπτωση αυτή το ολοκλήρωμα της συνέλιξης είναι:

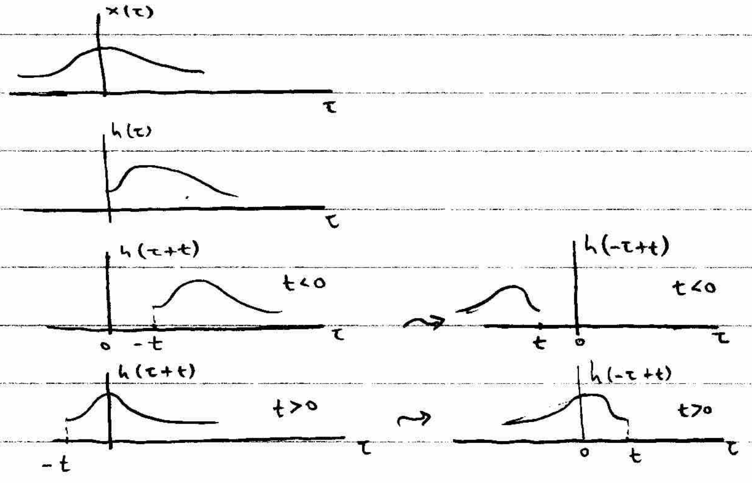
$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = \int_{0}^{\infty} h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau$$

ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ: Ένα ΓΧΑ σύστημα είναι ευσταθές εάν κάθε φραγμένη είσοδος παράγει μία φραγμένη έξοδο. Αποδεικνύεται ότι για να είναι ένα ΓΧΑ σύστημα ευσταθές πρέπει η κρουστική του απόκριση να είναι ολοκληρώσιμη κατ' απόλυτη τιμή, δηλαδή:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|\, d\tau < \infty$$

Επεξηγήσεις για αιτιατότητα

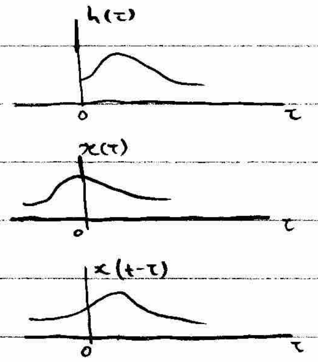
Ένα ΓΧΑ είναι αιτιατό όταν $h(t)=0$ για $t<0$.



$$y(t)=x(t)*h(t)=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau \quad \text{γενικά}$$

$$=\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau \quad \text{για αιτιατό}$$



$$y(t)=h(t)*x(t)=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\,x(t-\tau)\,d\tau \quad \text{γενικά}$$

$$=\int_{0}^{\infty} h(\tau)\,x(t-\tau)\,d\tau \quad \text{αιτιατό}$$

Επεξηγήσεις για ευστάθεια

Όταν η είσοδος σε ένα ΓΧΑ είναι φραγμένη, συμβαίνει ότι $|x(t)|<B \ \forall t$.

Για την έξοδο $y(t)$ έχουμε:

$$|y(t)|=\left|\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\,x(t-\tau)\,d\tau\right| \le \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|\,|x(t-\tau)|\,d\tau$$

$$\le B\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|\,d\tau$$

Άρα η έξοδος $y(t)$ είναι φραγμένη, δηλ. το σύστημα είναι ευσταθές, όταν η κρουστική απόκριση είναι ολοκληρώσιμη κατ' απόλυτη τιμή:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|\,d\tau<\infty$$

ΑΣΚΗΣΗ Να εξεταστούν ως προς την ευστάθεια τα ΓΧΑ συστήματα των οποίων οι κρουστικές αποκρίσεις είναι: $h_1(t)=e^{-(1-2j)t}u(t)$, $h_2(t)=e^{-t}\cos(2t)\,u(t)$

ΛΥΣΗ Για να είναι ένα ΓΧΑ σύστημα συνεχούς χρόνου, ευσταθές, πρέπει να ισχύει: $\int_{-\infty}^{\infty}|h(t)|\,dt<\infty$

Για το σύστημα με κρουστική $h_1(t)$ έχουμε:

$$\int_{-\infty}^{\infty}|h_1(t)|\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}\left|e^{-(1-2j)t}u(t)\right|dt=\int_{0}^{\infty}\left|e^{-(1-2j)t}\right|dt=$$

$$=\int_{0}^{\infty}|e^{-t}|\underbrace{|e^{2tj}|}_{1}\,dt=\int_{0}^{\infty}|e^{-t}|\,dt=$$

$$=\int_{0}^{\infty}e^{-t}\,dt=-e^{-t}\Big|_{0}^{\infty}=-(0-1)=1$$

Άρα το σύστημα είναι ευσταθές

Για το σύστημα με κρουστική $h_2(t)$ έχουμε:

$$\int_{-\infty}^{\infty}|h_2(t)|\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}\left|e^{-t}\cos(2t)\,u(t)\right|dt=\int_{0}^{\infty}\left|e^{-t}\cos(2t)\right|dt=$$

$$=\int_{0}^{\infty}|e^{-t}|\underbrace{|\cos(2t)|}_{\leq 1}\,dt\leq\int_{0}^{\infty}|e^{-t}|\,dt=\int_{0}^{\infty}e^{-t}\,dt=1$$

Άρα το σύστημα είναι ευσταθές.

ΑΣΚΗΣΗ Έστω $x(t)=u(t-3)-u(t-5)$ και $h(t)=e^{-3t}u(t)$

α. Υπολογίστε το $y(t)=x(t)*h(t)$.

β. Υπολογίστε το $g(t)=\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)*h(t)$.

γ. Ποια η σχέση του $g(t)$ με το $y'(t)$;

ΛΥΣΗ α. Θα υπολογίσουμε τη συνέλιξη του $h(t)$ με τη $u(t)$ και στη συνέχεια βασιζόμενοι στις ιδιότητες της γραμμικότητας και της χρονικής αμεταβλητότητας θα βρούμε το $y(t)$.

$$w(t)=h(t)*u(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)\,u(t-\tau)\,d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-3\tau}u(\tau)\,u(t-\tau)\,d\tau=$$

$$=\int_{0}^{t}e^{-3\tau}d\tau=-\frac{1}{3}e^{-3\tau}\Big|_0^t=-\frac{1}{3}\left(e^{-3t}-1\right)=\frac{1}{3}\left(1-e^{-3t}\right)u(t)$$

$$y(t)=x(t)*h(t)=\left[u(t-3)-u(t-5)\right]*h(t)=$$

$$=u(t-3)*h(t)-u(t-5)*h(t)=$$

$$=w(t-3)-w(t-5)=$$

$$=\underbrace{\frac{1}{3}\left[1-e^{-3(t-3)}\right]u(t-3)}_{y_1(t)}-\underbrace{\frac{1}{3}\left[1-e^{-3(t-5)}\right]u(t-5)}_{y_2(t)}$$

Για $-\infty<t<3$ $\quad y_1(t)=y_2(t)=0$ αφού $u(t-3)=0$ και $u(t-5)=0$

Για $3\le t\le 5$ $\quad u(t-3)=1$ και $u(t-5)=0$ οπότε $y_2(t)=0$

και συνεπώς $y(t)=y_1(t)=\frac{1}{3}\left[1-e^{-3(t-3)}\right]$

Για $5<t<\infty$ $\quad u(t-3)=1$ και $u(t-5)=1$ οπότε

$$y(t)=y_1(t)-y_2(t)=\cancel{\frac{1}{3}}-\frac{1}{3}e^{-3(t-3)}-\cancel{\frac{1}{3}}+e^{-3(t-5)}=$$

$$=\frac{1}{3}\left[e^{-3(t-5)}-e^{-3(t-3)}\right]=\frac{1}{3}e^{-3(t-5)}\left[1-\frac{e^{-3(t-3)}}{e^{-3(t-5)}}\right]=$$

$$=\frac{1}{3}e^{-3(t-5)}\left(1-e^{-6}\right)$$

Άρα $y(t) = \begin{cases} 0 & -\infty < t < 3 \\ \dfrac{1-e^{-3(t-3)}}{3} & 3 \le t \le 5 \\ \dfrac{(1-e^{-6})\,e^{-3(t-5)}}{3} & 5 < t < \infty \end{cases}$

β. $$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[u(t-3) - u(t-5)\right] = \frac{du(t-3)}{dt} - \frac{du(t-5)}{dt} = \delta(t-3) - \delta(t-5)$$

Συνεπώς $$g(t) = \frac{dx(t)}{dt} * h(t) = \left[\delta(t-3) - \delta(t-5)\right] * h(t) =$$

$$= \delta(t-3) * h(t) - \delta(t-5) * h(t) =$$

$$= h(t-3) - h(t-5) = e^{-3(t-3)}u(t-3) - e^{-3(t-5)}u(t-5)$$

γ. Υπολογίζω την παράγωγο της $y(t)$ του ερωτήματος α.

$$y(t) = y_1(t) - y_2(t) = \frac{1}{3}\left[1 - e^{-3(t-3)}\right]u(t-3) - \frac{1}{3}\left[1 - e^{-3(t-5)}\right]u(t-5)$$

$y'(t) = y_1'(t) - y_2'(t)$ Υπολογίζουμε τις παραγώγους $y_1'(t)$ και $y_2'(t)$.

$$y_1'(t) = \left[\frac{1}{3}u(t-3) - \frac{1}{3}e^{-3(t-3)}u(t-3)\right]' =$$

$$= \frac{1}{3}u'(t-3) - \frac{1}{3}\left[e^{-3(t-3)}u(t-3)\right]' = \langle \text{θυμηθείτε ότι } d(uv) = udv + vdu \rangle$$

$$= \frac{1}{3}u'(t-3) - \frac{1}{3}e^{-3(t-3)}u'(t-3) - \frac{1}{3}\left[e^{-3(t-3)}\right]'u(t-3) = \langle u'(t) = \delta(t),\ u'(t-t_0) = \delta(t-t_0) \rangle$$

$$= \underbrace{\cancel{\frac{1}{3}\delta(t-3)} - \cancel{\frac{1}{3}e^{-3(t-3)}\delta(t-3)}}_{\text{Βλ. σημείωση}} - \frac{1}{3}(-3)e^{-3(t-3)}u(t-3) =$$

$$= e^{-3(t-3)}u(t-3)$$

Όμοια βρίσκουμε ότι $y_2'(t) = e^{-3(t-5)}u(t-5)$ οπότε

$$y'(t) = e^{-3(t-3)}u(t-3) - e^{-3(t-5)}u(t-5) = g(t)$$

Άρα $g(t) = y'(t)$ ή $g(t) = \dfrac{dy(t)}{dt}$

<u>Σημείωση:</u> Με χρήση της ιδιότητας $x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0)$ έχουμε:

$$\frac{1}{3}e^{-3(t-3)}\delta(t-3) = \frac{1}{3}e^{-3(3-3)}\delta(t-3) = \frac{1}{3}e^{0}\delta(t-3) = \frac{1}{3}\delta(t-3)$$

Συνεχίζοντας μόνοι μας την άσκηση, ας υπολογίσουμε τη συνέλιξη $x(t) * \frac{d\,h(t)}{dt}$:

$$h(t) = e^{-3t}u(t)$$

$$\xrightarrow{\frac{d}{dt}} \quad \frac{d\,h(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[e^{-3t}u(t)\right] = e^{-3t}\frac{du(t)}{dt} + \frac{d\,e^{-3t}}{dt}u(t) = e^{-3t}\delta(t) + (-3)\,e^{-3t}u(t) =$$

$$= e^{-3\cdot 0}\delta(t) - 3e^{-3t}u(t) = \delta(t) - 3e^{-3t}u(t) = \delta(t) - 3h(t)$$

Συνεπώς

$$x(t) * \frac{d\,h(t)}{dt} = x(t) * \left[\delta(t) - 3h(t)\right] = \underbrace{x(t) * \delta(t)}_{x(t)} - 3\underbrace{x(t) * h(t)}_{y(t) \text{ από ερώτημα } \alpha} =$$

$$= x(t) - 3y(t) =$$

$$= \left[u(t-3) - u(t-5)\right] - 3\left[\frac{1}{3}\left[1 - e^{-3(t-3)}\right]u(t-3) + \frac{1}{3}\left[1 - e^{-3(t-5)}\right]u(t-5)\right] =$$

$$= \cancel{u(t-3)} - \cancel{u(t-5)} - \cancel{u(t-3)} + e^{-3(t-3)}u(t-3) + \cancel{u(t-5)} - e^{-3(t-5)}u(t-5) =$$

$$= e^{-3(t-3)}u(t-3) - e^{-3(t-5)}u(t-5) =$$

$$= y'(t) = \frac{d\,y(t)}{dt}$$

Από τα παραπάνω παρατηρούμε ότι γενικά ισχύει:

$$\frac{d}{dt}\left[x(t) * h(t)\right] = \frac{d}{dt}x(t) * h(t) = x(t) * \frac{d}{dt}h(t)$$

ή

$$\boxed{\left[x(t) * h(t)\right]' = x'(t) * h(t) = x(t) * h'(t)}$$

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί η συνέλιξη των σημάτων $x(t) = u(t)$ και $h(t) = \frac{1}{t+1} u(t)$

ΛΥΣΗ $y(t) = x(t) * h(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau =$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\tau+1} u(\tau)\, u(t-\tau)\, d\tau =$$

$$= \int_{0}^{t} \frac{1}{\tau+1} d\tau = \ln|\tau+1| \Big|_0^t = \ln(\tau+1) \Big|_0^t =$$

$$= \ln(t+1) - \ln(1) = \ln(t+1)$$

Τελικά, αφού $y(t)=0$ για $t<0$, το σήμα $y(t) = \ln(t+1)\, u(t)$

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί η συνέλιξη των σημάτων $x(t) = u(t)$ και $h(t) = \frac{1}{1+t^2}$ $\forall t$.

ΛΥΣΗ

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+\tau^2} u(t-\tau)\, d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{1+\tau^2} d\tau = \tan^{-1}\tau \Big|_{-\infty}^{t} =$$

$$= \tan^{-1} t - \tan^{-1}(-\infty) =$$

$$= \tan^{-1} t - \left(-\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \tan^{-1} t + \frac{\pi}{2} \quad \forall t$$

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί η κρουστική απόκριση ενός συστήματος διαφόρισης.

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\frac{d}{dt}} \longrightarrow y(t)$$

ΛΥΣΗ Το σύστημα διαφόρισης, ο λεγόμενος διαφοριστής (differentiator), παράγει ως έξοδο $y(t)$ την παράγωγο του σήματος εισόδου, δηλαδή

$$y(t) = \frac{d\,x(t)}{dt}$$

Με βάση τις ισότητες $[x(t) * h(t)]' = x'(t) * h(t) = x(t) * h'(t)$

και την ιδιότητα της συνέλιξης με την κρουστική $x(t) * \delta(t) = x(t)$, έχουμε:

$$y(t) = \frac{d\,x(t)}{dt} = x'(t) = x'(t) * \delta(t) = x(t) * \underbrace{\delta'(t)}_{h(t)}$$

Άρα η κρουστική απόκριση $h(t)$ του συστήματος διαφόρισης είναι:

$$h(t) = \delta'(t) \quad \text{ή} \quad h(t) = \frac{d\,\delta(t)}{dt}$$

<u>Σημείωση</u> Η παράγωγος της κρουστικής συνάρτησης (Dirac delta function) είναι μία ψευδο-συνάρτηση η οποία έχει τις εξής ιδιότητες:

- $\delta'(t) * x(t) = x'(t)$
- $x(t)\,\delta'(t-t_0) = -x'(t_0)\,\delta(t-t_0)$
- $\delta'(-t) = -\delta'(t)$