ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

1 - ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΧΡΟΝΟΥ

Α - ΣΗΜΑΤΑ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΧΡΟΝΟΥ

Β - ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΧΡΟΝΟΥ

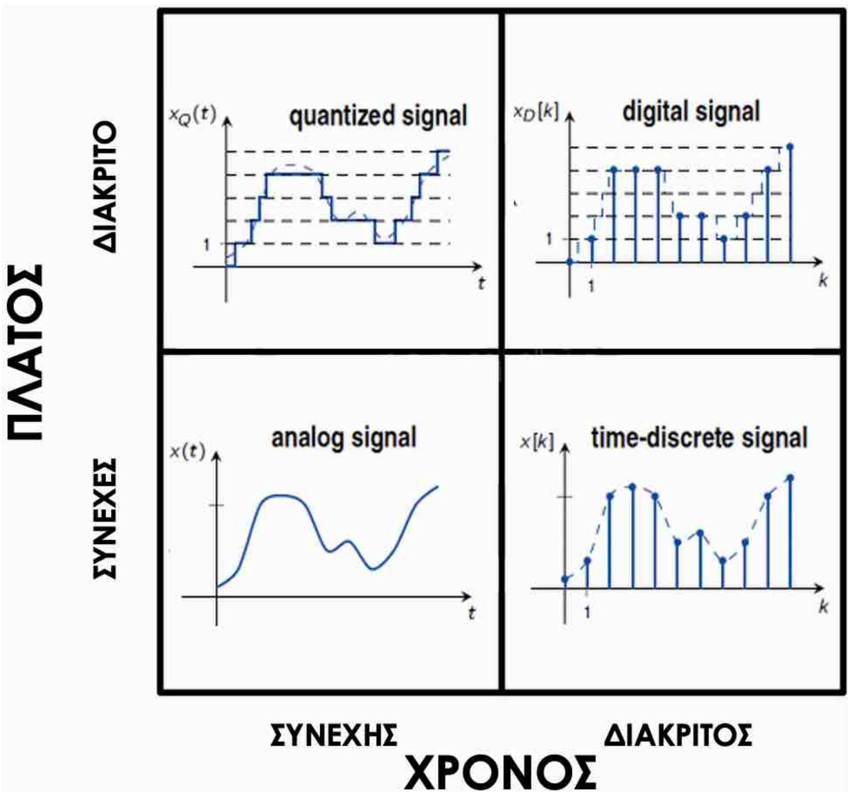
ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ ΣΚΟΔΡΑΣ

2023 - 2024

ΣΗΜΑΤΑ

ΠΛΑΤΟΣ \ ΧΡΟΝΟΣ	ΣΥΝΕΧΗΣ	ΔΙΑΚΡΙΤΟΣ
ΔΙΑΚΡΙΤΟ	ΠΟΛΥΣΤΑΘΜΙΚΑ	ΨΗΦΙΑΚΑ
ΣΥΝΕΧΕΣ	ΑΝΑΛΟΓΙΚΑ	ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ



ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΧΡΟΝΟΥ

- ΧΡΟΝΟΣ
  - ΣΥΝΕΛΙΞΗ
- ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ
  - ΜΕΤΑΣΧ. FOURIER
  - ΣΕΙΡΑ FOURIER

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ

- ΧΡΟΝΟΣ
  - ΣΥΝΕΛΙΞΗ
- ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ
  - ΜΕΤΑΣΧ. FOURIER
  - ΣΕΙΡΑ FOURIER

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

t	$\Omega = 2\pi F$	n	$\omega = 2\pi f$

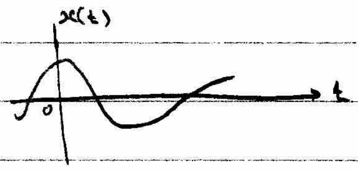
Α - ΣΗΜΑΤΑ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΧΡΟΝΟΥ

ΣΗΜΑΤΑ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΧΡΟΝΟΥ

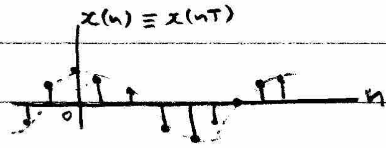
Ως σήμα ορίζεται ένα φυσικό μέγεθος το οποίο μεταβάλλεται σε σχέση με τον χρόνο ή τον χώρο ή με κάποια άλλη ανεξάρτητη μεταβλητή (ή μεταβλητές), πχ. $x(t)$.

- Ταξινόμηση σημάτων ανάλογα με τον τύπο της ανεξάρτητης ή της εξαρτημένης μεταβλητής:

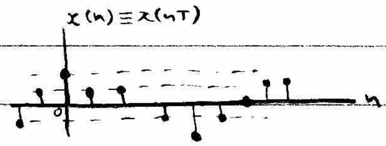
α. Σήματα συνεχούς χρόνου ή αναλογικά σήματα



β. Σήματα διακριτού χρόνου



γ. Ψηφιακά σήματα

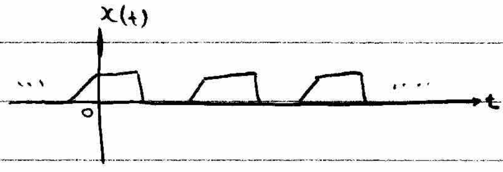


- Ιδιότητες σημάτων συνεχούς χρόνου

α. Περιοδικά και ΜηΠεριοδικά σήματα

Περιοδικό: $x(t)=x(t+T) \quad \forall t$

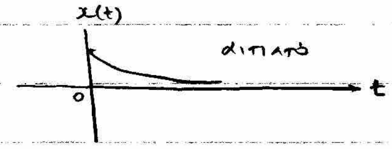
όπου T η περίοδος



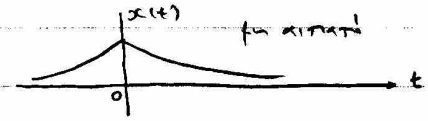
Συμβολίζουμε με Ω τη κυκλική συχνότητα $\left(\Omega=\frac{2\pi}{T}\right)$ και με F τη συχνότητα του σήματος συνεχούς χρόνου $\left(F=\frac{1}{T}\right)$.

Χρησιμοποιούμε τα κεφαλαία γράμματα Ω, F για τα σήματα συνεχούς χρόνου και τα μικρά γράμματα ω, f για τα σήματα διακριτού χρόνου.

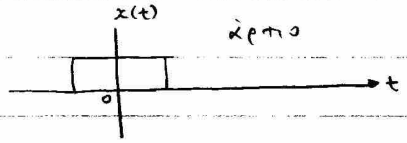
β. Αιτιατά και Μη Αιτιατά σήματα



Αιτιατό όταν $x(t)=0 \quad \forall\, t<0$

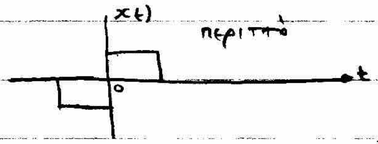


γ. Άρτια και Περιττά σήματα



Άρτιο $\quad x(-t) = x(t) \quad -\infty<t<\infty$

Περιττό $\quad x(-t) = -x(t) \quad -\infty<t<\infty$



Κάθε σήμα, πραγματικό ή μιγαδικό, μπορεί να εκφραστεί ως άθροισμα ενός άρτιου και ενός περιττού σήματος ως εξής:

$$x(t) = x_e(t) + x_o(t)$$

όπου $x_e(t) = \frac{1}{2}\left[x(t) + x^*(-t)\right]$ το άρτιο σήμα

$x_o(t) = \frac{1}{2}\left[x(t) - x^*(-t)\right]$ το περιττό σήμα

Με $*$ υποδηλώνεται το συζυγές μιγαδικό

δ. Νομοτελειακά ή Ντετερμινιστικά (deterministic) ή Αιτιοκρατικά και Τυχαία (random) ή Στοχαστικά (stochastic) Σήματα

Αιτιοκρατικά ή νομοτελειακά (deterministic) είναι τα σήματα οι τιμές των οποίων ορίζονται με ακρίβεια (βεβαιότητα) σε κάθε χρονική στιγμή, όπως π.χ. το σήμα $x(t) = A\cos(\Omega t + \varphi)$, όπου τα A, Ω, φ δεν είναι τυχαίες μεταβλητές.

ε. Ενεργειακά Σήματα και Σήματα Ισχύος

Ενέργεια $$E_x = \lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}|x(t)|^2\,dt = \int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2\,dt$$

Ένα σήμα με πεπερασμένη ενέργεια $0<E_x<\infty$ ονομάζεται ενεργειακό.

Μέση ισχύς $$P_x = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|x(t)|^2\,dt$$

Ένα σήμα με πεπερασμένη μέση ισχύ $0<P_x<\infty$ ονομάζεται σήμα ισχύος.

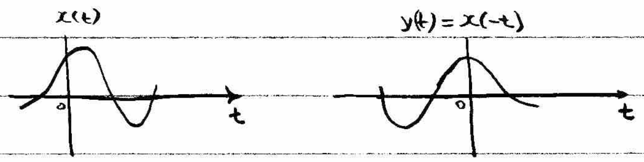
Για περιοδικό σήμα ισχύς:

$$P_x = \frac{1}{T}\int_{T}|x(t)|^2\,dt$$

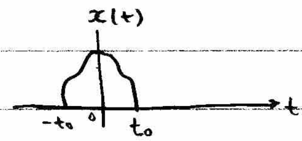
- Μετατροπές της ανεξάρτητης μεταβλητής

α. Ανάκλαση

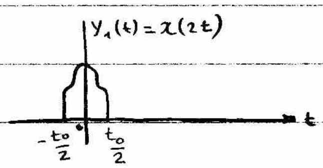
$y(t) = x(-t)$



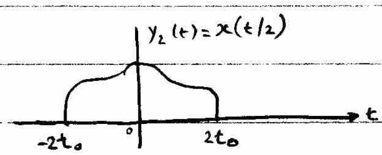
β. Αλλαγή κλίμακας χρόνου



$y_1(t) = x(\alpha t)$ $\alpha > 1$ (συστολή)

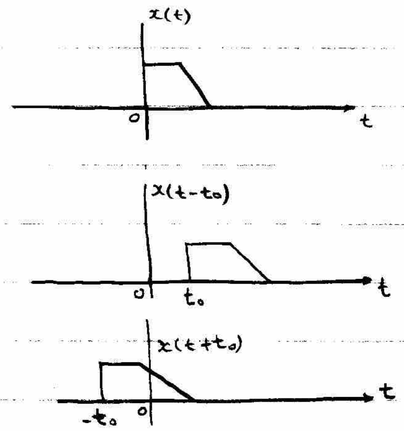


$y_2(t) = x(\alpha t)$ $0<\alpha<1$ (διαστολή)



γ. Χρονική μετατόπιση (ολίσθηση)

για $t_0 > 0$



- Στοιχειώδη Σήματα

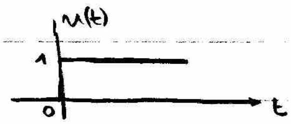
α. Μιγαδικό εκθετικό

$$x(t) = c\,e^{st}$$

όπου $s = \sigma + j\Omega$

β. Συνάρτηση μοναδιαίου βήματος(*)

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1 & t>0 \end{cases}$$

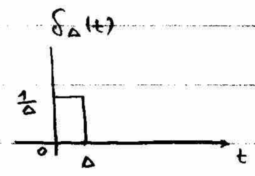


$$u_\Delta(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ \frac{1}{\Delta}t & 0<t<\Delta \\ 1 & t \geq \Delta \end{cases}$$

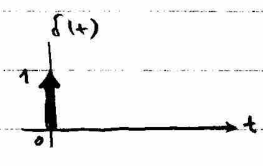
$$u(t) = \lim_{\Delta \to 0} u_\Delta(t)$$

γ. Κρουστική συνάρτηση ή συνάρτηση δέλτα

$$\delta_\Delta(t) \equiv \frac{d u_\Delta(t)}{dt} = \begin{cases} 0 & t<0 \\ \frac{1}{\Delta} & 0<t<\Delta \\ 0 & t>\Delta \end{cases}$$



$$\delta(t) = \lim_{\Delta \to 0} \delta_\Delta(t)$$



(*) Ονομάζεται και Heaviside step function προς τιμήν του Oliver Heaviside (1850-1925) και ορίζεται ως:

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{για } t \geq 0 \\ 0 & \text{για } t<0 \end{cases} \quad \text{ή} \quad u(t) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{t}{|t|}\right)$$

Η συνάρτηση μοναδιαίου βήματος (unit step) είναι το τρέχον ολοκλήρωμα (running integral) της μοναδιαίας κρουστικής

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\, d\tau$$

Με άλλα λόγια, η μοναδιαία κρουστική προκύπτει ως η πρώτη παράγωγος της μοναδιαίας βηματικής

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

Η u(t) γράφεται και ως:

$$u(t) = \int_{0}^{\infty} \delta(t-\tau)\, d\tau$$

(Θέτοντας $t-\tau=\sigma$ καταλήγουμε στην παραπάνω σχέση $u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\sigma)\, d\sigma$)

Τέλος για την $\delta(t)$ έχουμε:

$\delta(t-t_0) = 0$ για $t \neq t_0$

$\delta(t) = 0$ για $t \neq 0$

$$\begin{cases} x(t)\,\delta(t-t_0) = x(t_0)\,\delta(t-t_0) \\ \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,\delta(t-t_0)\, dt = x(t_0) \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = 1$$

$$\delta(t) = \delta(-t)$$

$$\delta(\alpha t) = \frac{1}{|\alpha|}\delta(t)$$

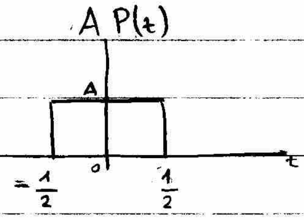
Properties of the Unit Impulse Function

1. $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)\,dt = f(t_0)$. $f(t)$ continuous at $t = t_0$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(t-t_0)\delta(t)\,dt = f(-t_0)$. $f(t)$ continuous at $t = -t_0$
3. $f(t)\delta(t-t_0) = f(t_0)\delta(t-t_0)$. $f(t)$ continuous at $t = t_0$
4. $\delta(t-t_0) = \frac{d}{dt}u(t-t_0)$
5. $u(t-t_0) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau-t_0)\,d\tau = \begin{cases} 1, & t > t_0 \\ 0, & t < t_0 \end{cases}$
6. $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(at-t_0)\,dt = \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(t-\frac{t_0}{a}\right)dt$
7. $\delta(-t) = \delta(t)$

Προσοχή: $x(t)\,\delta(t-t_0) = x(t_0)\,\delta(t-t_0)$ ενώ $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,\delta(t-t_0)\,dt = x(t_0)$

δ. Ορθογώνιος παλμός

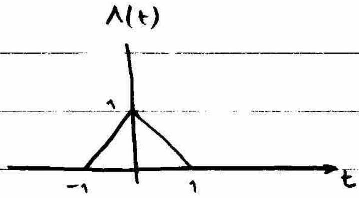
$$P(t)=\begin{cases}1 & |t|<\frac{1}{2}\\ 0 & \text{αλλού}\end{cases}$$



$$P(t)=u\left(t+\tfrac{1}{2}\right)-u\left(t-\tfrac{1}{2}\right)$$

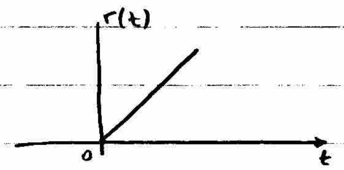
ε. Τριγωνικός παλμός

$$\Lambda(t)=\begin{cases}t+1 & -1\le t<0\\ -t+1 & 0\le t<1\\ 0 & \text{αλλού}\end{cases}$$



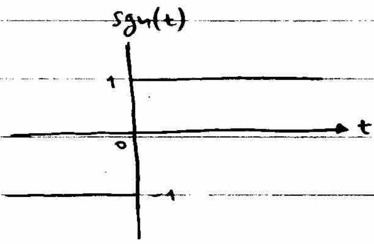
στ. Συνάρτηση κλίσης (ράμπας)

$$r(t)=\begin{cases}t & t\ge 0\\ 0 & t<0\end{cases}$$



ζ. Συνάρτηση προσήμου

$$\mathrm{sgn}(t)=\begin{cases}1 & t>0\\ -1 & t<0\end{cases}$$



ή

$$\mathrm{sgn}(t)=u(t)-u(-t)$$

ή

$$\mathrm{sgn}(t)=2u(t)-1$$

Κάθε πραγματικό σήμα $x(t)$ μπορεί να εκφραστεί ως άθροισμα ενός πραγματικού και άρτιου σήματος $x_e(t)$ και ενός πραγματικού και περιττού σήματος $x_o(t)$, ήτοι

$$x(t) = x_e(t) + x_o(t)$$

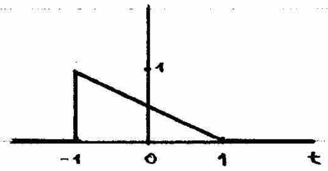
όπου

$$x_e(t) = \frac{1}{2}\left[x(t) + x(-t)\right]$$

$$x_o(t) = \frac{1}{2}\left[x(t) - x(-t)\right]$$

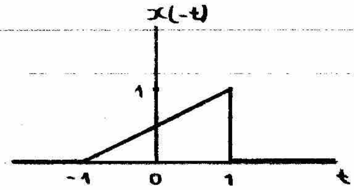
Παράδειγμα:

Σχ. 1



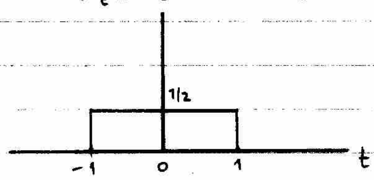
$x(t) = \frac{1}{2}(-t+1)$ για $-1 \le t \le 1$

Σχ. 2



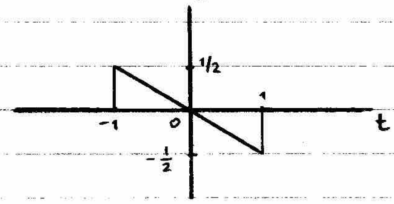
$x(-t) = \frac{1}{2}(t+1)$ για $-1 \le t \le 1$

Σχ. 3



$x_e(t) = \frac{1}{2}$ για $-1 \le t \le 1$

Σχ. 4



$x_o(t) = -\frac{1}{2}t$ για $-1 \le t \le 1$

Σημείωση: Η εξίσωση της ευθείας στο Σχ. 1 προκύπτει ως εξής:

$x = \alpha t + b \rightsquigarrow$ Για $t = 1 \Rightarrow x = 0$, άρα $0 = \alpha + b \Rightarrow b = -\alpha$

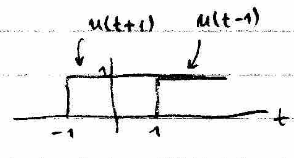
Για $t = -1 \Rightarrow x = 1$, άρα $1 = -\alpha + b \Rightarrow 1 = b + b \Rightarrow b = \frac{1}{2}$ $\Big\}\ \alpha = -\frac{1}{2}$

Συνεπώς

$$x(t) = \frac{1}{2}(-t+1) \quad \text{για } -1 \le t \le 1$$

Ισοδύναμα η σχέση αυτή γράφεται ως

$$x(t) = \frac{1}{2}(-t+1)\left[u(t+1) - u(t-1)\right]$$

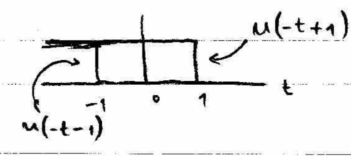


Η συνάρτηση του Σχ. 2 προκύπτει με αντικατάσταση του t με $-t$

$$x(-t) = \frac{1}{2}(t+1) \quad \text{για } -1 \le -t \le 1 \quad \text{ή} \quad 1 \ge t \ge -1$$

και ισοδύναμα

$$x(-t) = \frac{1}{2}(t+1)\left[u(-t+1) - u(-t-1)\right]$$

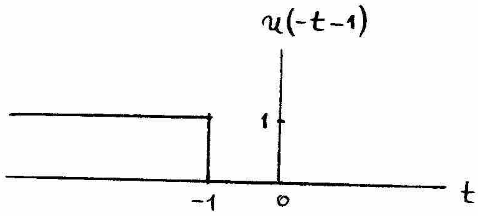


ΑΣΚΗΣΗ Να σχεδιαστούν τα σήματα $u(-t-1)$ και $u(-t+1)$.

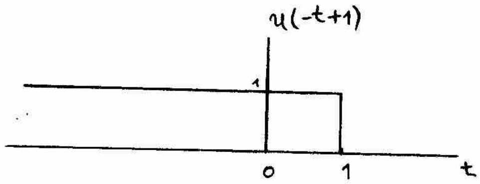
ΛΥΣΗ Α τρόπος: Μέσω του ορισμού

$$u(t)=\begin{cases}1 & t>0\\ 0 & t<0\end{cases}$$

$$u(-t-1)=\begin{cases}1 & -t-1>0 \Rightarrow -t>1 \Rightarrow t<-1\\ 0 & -t-1<0\end{cases}$$



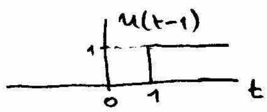
$$u(-t+1)=\begin{cases}1 & -t+1>0 \Rightarrow -t>-1 \Rightarrow t<1\\ 0 & -t+1<0\end{cases}$$



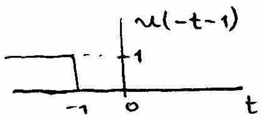
Β τρόπος: Μέσω ολίσθησης και κατοπτρισμού

Στην περίπτωση αυτή ακολουθούμε δύο βήματα: πρώτα κάνουμε την ολίσθηση και στην συνέχεια τον κατοπτρισμό γύρω από τον άξονα των τεταγμένων.
Συγκεκριμένα για το σήμα $u(-t-1)$:

Βήμα 1ο: Ολίσθηση

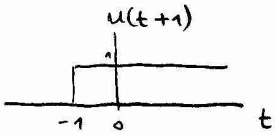


Βήμα 2ο: Κατοπτρισμός

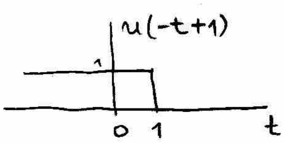


Για το σήμα $u(-t+1)$:

Βήμα 1ο: Ολίσθηση



Βήμα 2ο: Κατοπτρισμός



ΑΣΚΗΣΗ Νδο το γινόμενο δύο άρτιων ή δύο περιττών συναρτήσεων είναι άρτια συνάρτηση, ενώ το γινόμενο μιας άρτιας και μιας περιττής είναι περιττή συνάρτηση.

ΛΥΣΗ Α. Έστω $x_1(t)$, $x_2(t)$ άρτιες συναρτήσεις, δηλαδή ισχύει ότι

$$x_1(t) = x_1(-t) \quad , \quad x_2(t) = x_2(-t)$$

Για το γινόμενό τους $x(t) = x_1(t) \cdot x_2(t)$ θα ισχύει

$$x(-t) = x_1(-t) \cdot x_2(-t) =$$

$$= x_1(t) \cdot x_2(t) = x(t)$$

Άρα και η $x(t)$ είναι άρτια συνάρτηση.

Β. Έστω $x_1(t)$, $x_2(t)$ περιττές συναρτήσεις, δηλαδή

$$x_1(t) = -x_1(-t) , \quad x_2(t) = -x_2(-t)$$

Για το γινόμενό τους $x(t) = x_1(t) \cdot x_2(t)$ θα ισχύει

$$x(-t) = x_1(-t) \cdot x_2(-t) =$$

$$= [-x_1(t)] \cdot [-x_2(t)] = x(t)$$

Άρα η $x(t)$ είναι άρτια συνάρτηση.

Γ. Έστω $x_1(t) = x_1(-t)$ άρτια συνάρτηση και

$x_2(t) = -x_2(-t)$ περιττή συνάρτηση.

Για το γινόμενό τους $x(t) = x_1(t) \cdot x_2(t)$ θα ισχύει

$$x(-t) = x_1(-t) \cdot x_2(-t) =$$

$$= [x_1(t)] \cdot [-x_2(t)] =$$

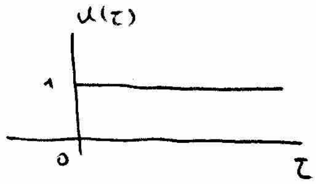
$$= -x_1(t) \cdot x_2(t) =$$

$$= -x(t)$$

Άρα η $x(t)$ είναι περιττή συνάρτηση.

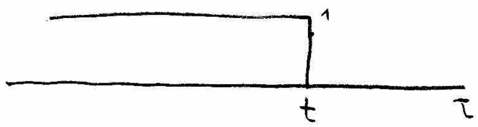
Α. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΚΑΙ ΣΧΕΔΙΑΣΗ $u(t-\tau)$ ΜΕΣΩ ΤΟΥ ΟΡΙΣΜΟΥ

$$u(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{για } \tau > 0 \\ 0 & \text{για } \tau < 0 \end{cases}$$

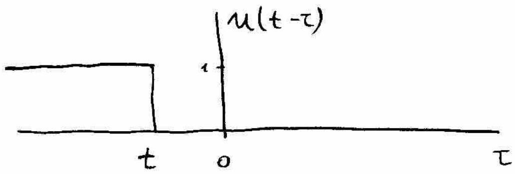


$$u(t-\tau) = \begin{cases} 1 & \text{για } t-\tau > 0 \Rightarrow \tau < t \\ 0 & \text{για } t-\tau < 0 \Rightarrow \tau > t \end{cases}$$

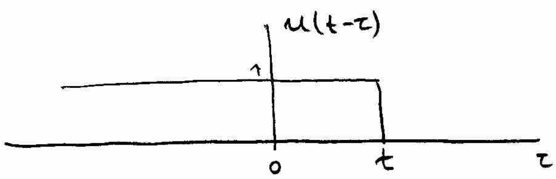
Εδώ για να το σχεδιάσουμε σωστά χρειάζεται να διακρίνουμε δύο περιπτώσεις, ανάλογα με το εάν το t είναι αρνητικό ή θετικό.



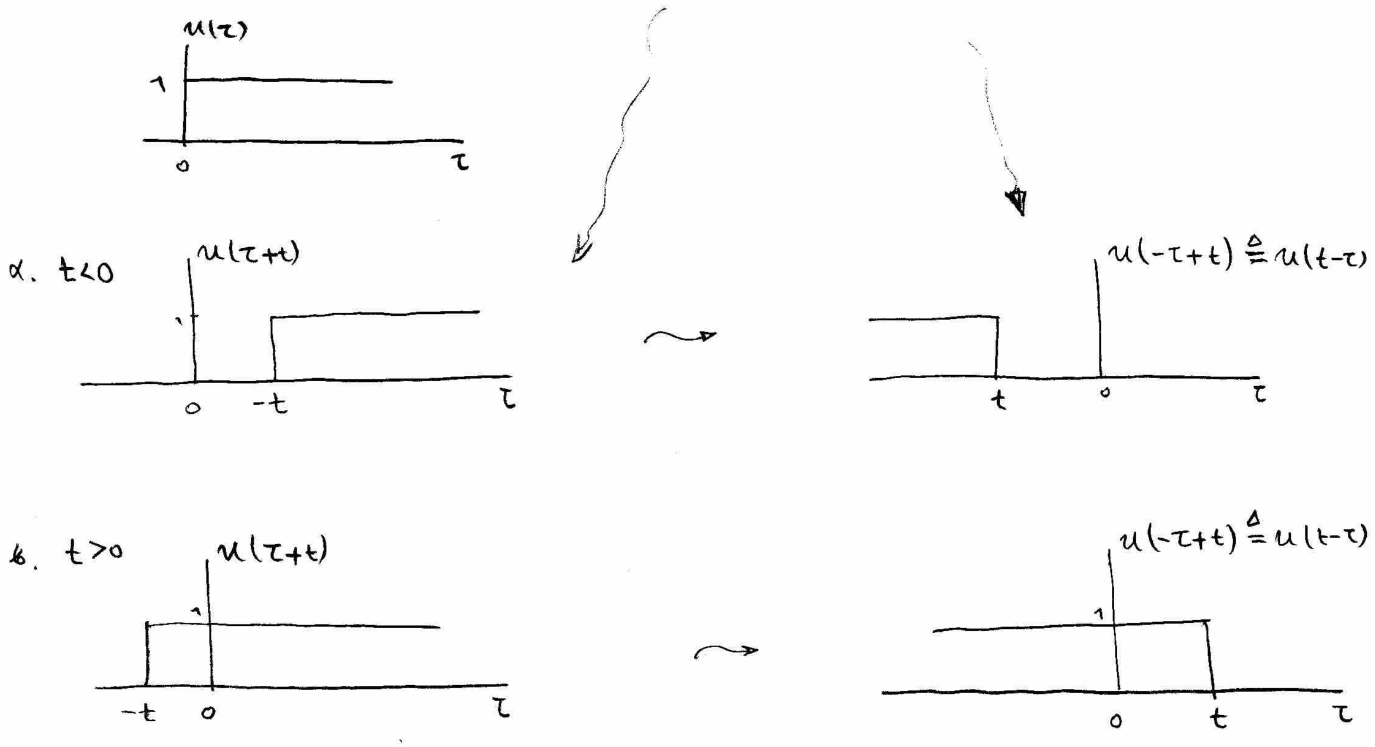
α. t αρνητικό $(t<0)$



β. t θετικό $(t>0)$



Β. ΣΧΕΔΙΑΣΗ $u(t-\tau)$ ΜΕΣΩ (i) ΟΛΙΣΘΗΣΗΣ ΚΑΙ (ii) ΚΑΤΟΠΤΡΙΣΜΟΥ



ΣΗΜΑΤΑ και ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΛΥΣΕΙΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ
ΣΕΡΑΦΕΙΜ ΚΑΡΑΜΠΟΓΙΑΣ

▼ ΑΣΚΗΣΗ 1.3

Δίνεται το σήμα

$$x(t)=\begin{cases}2t, & -1| \le t<0\\ 2-t, & 0\le t<2\\ 0, & \alpha\lambda\lambda\iota\acute{\omega}\varsigma\end{cases}$$

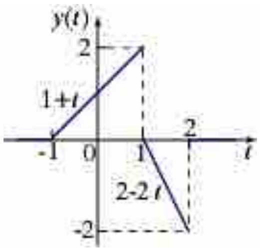
Να βρεθεί ο μαθηματικός τύπος και να κάνετε τη γραφική παράσταση του σήματος $y(t)=x(1-t)$ σε συνάρτηση με το χρόνο.

▼ ***Απάντηση***:

Ο μαθηματικός τύπος του σήματος $y(t)=x(1-t)$ είναι

$$y(t)=x(1-t)=\begin{cases}1+t, & -1<t\le 1\\ 2-2t, & 1<t\le 2\\ 0, & \alpha\lambda\lambda\iota\acute{\omega}\varsigma\end{cases}$$

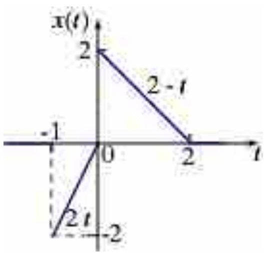
Η γραφική παράσταση του σήματος $y(t)=x(1-t)$ σε συνάρτηση με το χρόνο είναι



Σχήμα 3.1. *Η γραφική παράσταση του σήματος y*(*t*) = *x*(1-*t*) στην άσκηση 1.3.

▼ ***Λύση***:

Στο Σχήμα 3.2 φαίνεται η γραφική παράσταση του σήματος $x(t)$ σε συνάρτηση με το χρόνο.



Σχήμα 3.2. *Η γραφική παράσταση του σήματος x*(*t*) στην άσκηση 1.3.

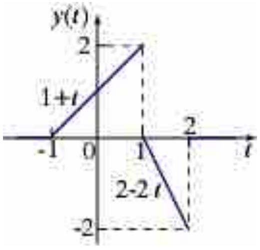
Για το σήμα $y(t) = x(1-t)$ έχουμε

$$y(t) = x(1-t) = \begin{cases} 2(1-t), & -1 \leq 1-t < 0 \\ 2-(1-t), & 0 \leq 1-t < 2 \\ 0, & \alpha\lambda\lambda\iota\acute{\omega}\varsigma \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2-2t, & 2 \geq t > 1 \\ 1+t, & 1 \geq t > -1 \\ 0, & \alpha\lambda\lambda\iota\acute{\omega}\varsigma \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1+t, & -1 < t \leq 1 \\ 2-2t, & 1 < t \leq 2 \\ 0, & \alpha\lambda\lambda\iota\acute{\omega}\varsigma \end{cases}$$

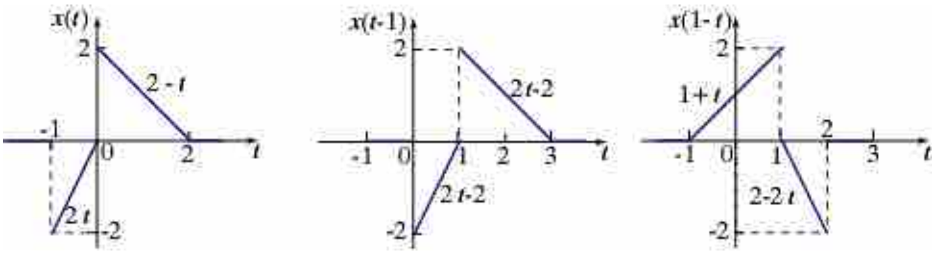
Στο Σχήμα 3.3 φαίνεται η γραφική παράσταση του σήματος $y(t) = x(1-t)$ σε συνάρτηση με το χρόνο.



Σχήμα 3.3. *Η γραφική παράσταση του σήματος y(t) = x(1-t)* στην άσκηση 1.3.

▼ ***Παρατηρήσεις***:

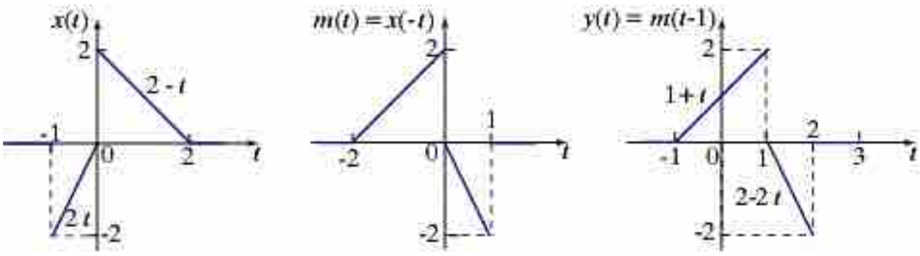
- Η γραφική παράσταση του σήματος $y(t) = x(1-t)$ μπορεί να βρεθεί αν προσδιορισθεί η χρονική ολίσθηση του $x(t)$ κατά μία χρονική μονάδα προς τα αριστερά και στην συνέχεια γίνει η ανάκλαση του σήματος $x(t-1)$ ως προς άξονα τον $t = 1$ οπότε σχηματίζεται το σήμα $y(t) = x(1-t)$.
  Στο Σχήμα 3.4 φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των σημάτων $x(t) \longrightarrow x(t-1) \longrightarrow x(1-t)$



Σχήμα 3.4. *Οι γραφικές παραστάσεις των σημάτων x(t), x(t-1) και x(1-t) στην άσκηση* 1.3.

- Ο γραφικός προσδιορισμός του σήματος $y(t) = x(1-t)$ μπορεί να γίνει προσδιορίζοντας αρχικά το σήμα $m(t) = x(-t)$, δηλαδή την ανάκλαση του σήματος $x(t)$ και στη συνέχει το σήμα $y(t) = m(t-1)$, δηλαδή την χρονική μετατόπιση του σήματος $m(t)$ κατά μία χρονική μονάδα προς τα δεξιά.
  Στο Σχήμα 3.4 φαίνεται ο γραφικός προσδιορισμός του σήματος *y*(*t*), από το σήμα *y*(*t*) με τη

βοήθεια των ιδιοτήτων μετατροπής σήματος ως προς το χρόνο.



Σχήμα 3.4. *Ο γραφικός προσδιορισμός του σήματος* $y(t)$, *στην άσκηση* 1.3.

Πράγματι, το σήμα $y(t) = m(t-1)$ είναι το ζητούμενο σήμα, δηλαδή το σήμα $y(t) = x(1-t)$

$$y(t) = m(t-1) \xrightarrow[\xi = t-1]{m(\xi) = x(-\xi)} y(t) = x[-(t-1)] = x(1-t)$$

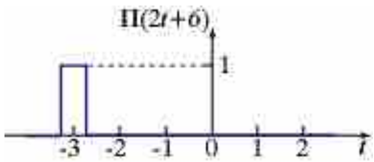
ΣΗΜΑΤΑ και ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΛΥΣΕΙΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ
ΣΕΡΑΦΕΙΜ ΚΑΡΑΜΠΟΓΙΑΣ

▼ ΑΣΚΗΣΗ 1.7

Να γίνει η γραφική παράσταση του σήματος $x(t) = \Pi(2t+6)$ σε συνάρτηση με το χρόνο, όπου Π είναι ο ορθογώνιος παλμός.

▼ *Απάντηση*:

Στο Σχήμα 7.1 φαίνεται η γραφική παράσταση γραφική παράσταση του σήματος $x(t) = \Pi(2t+6)$ σε συνάρτηση με το χρόνο.



Σχήμα 7.1. *Η γραφική παράσταση του σήματος x(t) στην άσκηση* 1.7.

▼ *Λύση*:

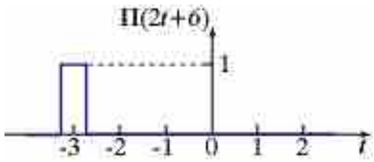
Ο ορθογώνιος παλμός δίνεται από το μαθηματικό τύπο

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1, & -\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2} \\ 0, & \alpha\lambda\lambda\iota\acute{\omega}\varsigma \end{cases}$$

Για το σήμα $\Pi(2t+6)$ έχουμε

$$\begin{aligned} \Pi(2t+6) &= \begin{cases} 1, & -\frac{1}{2} < 2t+6 < \frac{1}{2} \\ 0, & \alpha\lambda\lambda\iota\acute{\omega}\varsigma \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1, & -\frac{13}{2} < 2t < -\frac{11}{2} \\ 0, & \alpha\lambda\lambda\iota\acute{\omega}\varsigma \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1, & -\frac{13}{4} < t < -\frac{11}{4} \\ 0, & \alpha\lambda\lambda\iota\acute{\omega}\varsigma \end{cases} \end{aligned}$$

Στο Σχήμα 7.2 φαίνεται η γραφική παράσταση γραφική παράσταση του σήματος $x(t)$ σε συνάρτηση με το χρόνο.



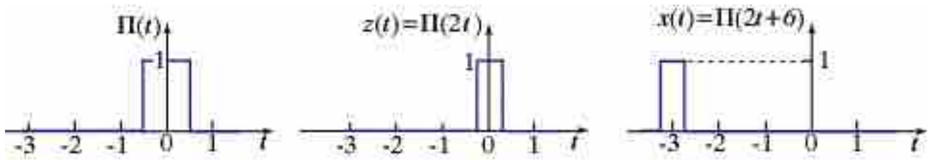
Σχήμα 7.2. *Η γραφική παράσταση του σήματος x*(*t*) *στην άσκηση* 1.7.

Η γραφική παράσταση του σήματος $\Pi(2t+6)$ μπορεί να βρεθεί αν κάνουμε χρονική συστολή του ορθογώνιου παλμού κατά 2 δημιουργώντας έτσι το σήμα $z(t)=\Pi(2t)$ και στη συνεχεία χρονική μετατόπιση προς τα αριστερά κατά 3 χρονικές μονάδες του σήματος $z(t)=\Pi(2t)$. Έτσι έχουμε το σήμα $z(t+3)$ για το οποίο ισχύει

$$z(t+3) \xrightarrow[\xi=t+3]{z(\xi)=\Pi(2\xi)} z(t+3)=\Pi[2(t+3)]=\Pi(2t+6)$$

Πράγματι, το σήμα $z(t+3)$ είναι το ζητούμενο σήμα, δηλαδή το σήμα $x(t)=\Pi(2t+6)$.

Στο Σχήμα 7.3 περιγράφονται οι μετατροπές που πρέπει να γίνουν στο ορθογώνιο παλμό $\Pi(t)$ για να βρεθεί το σήμα $x(t)=\Pi(2t+6)$.



Σχήμα 7.2. *Η γραφικές παράστασεις του σήματων* Π(*t*), *z*(*t*) *και x(t)* = Π(2*t*+6) *στην άσκηση* 1.7.

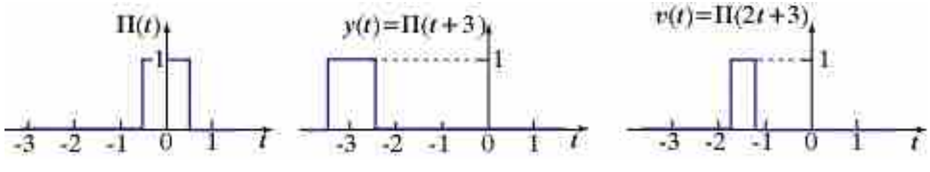
▼ ***Παρατηρήσεις***:

- Η χρονική μετατόπιση προς τα αριστερά κατά 3 χρονικές μονάδες του ορθογώνιου παλμού $\Pi(t)$ δίνει το σήμα $y(t)=\Pi(t+3)$. Στη συνέχεια η συστολή του σήματος $y(t)$ κατά 2 δίνει το σήμα

$$v(t)=y(2t) \xrightarrow[\xi=2\,t]{y(\xi)=\Pi(\xi+3)} v(t)=y(2t)=\Pi(2t+3)$$

Παρατηρούμε ότι το σήμα $v(t)$ είναι ίσο με το σήμα $\Pi(2t+3)$ που είναι διάφορο από το σήμα $\Pi(2t+6)$.

Στο Σχήμα 7.4 υπάρχουν οι γραφικές παραστάσεις των σημάτων $\Pi(t)$, $y(t)=\Pi(t+3)$ και $v(t)=y(2t)$.



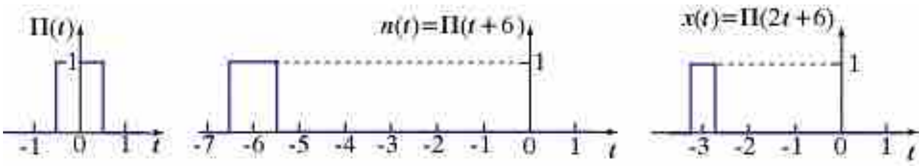
Σχήμα 7.4. *Η γραφικές παράστασεις του σήματων* Π(*t*), *y*(*t*) *και υ*(*t*) *στην άσκηση* 1.7.

- Η γραφική παράσταση του $x(t)=\Pi(2t+6)$ μπορεί να βρεθεί αν κάνουμε χρονική μετατόπιση του ορθογώνιου παλμού κατά 6 χρονικές μονάδες προς τα αριστερά, δημιουργώντας έτσι το σήμα $n(t)=\Pi(t+6)$ και στη συνεχεία η χρονική συστολή του $n(t)$ κατά 2 δίνει το σήμα

$$n(2t) \xrightarrow[\xi=2\,t]{n(\xi)=\Pi(\xi+6)} n(2t)=\Pi(2t+6)$$

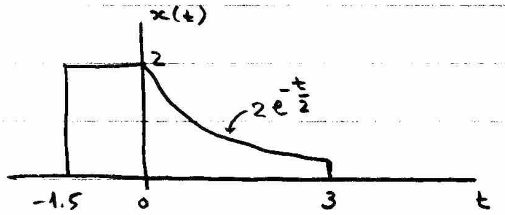
Παρατηρούμε ότι το σήμα $n(2t)$ είναι ίσο με το σήμα $x(t)=\Pi(2t+6)$

Στο Σχήμα 7.5 περιγράφονται οι μετατροπές που πρέπει να γίνουν στο $\Pi(t)$ για να βρεθεί το $x(t)=\Pi(2t+6)$.



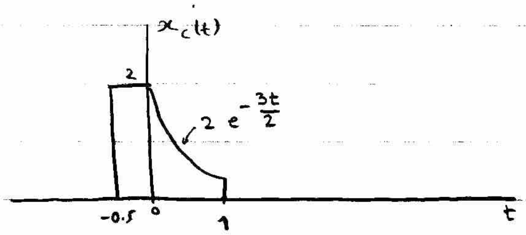
Σχήμα 7.5. *Η γραφικές παράστασεις του σήματων* Π(*t*), *n*(*t*) *και x(t)* = Π(2*t*+6) *στην άσκηση* 1.7.

ΑΣΚΗΣΗ Να εκφραστούν μαθηματικά τα σήματα



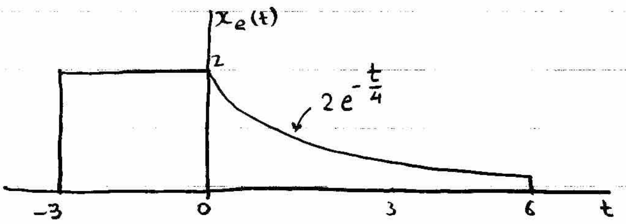
$$x(t)=\begin{cases} 2 & -1.5\le t<0 \\ 2e^{-\frac{t}{2}} & 0\le t<3 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

χρονική συστολή



$$x_c(t)=x(3t)=\begin{cases} 2 & -1.5\le 3t<0 \quad \text{ή} \quad -0.5\le t<0 \\ 2e^{-\frac{3t}{2}} & 0\le 3t<3 \quad \text{ή} \quad 0\le t<1 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

χρονική διαστολή



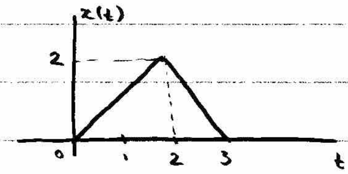
$$x_e(t)=x\left(\frac{t}{2}\right)=\begin{cases} 2 & -1.5\le \frac{t}{2}<0 \quad \text{ή} \quad -3\le t<0 \\ 2e^{-\frac{t}{4}} & 0\le \frac{t}{2}<3 \quad\quad 0\le t<6 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

Σημείωση: Το σήμα x(t) μπορεί να εκφραστεί με μία έκφραση του t ως εξής:

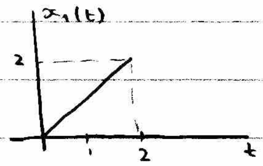
$$x(t)=2\left[u(t+1.5)-u(t)\right]+2e^{-\frac{t}{2}}\left[u(t)-u(t-3)\right]=$$

$$=2u(t+1.5)-2\left(1-e^{-\frac{t}{2}}\right)u(t)-2e^{-\frac{t}{2}}u(t-3)$$

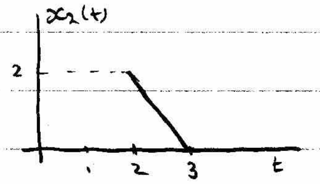
ΑΣΚΗΣΗ Να εκφραστεί με μια μαθηματική σχέση το σήμα του σχήματος.



Λύση



$$x_1(t) = t\left[u(t) - u(t-2)\right]$$



$$x_2(t) = -2(t-3)\left[u(t-2) - u(t-3)\right]$$

Άρα

$$\begin{aligned} x(t) &= x_1(t) + x_2(t) \\ &= t\left[u(t) - u(t-2)\right] - 2(t-3)\left[u(t-2) - u(t-3)\right] \\ &= t\,u(t) - 3(t-2)\,u(t-2) + 2(t-3)\,u(t-3) \end{aligned}$$

Σημείωση: Για τον υπολογισμό της εξίσωσης της ευθείας του $x_2(t)$, ξεκινήσαμε από τη γενική μορφή της εξίσωσης της ευθείας $(y = \alpha x + b)$ και προσδιορίσαμε τα α, b μέσω των δεδομένων του σχήματος.

$$\left.\begin{aligned} &\text{Για } x = 2 \rightarrow y = 2 \Rightarrow 2 = \alpha 2 + b \\ &\text{Για } x = 3 \rightarrow y = 0 \Rightarrow 0 = \alpha 3 + b \Rightarrow b = -3\alpha \end{aligned}\right\} \Rightarrow 2 = 2\alpha - 3\alpha \Rightarrow \alpha = -2$$

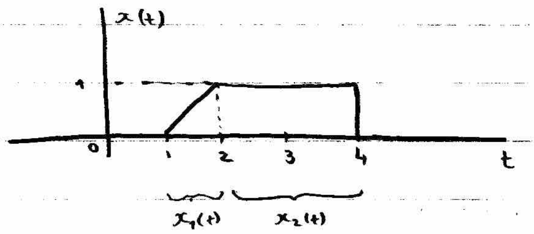
$$b = 6$$

Τελικά η εξίσωση της ευθείας είναι:

$$y = -2x + 6 = -2(x-3)$$

και επειδή στην προκειμένη περίπτωση η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι ο χρόνος t και η εξαρτημένη μεταβλητή η x_2, θα έχουμε $x_2(t) = -2(t-3)$.

ΑΣΚΗΣΗ Να βρεθεί η μαθηματική έκφραση του σήματος



Λύση

Η εξίσωση της ευθείας από $t=1$ μέχρι $t=2$ είναι της μορφής $x_2 = \alpha t + b$

Για $t=1 \rightarrow x_2 = 0 \rightsquigarrow 0 = \alpha + b \Rightarrow \alpha = -b$

Για $t=2 \rightarrow x_2 = 1 \rightsquigarrow 1 = 2\alpha + b$

$\Big\} \; 1 = 2\alpha - \alpha \Rightarrow \alpha = 1$ και $b = -1$

Συνεπώς $x_1(t) = (t-1)\left[u(t-1) - u(t-2)\right]$

Το σήμα $x_2(t)$ εκφράζεται ως διαφορά δύο βηματικών συναρτήσεων:

$$x_2(t) = u(t-2) - u(t-4)$$

Άρα $x(t) = x_1(t) + x_2(t) =$

$$= (t-1)\left[u(t-1) - u(t-2)\right] + \left[u(t-2) - u(t-4)\right] =$$

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί η ισχύς του σήματος $x(t) = A\cos(\Omega t+\theta)$

ΛΥΣΗ $$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2\, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} A^2\cos^2(\Omega t+\theta)\, dt =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{A^2}{2T}\int_{-T/2}^{T/2} [1+\cos(2\Omega t+2\theta)]\, dt =$$

$$= \underbrace{\lim_{T\to\infty} \frac{A^2}{2T}\int_{-T/2}^{T/2} dt}_{P_1} + \underbrace{\lim_{T\to\infty} \frac{A^2}{2T}\int_{-T/2}^{T/2} \cos(2\Omega t+2\theta)\, dt}_{P_2} =$$

$$P_1 = \lim_{T\to\infty} \frac{A^2}{2T}\, t\Big|_{-T/2}^{T/2} = \lim_{T\to\infty} \frac{A^2}{2T}\left(\frac{T}{2}-\left(-\frac{T}{2}\right)\right) = \lim_{T\to\infty} \frac{A^2}{2\cancel{T}}\cancel{T} = \frac{A^2}{2}$$

$P_2 = 0$ αφού πρόκειται για το εμβαδό (ορισμένο ολοκλήρωμα) ενός συνημιτόνου από $-\frac{T}{2}$ έως $\frac{T}{2}$, όπου $T\to\infty$, του οποίου τα τμήματα που βρίσκονται στο θετικό μέρος είναι ίσα με αυτά που βρίσκονται στο αρνητικό μέρος.

Τελικά $P_x = \frac{A^2}{2}$ και η RMS τιμή του σήματος είναι $\frac{A}{\sqrt{2}}$.

Σημείωση: Ένα ημιτονοειδές πλάτους A έχει μέση ισχύ $\frac{A^2}{2}$ ανεξάρτητα από την τιμή της συχνότητας Ω ($\Omega \neq 0$) και της φάσης θ.

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί η μέση ισχύς του σήματος $x(t) = A\cos(\Omega t + \theta)$ ως η μέση τιμή της ενέργειας αυτού σε χρόνο ίσο με μια περίοδο $T = \frac{2\pi}{\Omega}$.

ΛΥΣΗ

$$P_x = \frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2\, dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T A^2\cos^2(\Omega t + \theta)\, dt = \langle \cos 2\varphi = 2\cos^2\varphi - 1 \rangle$$

$$= \frac{A^2}{2T}\int_0^T \left[1 + \cos(2\Omega t + 2\theta)\right] dt$$

$$= \underbrace{\frac{A^2}{2T}\int_0^T 1\, dt}_{P_1} + \underbrace{\frac{A^2}{2T}\int_0^T \cos(2\Omega t + 2\theta)\, dt}_{P_2 = 0}$$

$$= \frac{A^2}{2T}\, t\Big|_0^T$$

$$= \frac{A^2}{2T}(T - 0) = \frac{A^2}{2}$$

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί η ισχύς του σήματος $x(t) = A_1\cos(\Omega_1 t + \theta_1) + A_2\cos(\Omega_2 t + \theta_2)$, $\Omega_1 \neq \Omega_2$

Λύση Το άθροισμα δύο περιοδικών σημάτων μπορεί και να μην είναι περιοδικό. Εξαρτάται από το εάν ο λόγος Ω_1/Ω_2 είναι ρητός αριθμός. Έτσι, για τον υπολογισμό της μέσης ισχύος εφαρμόζουμε τον γενικό τύπο του υπολογισμού της μέσης ισχύος σε ένα χρονικό διάστημα T sec όπου $T \to \infty$.

$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2\,dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \left[A_1\cos(\Omega_1 t + \theta_1) + A_2\cos(\Omega_2 t + \theta_2)\right]^2 dt =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} A_1^2\cos^2(\Omega_1 t + \theta_1)\,dt + \lim \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} A_2^2\cos^2(\Omega_2 t + \theta_2)\,dt +$$

$$+ \lim \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} 2A_1A_2\cos(\Omega_1 t + \theta_1)\cos(\Omega_2 t + \theta_2)\,dt = P_1 + P_2 + P_3$$

Αλλά $P_1 = \frac{A_1^2}{2}$, $P_2 = \frac{A_2^2}{2}$

Το γινόμενο των συνημιτονοειδών στο P_3 μπορεί να εκφραστεί ως άθροισμα μέσω της τριγωνομετρικής σχέσης $2\cdot\cos\varphi_1\cos\varphi_2 = \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \cos(\varphi_1 + \varphi_2)$.
Όπως και στην προηγούμενη άσκηση, επειδή πρόκειται για θετικά και αρνητικά εμβαδά, το τελικό αποτέλεσμα θα είναι 0, δηλαδή $P_3 = 0$.
Άρα

$$P_x = \frac{A_1^2}{2} + \frac{A_2^2}{2} = \frac{1}{2}\left(A_1^2 + A_2^2\right)$$

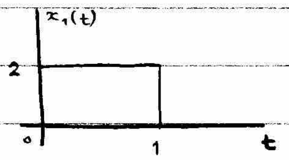
Γενικά μπορούμε να πούμε ότι για ένα σήμα που μπορεί να γραφεί ως άθροισμα ημιτονοειδών διακριτών (ξεχωριστών) συχνοτήτων

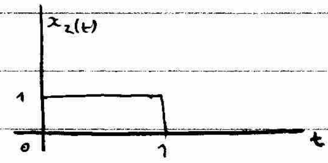
$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\cos(\Omega_n t + \theta_n)$$

η μέση ισχύς του θα είναι

$$P_x = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} A_n^2$$

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί η ενέργεια καθενός από τα σήματα.





ΛΥΣΗ

$$E_{1x} = \lim_{T\to\infty} \int_{-T/2}^{T/2} |x_1(t)|^2 \, dt \qquad E_{2x} = \lim_{T\to\infty} \int_{-T/2}^{T/2} |x_2(t)|^2 \, dt$$

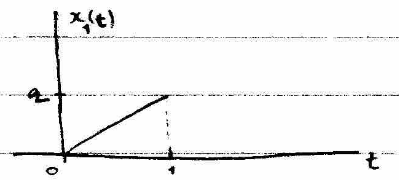
$$= \lim_{T\to\infty} \int_{-T/2}^{T/2} 2^2 \, dt = \qquad = \lim_{T\to\infty} \int_{-T/2}^{T/2} 1^2 \, dt =$$

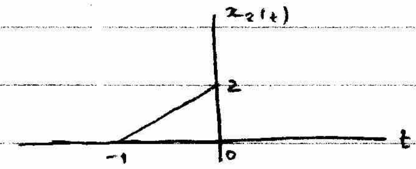
$$= 4\, t\Big|_0^1 = 4(1-0) = \qquad = 1\, t\Big|_0^1 =$$

$$= 4 \qquad = 1$$

Παρατηρούμε ότι διπλασιασμός του πλάτους ενός σήματος συνεπάγεται τετραπλασιασμό της ενέργειας.

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί η ενέργεια καθενός από τα σήματα





ΛΥΣΗ

$$E_{1x} = \lim_{T\to\infty} \int_{-T/2}^{T/2} |x_1(t)|^2 \, dt$$

$$= \lim_{T\to\infty} \int_{-T/2}^{T/2} (2t)^2 \, dt$$

$$= \lim_{T\to\infty} 4 \int_0^1 t^2 \, dt$$

$$= \lim_{T\to\infty} 4 \frac{t^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{4}{3}$$

$$E_{2x} = \lim_{T\to\infty} \int_{-T/2}^{T/2} |x_2(t)|^2 \, dt$$

$$= \lim_{T\to\infty} \int_{-T/2}^{T/2} (2t+2)^2 \, dt$$

$$= \lim_{T\to\infty} \int_{-1}^{0} 2^2 (t+1)^2 \, dt = \langle t+1=x \rangle$$

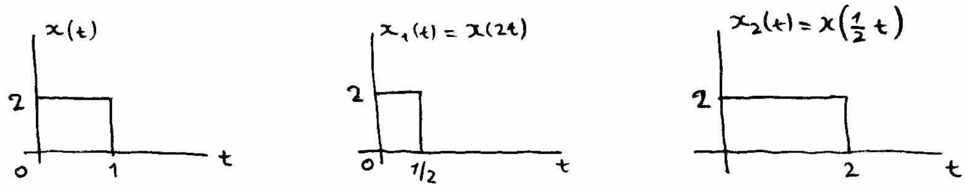
$$= 4\int_0^1 x^2 \, dx = \langle \text{όπως και προηγουμένως} \rangle$$

$$= \frac{4}{3}$$

Παρατηρούμε ότι η μετατόπιση στον χρόνο $\left(x_2(t) = x_1(t+1)\right)$ <u>δεν</u> επηρεάζει την ενέργεια του σήματος.

ΑΣΚΗΣΗ

Να υπολογιστεί η ενέργεια καθενός από τα σήματα.



ΛΥΣΗ

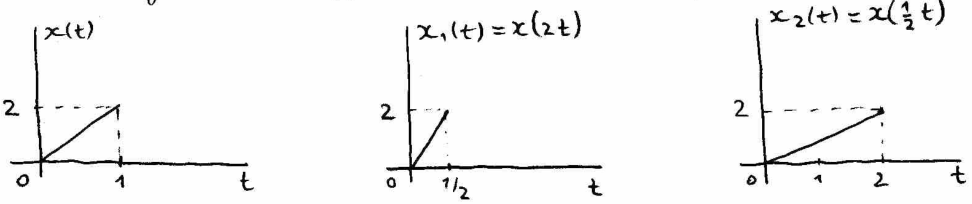
$$E_x = \lim_{T\to\infty}\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2\,dt = \int_0^1 2^2\,dt = 4t\Big|_0^1 = 4(1-0) = 4$$

$$E_{x_1} = \lim_{T\to\infty}\int_{-T/2}^{T/2} |x_1(t)|^2\,dt = \int_0^{1/2} 2^2\,dt = 4t\Big|_0^{1/2} = 4\left(\tfrac{1}{2}-0\right) = 2$$

$$E_{x_2} = \lim_{T\to\infty}\int_{-T/2}^{T/2} |x_2(t)|^2\,dt = \int_0^{2} 2^2\,dt = 4t\Big|_0^{2} = 4(2-0) = 8$$

ΑΣΚΗΣΗ

Να υπολογιστεί η ενέργεια καθενός από τα σήματα.



ΛΥΣΗ

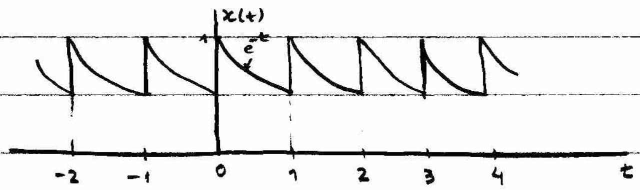
$$E_x = \frac{4}{3}$$ (Βλ. προηγούμενη άσκηση)

$$E_{x_1} = \lim_{T\to\infty}\int_{-T/2}^{T/2} |x_1(t)|^2\,dt = \int_0^{1/2} (4t)^2\,dt = 16\int_0 t^2\,dt = 16\cdot\frac{t^3}{3}\Big|_0^{1/2} = \frac{16}{3}\cdot\frac{1}{8} = \frac{2}{3}$$

$$E_{x_2} = \lim_{T\to\infty}\int_{-T/2}^{T/2} |x_2(t)|^2\,dt = \int_0^{2} t^2\,dt = \frac{t^3}{3}\Big|_0^{2} = \frac{1}{3}\left(2^3-0\right) = \frac{8}{3}$$

Παρατήρηση: Από τις ασκήσεις αυτές διαπιστώνουμε ότι όταν το σήμα "συστέλλεται" στο μισό, η ενέργεια επίσης υποδιπλασιάζεται, ενώ όταν η διάρκεια του σήματος διπλασιάζεται (δηλ. το σήμα "διαστέλλεται"), η ενέργεια του σήματος επίσης διπλασιάζεται.

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί η μέση ισχύς του σήματος $x(t)$



Λύση Αφού πρόκειται για περιοδικό σήμα με $T=1$ έχουμε:

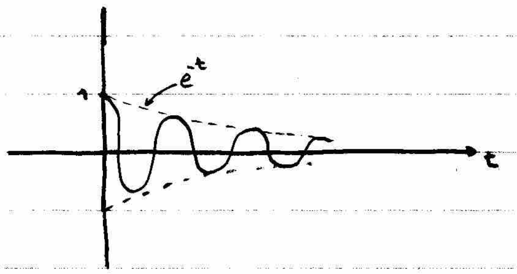
$$P_x = \frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2 dt = \frac{1}{1}\int_0^1 (e^{-t})^2 dt = \int_0^1 e^{-2t} dt = \frac{-1}{2} e^{-2t}\Big|_0^1 =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(e^{-2} - e^{0}\right) = \frac{-1}{2}\left(0.1353 - 1\right) = 0.4323$$

ΑΣΚΗΣΗ Δίνεται το σήμα $x(t) = e^{-t}\cos t \; u(t)$. (α) Να το σχεδιάσετε
(β) Να δείξετε ότι πρόκειται για σήμα ενέργειας, δηλαδή ότι $E_x < \infty$
(γ) Να υπολογίσετε την ενέργειά του.

ΛΥΣΗ

α. $x(t) = e^{-t}\cos(t)\, u(t)$



β. $$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_0^{\infty} e^{-2t}\cos^2(t)\, dt \leq \int_0^{\infty} e^{-2t} dt = -\frac{1}{2} e^{-2t}\Big|_0^{\infty} =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(0 - e^{0}\right) = \frac{1}{2}$$

Άρα πρόκειται για σήμα ενέργειας αφού η ενέργειά του είναι πεπερασμένη. Για την απόδειξη χρησιμοποιήσαμε ότι $\cos^2 t \leq 1$.

γ. $$E_x = \int_0^{\infty} e^{-2t}\cos^2 t\, dt = \left\langle \cos 2t = 2\cos^2 t - 1 \Rightarrow \cos^2 t = \frac{1}{2}(1 + \cos 2t) \right\rangle$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-2t} dt}_{E_1} + \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-2t}\cos 2t\, dt}_{E_2} = E_1 + E_2$$

$$E_1 = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\int_0^{\infty} d\left(e^{-2t}\right) = -\frac{1}{4} e^{-2t}\Big|_0^{\infty} = -\frac{1}{4}(0 - 1) = \frac{1}{4}$$

$$E_2 = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-2t}\cos 2t\, dt = \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{1}{2} e^{-2t}\, d(\sin 2t) = \langle \text{ολοκλήρωση κατά παράγοντες} \rangle$$

$$= \frac{1}{4}\left[e^{-2t}\sin 2t\Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty}\sin 2t\, d\left(e^{-2t}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left[(0 - 0) - (-2)\int_0^{\infty} e^{-2t}\sin 2t\, dt\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)\int_0^{\infty} e^{-2t}\, d(\cos 2t) =$$

$$= -\frac{1}{4}\left[e^{-2t}\cos 2t\Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty}\cos 2t\, d\left(e^{-2t}\right)\right] =$$

$$= -\frac{1}{4}\left[(0 - 1) + 2\int_0^{\infty} e^{-2t}\cos 2t\, dt\right] = \frac{1}{4} - \overbrace{\frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-2t}\cos 2t\, dt}^{E_2} =$$

$$= \frac{1}{4} - E_2 \Rightarrow E_2 = \frac{1}{4} - E_2 \Rightarrow 2E_2 = \frac{1}{4} \Rightarrow E_2 = \frac{1}{8}$$

Τελικά: $E = E_1 + E_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟΤΗΤΑ

ΤΟ ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΠΕΡΙΟΔΙΚΩΝ ΣΗΜΑΤΩΝ ΣΥΝΕΧΟΥΣ-ΧΡΟΝΟΥ **ΔΕΝ** ΔΙΝΕΙ ΠΑΝΤΟΤΕ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΣΗΜΑ.

Η ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε το άθροισμα περιοδικών σημάτων ΣΧ να δίνει περιοδικό σήμα είναι **όλοι** οι λόγοι της περιόδου του πρώτου σήματος προς την περίοδο καθενός από τα άλλα σήματα να είναι **ρητοί** αριθμοί, δηλαδή λόγοι ακεραίων.

$$\frac{T_1}{T_i} = \frac{n_i}{n_1} \qquad 2 \le i \le N$$

όπου N το πλήθος των προς άθροιση σημάτων

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Τα σήματα $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ έχουν αντίστοιχα περιόδους $\frac{8}{3}$, 1.26, $\sqrt{2}$ sec.

Τα σήματα $y_1(t)$ $y_2(t)$, $y_3(t)$ — // — 1.08, 3.6, 2.025 sec.

Να εξεταστεί εάν τα σήματα $x(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t)$ και $y(t) = y_1(t) + y_2(t) + y_3(t)$ είναι περιοδικά και να υπολογιστεί η περίοδός τους.

Λύση

Για το σήμα $x(t)$ έχουμε:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{8/3}{1.26} = \frac{800}{378} = \frac{400}{189} \quad \text{ρητός}$$

$$\frac{T_1}{T_3} = \frac{8/3}{\sqrt{2}} = \frac{8}{3\sqrt{2}} \quad \text{άρρητος.}$$

Άρα το $x(t)$ **δεν** είναι περιοδικό

Για το σήμα $y(t)$ έχουμε:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{1.08}{3.6} = \frac{108}{360} = \frac{3}{10} = \frac{3}{2 \cdot 5} \quad \text{ρητός}$$

$$\frac{T_1}{T_3} = \frac{1.08}{2.025} = \frac{1080}{2025} = \frac{8}{15} = \frac{8}{3 \cdot 5} \quad \text{ρητός}$$

Άρα το $y(t)$ είναι περιοδικό

Η περίοδος του $y(t)$ είναι: $T = T_1 \cdot n = (1.08) \cdot (30) = 32.4$ sec

όπου n είναι το ΕΚΠ των παρονομαστών,

δηλ. $n = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$

ΑΣΚΗΣΗ Έστω $x_1(t), x_2(t)$ περιοδικά σήματα με βασικές περιόδους T_1, T_2. Υπό ποιες προϋποθέσεις το άθροισμά τους $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ είναι περιοδικό; Ποια η βασική περίοδος του $x(t)$, εάν αυτό είναι περιοδικό;

ΛΥΣΗ Αφού τα $x_1(t), x_2(t)$ είναι περιοδικά σήματα με βασικές περιόδους T_1, T_2 αντίστοιχα, θα ισχύει:

$$x_1(t) = x_1(t+T_1) = x_1(t+mT_1) \quad \text{όπου } m \text{ θετικός ακέραιος}$$
$$x_2(t) = x_2(t+T_2) = x_2(t+kT_2) \quad \text{όπου } k \text{ θετικός ακέραιος}$$

Επομένως

$$x(t) = x_1(t+mT_1) + x_2(t+kT_2)$$

Για να είναι περιοδικό το σήμα $x(t)$ με περίοδο T θα πρέπει

$$x(t+T) = x(t) \Rightarrow$$

$$x_1(t+T) + x_2(t+T) = x_1(t+mT_1) + x_2(t+kT_2)$$

Άρα θα πρέπει

$$mT_1 = kT_2 = T \Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{k}{m} = \text{ρητός}$$

Συμπέρασμα: Για να είναι περιοδικό το άθροισμα δύο περιοδικών σημάτων, πρέπει ο λόγος των περιόδων τους να είναι <u>ρητός</u> αριθμός.

Παρατήρηση: Η βασική περίοδος T του περιοδικού σήματος που προκύπτει, ισούται με το ΕΚΠ των περιόδων T_1 και T_2, δηλ. $T = \text{ΕΚΠ}(T_1, T_2)$ ①

Η βασική περίοδος υπολογίζεται εύκολα από τη σχέση

$$T = mT_1 = kT_2$$

εάν οι ακέραιοι m, k είναι πρώτοι αριθμοί μεταξύ τους.

① Εάν T_1, T_2 ρητοί, π.χ. $T_1 = \frac{p_1}{q_1}$, $T_2 = \frac{p_2}{q_2}$ όπου p_1, q_1, p_2, q_2 ακέραιοι, τότε ισχύει:

$$T = \text{ΕΚΠ}(T_1, T_2) = \frac{\text{ΕΚΠ}(p_1, p_2)}{\text{ΜΚΔ}(q_1, q_2)}$$

ΑΣΚΗΣΗ Ποιες από τις συναρτήσεις είναι περιοδικές; Ποια η περίοδος των περιοδικών συναρτήσεων;

α. $e^{j\pi t-1}$ β. $\sin(t)+\cos(\sqrt{2}t)$ γ. $2\cos(120\pi t+\frac{\pi}{3})+6\cos(120t)$

δ. $\cos^2(2t-\frac{\pi}{3})$

ΛΥΣΗ Περιοδική είναι μια συνάρτηση για την οποία ισχύει $x(t+T)=x(t)$ $\forall t$, όπου T η περίοδος.

α. $x(t)=e^{j\pi t-1} \rightsquigarrow x(t+T)=e^{j\pi(t+T)-1}=e^{j\pi T}e^{j\pi t-1}=e^{j\pi T}x(t)$

Για $T=2 \rightarrow e^{j\pi 2}=1$ και συνεπώς $x(t+T)=x(t)$.

Άρα η συνάρτηση είναι περιοδική με περίοδο $T=2$.

β. Η συνάρτηση $\sin t$ είναι περιοδική με περίοδο 2π. Η συνάρτηση $\cos(\sqrt{2}t)$ είναι επίσης περιοδική με περίοδο $\frac{2\pi}{\sqrt{2}}$. Για να είναι το άθροισμα των συναρτήσεων περιοδική συνάρτηση πρέπει ο λόγος των περιόδων να είναι ρητός αριθμός. Στην προκειμένη περίπτωση αυτό δεν ισχύει αφού $\frac{T_1}{T_2}=\frac{2\pi}{\frac{2\pi}{\sqrt{2}}}=\sqrt{2}$ άρρητος. Άρα η συνάρτηση του αθροίσματος δεν είναι περιοδική.

γ. $\Omega_1=120\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{T_1}=120\pi \Rightarrow T_1=\frac{1}{60}$

$\Omega_2=120 \Rightarrow \frac{2\pi}{T_2}=120 \Rightarrow T_2=\frac{2\pi}{120}=\frac{\pi}{60}$

$\Bigg\} \quad \frac{T_1}{T_2}=\frac{\frac{1}{60}}{\frac{\pi}{60}}=\frac{1}{\pi}$ άρρητος

Άρα η συνάρτηση δεν είναι περιοδική.

δ. Από την τριγωνομετρική σχέση $\cos 2\varphi=2\cos^2\varphi-1 \Rightarrow \cos^2\varphi=\frac{1}{2}(1+\cos 2\varphi)$ η σχέση που μας δίνεται γράφεται:

$\cos^2(2t-\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}\left[1+\cos\left(4t-\frac{2\pi}{3}\right)\right]$

Η συνάρτηση αυτή είναι περιοδική με περίοδο $T=\frac{2\pi}{\Omega}=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$

ΑΣΚΗΣΗ Να εξεταστεί ως προς την περιοδικότητα το σήμα

$$x(t) = \cos\left(\frac{2}{3}t + 30^\circ\right) + \sin\left(\frac{4}{5}t + 45^\circ\right)$$

Λύση

$$\left.\begin{aligned} T_1 &= \frac{2\pi}{\Omega_1} = \frac{2\pi}{\frac{2}{3}} = 3\pi \\ T_2 &= \frac{2\pi}{\Omega_2} = \frac{2\pi}{\frac{4}{5}} = \frac{10}{4}\pi = \frac{5}{2}\pi \end{aligned}\right\} \frac{T_1}{T_2} = \frac{3\pi}{\frac{5}{2}\pi} = \frac{6}{5} \text{ ρητός και άρα περιοδικό}$$

Για να είναι περιοδικό πρέπει $x(t+T) = x(t)$, δηλαδή

$$\left.\begin{aligned} \frac{2}{3}T &= 2\kappa\pi \\ \frac{4}{5}T &= 2\lambda\pi \end{aligned}\right\} T = 3\kappa\pi = \frac{5}{2}\lambda\pi \Rightarrow \frac{\kappa}{\lambda} = \frac{\frac{5}{2}\pi}{3\pi} = \frac{5}{6}$$

Άρα για $\kappa=5, \lambda=6$ έχουμε $T = 15\pi$ που είναι η περίοδος του $x(t)$

Εναλλακτικά:

$$T = \text{ΕΚΠ}(T_1, T_2) = \frac{\text{ΕΚΠ}(3\pi, 5\pi)}{\text{ΜΚΔ}(1,2)} = \frac{15\pi}{1} = 15\pi$$

ΑΣΚΗΣΗ Να εξεταστούν ως προς την περιοδικότητά τους τα σήματα. Να προσδιοριστεί η βασική περίοδος για τα περιοδικά από αυτά.

α. $x_1(t) = 7 + 6\cos\left(\frac{1}{2}t + \theta_1\right) + 5\cos\left(\frac{2}{3}t + \theta_2\right) + 4\cos\left(\frac{7}{6}t + \theta_3\right)$

β. $x_2(t) = 3\cos(2t + \varphi_1) + 7\sin(\pi t + \varphi_2)$

γ. $x_3(t) = 2\sin(3\sqrt{2}\,t + \theta) + 5\cos(6\sqrt{2}\,t + \varphi)$

ΛΥΣΗ α.

$$\left.\begin{aligned} T_1 &= \frac{2\pi}{\Omega_1} = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi \\ T_2 &= \frac{2\pi}{\Omega_2} = \frac{2\pi}{2/3} = 3\pi \\ T_3 &= \frac{2\pi}{\Omega_3} = \frac{2\pi}{7/6} = \frac{12}{7}\pi \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\frac{T_1}{T_2} = \frac{4}{3} \text{ ρητός} \\ &\frac{T_1}{T_3} = \frac{4\pi}{\frac{12\pi}{7}} = \frac{28}{12} \text{ ρητός} \end{aligned}$$

Άρα το $x_1(t)$ είναι περιοδικό

Για να βρούμε την περίοδο T βασιζόμαστε στη σχέση $x_1(t+T) = x_1(t)$

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2}T &= 2k\pi \\ \frac{2}{3}T &= 2\lambda\pi \\ \frac{7}{6}T &= 2\mu\pi \end{aligned}\right\} T = 4k\pi = 3\lambda\pi = \frac{12}{7}\mu\pi \Rightarrow \begin{cases} \frac{k}{\lambda} = \frac{3}{4} \\ \frac{k}{\mu} = \frac{\frac{12}{7}}{4} = \frac{12}{4\cdot 7} = \frac{3}{7} \end{cases}$$

Για $k=3$, $\lambda=4$, $\mu=7$ έχουμε $T = 12\pi$ που είναι η περίοδος του $x_1(t)$.

β.

$$\left.\begin{aligned} T_1 &= \frac{2\pi}{\Omega_1} = \frac{2\pi}{2} = \pi \\ T_2 &= \frac{2\pi}{\Omega_2} = \frac{2\pi}{\pi} = 2 \end{aligned}\right\} \frac{T_1}{T_2} = \frac{\pi}{2} \text{ άρρητος.}$$

Άρα το $x_2(t)$ είναι <u>μη</u> περιοδικό

γ.

$$\left.\begin{aligned} T_1 &= \frac{2\pi}{\Omega_1} = \frac{2\pi}{3\sqrt{2}} \\ T_2 &= \frac{2\pi}{\Omega_2} = \frac{2\pi}{6\sqrt{2}} \end{aligned}\right\} \frac{T_1}{T_2} = \frac{\frac{2\pi}{3\sqrt{2}}}{\frac{2\pi}{6\sqrt{2}}} = 2 \text{ ρητός.}$$

Άρα το $x_3(t)$ είναι περιοδικό.

$$\left.\begin{aligned} 3\sqrt{2}\,T &= 2k\pi \\ 6\sqrt{2}\,T &= 2\lambda\pi \end{aligned}\right\} T = \frac{2\pi}{3\sqrt{2}}k = \frac{2\pi}{6\sqrt{2}}\lambda \Rightarrow \frac{k}{\lambda} = \frac{\frac{2\pi}{6\sqrt{2}}}{\frac{2\pi}{3\sqrt{2}}} = \frac{1}{2}$$

Για $k=1$ και $\lambda=2$ έχουμε $T = \frac{2\pi}{3\sqrt{2}}$ ή $\Omega = 3\sqrt{2}$ που είναι η περίοδος και η κυκλική συχνότητα του σήματος $x_3(t)$, αντίστοιχα.

ΑΣΚΗΣΗ

Ποια από τα σήματα είναι περιοδικά;

1. $x_1(t) = \cos^2(2\pi t)$

2. $x_2(t) = e^{-2t}\cos(2\pi t)$

Λύσεις:

1. Για να είναι περιοδικό το σήμα θα πρέπει να υπάρχει αριθμός T για τον οποίο να είναι $x_1(t+T) = x_1(t)$ για κάθε τιμή του χρόνου t. Έχουμε λοπόν

$$\begin{aligned} x_1(t+T) &= \cos^2\left(2\pi(t+T)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(1+\cos(4\pi(t+T)\right) \end{aligned}$$

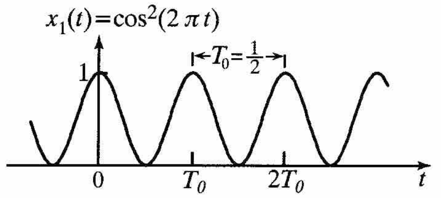
όπου χρησιμοποιήθηκε η γνωστή τριγωνομετρική ταυτότητα $\cos^2(\theta) = \frac{1}{2}[1 + \cos(2\theta)]$. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \cos(4\pi(t+T)) &= \cos(4\pi t + 4\pi T) \\ &= \cos(4\pi t) \end{aligned}$$

για $4\pi T = 2k\pi \Rightarrow T = \frac{k}{2}$ επομένως

$$\begin{aligned} x_1(t+T) &= \frac{1}{2}\left(1+\cos(4\pi(t+T)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(1+\cos(4\pi t)\right) \\ &= \cos^2\left(2\pi t\right) \\ &= x_1(t) \qquad (1) \end{aligned}$$

Έτσι το σήμα $x_1(t) = \cos^2(2\pi t)$ είναι περιοδικό με θεμελιώδη περίοδο $T = \frac{1}{2}$sec Στο Σχήμα έχει γίνει η γραφική παράσταση του σήματος $x_1(t) = \cos^2(2\pi t)$ σε συνάρτηση με το χρόνο στο οποίο φαίνεται ότι το σήμα είναι περιοδικό.



Σχήμα 1 Η γραφική παράσταση του σήματος $x_1(t) = \cos^2(2\pi t)$.

Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να είχαμε προχωρήσει ως εξής:

$x_1(t) = \cos^2(2\pi t) = \frac{1}{2}\left[1 + \cos(4\pi t)\right] = x_{11}(t) + x_{12}(t)$

Το σήμα $x_{11}(t) = \frac{1}{2}$, το οποίο ονομάζεται και dc, μπορεί να θεωρηθεί ότι έχει οποιοδήποτε περίοδο και δεν επηρεάζει την περίοδο του τελικού σήματος.

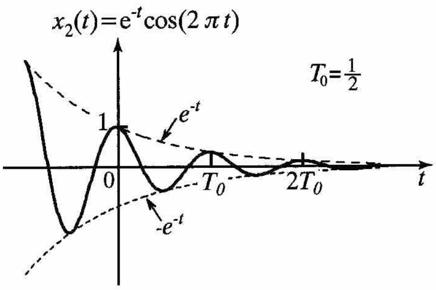
Το σήμα $x_{12}(t) = \frac{1}{2}\cos(4\pi t)$ έχει περίοδο: $\Omega_2 = \frac{2\pi}{T_2} \Rightarrow T_2 = \frac{2\pi}{\Omega_2} = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}$

Άρα, το σήμα $x_1(t)$ θα είναι περιοδικό με περίοδο $T = T_2 = \frac{1}{2}$ (sec).

2. Για να είναι περιοδικό το σήμα $x_2(t)$ πρέπει $x_2(t+T) = x_2(t)$ για κάθε τιμή του χρόνου t. Έχουμε λοπόν

$$
\begin{aligned}
x_2(t+T) &= e^{-2(t+T)}\cos\left(2\pi(t+T)\right) \\
&= e^{-2t}e^{-2T}\cos\left(2\pi t + 2\pi T\right) \\
&\overset{\text{για T ακέραιο}}{=} e^{-2t}e^{-2T}\cos(2\pi t) \\
&= x_2(t)e^{-2T}
\end{aligned}
$$

Παρατηρούμε ότι $x_2(t+T) = x_2(t)$ ισχύει μόνο για $T = 0$ επομένως το σήμα $x_2(t)$ είναι μη περιοδικό. Στο Σχήμα έχει γίνει η γραφική παράσταση του σήματος $x_2(t) = e^{-t}\cos(2\pi t)$ σε συνάρτηση με το χρόνο στο οποίο φαίνεται ότι το σήμα ΔΕΝ είναι περιοδικό.



Σχήμα 2 Η γραφική παράσταση του σήματος $x_2(t) = e^{-t}\cos(2\pi t)$

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

α. $\int_{-\infty}^{\infty} (t-2)^2 \delta(t-2)\, dt$ β. $\int_{0}^{5} \cos(2\pi t)\, \delta(t-\frac{1}{2})\, dt$

γ. $\int_{-\infty}^{\infty} t^2 \delta'(t-2)\, dt$ δ. $\int_{-\infty}^{\infty} (e^{-5t} + \sin 10\pi t)\, \delta'(t)\, dt$

ΛΥΣΗ

α. $\int_{-\infty}^{\infty} (t-2)^2 \delta(t-2)\, dt = (t-2)^2 \Big|_{t=2} = 0$

β. $\int_{0}^{5} \cos(2\pi t)\, \delta(t-\frac{1}{2})\, dt = \cos(2\pi t)\Big|_{t=\frac{1}{2}} = \cos(\pi) = -1$

γ. $\int_{-\infty}^{\infty} t^2 \delta'(t-2)\, dt = (-1)^1 \frac{d(t^2)}{dt}\Big|_{t=2} = -2t\Big|_{t=2} = -4$

δ. $\int_{-\infty}^{\infty} (e^{-5t} + \sin(10\pi t))\, \delta'(t)\, dt = -\frac{d(e^{-5t} + \sin 10\pi t)}{dt}\Big|_{t=0} = 5e^{-5t} - 10\pi\cos(10\pi t)\Big|_{t=0} = 5 - 10\pi$

Σημείωση: Για την επίλυση των γ, δ κάναμε χρήση των ιδιοτήτων της παραγώγου της κρουστικής συνάρτησης.
Η πρώτη παράγωγος $\delta'(t)$ ονομάζεται συνάρτηση <u>doublet</u> και έχει τις εξής ιδιότητες:

$$A\,\delta'(t-t_0) = 0 \qquad t \neq t_0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} A\,\delta'(t-t_0)\, dt = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, A\,\delta'(t-t_0)\, dt = -A\,x'(t_0)$$

όπου η $x(t)$ είναι συνεχής συνάρτηση με συνεχή πρώτη παράγωγο στο σημείο $t=t_0$.

Άλλες ιδιότητες: $t\,\delta'(t) = -\delta(t)$

$$\delta'(-t) = -\delta'(t)$$

$$\delta'(t) * f(t) = \delta(t) * f'(t) = f'(t)$$

Β - ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΧΡΟΝΟΥ

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΧΡΟΝΟΥ

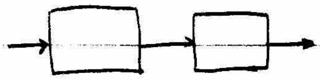
$$x \rightarrow \boxed{T} \rightarrow y$$

Ένα σύστημα είναι ένα μαθηματικό μοντέλο μιας φυσικής διεργασίας που σχετίζει το σήμα εισόδου (διέγερση) με το σήμα εξόδου (απόκριση). Πρόκειται δηλαδή για έναν μετασχηματισμό ή απεικόνιση του x στο y. Μαθηματικά αυτό εκφράζεται ως:

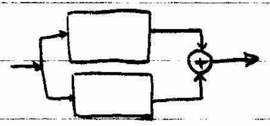
$$y = Tx$$

όπου T ένας τελεστής που εκφράζει τον κανόνα μέσω του οποίου το x μετασχηματίζεται στο y.

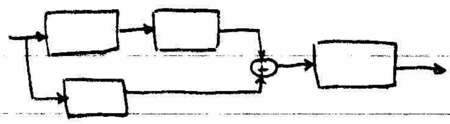
- Σύνδεση συστημάτων: Σε σειρά



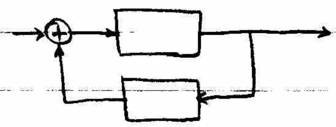
Παράλληλα



Σε σειρά και παράλληλα



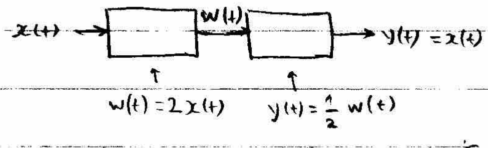
Με ανατροφοδότηση



- Συστήματα με μνήμη (ή δυναμικά συστήματα) ή χωρίς μνήμη (ή στατικά συστήματα)

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)\,d\tau = \frac{q(t)}{C} \qquad\qquad y(t) = \alpha\, x(t)$$

- Αντιστρέψιμα συστήματα: είναι αυτά στα οποία διαφορετικές είσοδοι παράγουν διαφορετικές εξόδους.



Παράδειγμα μη αντιστρέψιμου συστήματος:

$$y(t) = x^2(t) \Rightarrow x(t) = \pm\sqrt{y(t)}$$

Άλλος ορισμός αντιστρεπτού συστήματος: Ένα σύστημα καλείται αντιστρεπτό εάν μπορούμε να υπολογίσουμε μονοσήμαντα την είσοδο x από την έξοδο αυτού y.

- Αιτιατό σύστημα είναι εκείνο του οποίου η έξοδος σε κάθε χρονική στιγμή εξαρτάται μόνο από τιμές της εισόδου τη χρονική εκείνη στιγμή καθώς και σε προηγούμενες χρονικές στιγμές. Το σύστημα δηλαδή δεν προβλέπει τιμές της εισόδου σε μελλοντικές χρονικές στιγμές.
  - Παράδειγμα μη αιτιατού συστήματος: $y(t) = x(t+1)$
  - Όλα τα στατικά συστήματα, δηλαδή τα συστήματα χωρίς μνήμη, είναι αιτιατά, αφού σ' αυτά η έξοδος αποκρίνεται μόνο στην τρέχουσα τιμή της εισόδου, π.χ. $y(t) = \alpha x(t)$, όπου α σταθερά.
  - Όλα τα φυσικά συστήματα είναι αιτιατά.

- Ευσταθές σύστημα είναι εκείνο του οποίου η έξοδος παραμένει φραγμένη για οποιαδήποτε φραγμένη είσοδο. (ΦΕΦΕ: Φραγμένης Εισόδου Φραγμένης Εξόδου)

  Η είσοδος $x(t)$ είναι φραγμένη εάν υπάρχει αριθμός M τέτοιος ώστε
  $$|x(t)| \le M \quad \forall t$$
  Ένα σύστημα ονομάζεται ευσταθές ΦΕΦΕ εάν για έναν αριθμό R ισχύει
  $$|y(t)| \le R \quad \forall t.$$

  - Παράδειγμα ευσταθούς συστήματος: $y(t) = 2x(t)$
  - Παράδειγμα μη ευσταθούς (ασταθούς) συστήματος: $y(t) = K\int_0^t x(\tau)d\tau$

    εάν η είσοδος είναι η βηματική, $x(t) = u(t)$, η έξοδος θα είναι η συνάρτηση ράμπας $y(t) = Kt$, η οποία είναι μη φραγμένη.

    Δηλαδή $|x(t)| \le 1$, αλλά $\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty} Kt = \infty$ μη φραγμένη

- Χρονικά αμετάβλητο (αναλλοίωτο) είναι εκείνο το σύστημα για το οποίο μια χρονική μετατόπιση της εισόδου παράγει μια ίση χρονική μετατόπιση της εξόδου.

  Εάν $x(t) \rightarrow y(t)$ τότε $x(t-t_0) \rightarrow y(t-t_0)$

- Παράδειγμα χρονικά αμετάβλητου συστήματος:

  $y(t) = \sin[x(t)]$

  Για $x_1(t) \rightarrow y_1(t) = \sin[x_1(t)]$ (1)

  Για $x_2(t) = x_1(t-t_0) \rightarrow y_2(t) = \sin[x_2(t)] = \sin[x_1(t-t_0)]$ (2)

  Αλλά από την (1) για t ίσο με $t-t_0$ έχουμε: $y_1(t-t_0) = \sin[x_1(t-t_0)]$ (3)

  Παρατηρούμε ότι $y_2(t) = y_1(t-t_0)$, άρα το σύστημα είναι χρονικά αμετάβλητο.

- Παράδειγμα χρονικά μεταβαλλόμενου συστήματος:

  $y(t) = e^{-t} x(t)$

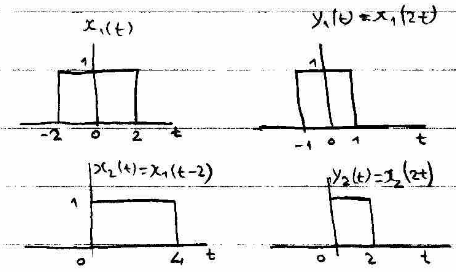
  Για $x_1(t) \rightarrow y_1(t) = e^{-t} x_1(t)$ (1)

  Για $x_2(t) = x_1(t-t_0) \rightarrow y_2(t) = e^{-t} x_2(t) = e^{-t} x_1(t-t_0)$ (2)

  Για $t \rightarrow t-t_0$ η (1) δίνει: $y_1(t-t_0) = e^{-(t-t_0)} x_1(t-t_0) \neq y_2(t)$

- Παράδειγμα χρονικά μεταβαλλόμενου συστήματος:

  $y(t) = x(2t)$

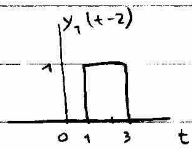


  Για $x_1(t) \rightarrow y_1(t) = x_1(2t)$ (1)

  Για $x_2(t) = x_1(t-t_0) \rightarrow y_2(t) = x_2(2t)$

  Για $t \rightarrow t-t_0 \rightarrow y_1(t-t_0) = x_1[2(t-t_0)]$

  $y_2(t) \neq y_1(t-t_0)$



Γραφική απεικόνιση για $t_0 = 2$

ΑΣΚΗΣΗ (ΧΡΟΝΙΚΗ ΑΜΕΤΑΒΛΗΤΟΤΗΤΑ)

Να εξεταστεί εάν τα συστήματα που περιγράφονται από τις παρακάτω σχέσεις είναι χρονικά αμετάβλητα.

(α) $y(t) = t\,x(t) + 5$ (β) $y(t) = \sin[x(t)]$

(γ) $y(t) = x(t-5)$ (δ) $y(t) = x^2(t)$

Λύση

(α) Για είσοδο $x_1(t) \rightarrow y_1(t) = t\,x_1(t) + 5$

Για είσοδο $x_2(t) = x_1(t-\tau) \rightarrow y_2(t) = t\,x_1(t-\tau) + 5 \neq (t-\tau)\,x_1(t-\tau) + 5 = y_1(t-\tau)$

Άρα το σύστημα δεν είναι χρονικά αμετάβλητο.

(β) Για είσοδο $x_1(t) \rightarrow y_1(t) = \sin[x_1(t)]$

Για είσοδο $x_2(t) = x_1(t-\tau) \rightarrow y_2(t) = \sin[x_1(t-\tau)] = y_1(t-\tau)$

Άρα το σύστημα είναι χρονικά αμετάβλητο.

(γ) Για είσοδο $x_1(t) \rightarrow y_1(t) = x_1(t-5)$

Για είσοδο $x_2(t) = x_1(t-\tau) \rightarrow y_2(t) = x_1(t-\tau-5) = y_1(t-\tau)$

Άρα το σύστημα είναι χρονικά αμετάβλητο.

(δ) Για είσοδο $x_1(t) \rightarrow y_1(t) = x_1^2(t)$

Για είσοδο $x_2(t) = x_1(t-\tau) \rightarrow y_2(t) = x_1^2(t-\tau) = y_1(t-\tau)$

Άρα το σύστημα είναι χρονικά αμετάβλητο.

• Γραμμικό σύστημα είναι εκείνο για το οποίο ισχύει η αρχή της υπέρθεσης: (*)

Εάν $x_1(t) \to y_1(t)$, $x_2(t) \to y_2(t)$

τότε $\alpha x_1(t) + b x_2(t) \longrightarrow \alpha y_1(t) + b y_2(t)$

όπου α, b οποιεσδήποτε μιγαδικές σταθερές.

- Παράδειγμα γραμμικού συστήματος: $y(t) = t\,x(t)$

$x_1(t) \to y_1(t) = t\,x_1(t)$

$x_2(t) \to y_2(t) = t\,x_2(t)$

Έστω $x_3(t) = \alpha x_1(t) + b\,x_2(t)$

$$\begin{aligned} x_3(t) \to y_3(t) &= t\,x_3(t) = \\ &= t\left[\alpha x_1(t) + b x_2(t)\right] = \\ &= \alpha \underbrace{t\,x_1(t)}_{y_1(t)} + b \underbrace{t\,x_2(t)}_{y_2(t)} = \\ &= \alpha\, y_1(t) + b\, y_2(t) \end{aligned}$$

Δηλαδή $\alpha x_1(t) + b x_2(t) \longrightarrow \alpha y_1(t) + b\, y_2(t)$ άρα γραμμικό.

- Παράδειγμα γραμμικού συστήματος: $y(t) = \sin 2t \;\; x(t)$

$x_1(t) \to y_1(t) = x_1(t)\sin 2t$

$x_2(t) \to y_2(t) = x_2(t)\sin 2t$

Έστω $x_3(t) = \alpha x_1(t) + b\,x_2(t)$

$$\begin{aligned} x_3(t) \to y_3(t) &= x_3(t)\sin 2t = \\ &= \left[\alpha x_1(t) + b x_2(t)\right]\sin 2t = \\ &= \alpha \underbrace{x_1(t)\sin 2t}_{y_1(t)} + b \underbrace{x_2(t)\sin 2t}_{y_2(t)} = \\ &= \alpha\, y_1(t) + b\, y_2(t) \end{aligned}$$

άρα γραμμικό

(*) Η ιδιότητα της υπέρθεσης εμπεριέχει τις ιδιότητες της επαλληλίας και της κλιμάκωσης.

Επαλληλία: Εάν $Tx_1 = y_1$, $Tx_2 = y_2$ τότε $T\{x_1 + x_2\} = y_1 + y_2$

Κλιμάκωση: $T\{\alpha x\} = \alpha y$

Συνέπεια της ιδιότητας της κλιμάκωσης των γραμμικών συστημάτων είναι ότι μηδενική είσοδος παράγει μηδενική έξοδο. Για παράδειγμα, ένα σύστημα της μορφής $y(t) = \alpha x(t) + b$ είναι ΜΗ γραμμικό, αφού για $x(t) = 0 \rightsquigarrow y(t) = b$

ΓΡΑΜΜΙΚΟΤΗΤΑ

Ορισμός: Ένα σύστημα είναι γραμμικό όταν ισχύει:

$$\left.\begin{array}{l} x_1(t) \rightsquigarrow y_1(t) \\ x_2(t) \rightsquigarrow y_2(t) \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha x_1(t) + b x_2(t) \longrightarrow \alpha y_1(t) + b y_2(t)$$

Δηλαδή όταν ισχύει η αρχή της υπέρθεσης, η οποία συμπεριλαμβάνει τις ιδιότητες της επαλληλίας $[x_1(t) + x_2(t) \rightsquigarrow y_1(t) + y_2(t)]$ και της κλιμάκωσης $[\alpha x_1(t) \rightsquigarrow \alpha y_1(t)]$

Άσκηση

Να εξεταστούν ως προς τη γραμμικότητα τα συστήματα που περιγράφονται από τις εξισώσεις:

(α) $y(t) = 3x^2(t)$ (β) $y(t) = 3x(t)$ (γ) $y(t) = 3x(t) + 2$

Λύση

(α) Για $x(t) = x_1(t) \rightsquigarrow y_1(t) = 3x_1^2(t)$

Για $x(t) = x_2(t) \rightsquigarrow y_2(t) = 3x_2^2(t)$

Για $x(t) = \alpha x_1(t) + b x_2(t) \rightsquigarrow y(t) = 3[\alpha x_1(t) + b x_2(t)]^2 =$

$$= 3\left[\alpha^2 x_1^2(t) + b^2 x_2^2(t) + 2\alpha b\, x_1(t) x_2(t)\right]$$

$$\neq \alpha y_1(t) + b y_2(t) = \alpha 3x_1^2(t) + b 3x_2^2(t)$$

Άρα το σύστημα αυτό είναι ΜΗ γραμμικό.

(β) Για $x(t) = x_1(t) \rightsquigarrow y_1(t) = 3x_1(t)$

Για $x(t) = x_2(t) \rightsquigarrow y_2(t) = 3x_2(t)$

Για $x(t) = \alpha x_1(t) + b x_2(t) \longrightarrow y(t) = 3[\alpha x_1(t) + b x_2(t)] =$

$$= \alpha \underbrace{3x_1(t)}_{y_1(t)} + b \underbrace{3x_2(t)}_{y_2(t)} =$$

$$= \alpha y_1(t) + b y_2(t)$$ Άρα γραμμικό.

(γ) Για $x(t) = x_1(t) \rightsquigarrow y_1(t) = 3x_1(t) + 2$

Για $x(t) = x_2(t) \longrightarrow y_2(t) = 3x_2(t) + 2$

Για $x(t) = \alpha x_1(t) + b x_2(t) \rightsquigarrow y(t) = 3[\alpha x_1(t) + b x_2(t)] + 2 =$

$$= 3\alpha x_1(t) + 2\alpha - 2\alpha + 3b x_2(t) + 2b - 2b + 2 =$$

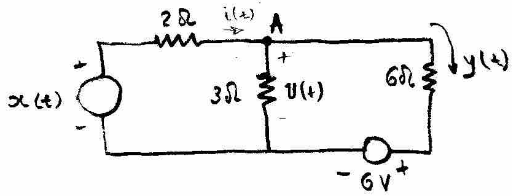
$$= \alpha[3x_1(t) + 2] - 2\alpha + b[3x_2(t) + 2] - 2b + 2 =$$

$$= \alpha y_1(t) + b y_2(t) - 2\alpha - 2b + 2 \neq \alpha y_1(t) + b y_2(t)$$

Άρα το σύστημα είναι ΜΗ γραμμικό.

ΑΣΚΗΣΗ (Γραμμικότητα)

Να εξεταστεί ως προς τη γραμμικότητα το σύστημα του σχήματος:



Λύση

Κόμβος A: $\dfrac{x(t)-\upsilon(t)}{2} = y(t) + \dfrac{\upsilon(t)}{3} \Rightarrow 3x(t) - 3\upsilon(t) = 6y(t) + 2\upsilon(t) \Rightarrow 3x(t) - 5\upsilon(t) = 6y(t)$ (1)

Βρόχος εξόδου: $\upsilon(t) = 6y(t) + 6$ (2)

$$(1),(2) \rightarrow 3x(t) - 5\left[6y(t) + 6\right] = 6y(t) \Rightarrow$$

$$3x(t) - 30y(t) - 30 = 6y(t) \Rightarrow$$

$$3x(t) - 30 = 36y(t) \Rightarrow$$

$$y(t) = \left(\tfrac{1}{12}\right)x(t) - \left(\tfrac{5}{6}\right)$$

Εξετάζω τώρα τη γραμμικότητα του συστήματος.

Για $x(t) = x_1(t) \rightarrow y_1(t) = \left(\frac{1}{12}\right)x_1(t) - \frac{5}{6}$

Για $x(t) = x_2(t) \rightarrow y_2(t) = \left(\frac{1}{12}\right)x_2(t) - \frac{5}{6}$

Για $x(t) = \alpha x_1(t) + b x_2(t) \rightarrow y(t) = \left(\frac{1}{12}\right)\left[\alpha x_1(t) + b x_2(t)\right] - \frac{5}{6} =$

$$= \alpha\left(\tfrac{1}{12}\right)x_1(t) + b\left(\tfrac{1}{12}\right)x_2(t) - \tfrac{5}{6} =$$

$$\neq \alpha y_1(t) + b y_2(t) =$$

$$= \alpha\left(\tfrac{1}{12}\right)x_1(t) - \tfrac{5}{6}\alpha + b\left(\tfrac{1}{12}\right)x_2(t) - \tfrac{5b}{6}$$

Άρα το σύστημα είναι ΜΗ γραμμικό.

ΑΣΚΗΣΗ (Γραμμικότητα)

Να εξεταστεί ως προς τη γραμμικότητα το σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση: $\frac{dy(t)}{dt} + 5y(t) = x(t)$

Λύση

Για $x(t) = x_1(t) \rightarrow \frac{dy_1(t)}{dt} + 5y_1(t) = x_1(t)$ (1)

Για $x(t) = x_2(t) \rightarrow \frac{dy_2(t)}{dt} + 5y_2(t) = x_2(t)$ (2)

Πολλαπλασιάζοντας την (1) επί α και την (2) επί b έχουμε:

$$\frac{\alpha\, dy_1(t)}{dt} + 5\alpha y_1(t) = \alpha x_1(t) \Rightarrow \frac{d(\alpha y_1(t))}{dt} + 5\alpha y_1(t) = \alpha x_1(t) \quad (3)$$

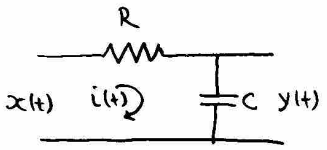
$$\frac{b\, dy_2(t)}{dt} + 5b y_2(t) = b x_2(t) \Rightarrow \frac{d(b y_2(t))}{dt} + 5b y_2(t) = b x_2(t) \quad (4)$$

Προσθέτοντας τις (4), (5) έχουμε:

$$\frac{d}{dt}\left[\alpha y_1(t) + b y_2(t)\right] + 5\left[\alpha y_1(t) + b y_2(t)\right] = \alpha x_1(t) + b x_2(t) \quad (5)$$

Άρα το σύστημα είναι γραμμικό.

ΑΣΚΗΣΗ Είναι το σύστημα του σχήματος γραμμικό;



ΛΥΣΗ

$$x(t) = R\,i(t) + y(t) \Rightarrow x(t) = RC\frac{dy(t)}{dt} + y(t) \qquad (1)$$

Για είσοδο $x_1(t)$ παράγεται η έξοδος $y_1(t)$ και ισχύει:

$$x_1(t) = RC\frac{dy_1(t)}{dt} + y_1(t) \qquad (2)$$

Για είσοδο $x_2(t)$ παράγεται η έξοδος $y_2(t)$ και ισχύει:

$$x_2(t) = RC\frac{dy_2(t)}{dt} + y_2(t) \qquad (3)$$

Πολλαπλασιάζοντας τα δύο μέλη της (2) επί α και τα δύο μέλη της (3) επί b, έχουμε:

$$\alpha\,x_1(t) = \alpha RC\frac{dy_1(t)}{dt} + \alpha\,y_1(t) \qquad (2')$$

$$b\,x_2(t) = b\,RC\frac{dy_2(t)}{dt} + b\,y_2(t) \qquad (3')$$

Προσθέτουμε κατά μέλη:

$$\alpha\,x_1(t) + b\,x_2(t) = \alpha RC\frac{dy_1(t)}{dt} + \alpha\,y_1(t) + b\,RC\frac{dy_2(t)}{dt} + b\,y_2(t) =$$

$$= RC\left[\frac{d\,\alpha y_1(t)}{dt} + \frac{d\,b y_2(t)}{dt}\right] + \left[\alpha\,y_1(t) + b\,y_2(t)\right] =$$

$$= RC\frac{d}{dt}\left[\alpha\,y_1(t) + b\,y_2(t)\right] + \left[\alpha\,y_1(t) + b\,y_2(t)\right]$$

Άρα το σύστημα είναι γραμμικό