ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ ΣΚΟΔΡΑΣ

2023 - 2024

ΑΣΚΗΣΗ Δίνεται το διακριτού χρόνου σήμα $x(n) = \{3, -1, -1, 3\}$ όπου $0 \leq n \leq 3$. Να υπολογίσετε τα $X(0)$ και $\sum_{k=0}^{3} |X(k)|^2$, όπου $X(k)$ ο DFT 4-σημείων του σήματος $x(n)$.

ΛΥΣΗ $X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{3} x(n)\, W_4^{nk}$ αφού $N=4$

Για $k=0$ έχουμε $W_4^{nk} = e^{-j\frac{2\pi}{4}nk} = e^{0} = 1$

Συνεπώς

$$X(0) = \sum_{n=0}^{3} x(n) = 3 + (-1) + (-1) + 3 = 4$$

Από το θεώρημα του Parseval γνωρίζουμε ότι

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2$$

Συνεπώς

$$\sum_{k=0}^{3} |X(k)|^2 = 4 \cdot \sum_{n=0}^{3} |x(n)|^2 = 4 \cdot \left[3^2 + (-1)^2 + (-1)^2 + 3^2\right] = 80$$

Εναλλακτικά, θα μπορούσαν να γίνουν αναλυτικά οι υπολογισμοί των συντελεστών $X(k)$, $k=0,1,2,3$ και από αυτούς να βρεθεί το άθροισμα των τετραγώνων των μέτρων τους, όπως η ενέργεια του σήματος:

$$X(0) = 4 \rightsquigarrow |X(0)|^2 = 16$$

$$X(1) = 4 + 4j \rightsquigarrow |X(1)|^2 = 4^2 + 4^2 = 32$$

$$X(2) = 0 \rightsquigarrow |X(2)|^2 = 0$$

$$X(3) = 4 - 4j \rightsquigarrow |X(3)|^2 = 4^2 + 4^2 = 32$$

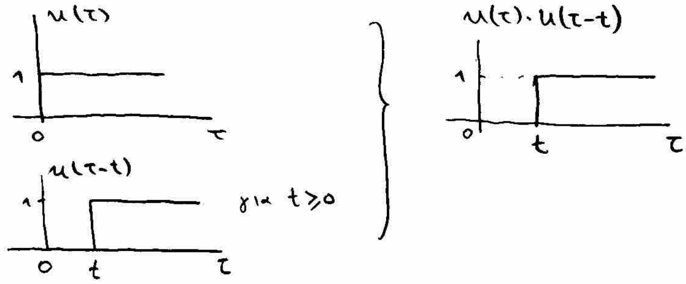
$$\sum_{k=0}^{3} |X(k)|^2 = 16 + 32 + 0 + 32 = 80$$

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί η αυτοσυσχέτιση του σήματος $x(t)=e^{-\alpha t}u(t),\ \alpha>0$.

ΛΥΣΗ Επειδή η συνάρτηση της αυτοσυσχέτισης είναι άρτια, θα υπολογίσουμε αυτή για $t\geq 0$ και στη συνέχεια θα βρούμε τη συμμετρική της.

$$\phi_{xx}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\,x(\tau-t)\,d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha\tau}u(\tau)\cdot e^{-\alpha(\tau-t)}u(\tau-t)\,d\tau=$$

$$=e^{\alpha t}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2\alpha\tau}u(\tau)\,u(\tau-t)\,d\tau \qquad (1)$$



Από τις κυματομορφές διαπιστώνουμε ότι το γινόμενο $u(\tau)\cdot u(\tau-t)$ ισούται με τη μονάδα για $\tau\geq t$. Συνεπώς η σχέση (1) γίνεται:

$$\phi_{xx}(t)=e^{\alpha t}\int_{t}^{\infty}e^{-2\alpha\tau}\,d\tau=e^{\alpha t}\cdot\frac{1}{-2\alpha}\,e^{-2\alpha\tau}\Big|_{t}^{\infty}=$$

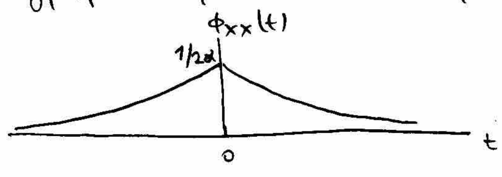
$$=e^{\alpha t}\,\frac{1}{-2\alpha}\left(0-e^{-2\alpha t}\right)=$$

$$=\frac{1}{2\alpha}\,e^{-\alpha t} \qquad (2)$$

Τελικά, δεδομένου ότι η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης έχει άρτια συμμετρία, αυτή θα ισούται με:

$$\phi_{xx}(t)=\frac{1}{2\alpha}\,e^{-\alpha|t|} \qquad (3)$$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης δίνεται στο Σχήμα.



Η ενέργεια του σήματος E_x ισούται με την τιμή της αυτοσυσχέτισης για $t=0$, δηλαδή $E_x=\phi_{xx}(0)$.

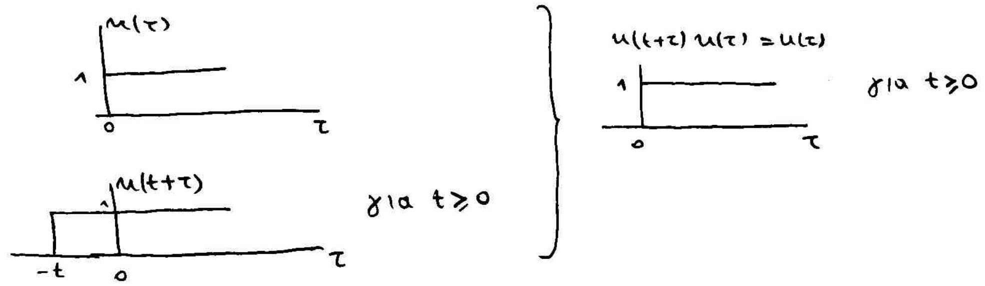
ΣΗΜΕΙΩΣΗ

$$E_x=\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}\left|e^{-\alpha t}u(t)\right|^2dt=\int_{0}^{\infty}e^{-2\alpha t}\,dt=\frac{1}{-2\alpha}\,e^{-2\alpha t}\Big|_{0}^{\infty}=\frac{1}{-2\alpha}(0-1)=\frac{1}{2\alpha}$$

ο Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό $\phi_{xx}(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau)x(\tau)d\tau$ για τον υπολογισμό της αυτοσυσχέτισης του σήματος $x(t)=e^{-\alpha t}u(t)$, $\alpha>0$.

$$\phi_{xx}(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau)\,x(\tau)\,d\tau=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(t+\tau)}u(t+\tau)\,e^{-\alpha\tau}u(\tau)\,d\tau=$$

$$=e^{-\alpha t}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\alpha\tau}u(t+\tau)\,u(\tau)\,d\tau \qquad (4)$$



Από τα παραπάνω διαπιστώνουμε ότι το γινόμενο $u(t+\tau)u(\tau)$ ισούται με τη μονάδα για $\tau\geq 0$. Συνεπώς η σχέση (4) γίνεται:

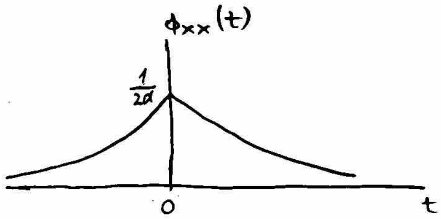
$$\phi_{xx}(t)=e^{-\alpha t}\int_{0}^{\infty} e^{-2\alpha\tau}d\tau=e^{-\alpha t}\cdot\frac{1}{-2\alpha}\,e^{-2\alpha\tau}\Big|_{0}^{\infty}=$$

$$=\frac{e^{-\alpha t}}{-2\alpha}\,(0-1)=$$

$$=\frac{e^{-\alpha t}}{2\alpha} \qquad (5)$$

Τελικά, δεδομένου ότι η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης έχει άρτια συμμετρία, αυτή θα ισούται με:

$$\phi_{xx}(t)=\frac{1}{2\alpha}\,e^{-\alpha|t|} \qquad (6)$$



ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί η αυτοσυσχέτιση καθενός από τα σήματα $x(t)$ και $g(t) = x(t-t_0)$.

ΛΥΣΗ

$$\phi_{xx}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau)\, x(\tau)\, d\tau$$

$$\phi_{gg}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t+\tau)\, g(\tau)\, d\tau = \langle \text{Βλ. σημείωση} \rangle =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau-t_0)\, x(\tau-t_0)\, d\tau = \langle \text{θέτω } \tau - t_0 = l \rangle =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t+l)\, x(l)\, dl =$$

$$= \phi_{xx}(t)$$

Παρατηρούμε ότι η αυτοσυσχέτιση ενός σήματος είναι ανεξάρτητη της ολίσθησης που έχει υποστεί το σήμα.

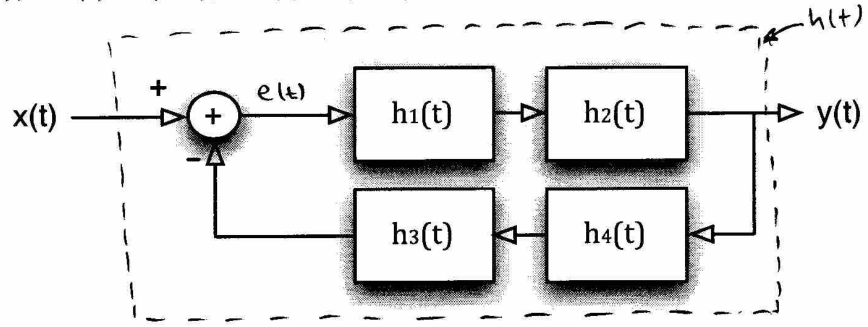
<u>Σημείωση</u>

Υπενθυμίζεται ότι το $g(t+\tau)$ υπολογίζεται από το $g(\tau)$ θέτοντας όπου τ το $t+\tau$:

$$g(\tau) = x(\tau - t_0) \rightsquigarrow g(\underset{\sim}{t+\tau}) = x(\underset{\sim}{t+\tau} - t_0)$$

ΑΣΚΗΣΗ

Δίνεται το ΓΧΑ σύστημα του σχήματος για το οποίο γνωρίζουμε ότι: $h_1(t)=2\delta(t+1)$, $h_2(t)=\delta(t-3)$, $h_3(t)=\delta(t-1)$, $h_4(t)=\delta(t+3)$.



Α. Να **υπολογίσετε** την αυτοσυσχέτιση $\varphi_{yy}(t)$ της εξόδου $y(t)$ συναρτήσει της αυτοσυσχέτισης $\varphi_{xx}(t)$ της εισόδου $x(t)$.

Β. Αν $x(t)=e^{-3t}u(t)$, ποια η $\varphi_{yy}(t)$; Να την **σχεδιάσετε**.

Γ. Ποια η ενέργεια E_y του σήματος εξόδου;

ΛΥΣΗ

Για είσοδο $x(t)=\delta(t)$ η έξοδος του συστήματος $y(t)=h(t)$.

Κάνουμε τους υπολογισμούς μας στο πεδίο του χρόνου.

$$e(t)=x(t)-\left[h_3(t)*h_4(t)\right]*y(t) \qquad (1)$$

$$y(t)=e(t)*h_1(t)*h_2(t) \qquad (2)$$

Αλλά

$$h_3(t)*h_4(t)=\delta(t-1)*\delta(t+3)=\delta(t+2) \qquad (3)$$

$$h_1(t)*h_2(t)=2\delta(t+1)*\delta(t-3)=2\delta(t-2) \qquad (4)$$

Με βάση τις σχέσεις αυτές οι εξισώσεις (1) και (2) γίνονται:

$$e(t)=x(t)-\delta(t+2)*y(t)=x(t)-y(t+2) \qquad (5)$$

$$y(t)=e(t)*2\delta(t-2)=2e(t-2) \qquad (6)$$

$$(6)\overset{(5)}{\rightsquigarrow}\quad y(t)=2\cdot\left[x(t-2)-y(t)\right]=2x(t-2)-2y(t)\Rightarrow$$

$$y(t)=\frac{2}{3}x(t-2) \qquad (7)$$

Για κρουστική είσοδο $x(t)=\delta(t)$ προκύπτει η κρουστική απόκριση $y(t)=h(t)$:

$$h(t)=\frac{2}{3}\delta(t-2) \qquad (8)$$

Α. Από την (7) βλέπουμε ότι $y(t) = \frac{2}{3} x(t-2)$, δηλαδή η έξοδος είναι ένα σταθμισμένο (κατά $\frac{2}{3}$) και μετατοπισμένο αντίγραφο της εισόδου. Άρα η αυτοσυσχέτιση της εξόδου θα ισούται με εκείνη της εισόδου, λαμβάνοντας βέβαια υπόψη και την στάθμιση (πολλαπλασιασμό) κατά $2/3 \cdot 2/3 = \frac{4}{9}$

$$\varphi_{yy}(t) = \frac{4}{9} \varphi_{xx}(t) \qquad (9)$$

Σημείωση: Ένας άλλος τρόπος για την απόδειξη της (9) είναι μέσω της σχέσης

$$\varphi_{yy}(t) = \varphi_{hh}(t) * \varphi_{xx}(t) \qquad (10)$$

Αλλά

$$\varphi_{hh}(t) = h(t) * h(-t) \qquad (11)$$

οπότε

$$\varphi_{yy}(t) = h(t) * h(-t) * \varphi_{xx}(t) \qquad (12)$$

$$\xrightarrow{F} \quad S_{yy}(\Omega) = H(\Omega)\, H(-\Omega)\, S_{xx}(\Omega) = |H(\Omega)|^2 \, S_{xx}(\Omega) \qquad (13)$$

Όμως

$$h(t) = \frac{2}{3} \delta(t-2) \xrightarrow{F} H(\Omega) = \frac{2}{3} e^{-j2\Omega}$$

και

$$H(\Omega)\, H(-\Omega) = \frac{2}{3} e^{-j2\Omega} \cdot \frac{2}{3} e^{j2\Omega} = \frac{4}{9} \qquad (14)$$

Άρα η (13) γίνεται

$$S_{yy}(\Omega) = \frac{4}{9} S_{xx}(\Omega) \xrightarrow{F^{-1}} \varphi_{yy}(t) = \frac{4}{9} \varphi_{xx}(t) \qquad (15)$$

Β. Αποδεικνύεται εύκολα (βλ. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ των Σημειώσεων) ότι η αυτοσυσχέτιση της $x(t) = e^{-\alpha t} u(t)$, $\alpha > 0$ ισούται με $\varphi_{xx}(t) = \frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha|t|}$. Στην προκειμένη περίπτωση $\alpha = 3$, οπότε $\varphi_{xx}(t) = \frac{1}{6} e^{-3|t|}$.

Άρα $\varphi_{yy}(t) = \frac{4}{9} \varphi_{xx}(t) = \frac{4}{9} \frac{1}{6} e^{-3|t|} = \frac{2}{27} e^{-3|t|}$

Γ. $E_y = \varphi_{yy}(0) = \frac{2}{27}$

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί η ετεροσυσχέτιση $\phi_{xy}(t)$ των σημάτων ισχύος $x(t)=u(t)$ και $y(t)=sgn(t)$.

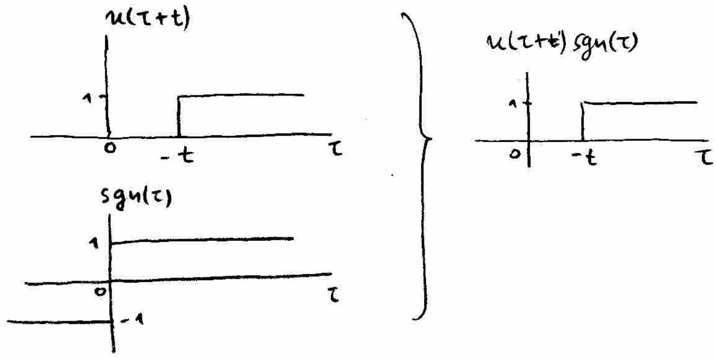
ΛΥΣΗ

<u>Α' τρόπος</u> Αφού πρόκειται για σήματα ισχύος η ετεροσυσχέτιση δίνεται από τη σχέση:

$$\phi_{xy}(t) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t+\tau)\, y(\tau)\, d\tau =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} u(t+\tau)\, sgn(\tau)\, d\tau \qquad (1)$$

<u>Περίπτωση 1η: $t<0$</u>



Άρα η σχέση (1) γίνεται:

$$\phi_{xy}(t) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-t}^{T/2} 1\, d\tau = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\, \tau \Big|_{-t}^{T/2} =$$

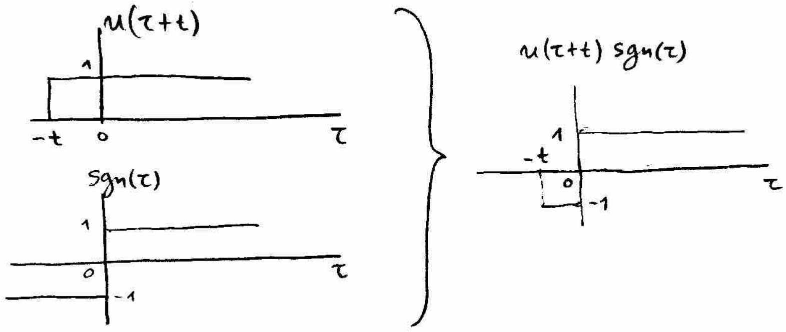
$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\left(\frac{T}{2}+t\right) =$$

$$= \lim_{T\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{t}{T}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} + \lim_{T\to\infty}\frac{t}{T} =$$

$$= \frac{1}{2}$$

Περίπτωση 2η: $t \geq 0$



Η σχέση (1) γίνεται:

$$\phi_{xy}(t) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\left[\int_{-t}^{0}(-1)\,d\tau + \int_{0}^{T/2} 1\,d\tau\right] =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\left[-\tau\Big|_{-t}^{0} + \tau\Big|_{0}^{T/2}\right] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\left[-(0+t) + \left(\frac{T}{2}-0\right)\right] =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\left[-t+\frac{T}{2}\right] = \lim_{T\to\infty}\left[-\frac{t}{T}+\frac{1}{2}\right] = \cancel{\lim_{T\to\infty}\left(-\frac{t}{T}\right)}^{\to 0} + \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}$$

Τελικά καταλήγουμε στο ότι η ετεροσυσχέτιση είναι σταθερή και ίση με $1/2$ $\forall t$:

$$\phi_{xy}(t) = \frac{1}{2} \quad \forall t$$

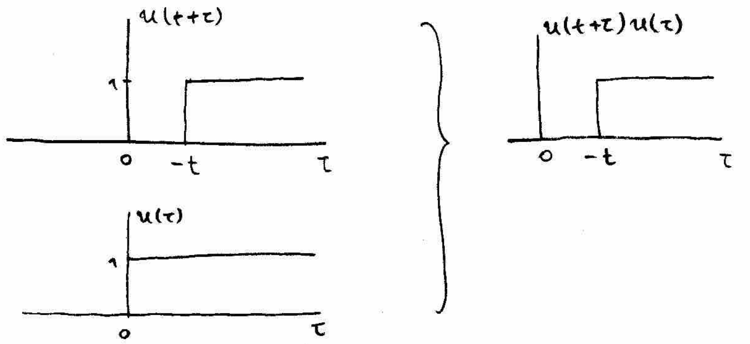
Β' τρόπος Η συνάρτηση προσήμου γράφεται ως $sgn(t) = 2u(t) - 1$. Συνεπώς έχουμε να υπολογίσουμε την ετεροσυσχέτιση των συναρτήσεων $x(t) = u(t)$ και $y(t) = 2u(t) - 1$.

$$\Phi_{xy}(t) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t+\tau)\, y(\tau)\, d\tau =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(t+\tau)\left[2u(\tau) - 1\right] d\tau =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \left[2\int_{-T/2}^{T/2} u(t+\tau)\, u(\tau)\, d\tau - \int_{-T/2}^{T/2} u(t+\tau)\, d\tau \right] \qquad (2)$$

__Περίπτωση 1η: $t<0$__



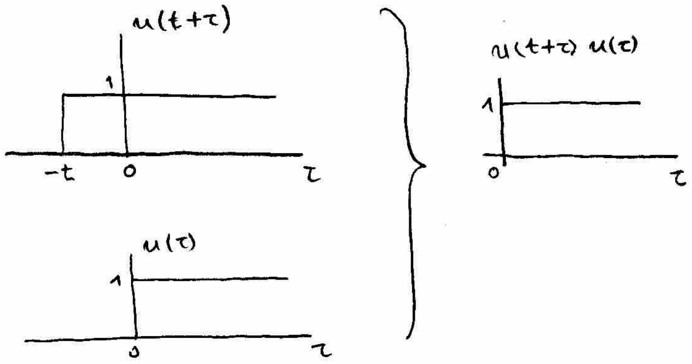
Άρα η σχέση (2) γίνεται:

$$\Phi_{xy}(t) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \left[2\int_{-t}^{T/2} 1\, d\tau - \int_{-t}^{T/2} 1\, d\tau \right] =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \left[\int_{-t}^{T/2} d\tau \right] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\, \tau \Big|_{-t}^{T/2} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\left(\frac{T}{2} + t\right) =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{t}{T}\right) = \frac{1}{2} + \lim_{T\to\infty} \frac{t}{T} = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$$

Περίπτωση 2η: $t \geq 0$



Η σχέση (2) γίνεται:

$$\phi_{xy}(t) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\left[2\int_{0}^{T/2} 1\, d\tau - \int_{-t}^{T/2} 1\, d\tau \right] =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\left[2\,\tau\Big|_{0}^{T/2} - \tau\Big|_{-t}^{T/2} \right] =$$

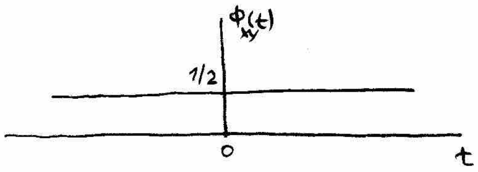
$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\left[2\left(\frac{T}{2}-0\right) - \left(\frac{T}{2}+t\right) \right] =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\left[T - \frac{T}{2} - t \right] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\left(\frac{T}{2} - t\right) = \lim_{T\to\infty}\left(\frac{1}{2} - \frac{t}{T}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} - \lim_{T\to\infty}\left(\frac{t}{T}\right) = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

Τελικά, προκύπτει ότι η ετεροσυσχέτιση $\phi_{xy}(t)$ είναι ίση με $1/2$ $\forall t$,

$$\phi_{xy}(t) = \frac{1}{2}, \quad \forall t$$



<u>Γ' τρόπος</u> Η ετεροσυσχέτιση μπορεί να εκφραστεί και ως

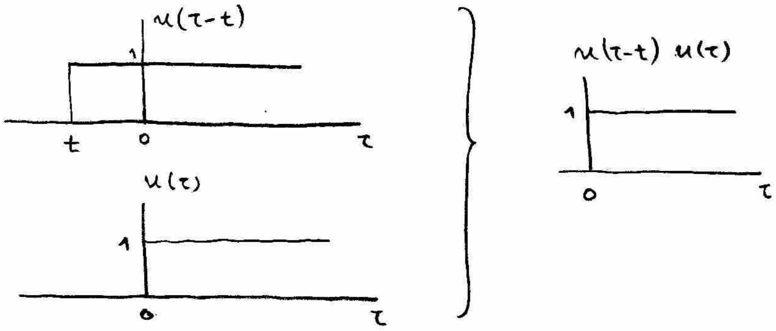
$$\phi_{xy}(t) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(\tau)\, y(\tau - t)\, d\tau$$

οπότε για $x(t) = u(t)$ και $y(t) = 2u(t) - 1$, η σχέση αυτή γίνεται

$$\phi_{xy}(t) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(\tau)\left[2u(\tau - t) - 1\right] d\tau =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\left[2\int_{-T/2}^{T/2} u(\tau)\, u(\tau - t)\, d\tau - \int_{-T/2}^{T/2} u(\tau)\, d\tau\right] \qquad (3)$$

<u>Περίπτωση 1η: $t < 0$</u>

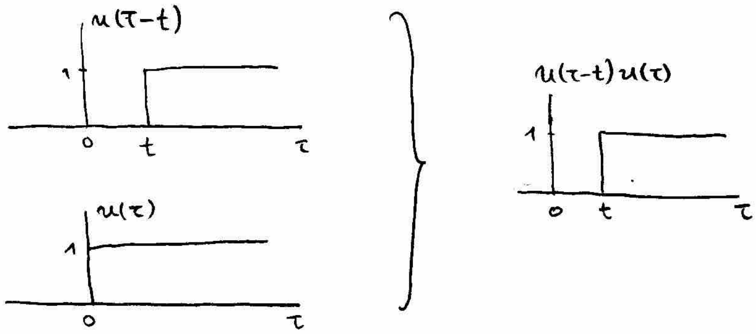


Άρα η σχέση (3) γίνεται:

$$\phi_{xy}(t) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\left[2\int_{0}^{T/2} 1\, d\tau - \int_{0}^{T/2} 1\, d\tau\right] =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{0}^{T/2} d\tau = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\, \tau \Big|_{0}^{T/2} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\left(\frac{T}{2} - 0\right) = \frac{1}{2}$$

Περίπτωση 2η: $t \geq 0$



Η σχέση (3) γίνεται:

$$\phi_{xy}(t) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\left[2\int_t^{T/2} 1\,d\tau - \int_0^{T/2} 1\,d\tau\right] =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\left[2\,\tau\Big|_t^{T/2} - \tau\Big|_0^{T/2}\right] =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\left[2\left(\frac{T}{2} - t\right) - \left(\frac{T}{2} - 0\right)\right] =$$

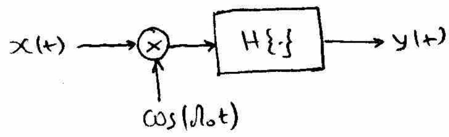
$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\left[T - 2t - \frac{T}{2}\right] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\left(\frac{T}{2} - 2t\right) =$$

$$= \frac{1}{2} - \lim_{T\to\infty}\left(2\frac{t}{T}\right) = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

Τελικά, $\phi_{xy}(t) = \frac{1}{2} \quad \forall t$

ΑΣΚΗΣΗ Έστω $x(t)$ ένα σήμα περιορισμένου εύρους συχνοτήτων (band limited), δηλ. $|F| \leq F_B$.
Να υπολογιστεί ο μετασχ. Hilbert του σήματος $x(t)\cos(\Omega_0 t)$,
όπου $F_0 \gg F_B$ και $F_0 > 0$.

ΛΥΣΗ Η εκφώνηση αυτή είναι ισοδύναμη με την εξής: Να υπολογιστεί η έξοδος $y(t)$ του συστήματος του σχήματος.



Έστω $g(t) = x(t) \cdot \cos(\Omega_0 t)$ (1)

Τότε $y(t) = \hat{g}(t) \Rightarrow y(t) = g(t) * \frac{1}{\pi t}$ (2)

Εφαρμόζουμε τον μετασχηματισμό Fourier και στα δύο μέλη της εξίσωσης (2):

$$F\{y(t)\} = F\{g(t) * \tfrac{1}{\pi t}\} = F\{g(t)\} \cdot F\{\tfrac{1}{\pi t}\} =$$

$$= F\{x(t)\cos(\Omega_0 t)\} \cdot F\{\tfrac{1}{\pi t}\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\Big[F\{x(t)\} * F\{\cos(\Omega_0 t)\}\Big] \cdot F\{\tfrac{1}{\pi t}\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\Big[X(\Omega) * \pi[\delta(\Omega-\Omega_0) + \delta(\Omega+\Omega_0)]\Big]\,\big[-j\,\mathrm{sgn}(\Omega)\big] =$$

$$= \frac{1}{2\pi}(-j)\Big[X(\Omega) * \pi\big[\underbrace{\mathrm{sgn}(\Omega)\,\delta(\Omega-\Omega_0)}_{\underbrace{\mathrm{sgn}(\Omega_0)}_{1 \text{ αφού } \Omega_0>0}\delta(\Omega-\Omega_0)} + \underbrace{\mathrm{sgn}(\Omega)\,\delta(\Omega+\Omega_0)}_{\underbrace{\mathrm{sgn}(-\Omega_0)}_{-1 \text{ αφού } \Omega_0>0}\delta(\Omega+\Omega_0)}\big]\Big] =$$

$$= \frac{1}{2\pi}(-j)\Big[X(\Omega) * \pi[\delta(\Omega-\Omega_0) - \delta(\Omega+\Omega_0)]\Big] = \langle \text{πολλ/ζω \& διαιρώ με } j \rangle =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2\pi}(-j)j}_{1}\Big[\underbrace{X(\Omega)}_{F\{x(t)\}} * \underbrace{\frac{\pi}{j}[\delta(\Omega-\Omega_0) - \delta(\Omega+\Omega_0)]}_{F\{\sin(\Omega_0 t)\}}\Big] =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\Big[F\{x(t)\} * F\{\sin(\Omega_0 t)\}\Big] =$$

$$= F\{x(t) \cdot \sin(\Omega_0 t)\} \quad (3)$$

Δηλαδή βρήκαμε ότι $F\{y(t)\} = F\{x(t)\cdot\sin(\Omega_0 t)\}$ και άρα $y(t) = x(t)\cdot\sin(\Omega_0 t)$

ή $\hat{g}(t) = x(t)\cdot\sin(\Omega_0 t)$

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί ο μετασχ. Hilbert του σήματος $x(t)=\cos(\Omega_0 t+\theta)$, όπου $\Omega_0>0$.

ΛΥΣΗ 1η $\quad \hat{x}(t) = x(t) * \frac{1}{\pi t}$

Εφαρμόζουμε τον μετασχ. Fourier και στα δύο μέλη της εξίσωσης και έχουμε:

$$F\{\hat{x}(t)\} = F\left\{x(t) * \frac{1}{\pi t}\right\} =$$

$$= F\{x(t)\} \cdot F\left\{\frac{1}{\pi t}\right\} =$$

$$= F\{\cos(\Omega_0 t+\theta)\}\, F\left\{\frac{1}{\pi t}\right\} = \left\langle \text{σχέση Euler } \cos\varphi = \frac{e^{j\varphi}+e^{-j\varphi}}{2} \right\rangle =$$

$$= F\left\{\frac{e^{j(\Omega_0 t+\theta)} + e^{-j(\Omega_0 t+\theta)}}{2}\right\} F\left\{\frac{1}{\pi t}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2} F\left\{e^{j\theta} e^{j\Omega_0 t} + e^{-j\theta} e^{-j\Omega_0 t}\right\} F\left\{\frac{1}{\pi t}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^{j\theta} F\{e^{j\Omega_0 t}\} + e^{-j\theta} F\{e^{-j\Omega_0 t}\}\right] F\left\{\frac{1}{\pi t}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^{j\theta}\, 2\pi\, \delta(\Omega-\Omega_0) + e^{-j\theta}\, 2\pi\, \delta(\Omega+\Omega_0)\right] F\left\{\frac{1}{\pi t}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2} 2\pi \left[e^{j\theta} \delta(\Omega-\Omega_0) + e^{-j\theta} \delta(\Omega+\Omega_0)\right]\left[-j\, sgn(\Omega)\right] =$$

$$= -j\pi \left[e^{j\theta} \underbrace{sgn(\Omega)\,\delta(\Omega-\Omega_0)}_{\underbrace{sgn(\Omega_0)}_{1}\delta(\Omega-\Omega_0)} + e^{-j\theta} \underbrace{sgn(\Omega)\,\delta(\Omega+\Omega_0)}_{\underbrace{sgn(-\Omega_0)}_{-1}\delta(\Omega+\Omega_0)}\right] =$$

$$= -j\pi\left[e^{j\theta}\,\delta(\Omega-\Omega_0) - e^{-j\theta}\,\delta(\Omega+\Omega_0)\right] =$$

$$= \frac{-j}{2}\left[e^{j\theta}\, 2\pi\, \delta(\Omega-\Omega_0) - e^{-j\theta}\, 2\pi\, \delta(\Omega+\Omega_0)\right] =$$

$$= -\frac{j}{2}\left[e^{j\theta} F\{e^{j\Omega_0 t}\} - e^{-j\theta} F\{e^{-j\Omega_0 t}\}\right] =$$

$$= -\frac{j}{2}\left[F\{e^{j(\Omega_0 t+\theta)}\} - F\{e^{-j(\Omega_0 t+\theta)}\}\right] =$$

$$= F\left\{\frac{e^{j(\Omega_0 t+\theta)} - e^{-j(\Omega_0 t+\theta)}}{2j}\right\} =$$

$$= F\{\sin(\Omega_0 t+\theta)\}$$

Συνεπώς $\hat{x}(t) = \sin(\Omega_0 t+\theta)$

ΛΥΣΗ 2η Η λύση αυτή βασίζεται στην ανάπτυξη του συνημιτόνου σύμφωνα με την τριγωνομετρική σχέση $\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$, καθώς και σ' εκείνη του ημιτόνου $\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$

$$\hat{x}(t) = x(t) * \frac{1}{\pi t}$$

$$F\{\hat{x}(t)\} = F\left\{x(t) * \frac{1}{\pi t}\right\} = F\{x(t)\}\, F\left\{\frac{1}{\pi t}\right\} = F\{\cos(\Omega_0 t+\theta)\}\, F\left\{\frac{1}{\pi t}\right\} =$$

$$= F\{\cos(\Omega_0 t)\cos\theta - \sin(\Omega_0 t)\sin\theta\}\, F\left\{\frac{1}{\pi t}\right\} = \langle \text{αλλά } \cos\theta \text{ και } \sin\theta \text{ σταθ.} \rangle$$

$$= \left[\cos\theta\, F\{\cos(\Omega_0 t)\} - \sin\theta\, F\{\sin(\Omega_0 t)\}\right] F\left\{\frac{1}{\pi t}\right\} =$$

$$= \left[\cos\theta \cdot \pi\left[\delta(\Omega-\Omega_0) + \delta(\Omega+\Omega_0)\right] - \sin\theta \cdot \frac{\pi}{j}\left[\delta(\Omega-\Omega_0) - \delta(\Omega+\Omega_0)\right]\right] \left[-j\,\mathrm{sgn}(\Omega)\right] =$$

$$= \cos\theta \cdot (-j)\,\pi\left[\mathrm{sgn}(\Omega)\,\delta(\Omega-\Omega_0) + \mathrm{sgn}(\Omega)\,\delta(\Omega+\Omega_0)\right)$$

$$- \sin\theta\,(-j)\,\frac{\pi}{j}\Big[\underbrace{\underbrace{\mathrm{sgn}(\Omega)}_{\mathrm{sgn}(\Omega_0)}}_{1}\,\delta(\Omega-\Omega_0) - \underbrace{\underbrace{\mathrm{sgn}(\Omega)}_{\mathrm{sgn}(-\Omega_0)}}_{-1}\,\delta(\Omega+\Omega_0)\Big] =$$

$$= \cos\theta \cdot \frac{\pi}{j}\left[\delta(\Omega-\Omega_0) - \delta(\Omega+\Omega_0)\right]$$

$$+ \sin\theta \quad \pi\left[\delta(\Omega-\Omega_0) + \delta(\Omega+\Omega_0)\right] =$$

$$= \cos\theta \cdot F\{\sin(\Omega_0 t)\} + \sin\theta\, F\{\cos(\Omega_0 t)\} =$$

$$= F\{\cos\theta \cdot \sin(\Omega_0 t)\} + F\{\sin\theta \cdot \cos(\Omega_0 t)\} =$$

$$= F\Big\{\underbrace{\cos\theta \cdot \sin(\Omega_0 t) + \sin\theta \cdot \cos(\Omega_0 t)}_{\sin(\Omega_0 t+\theta)}\Big\} =$$

$$= F\{\sin(\Omega_0 t+\theta)\}$$

Δηλαδή αποδείξαμε ότι $F\{\hat{x}(t)\} = F\{\sin(\Omega_0 t+\theta)\}$

συνεπώς $\hat{x}(t) = \sin(\Omega_0 t+\theta)$

Ζεύγη Μετασχηματισμού Hilbert

Signal $u(t)$	Hilbert transform[fn 1] $\operatorname{H}(u)(t)$
$\sin(\omega t + \varphi)$ [fn 2]	$\sin\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos(\omega t + \varphi), \quad \omega > 0$ $\sin\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\omega t + \varphi), \quad \omega < 0$
$\cos(\omega t + \varphi)$ [fn 2]	$\cos\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(\omega t + \varphi), \quad \omega > 0$ $\cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(\omega t + \varphi), \quad \omega < 0$
$e^{i\omega t}$	$e^{i\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)}, \quad \omega > 0$ $e^{i\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)}, \quad \omega < 0$
$e^{-i\omega t}$	$e^{-i\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)}, \quad \omega > 0$ $e^{-i\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)}, \quad \omega < 0$
$\frac{1}{t^2 + 1}$	$\frac{t}{t^2 + 1}$
e^{-t^2}	$\frac{2}{\sqrt{\pi}} F(t)$ (see Dawson function)
Sinc function $\frac{\sin(t)}{t}$	$\frac{1 - \cos(t)}{t}$
Dirac delta function $\delta(t)$	$\frac{1}{\pi t}$
Characteristic function $\chi_{[a,b]}(t)$	$\frac{1}{\pi} \ln\left\vert\frac{t - a}{t - b}\right\vert$

https://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert_transform

Ζωνοδιαβατά Φίλτρα (Bandpass Filters)

Αυτά μπορούν να προκύψουν από τα αντίστοιχα βαθυπερατά (lowpass) εφαρμόζοντας ένα μη γραμμικό μετασχηματισμό συχνότητας.

$$H_B(\Omega) = H_L(\Omega_L)\Big|_{\Omega_L = \frac{\Omega_c(\Omega^2-\Omega_u\Omega_\ell)}{\Omega(\Omega_u-\Omega_\ell)}}$$

όπου $H_L(\Omega_L)$ είναι η απόκριση συχνότητας του βαθυπερατού φίλτρου, Ω_L η μεταβλητή συχνότητας για το βαθυπερατό, Ω_c η συχνότητα αποκοπής του βαθυπερατού και Ω_u, Ω_ℓ η άνω και κάτω συχνότητα αποκοπής του ζωνοδιαβατού φίλτρου.

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί το ζωνοδιαβατό φίλτρο με $\Omega_u = 4$ krad/sec και $\Omega_\ell = 100$ rad/sec το οποίο προκύπτει από το 1ης τάξης Butterworth (με βαθυπερατό).

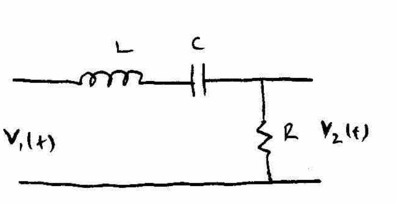
ΛΥΣΗ

$$H_L(\Omega_L) = \frac{1}{1+j\frac{\Omega_L}{\Omega_c}}$$

Εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό συχνότητας έχουμε:

$$H_B(\Omega) = \frac{1}{1+j(\Omega^2-\Omega_u\Omega_\ell)/\Omega(\Omega_u-\Omega_\ell)} = \frac{1}{1+j(\Omega^2-4\cdot 10^5)/\Omega(3.9\cdot 10^3)}$$

$$= \frac{1}{1+j(2.56\cdot 10^{-4})\Omega + 1/j(9.75\cdot 10^{-3})\Omega}$$



Το κύκλωμα του σχήματος έχει απόκριση συχνότητας

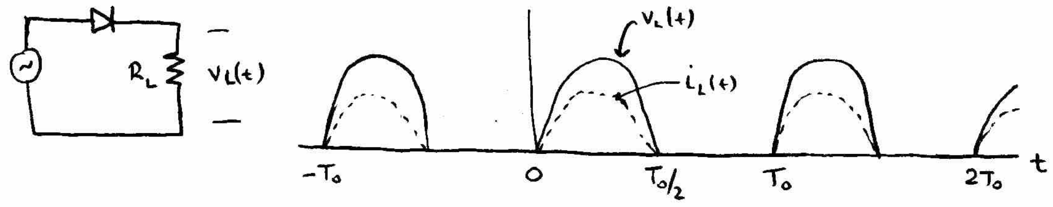
$$H(\Omega) = \frac{V_2(\Omega)}{V_1(\Omega)} = \frac{R}{R+j\Omega L+1/j\Omega C} = \frac{1}{1+j\Omega L/R+1/j\Omega RC}$$

Για $L=1$ H βρίσκουμε $R=3.9$ kΩ, $C=2.5$ μF

(Ιδανικό φίλτρο)

ΑΣΚΗΣΗ Το φάσμα συχνότητας του κυκλώματος ημιανόρθωσης του σχήματος, δίνεται από τη σχέση

$$V_L(\Omega) = \frac{A\pi}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}\left(\frac{k\pi}{2}\right)\left[\delta(\Omega-\Omega_0-k\Omega_0) + \delta(\Omega+\Omega_0-k\Omega_0)\right]$$

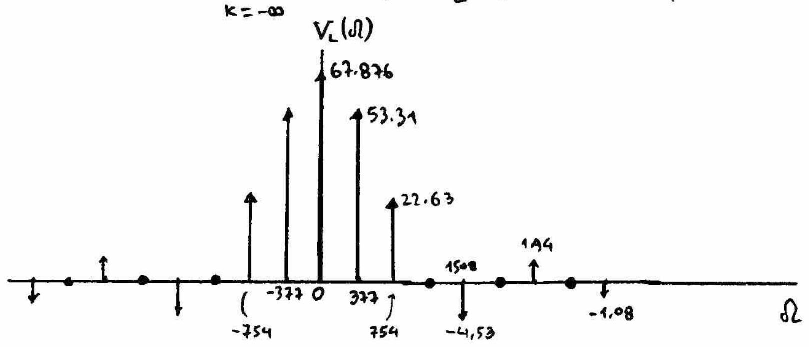


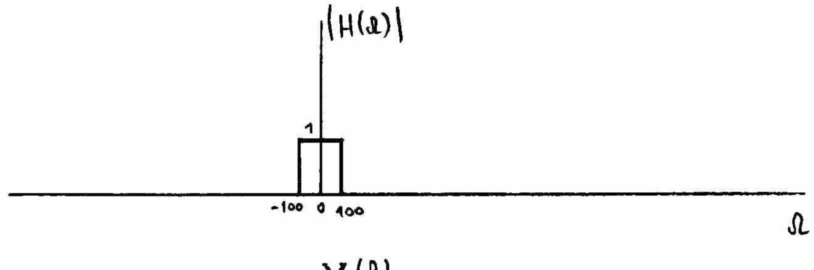
Να υπολογιστεί η έξοδος $v_o(t)$ όταν το σήμα αυτό διέλθει από ένα ιδανικό βαθυπερατό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής $\Omega_c = 100$ rad/sec. Να σχεδιαστούν τα φάσματα συχνότητας των σημάτων εισόδου και εξόδου του ιδανικού φίλτρου.

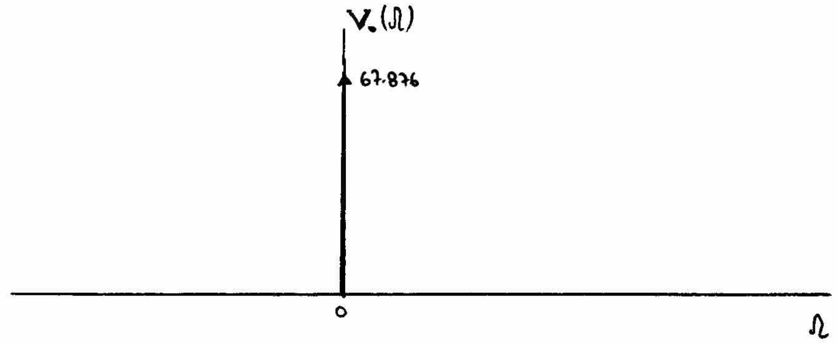
Δίνεται ότι $A = 33.94V$ και $\Omega_0 = 377$ rad/sec.

ΛΥΣΗ Για $A=33.94$ και $\Omega_0 = 377$ έχουμε

$$V_L(\Omega) = 53.31 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}\left(\frac{k\pi}{2}\right)\left[\delta(\Omega-(k+1)377) + \delta(\Omega-(k-1)377)\right]$$







Παρατηρούμε ότι το φάσμα του σήματος είναι γραμμικό, αφού το ημιανορθωμένο σήμα είναι περιοδικό, και η πρώτη του αρμονική (βασική αρμονική) εμφανίζεται στη συχνότητα $\Omega_0 = 377$ rad/sec.

Το ιδανικό βαθυπερατό φίλτρο έχει συχνότητα αποκοπής $\Omega_c = 100$ rad/sec. Συνεπώς επιτρέπει τη διέλευση μόνο της DC $(\Omega = 0)$ συνιστώσας, οπότε όλες οι άλλες συχνότητες αποκόπτονται.

$$V_L(\Omega) \longrightarrow \boxed{H(\Omega)} \longrightarrow V_o(\Omega)$$

$$V_o(\Omega) = H(\Omega) \cdot V_L(\Omega)$$

Τελικά το σήμα εξόδου προκύπτει από τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier

$$V_o(t) = \frac{1}{2\pi}(67.876) = 10.803 \text{ Volts}$$

Σημείωση: Η κυκλική συχνότητα Ω_0 προκύπτει ως $\Omega_0 = 2\pi F_0 = 2\pi 60 = 377$ rad/sec

Υπολογισμός των τιμών του φάσματος

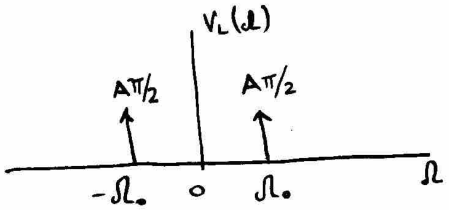
$$V_L(\Omega) = \frac{A\pi}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{sinc}\left(\frac{k\pi}{2}\right)\left[\delta(\Omega-\Omega_0-k\Omega_0) + \delta(\Omega+\Omega_0-k\Omega_0)\right] =$$

$$= \frac{A\cancel{\pi}}{\cancel{2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{\frac{k\cancel{\pi}}{\cancel{2}}}\left[\delta(\Omega-(k+1)\Omega_0) + \delta(\Omega-(k-1)\Omega_0)\right] =$$

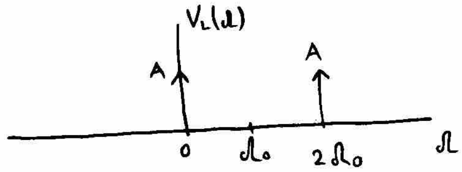
$$= A \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(k\pi/2)}{k}\left[\delta(\Omega-(k+1)\Omega_0) + \delta(\Omega-(k-1)\Omega_0)\right]$$

$k=0 \rightsquigarrow V_L(\Omega)\Big|_{k=0} = \frac{A\pi}{2} \cdot 1 \cdot \left[\delta(\Omega-\Omega_0) + \delta(\Omega+\Omega_0)\right]$ <θυμηθείτε ότι για $k=0$ ισχύει $\text{sinc}(kx)=1$>

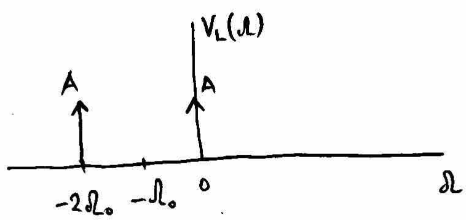
Το φάσμα για $k=0$ δίνεται στο σχήμα που ακολουθεί:



$k=1 \rightsquigarrow V_L(\Omega)\Big|_{k=1} = A \cdot \frac{\sin(\pi/2)}{1}\left[\delta(\Omega-2\Omega_0) + \delta(\Omega)\right]$



$k=-1 \rightsquigarrow V_L(\Omega)\Big|_{k=-1} = A \cdot \frac{\sin(-\pi/2)}{-1}\left[\delta(\Omega) + \delta(\Omega+2\Omega_0)\right]$

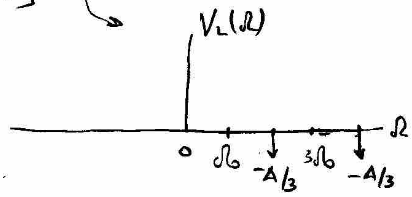


$k=2 \rightsquigarrow V_L(\Omega)\Big|_{k=2} = A \cdot \frac{\cancelto{0}{\sin(\pi)}}{2}\left[\delta(\Omega-3\Omega_0)+\delta(\Omega-\Omega_0)\right] = 0$

$k=-2 \rightsquigarrow V_L(\Omega)\Big|_{k=-2} = A\,\frac{\cancelto{0}{\sin(-\pi)}}{-2}\left[\delta(\Omega+\Omega_0)+\delta(\Omega+3\Omega_0)\right] = 0$

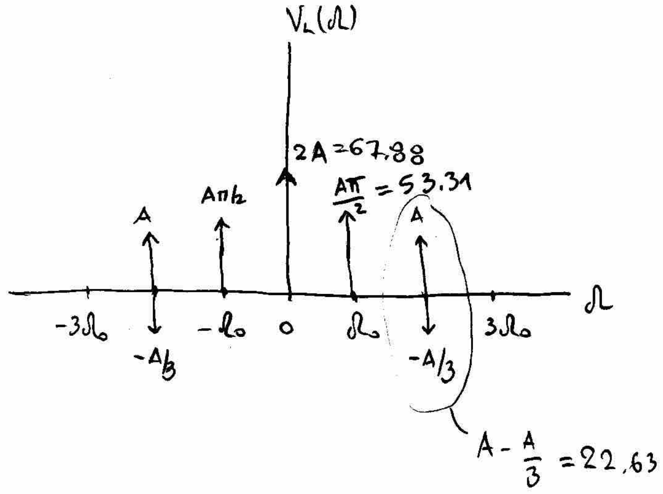
$k=3 \rightsquigarrow V_L(\Omega)\Big|_{k=3} = A\,\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)}{3}\left[\delta(\Omega-4\Omega_0)+\delta(\Omega-2\Omega_0)\right] =$

$= A\,\frac{-1}{3}\left[\delta(\Omega-4\Omega_0)+\delta(\Omega-2\Omega_0)\right]$



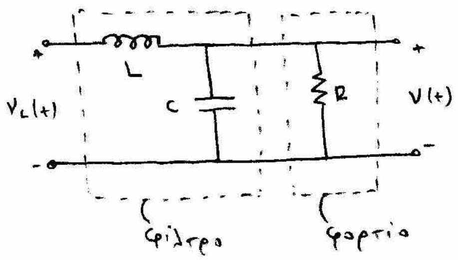
$\vdots$

Προσθέτοντας τα φάσματα που υπολογίσαμε, έχουμε:



(φίλτρο Butterworth)

ΑΣΚΗΣΗ Η έξοδος του ημιανορθωμένου σήματος της προηγούμενης άσκησης, εφαρμόζεται στο κύκλωμα του σχήματος.



Το κύκλωμα αυτό αποτελεί ένα φίλτρο Butterworth 2ης τάξης. Να υπολογιστούν τα στοιχεία του κυκλώματος ώστε η συχνότητα αποκοπής Ω_c να είναι 100 rad/sec. Να σχεδιαστεί η απόκριση συχνότητας του φίλτρου καθώς και το φάσμα του σήματος εξόδου V(t).

ΛΥΣΗ Υπενθυμίζεται ότι (όπως είχε υπολογιστεί στην προηγούμενη άσκηση), το φάσμα του ημιανορθωμένου σήματος είναι:

$$V_L(\Omega) = 53.31 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}\left(\frac{k\pi}{2}\right)\left[\delta(\Omega-(k+1)377) + \delta(\Omega-(k-1)377)\right] \qquad (1)$$

Το μέτρο του φάσματος του 2ης τάξης φίλτρου Butterworth περιγράφεται από τη σχέση

$$|H(\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^4}} = \frac{\Omega_c^2}{\sqrt{\Omega^4+\Omega_c^4}} \qquad (2)$$

Η συνάρτηση της απόκρισης συχνότητας του κυκλώματος είναι

$$H(\Omega) = \frac{1}{1-\Omega^2 LC + j\Omega L/R} \qquad (3)$$

και το μέτρο της απόκρισης συχνότητας ισούται

$$|H(\Omega)| = \frac{1/LC}{\sqrt{\Omega^4 + (1/LC)^2 + \Omega^2\left[\left(\frac{1}{RC}\right)^2 - \frac{2}{LC}\right]}} \qquad (4)$$

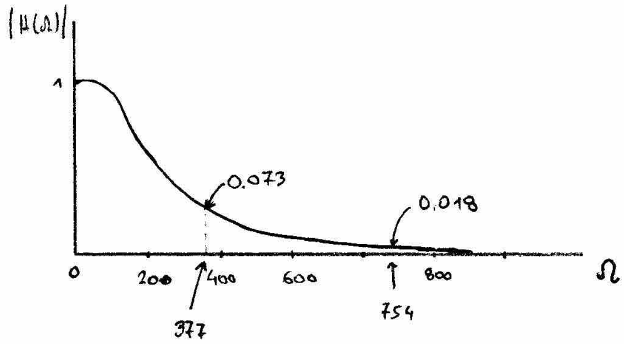
Συγκρίνοντας την (2) με την (4) βλέπουμε ότι για να ταυτίζεται το RLC φίλτρο με τη μορφή του Butterworth φίλτρου πρέπει

$$\Omega_c = \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad \text{και} \quad L = 2R^2C$$

Θεωρώντας φορτίο $R = 1\ k\Omega$ υπολογίζουμε τις τιμές της επαγωγής και της χωρητικότητας έτσι ώστε να έχουμε συχνότητα αποκοπής 100 rad/sec και βρίσκουμε:

$$L = 14.14\ H \qquad C = 7.07\ \mu F$$

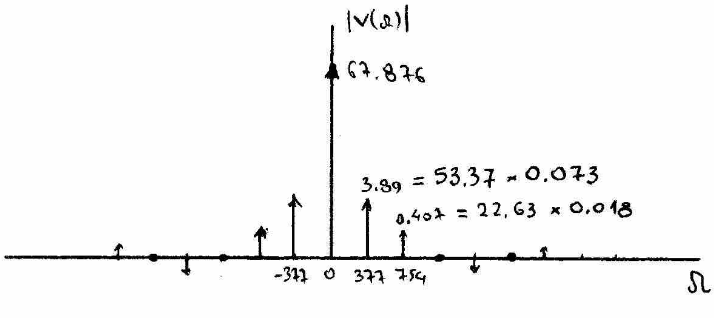
Το μέτρο της απόκρισης συχνότητας του φίλτρου αυτού δείχνεται στο σχήμα:



Το μέτρο του φάσματος του σήματος εξόδου προκύπτει από τη σχέση

$$|V(\Omega)| = |H(\Omega)|\,|V_L(\Omega)|$$

και δείχνεται στο ακόλουθο σχήμα.



Παρατηρούμε ότι οι συχνότητες εκτός της DC έχουν μειωθεί αλλά δεν έχουν εξαλειφθεί όπως στην περίπτωση του ιδανικού φίλτρου.

ΑΣΚΗΣΗ Το κανονικοποιημένο αναλογικό βαθυπερατό φίλτρο (πρωτότυπο βαθυπερατό φίλτρο), το οποίο έχει συχνότητα αποκοπής $\Omega_c = 1$ rad/sec, δίνεται από τη σχέση

$$H_p(s) = \frac{1}{s+1}.$$

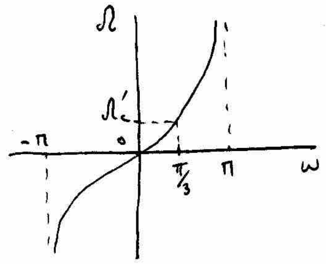
Με τη χρήση του διγραμμικού μετασχηματισμού (bilinear transformation) να σχεδιάσετε βαθυπερατό ψηφ. φίλτρο συχνότητας αποκοπής 15 Hz και συχνότητας δειγματοληψίας 90 Hz.

ΛΥΣΗ Δίνεται ότι $F_c = 15$ Hz και $F_s = 90$ Hz.

Βήμα 1 → Η κυκλική ψηφιακή συχνότητα ω_c ισούται με

$$\omega_c = \Omega_c T = 2\pi F_c \frac{1}{F_s} = 2\pi \frac{F_c}{F_s} = 2\pi \frac{15}{90} = \frac{\pi}{3}$$

Βήμα 2 → Για να αντισταθμίσουμε την παραμόρφωση που θα μας επιβληθεί λόγω του διγραμμικού μετασχηματισμού, υπολογίζουμε την αναλογική συχνότητα $\Omega_c' = \tan\frac{\omega_c}{2} = \tan\frac{\pi}{6} = 0.577$



Βήμα 3 → Εφαρμόζουμε στον αναλογικό χώρο τον μετασχηματισμό συχνότητας από βαθυπερατό-σε-βαθυπερατό.

$$H_{LP}(s) = H_p(s)\Big|_{s = \frac{\Omega_c}{\Omega_c'} s = \frac{1}{0.577} s} = \frac{1}{\frac{s}{0.577} + 1} = \frac{0.577}{s + 0.577}$$

Βήμα 4 → Τέλος, εφαρμόζουμε τον διγραμμικό μετασχηματισμό στο αναλογικό φίλτρο που προέκυψε:

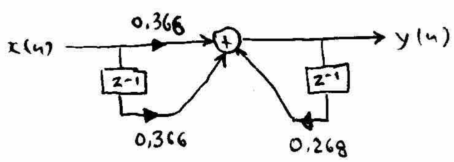
$$H(z) = H_{LP}(s)\Big|_{s = \frac{z-1}{z+1}} = \frac{0.577}{\frac{z-1}{z+1} + 0.577} = \frac{0.577(z+1)}{1.577z - 0.423} = \frac{0.577(1+z^{-1})}{1.577 - 0.423z^{-1}} =$$

$$= \langle \text{διαιρώντας αριθμητή και παρονομαστή με } 1.577 \rangle = \frac{0.366(1+z^{-1})}{1 - 0.268z^{-1}}$$

Η εξίσωση διαφορών του φίλτρου προκύπτει από την $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$ με χρήση του αντίστροφου μετασχηματισμού z:

$$y(n) = 0.366\,x(n) + 0.366\,x(n-1) + 0.268\,y(n-1)$$

Η δομή πραγματοποίησης του φίλτρου είναι:



ΣΗΜΕΙΩΣΗ Το σωστό θα ήταν να χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις

$$\Omega = \frac{2}{T}\tan\frac{\omega}{2} \qquad \text{και} \qquad s = \frac{2}{T}\,\frac{z-1}{z+1}$$

όπου $T = 1/F_s$, αλλά όπως θα δούμε λύνοντας και πάλι την άσκηση, ο παράγοντας $2/T$ απαλείφεται. Έχουμε λοιπόν:

Βήμα 2 → Αντιστάθμιση παραμόρφωσης (pre-warping)

$$\Omega_c' = \frac{2}{T}\tan\frac{\omega_c}{2} = 2\cdot F_s \tan\frac{\omega_c}{2} = 2\cdot 90\cdot \tan\frac{\pi}{6} = 103.92 \text{ rad/sec}$$

Βήμα 3 → Μετασχηματισμός συχνότητας από βαθυπερατό-σε-βαθυπερατό

$$H_{LP}(s) = H_p(s)\Big|_{s=\frac{\Omega_c}{\Omega_c'}s = \frac{1}{103.92}s} = \frac{1}{\frac{s}{103.92}+1} = \frac{103.92}{s+103.92}$$

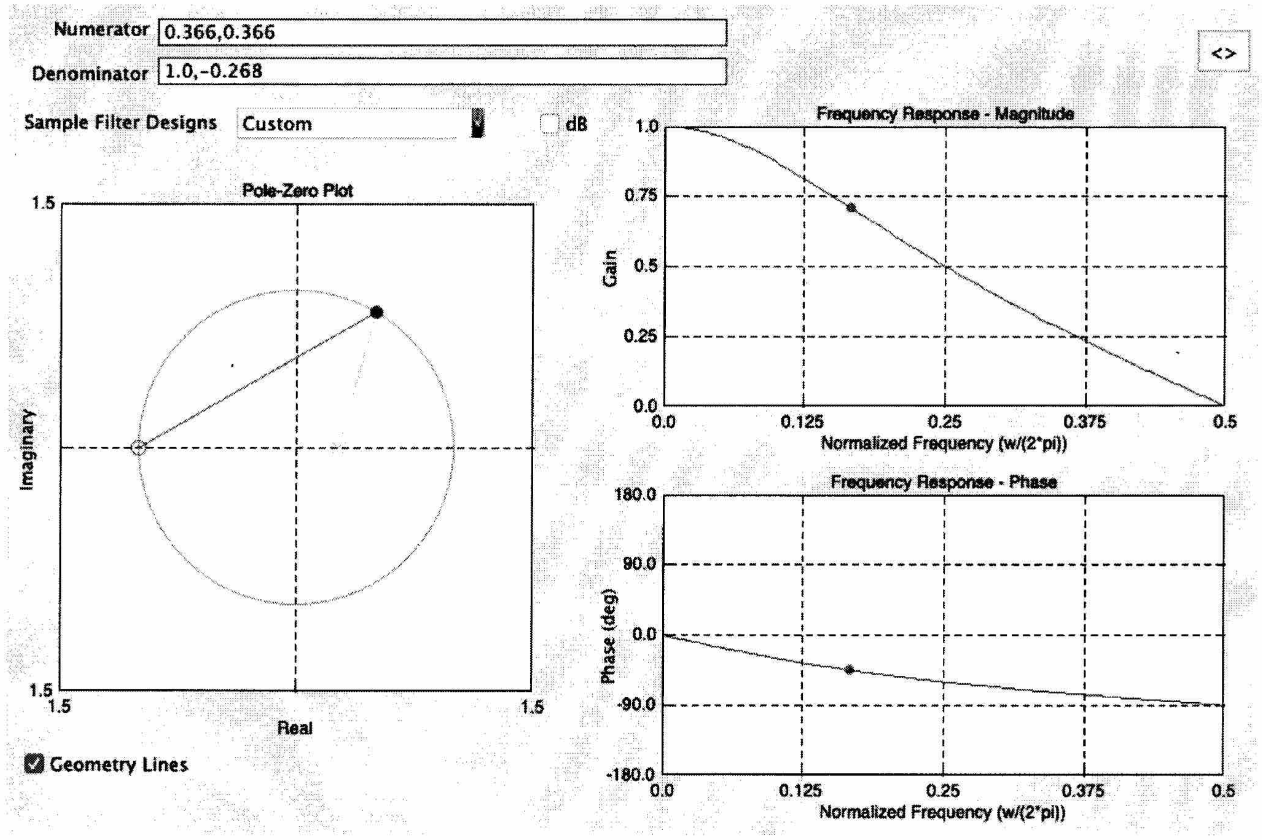
Βήμα 4 → Διγραμμικός μετασχηματισμός

$$H(z) = H_p(s)\Big|_{s=\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1} = 180\frac{z-1}{z+1}} = \frac{103.92}{180\frac{z-1}{z+1}+103.92} = \langle \text{διαιρώ αριθμητή}$$

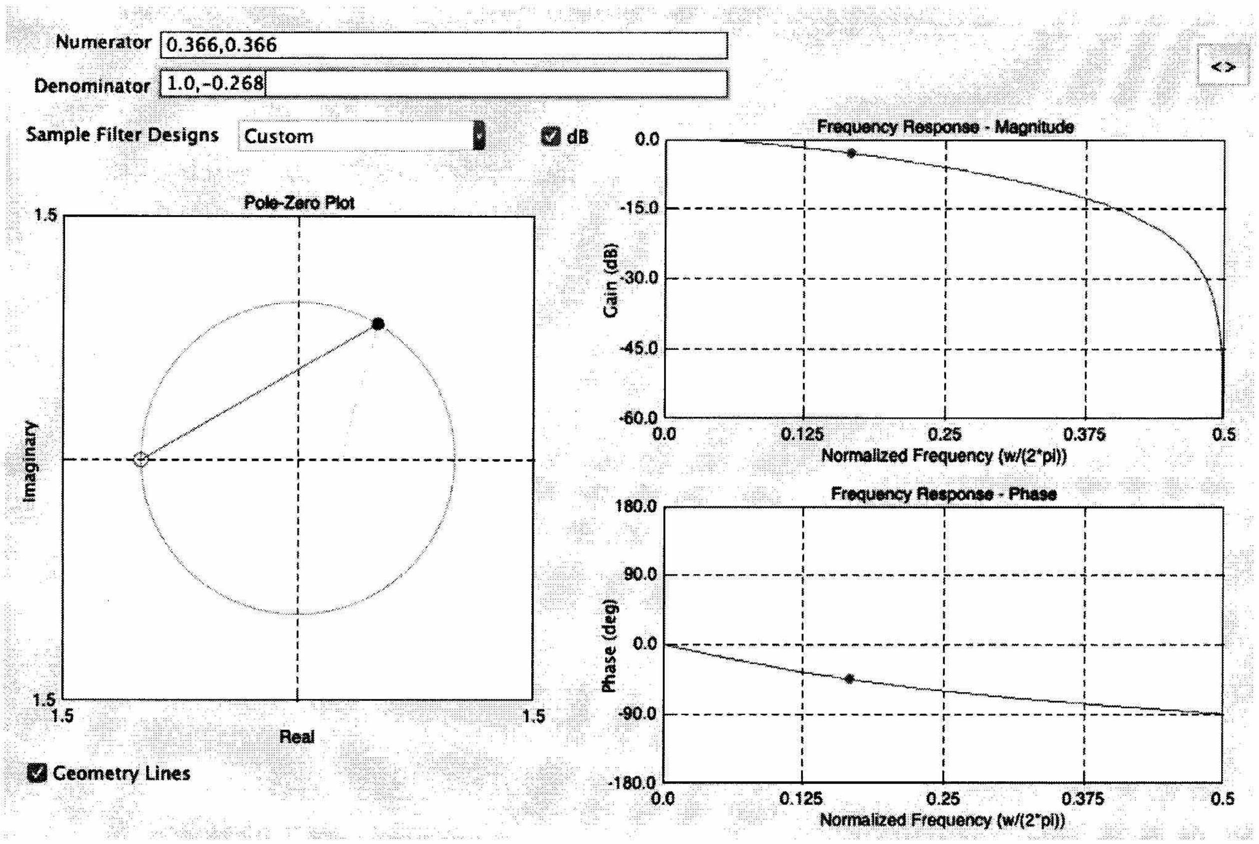
$$\text{και παρονομαστή με } 180 = 2T\rangle = \frac{\frac{103.92}{180}}{\frac{z-1}{z+1}+\frac{103.92}{180}} = \frac{0.577}{\frac{z-1}{z+1}+0.577}$$

Παρατηρώ ότι η σχέση αυτή είναι ακριβώς ίδια με αυτή που έχουμε ήδη υπολογίσει προηγουμένως και συνεχίζοντας τις πράξεις καταλήγουμε στη συνάρτηση μεταφοράς $H(z) = \dfrac{0.366(1+z^{-1})}{1-0.268\,z^{-1}}$.

Απόκριση συχνότητας (μέτρο και φάση) του φίλτρου H(z)=0.366(z+1)/(z-0.268)



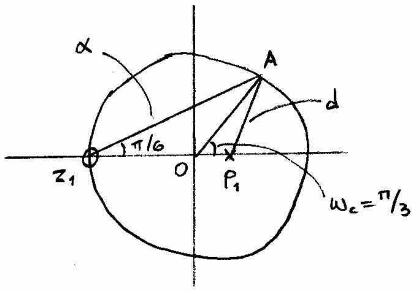
Απόκριση συχνότητας (μέτρο σε dB και φάση) του φίλτρου H(z)=0.366(z+1)/(z-0.268)



ΣΗΜΕΙΩΣΗ Επαλήθευση της απόκρισης συχνότητας μέσω των πόλων - μηδενικών

Δίνεται $H(z) = 0.366 \dfrac{1+z^{-1}}{1-0.268 z^{-1}}$ $\rightsquigarrow$ μηδενικό $z_1 = -1$

πόλος $p_1 = 0.268$



Απόκριση συχνότητας (μέτρο): $\left|H(e^{j\omega})\right|_{\omega=\pi/3} = 0.366 \dfrac{\alpha}{d}$

όπου α, d οι αποστάσεις του μηδενικού και του πόλου, αντίστοιχα, από το σημείο A του μοναδιαίου κύκλου, το οποίο βρίσκεται σε γωνία $\pi/3$.

Από το τρίγωνο $\widehat{p_1 O A}$ και τον νόμο συνημιτόνων υπολογίζουμε το d:

$$d^2 = p_1^2 + (OA)^2 - 2 \cdot p_1 \cdot (OA) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= 0.268^2 + 1^2 - 2 \cdot 0{,}268 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} =$$

$$= 0.804 \rightsquigarrow d = 0{,}8965$$

Από το τρίγωνο $z_1\widehat{O}A$, το οποίο είναι ισοσκελές, υπολογίζουμε το α:

$$\alpha^2 = (Oz_1)^2 + (OA)^2 - 2\,(Oz_1)\,(OA)\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) =$$

$$= 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-0.5) =$$

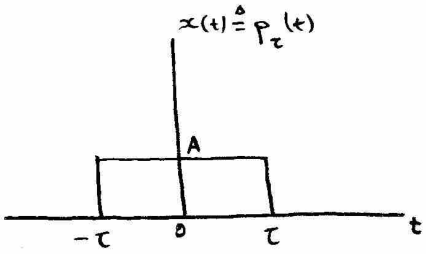
$$= 3 \rightsquigarrow \alpha = 1{,}73205$$

Τελικά, το μέτρο της απόκρισης συχνότητας για $\omega = \omega_c = \frac{\pi}{3}$ ισούται

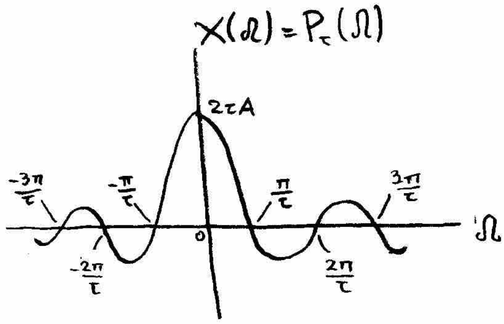
$$\left|H(e^{j\omega})\right|_{\omega_c=\frac{\pi}{3}} = 0.366 \frac{1{,}73205}{0{,}8965} \simeq 0.707 \simeq \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

το οποίο είναι σωστό, αφού πρόκειται για τη συχνότητα αποκοπής.

ΧΡΟΝΟΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ

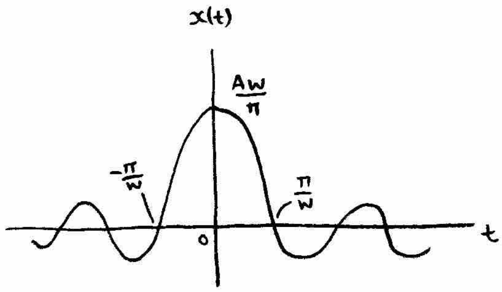


$\xleftrightarrow{F}$

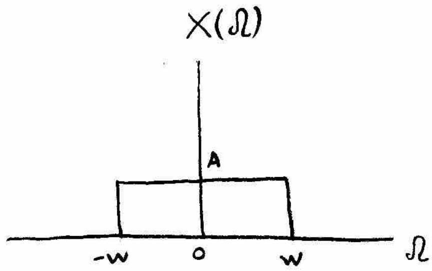


$$p_\tau(t) = \begin{cases} 1 & |t| < \tau \\ 0 & |t| > \tau \end{cases}$$

$$P_\tau(\Omega) = 2\tau A \frac{\sin \Omega\tau}{\Omega\tau} = 2A \frac{\sin \Omega\tau}{\Omega}$$



$\xleftrightarrow{F}$



$$x(t) = \frac{Aw}{\pi} \frac{\sin wt}{\cancel{w}t} = A \frac{\sin wt}{\pi t}$$

$$X(\Omega) = \begin{cases} 1 & |\Omega| < w \\ 0 & |\Omega| > w \end{cases}$$

ΣΤΑΣΙΜΕΣ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ (ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΤΙΜΩΝ)

ΟΡΙΣΜΟΙ

Συνάρτηση αυτοσυσχέτισης: $\phi_{xx}(\tau) = E\big(X(t+\tau)\,X(t)\big)$ (1)

Συνάρτηση αυτοσυνδιασποράς: $\gamma_{xx}(\tau) = E\big([X(t+\tau)-m_x][X(t)-m_x]\big) =$ (2)

$= \phi_{xx}(\tau) - m_x^2$ (3)

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

1. $\phi_{xx}(0) = E\big(X^2(t)\big) \geq 0$

Η αυτοσυσχέτιση για $\tau=0$ δίνει τη δεύτερη ροπή ή την μέση ισχύ της WSS στοχαστικής διαδικασίας

$\gamma_{xx}(0) = E\big([X(t)-m_x]^2\big) = \sigma^2$

2. $\phi_{xx}(\tau) = \phi_{xx}(-\tau)$

Η αυτοσυσχέτιση έχει άρτια συμμετρία

3. $|\phi_{xx}(\tau)| \leq \phi_{xx}(0)$

Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης έχει τη μέγιστη τιμή της στο $\tau=0$

ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΙΔΙΟΤΗΤΩΝ

1. Από τις σχέσεις (1) και (2) θέτοντας $\tau=0$

2. $\phi_{xx}(-\tau) = E\big(X(t-\tau)\,X(t)\big) = \langle \text{θέτω } t-\tau=\xi \Rightarrow t=\xi+\tau \rangle =$

$= E\big(X(\xi)\,X(\xi+\tau)\big) =$

$= E\big(X(\xi+\tau)\,X(\xi)\big) = \phi_{xx}(\tau)$ βάσει του ορισμού (1)

3. Θεωρούμε την μη αρνητική ποσότητα $E\big([X(t+\tau) \pm X(t)]^2\big) \geq 0$ και έχουμε

$$\underbrace{E\big([X(t+\tau)]^2\big)}_{\phi_{xx}(0)} \pm 2\,\underbrace{E\big(X(t+\tau)\,X(t)\big)}_{\phi_{xx}(\tau)} + \underbrace{E\big([X(t)]^2\big)}_{\phi_{xx}(0)} \geq 0 \Rightarrow$$

$$2\phi_{xx}(0) \pm 2\,\phi_{xx}(\tau) \geq 0 \Rightarrow \phi_{xx}(0) \pm \phi_{xx}(\tau) \geq 0 \Rightarrow$$

$$-\phi_{xx}(0) \leq \phi_{xx}(\tau) \leq \phi_{xx}(0) \Rightarrow |\phi_{xx}(\tau)| \leq \phi_{xx}(0)$$

ΑΣΚΗΣΗ Έστω $X(n) = A\cos\omega n + B\sin\omega n$

$Y(n) = B\cos\omega n - A\sin\omega n$

όπου ω σταθερά και A, B ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές μηδενικής μέσης τιμής και διασποράς σ^2. Να υπολογιστεί η ετερο-συσχέτιση των $X(n)$ και $Y(n)$.

ΛΥΣΗ

$$\Phi_{xy}(m,n) = E\left(X(m)Y^*(n)\right) =$$

$$= E\left((A\cos\omega m + B\sin\omega m)(B\cos\omega n - A\sin\omega n)\right) =$$

$$= E\left(AB\cos\omega m\cdot\cos\omega n - A^2\cos\omega m\cdot\sin\omega n + B^2\sin\omega m\cdot\cos\omega n - AB\sin\omega m\,\sin\omega n\right) =$$

$$= E(AB)\cos\omega m\cdot\cos\omega n - E(A^2)\cos\omega m\cdot\sin\omega n + E(B^2)\sin\omega m\cdot\cos\omega n - E(AB)\sin\omega m\,\sin\omega n$$

Αλλά λόγω της ανεξαρτησίας των τυχαίων μεταβλητών ισχύει:

$$E(AB) = E(A)\cdot E(B) = 0$$

Επίσης από τα δεδομένα της άσκησης γνωρίζουμε ότι

$$E(A^2) = E(B^2) = \sigma^2$$

Με βάση αυτά η τελευταία σχέση γίνεται:

$$\Phi_{xy}(m,n) = \sigma^2(\sin\omega m\cdot\cos\omega n - \cos\omega m\cdot\sin\omega n) =$$

$$= \sigma^2\sin(\omega(m-n))$$

ΑΣΚΗΣΗ Δίνονται οι στοχαστικές διαδικασίες $X(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$, $Y(t) = B\sin(\omega t) - A\cos(\omega t)$, όπου ω σταθερά και A, B ασυσχέτιστες τυχαίες μεταβλητές με μέση τιμή 0 (μηδέν) και διασπορά σ^2 η καθεμία. Οι στοχαστικές διαδικασίες είναι από κοινού στάσιμες με την ευρεία έννοια (jointly wide sense stationary).

Να υπολογίσετε τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης καθεμιάς, καθώς και την συνάρτηση ετεροσυσχέτισής τους.

ΛΥΣΗ Οι στοχαστικές διαδικασίες είναι από κοινού στάσιμες. Αυτό σημαίνει ότι και καθεμία από αυτές είναι στάσιμη (WSS). Δίνεται επίσης ότι $E(A) = E(B) = 0$ και $\sigma_A^2 = \sigma_B^2 = \sigma^2$.

$$\varphi_{xx}(t+\tau, t) = E\left(X(t+\tau)\, X^*(t)\right) = E\left(\left[A\sin\omega(t+\tau) + B\cos\omega(t+\tau)\right]\left[A\sin\omega t + B\cos\omega t\right]\right) =$$

$$= E\Big(A^2 \underbrace{\sin\omega(t+\tau)\cdot\sin\omega t}_{\frac{1}{2}[\cos(\omega\tau) - \cos(2\omega t + \omega\tau)]} + AB\sin\omega(t+\tau)\cos\omega t + BA\cos\omega(t+\tau)\sin\omega t + B^2\cos\omega(t+\tau)\cos\omega t\Big) \qquad (1)$$

Αλλά,
$$2\sin\theta\cdot\sin\varphi = \cos(\theta-\varphi) - \cos(\theta+\varphi) \qquad (2)$$
$$2\cos\theta\cdot\cos\varphi = \cos(\theta-\varphi) + \cos(\theta+\varphi) \qquad (3)$$
$$2\sin\theta\,\cos\varphi = \sin(\theta-\varphi) + \sin(\theta+\varphi) \qquad (4)$$

οπότε η σχέση (1) γίνεται:

$$\varphi_{xx}(t+\tau,t) = \frac{1}{2}\left[\cos(\omega\tau) - \cos(2\omega t+\omega\tau)\right] E(A^2) + \frac{1}{2}\left[\sin(\omega\tau) + \sin(2\omega t+\omega\tau)\right] \underbrace{E(AB)}_{0} +$$
$$+ \frac{1}{2}\left[\sin(-\omega\tau) + \sin(2\omega t+\omega\tau)\right] \underbrace{E(BA)}_{0} + \frac{1}{2}\left[\cos(\omega\tau) + \cos(2\omega t+\omega\tau)\right] \qquad (5)$$

Όμως, επειδή οι στοχαστικές διαδικασίες είναι ασυσχέτιστες ισχύει $E(AB) = E(A)\cdot E(B) = 0$

Επίσης, $E(A^2) = \sigma_A^2 + m_A^2 = \sigma_A^2 + 0 = \sigma_A^2 = \sigma^2$ αφού $m_A = E(A) = 0$

Ομοίως $E(B^2) = \sigma_B^2 = \sigma^2$

Με βάση τις τελευταίες σχέσεις η (5) γίνεται:

$$\phi_{xx}(t+\tau, t) = \frac{1}{2}\sigma^2\left[\cos(\omega\tau) - \cos(2\omega t+\tau) + \cos(\omega\tau) + \cos(2\omega t+\tau)\right] = \frac{1}{2}\sigma^2 \cdot 2\cos(\omega\tau) =$$

$$= \sigma^2 \cos(\omega\tau) = \phi_{xx}(\tau) \tag{6}$$

Από το αποτέλεσμα αυτό επαληθεύεται ότι η στοχαστική διαδικασία $X(t)$ είναι WSS, αφού έχει σταθερή μέση τιμή (ίση με μηδέν) και αυτοσυσχέτιση που εξαρτάται μόνον από τη διαφορά των χρόνων $\tau = (t+\tau) - (t)$.

Ακολουθώντας τα ίδια βήματα μπορούμε εύκολα να βρούμε ότι $\phi_{YY}(\tau) = \sigma^2 \cos(\omega\tau)$ (7)

Για τη συνάρτηση ετερο-συσχέτισης έχουμε:

$$\phi_{XY}(t+\tau, t) = E\left(X(t+\tau)\, Y^*(t)\right) = E\left(\left[A \sin\omega(t+\tau) + B\cos\omega(t+\tau)\right]\left[B \sin\omega t - A\cos\omega t\right]\right) =$$

$$= E\left(AB\sin\omega(t+\tau)\sin\omega t - A^2 \sin\omega(t+\tau)\cos\omega t + B^2\cos\omega(t+\tau)\sin\omega t - AB\cos\omega(t+\tau)\cos\omega t\right) =$$

$$= \ldots \langle \text{με τον ίδιο τρόπο όπως προηγουμένως καταλήγουμε} \rangle =$$

$$= -\sigma^2 \sin\omega\tau = \phi_{XY}(\tau)$$

Παρατήρηση

Γενικά, η συνάρτηση ετερο-συσχέτισης είναι φραγμένη όπως παρακάτω:

$$|\phi_{XY}(\tau)| \leq \sqrt{\phi_{XX}(0)\, \phi_{YY}(0)} \tag{8}$$

$$|\phi_{XY}(\tau)| \leq \frac{1}{2}\left[\phi_{XX}(0) + \phi_{YY}(0)\right] \tag{9}$$

Εφαρμογή: Στην προηγούμενη άσκηση βρήκαμε $\phi_{XY}(\tau) = -\sigma^2 \sin\omega\tau$. Αντικαθιστώντας στις (8), (9) διαπιστώνουμε ότι η ετεροσυσχέτιση ικανοποιεί και τα δύο όρια.

$(8) \rightsquigarrow \quad \sigma^2|\sin\omega\tau| \leq \sigma^2 \Rightarrow |\sin\omega\tau| \leq 1$ ισχύει

$(9) \rightsquigarrow \quad \sigma^2|\sin\omega\tau| \leq \frac{1}{2}\left[\sigma^2 + \sigma^2\right] \Rightarrow |\sin\omega\tau| \leq 1$ ισχύει

ΑΣΚΗΣΗ Έστω τα τυχαία σήματα $X(n) = A\cos(\omega n+\theta)$, $Y(n) = A\sin(\omega n+\theta)$, όπου A και ω σταθερές και θ τυχαία μεταβλητή με ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[0,2\pi]$. Να υπολογιστεί η ετεροσυσχέτισή τους.

ΛΥΣΗ
$$\phi_{xy}(n+\ell,n) = E\left(X(n+\ell)\,Y^*(n)\right) = E\left(A\cos(\omega(n+\ell)+\theta)\cdot A\sin(\omega n+\theta)\right) =$$
$$= A^2\, E\left(\cos(\omega(n+\ell)+\theta)\cdot\sin(\omega n+\theta)\right) =$$
$$= A^2\cdot\frac{1}{2}\, E\left(\sin(-\omega\ell) + \sin(2\omega n+\omega\ell+2\theta)\right) =$$
$$= \frac{A^2}{2}\left[-\sin\omega\ell + E\left(\sin(2\omega n+\omega\ell+2\theta)\right)\right] \qquad (1)$$

Αλλά
$$E\left(\sin(2\omega n+\omega\ell+2\theta)\right) = \int_0^{2\pi} \sin(2\omega n+\omega\ell+2\theta)\cdot p(\theta)\,d\theta = \left\langle p(\theta) = \begin{cases}\frac{1}{2\pi} & 0\le\theta\le 2\pi \\ 0 & \text{αλλού}\end{cases}\right\rangle$$
$$= \int_0^{2\pi} \sin(2\omega n+\omega\ell+2\theta)\,\frac{1}{2\pi}\,d\theta =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin(\underbrace{2\omega n+\omega\ell}_{\alpha}+2\theta)\,d2\theta =$$
$$= \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \sin(\alpha+2\theta)\,d(\alpha+2\theta) =$$
$$= -\frac{1}{4\pi}\cos(\alpha+2\theta)\Big|_0^{2\pi} = 0$$

Συνεπώς η σχέση (1) γίνεται:
$$\phi_{xy}(n+\ell,n) = -\frac{A^2}{2}\sin\omega\ell = \phi_{xy}(\ell)$$

Υπολογίζουμε τώρα την ετερο-συσχέτιση $\phi_{yx}(n+\ell,n)$:
$$\phi_{yx}(n+\ell,n) = E\left(Y(n+\ell)\,X^*(n)\right) = E\left(A\sin(\omega(n+\ell)+\theta)\;A\cos(\omega n+\theta)\right) =$$
$$= A^2\,E\left(\sin(\omega(n+\ell)+\theta)\,\cos(\omega n+\theta)\right) =$$
$$= A^2\,\frac{1}{2}\,E\left(\sin\omega\ell + \sin(2\omega n+\omega\ell+2\theta)\right) =$$
$$= \frac{A^2}{2}\left[\sin\omega\ell + \underbrace{E\left(\sin(2\omega n+\omega\ell+2\theta)\right)}_{0}\right] =$$
$$= \frac{A^2}{2}\sin\omega\ell = \phi_{yx}(\ell) = -\phi_{xy}(\ell) = \phi_{xy}(-\ell)$$

Τελικά αποδείξαμε ότι $\phi_{yx}(\ell) = \phi_{xy}(-\ell)$

ΑΣΚΗΣΗ Έστω $X(n)$ στάσιμο σήμα με την ευρεία έννοια (WSS) και $\phi_{xx}(\ell)$ η αυτοσυσχέτιση αυτού. Ν.δ.ο.

$$E\left(\left[X(n+\ell)-X(n)\right]^2\right) = 2\left[\phi_{xx}(0)-\phi_{xx}(\ell)\right]$$

ΛΥΣΗ

$$E\left(\left[X(n+\ell)-X(n)\right]^2\right) = E\left(X^2(n+\ell) - 2X(n+\ell)X(n) + X^2(n)\right) =$$

$$= E\left(X^2(n+\ell)\right) - 2E\left(X(n+\ell)X(n)\right) + E\left(X^2(n)\right) =$$

$$= \phi_{xx}(0) - 2\phi_{xx}(\ell) + \phi_{xx}(0) =$$

$$= 2\left[\phi_{xx}(0) - \phi_{xx}(\ell)\right] \quad \text{ο.ε.δ.}$$

ΑΣΚΗΣΗ Έστω $X(n)$, $Y(n)$ ανεξάρτητα και WSS τυχαία πραγματικά σήματα. Είναι το άθροισμά τους WSS;

ΛΥΣΗ Έστω $S(n) = X(n) + Y(n)$

Μέση τιμή: $m_s(n) = E\left(S(n)\right) = E\left(X(n)+Y(n)\right) = E\left(X(n)\right) + E\left(Y(n)\right) = m_x + m_y$

Αφού τα τυχαία σήματα $X(n)$, $Y(n)$ είναι WSS θα έχουν σταθερή μέση τιμή. Άρα και το άθροισμα m_x+m_y θα είναι σταθερό.

Αυτοσυσχέτιση: $\phi_{ss}(n+\ell, n) = E\left(S(n+\ell)\,S^*(n)\right) =$

$$= E\left(\left[X(n+\ell)+Y(n+\ell)\right]\left[X(n)+Y(n)\right]^*\right) =$$

$$= E\left(X(n+\ell)X^*(n) + X(n+\ell)Y^*(n) + Y(n+\ell)X^*(n) + Y(n+\ell)Y^*(n)\right) =$$

$$= E\left(X(n+\ell)X^*(n)\right) + E\left(X(n+\ell)Y^*(n)\right) + E\left(Y(n+\ell)X^*(n)\right) + E\left(Y(n+\ell)Y^*(n)\right) =$$

$$= \phi_{xx}(\ell) + E\left(X(n+\ell)\right)E\left(Y^*(n)\right) + E\left(Y(n+\ell)\right)E\left(X^*(n)\right) + \phi_{yy}(\ell) =$$

$$= \phi_{xx}(\ell) + m_x m_y^* + m_x^* m_y + \phi_{yy}(\ell) =$$

$$= \phi_{xx}(\ell) + \phi_{yy}(\ell) + 2m_x m_y \quad \text{για πραγματικά τυχαία σήματα}$$

Άρα η $S(n)$ είναι WSS, αφού η μέση τιμή της είναι σταθερή και η αυτοσυσχέτιση της εξαρτάται μόνο από τη διαφορά των χρόνων ℓ.

ΑΣΚΗΣΗ Να εξετάσετε εάν η περιοδική διακριτού-χρόνου τυχαία διαδικασία $X(n)=A\cos(\omega_0 n-\Theta)$, όπου Θ τυχαία μεταβλητή ομοιόμορφα κατανεμημένη στην περιοχή $-\pi$ έως π, είναι εργοδική.

ΛΥΣΗ Για να δούμε εάν η $X(n)$ είναι εργοδική θα πρέπει (α) να αποδείξουμε ότι είναι στάσιμη με την ευρεία έννοια (WSS) και (β) να αποδείξουμε ότι τα στατιστικά χαρακτηριστικά (μέσος όρος και αυτοσυσχέτιση) ισούνται με τα αντίστοιχα χαρακτηριστικά στον χρόνο, όπως αυτά υπολογίζονται από μία και μόνη πραγμάτωση (realization).

α. Για να είναι στάσιμη με την ευρεία έννοια θα πρέπει η μέση τιμή να είναι σταθερή και η αυτοσυσχέτιση να είναι συνάρτηση της διαφοράς των χρόνων $l=n_2-n_1$

$$m_x(n)=E\big(X(n)\big)=\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{p_x(\theta)}_{1/2\pi}\,X(\theta)\,d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}A\cos(\omega_0 n-\Theta)\,d\theta=$$

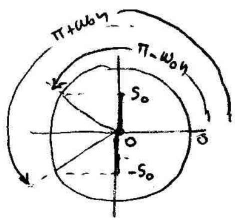
$$=\frac{-A}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(\omega_0 n-\Theta)\,d(\omega_0 n-\Theta)=$$

$$=\frac{-A}{2\pi}\sin(\omega_0 n-\theta)\Big|_{-\pi}^{\pi}=$$

$$=\frac{-A}{2\pi}\Big[\sin(\omega_0 n-\pi)-\sin(\omega_0 n+\pi)\Big]=$$

$$=\frac{-A}{2\pi}\Big[-\sin(\pi-\omega_0 n)-\sin(\pi+\omega_0 n)\Big]=$$

$$=\frac{A}{2\pi}\Big[\underbrace{\sin(\pi-\omega_0 n)}_{S_0}+\underbrace{\sin(\pi+\omega_0 n)}_{-S_0}\Big]=$$



$$=\frac{A}{2\pi}\big[S_0-S_0\big]=$$

$$=0$$

Άρα η μέση τιμή είναι σταθερή, ίση με μηδέν:

$$m_x(n)=m_x=0$$

$$\Phi_{xx}(n+l,n) = E\left(X(n+l)\,X^{*}(n)\right) = E\Big(A\cos[w_0(n+l)-\theta]\cdot A\cos(w_0 n-\theta)\Big) =$$

$$= E\left(A^2\tfrac{1}{2}\left[\cos(\cancel{w_0 n}+w_0 l-\cancel{\theta}-\cancel{w_0 n}+\cancel{\theta}) + \cos(w_0 n+w_0 l-\theta+w_0 n-\theta)\right]\right) =$$

$$= \frac{A^2}{2}E\Big(\cos(w_0 l) + \cos(\underbrace{2w_0 n+w_0 l}_{\xi}-2\theta)\Big) =$$

$$= \frac{A^2}{2}\cos(w_0 l) + \frac{A^2}{2}E\big(\cos(\xi-2\theta)\big) \qquad (1)$$

Αλλά

$$E\big(\cos(\xi-2\theta)\big) = \int_{-\pi}^{\pi} p_x(\theta)\,X(\theta)\,d\theta =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2\pi}\cos(\xi-2\theta)\,d\theta =$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(\xi-2\theta)\,d(\xi-2\theta) =$$

$$= \frac{-1}{4\pi}\sin(\xi-2\theta)\Big|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= \frac{-1}{4\pi}\left[\sin(\xi-2\pi)-\sin(\xi+2\pi)\right] =$$

$$= \frac{-1}{4\pi}\left[-\sin(2\pi-\xi)-\sin(2\pi+\xi)\right] =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left[\underbrace{\sin(2\pi-\xi)}_{v_0}+\underbrace{\sin(2\pi+\xi)}_{-v_0}\right] =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left[v_0-v_0\right] =$$

$$= 0$$

Τελικά η (1) γίνεται:

$$\Phi_{xx}(n+l,n) = \frac{A^2}{2}\cos(w_0 l) = \phi_{xx}(l) \qquad (2)$$

Δηλαδή η αυτοσυσχέτιση είναι συνάρτηση της διαφοράς των χρόνων μόνον.
Άρα η διακριτού-χρόνου τυχαία διαδικασία $X(n)$ είναι στάσιμη με την ευρεία έννοια (WSS), αφού η μέση τιμή είναι σταθερή (μηδέν ως προαναφέραμε) και η αυτοσυσχέτιση εξαρτάται μόνον από την διαφορά των χρόνων.

β. Για να δούμε αν αυτή είναι εργοδική θα πρέπει να υπολογίσουμε τη μέση τιμή και την αυτοσυσχέτιση μιας πραγματώσεως της τυχαίας διαδικασίας, έστω της $x(n) = A\cos(w_0 n - \theta)$. Έστω N η περίοδος του περιοδικού αυτού σήματος.

$$\hat{m}_x = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} A\cos(w_0 n-\theta) = \frac{A}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{2}\left(e^{j(w_0 n-\theta)} + e^{-j(w_0 n-\theta)}\right) =$$

$$= \frac{A}{2N}\left[\sum_{n=0}^{N-1} e^{jw_0 n} e^{-j\theta} + \sum_{n=0}^{N-1} e^{-jw_0 n} e^{j\theta}\right] =$$

$$= \frac{A}{2N}\left[e^{-j\theta}\sum_{n=0}^{N-1}\left(e^{jw_0}\right)^n + e^{j\theta}\sum_{n=0}^{N-1}\left(e^{-jw_0}\right)^n\right] =$$

$$= \frac{A}{2N}\left[e^{-j\theta}\frac{1-e^{jw_0 N}}{1-e^{jw_0}} + e^{j\theta}\frac{1-e^{-jw_0 N}}{1-e^{-jw_0}}\right] =$$

$$= \frac{A}{2N}\left[e^{-j\theta}\frac{e^{jw_0 N/2}}{e^{jw_0/2}}\frac{e^{-jw_0 N/2}-e^{jw_0 N/2}}{e^{-jw_0/2}-e^{jw_0/2}} + e^{j\theta}\frac{e^{-jw_0 N/2}}{e^{-jw_0/2}}\frac{e^{jw_0 N/2}-e^{-jw_0 N/2}}{e^{jw_0/2}-e^{-jw_0/2}}\right] =$$

$$= \frac{A}{2N}\left[e^{-j\theta}e^{j\frac{w_0}{2}(N-1)}\frac{\cancel{-2j}\sin(w_0 N/2)}{\cancel{-2j}\sin(w_0/2)} + e^{j\theta}e^{-j\frac{w_0}{2}(N-1)}\frac{\cancel{2j}\sin(w_0 N/2)}{\cancel{2j}\sin(w_0/2)}\right] =$$

$$= \frac{A}{2N}\left[e^{j\left[\frac{w_0}{2}(N-1)-\theta\right]} + e^{-j\left[\frac{w_0}{2}(N-1)-\theta\right]}\right]\frac{\sin(w_0 N/2)}{\sin(w_0/2)} =$$

$$= \frac{A}{N}\cos\left(\frac{w_0}{2}(N-1)-\theta\right)\frac{\sin\left(\frac{w_0 N}{2}\right)}{\sin\left(\frac{w_0}{2}\right)} \qquad (3)$$

Αλλά

$$w_0 = \frac{2\pi}{N} \Rightarrow w_0 N = 2\pi \Rightarrow \frac{w_0 N}{2} = \pi \qquad (4)$$

$$\frac{w_0}{2}(N-1) = \frac{w_0 N}{2} - \frac{w_0}{2} = \pi - \frac{w_0}{2} \qquad (5)$$

Οπότε η (3) λόγω των (4), (5) γίνεται

$$\hat{m}_x = \frac{A}{N}\cos\left(\pi - \frac{w_0}{2} - \theta\right)\frac{\overbrace{\sin(\pi)}^{\to 0}}{\sin\left(\frac{w_0}{2}\right)} = 0$$

<u>Σημείωση</u>: Ουσιαστικά αποδείξαμε αυτό το οποίο ήδη γνωρίζουμε. Ότι, δηλαδή, η μέση τιμή ενός περιοδικού ημιτονοειδούς σήματος είναι μηδενική.

Η αυτοσυσχέτιση του δείγματος/πραγματωσης (realization) $x(n) = A\cos(\omega_0 n - \theta)$, ως σήματος ισχύος, υπολογίζεται ως εξής:

$$\phi_{xx}(n+l, n) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n+l)\, x(n) =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left[A \cdot \cos\left(\omega_0 (n+l) - \theta\right)\right]\left[A \cos(\omega_0 n - \theta)\right] =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} A^2 \frac{1}{2}\left[\cos\left(\cancel{\omega_0 n} + \omega_0 l \cancel{-\theta} - \cancel{\omega_0 n} + \cancel{\theta}\right) + \cos\left(\omega_0 n + \omega_0 l - \theta + \omega_0 n - \theta\right)\right] =$$

$$= \frac{A^2}{2N} \sum_{n=0}^{N-1} \left[\cos(\omega_0 l) + \cos\left(2\omega_0 n + \omega_0 l - 2\theta\right)\right] =$$

$$= \underbrace{\frac{A^2}{2N} \cos(\omega_0 l) \sum_{n=0}^{N-1} 1}_{\mathrm{I}} + \underbrace{\frac{A^2}{2N} \sum_{n=0}^{N-1} \cos\left(2\omega_0 n + \omega_0 l - 2\theta\right)}_{\mathrm{II}} \qquad (6)$$

όπου $\sum_{n=0}^{N-1} 1 = N$ οπότε η I γίνεται $\frac{A^2}{2\cancel{N}} \cos(\omega_0 l) \cdot \cancel{N} = \frac{A^2}{2} \cos(\omega_0 l)$ (7)

και η II ισούται με 0 (μηδέν) η μέση τιμή ενός συνημιτονικού σήματος στη διάρκεια μιας περιόδου αυτού, δηλ.

$$\frac{A^2}{2} \cdot \underbrace{\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \cos\left(2\omega_0 n + \omega_0 l - 2\theta\right)}_{0} = 0 \qquad (8)$$

Τελικά, με βάση τις (7), (8) η (6) γίνεται:

$$\phi_{xx}(n+l, n) = \frac{A^2}{2} \cos(\omega_0 l) = \phi_{xx}(l)$$

Η αυτοσυσχέτιση εξαρτάται μόνον από τη διαφορά των χρόνων $l = (n+l) - n$

Άρα η τυχαία διαδικασία $X(n) = A\cos(\omega_0 n - \theta)$ είναι εργοδική.

<u>Σημείωση</u>: Στην περίπτωση που το διακριτού χρόνου σήμα $\cos(\omega_0 n-\theta)$ δεν ήταν περιοδικό, δηλ. η συχνότητα f_0 δεν ήταν ρητή, τότε ο υπολογισμός της αυτοσυσχέτισης θα ήταν:

$$\phi_{xx}(n+l,n) = \lim_{M\to\infty} \frac{1}{2M+1}\sum_{n=-M}^{M} x(n+l)\,x(n) \quad \langle\text{ορισμός αυτοσυσχέτισης για σήματα ισχύος}\rangle$$

$$= \lim_{M\to\infty} \frac{1}{2M+1}\sum_{n=-M}^{M} A\cdot\cos(\omega_0(n+l)-\theta)\cdot A\cos(\omega_0 n-\theta) =$$

$$= \lim_{M\to\infty} \frac{A^2}{2M+1}\sum_{n=-M}^{M} \tfrac{1}{2}\Big[\cos(\omega_0 n+\omega_0 l-\theta-\omega_0 n+\theta) + \cos(\omega_0 n+\omega_0 l-\theta+\omega_0 n-\theta)\Big] =$$

$$= \lim_{M\to\infty} \frac{A^2/2}{2M+1}\sum_{n=-M}^{M}\Big[\cos(\omega_0 l) + \cos(2\omega_0 n+\omega_0 l-2\theta)\Big] =$$

$$= \underbrace{\lim_{M\to\infty} \frac{A^2/2}{2M+1}\cos(\omega_0 l)\sum_{n=-M}^{M} 1}_{\text{I}} + \underbrace{\lim_{M\to\infty} \frac{A^2/2}{2M+1}\sum_{n=-M}^{M}\cos(2\omega_0 n+\omega_0 l-2\theta)}_{\text{II}} \qquad (6')$$

Αλλά $\sum_{n=-M}^{M} 1 = 2M+1$ οπότε η (I) γίνεται:

$$\lim_{M\to\infty} \frac{A^2/2}{2M+1}\cos(\omega_0 l)\cdot(2M+1) = \frac{A^2}{2}\cos(\omega_0 l) \qquad (7')$$

Επίσης η τιμή του αθροίσματος $\sum_{n=-M}^{M}\cos(2\omega_0 n+\omega_0 l-2\theta)$ είναι πεπερασμένη, έστω q, αφού πρόκειται για άθροισμα δειγμάτων συνημιτόνου με περίπου μισά από αυτά να έχουν θετική τιμή και τα άλλα αρνητική τιμή. Άρα η (II) γίνεται:

$$\lim_{M\to\infty} \frac{1}{2M+1}\cdot\frac{A^2}{2}\cdot q = 0 \qquad (8')$$

Τελικά, με βάση τις (7'), (8') η (6') γίνεται:

$$\phi_{xx}(n+l,n) = \frac{A^2}{2}\cos(\omega_0 l) = \phi_{xx}(l)$$

Η αυτοσυσχέτιση εξαρτάται μόνον από τη διαφορά των χρόνων $l=(n+l)-n$.

Τελικά, μετά και το αποτέλεσμα αυτό προκύπτει ότι η τυχαία διαδικασία $X(n) = A\cos(\omega_0 n-\Theta)$ είναι εργοδική.

ΑΣΚΗΣΗ Έστω η WSS τυχαία διαδικασία $X(t) = A\cos(\Omega_0 t + \Theta)$, όπου A, Ω_0 σταθ. και Θ τυχαία μεταβλητή ομοιόμορφης πυκνότητας πιθανότητας στο διάστημα $[0, 2\pi)$.
Να υπολογιστεί η φασματική πυκνότητα ισχύος της τυχαίας διαδικασίας $Z(t) = X(t) + \frac{d}{dt}X(t)$.

ΛΥΣΗ Είδαμε σε προηγούμενη άσκηση ότι η φασματική πυκνότητα ισχύος (Power Spectral Density – PSD) της $Z(t) = X(t) + Y(t)$ ισούται με

$$S_{ZZ}(\Omega) = S_{XX}(\Omega) + S_{YY}(\Omega) + 2\,\mathrm{Re}\{S_{XY}(\Omega)\} \qquad (1)$$

Για τον υπολογισμό των $S_{XX}(\Omega), S_{YY}(\Omega), S_{XY}(\Omega)$ απαιτείται η εύρεση των συσχετίσεων $\phi_{XX}(\tau)$, $\phi_{YY}(\tau)$, $\phi_{XY}(\tau)$ αντίστοιχα.

α. Υπολογισμός $\phi_{XX}(\tau)$:

$$\begin{aligned}
\phi_{XX}(t+\tau, t) = \phi_{XX}(\tau) &= E\left(X(t+\tau)X^*(t)\right) = \\
&= E\left(A\cos[\Omega_0(t+\tau)+\Theta] \cdot A\cos(\Omega_0 t + \Theta)\right) = \\
&= A^2 E\left(\frac{1}{2}\left[\cos(\Omega_0\tau) + \cos(\underbrace{2\Omega_0 t + \Omega_0\tau}_{\alpha} + 2\Theta)\right]\right) = \\
&= \frac{A^2}{2}\cos(\Omega_0\tau) + \frac{A^2}{2}\underbrace{E\left(\cos(\alpha + 2\Theta)\right)}_{0} = \\
&= \frac{A^2}{2}\cos(\Omega_0\tau) \qquad (2)
\end{aligned}$$

αφού

$$\begin{aligned}
E\left(\cos(\alpha+2\Theta)\right) &= \int_0^{2\pi} \cos(\alpha+2\Theta) \cdot \frac{1}{2\pi}\, d\Theta = \\
&= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos(\alpha+2\Theta)\, d(\alpha+2\Theta) = \\
&= \frac{1}{4\pi}\sin(\alpha+2\Theta)\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{4\pi}\left[\sin(\alpha+4\pi) - \sin(\alpha)\right] = \\
&= \frac{1}{4\pi}\left[\sin(\alpha) - \sin(\alpha)\right] = 0
\end{aligned}$$

β. Υπολογισμός $\phi_{YY}(\tau)$, όπου $Y(t) = \frac{d}{dt}X(t) = \frac{d}{dt}\left(A\cos(\Omega_0 t+\Theta)\right) = -A\Omega_0 \sin(\Omega_0 t+\Theta)$

$$\phi_{YY}(t+\tau,t) = \phi_{YY}(\tau) = E\left(Y(t+\tau)\,Y^*(t)\right) =$$

$$= E\left(\left[-A\Omega_0\sin[\Omega_0(t+\tau)+\theta]\right]\left[-A\Omega_0\sin(\Omega_0 t+\theta)\right]\right) =$$

$$= A^2\Omega_0^2\, E\left(\frac{1}{2}\left[\cos(\Omega_0\tau) - \cos\left(\underbrace{2\Omega_0 t+\Omega_0\tau}_{\alpha}+2\theta\right)\right]\right) =$$

$$= \frac{A^2\Omega_0^2}{2}\cos(\Omega_0\tau) - \frac{A^2\Omega_0^2}{2}\,\underbrace{E\left(\cos(\alpha+2\theta)\right)}_{0} =$$

$$= \frac{A^2\Omega_0^2}{2}\cos(\Omega_0\tau) \qquad (3)$$

γ. Υπολογισμός $\phi_{XY}(\tau)$:

$$\phi_{XY}(t+\tau,t) = \phi_{XY}(\tau) = E\left(X(t+\tau)\,Y^*(t)\right) =$$

$$= E\left(A\cos\left(\Omega_0(t+\tau)+\theta\right)\cdot\left[-A\Omega_0\sin(\Omega_0 t+\theta)\right]\right) =$$

$$= -A^2\Omega_0\; E\left(\cos(\Omega_0 t+\Omega_0\tau+\theta)\,\sin(\Omega_0 t+\theta)\right) =$$

$$= -A^2\Omega_0\; E\left(\frac{1}{2}\left[\sin(-\Omega_0\tau) + \sin\left(\underbrace{2\Omega_0 t+\Omega_0\tau}_{\alpha}+2\theta\right)\right]\right) =$$

$$= \frac{A^2\Omega_0}{2}\sin(\Omega_0\tau) - \frac{A^2\Omega_0}{2}\,\underbrace{E\left(\sin(\alpha+2\theta)\right)}_{0} =$$

$$= \frac{A^2\Omega_0}{2}\sin(\Omega_0\tau) \qquad (4)$$

αφού

$$E\left(\sin(\alpha+2\theta)\right) = \int_0^{2\pi}\sin(\alpha+2\theta)\,\frac{1}{2\pi}\,d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sin(\alpha+2\theta)\,d(\alpha+2\theta) =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left[-\cos(\alpha+2\theta)\right]\Big|_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{-1}{4\pi}\left[\cos(\alpha+4\pi) - \cos(\alpha)\right] =$$

$$= \frac{-1}{4\pi}\left[\cos(\alpha) - \cos(\alpha)\right] = 0$$

Ο μετασχηματισμός Fourier των (2), (3), (4) μας δίνει τις αντίστοιχες φασματικές πυκνότητες ισχύος.

$$S_{XX}(\Omega) = F\left\{\phi_{XX}(\tau)\right\} = F\left\{\frac{A^2}{2}\cos(\Omega_0\tau)\right\} = \frac{A^2}{2}\pi\left[\delta(\Omega-\Omega_0)+\delta(\Omega+\Omega_0)\right] \quad (5)$$

$$S_{YY}(\Omega) = F\left\{\phi_{YY}(\tau)\right\} = F\left\{\frac{A^2\Omega_0^2}{2}\cos(\Omega_0\tau)\right\} = \frac{A^2\Omega_0^2}{2}\pi\left[\delta(\Omega-\Omega_0)+\delta(\Omega+\Omega_0)\right] \quad (6)$$

$$S_{XY}(\Omega) = F\left\{\phi_{XY}(\tau)\right\} = F\left\{\frac{A^2\Omega_0}{2}\sin(\Omega_0\tau)\right\} = \frac{A^2\Omega_0}{2}\frac{\pi}{j}\left[\delta(\Omega-\Omega_0)-\delta(\Omega+\Omega_0)\right] \quad (7)$$

Παρατηρούμε ότι η $S_{XY}(\Omega)$ έχει μόνον φανταστικό μέρος, δηλ. $Re\left\{S_{XY}(\Omega)\right\}=0$ οπότε η (1) γίνεται:

$$S_{ZZ}(\Omega) = S_{XX}(\Omega) + S_{YY}(\Omega) =$$

$$= \frac{A^2\pi}{2}\left(1+\Omega_0^2\right)\left[\delta(\Omega-\Omega_0)+\delta(\Omega+\Omega_0)\right]$$

ΑΣΚΗΣΗ Σε πολλές εφαρμογές των ψηφιακών επικοινωνιών, ο δέκτης γνωρίζει τις κυματομορφές των μεταδιδόμενων σημάτων. Το σήμα που λαμβάνεται είναι αναμεμιγμένο με προσθετικό θόρυβο. Η γνώση της μορφής του σήματος που μεταδόθηκε, μπορεί να βοηθήσει στην αναγνώριση του μεταδοθέντος σήματος, υπολογίζοντας την ετεροσυσχέτιση μεταξύ του ληφθέντος ενθόρυβου σήματος και του γνωστού σήματος αναφοράς, δηλαδή του "καθαρού" σήματος που μεταδόθηκε.

Έστω ότι ο πομπός στέλνει το σήμα $X(t) = A\sin(\Omega_0 t + \theta)$ για το λογικό "1" και το σήμα $X(t) = 0$, δηλαδή δεν στέλνει σήμα, για το λογικό "0".

$$X(t) = \begin{cases} A\sin(\Omega_0 t + \theta) & \text{για λογικό "1"} \\ 0 & \text{για λογικό "0"} \end{cases}$$

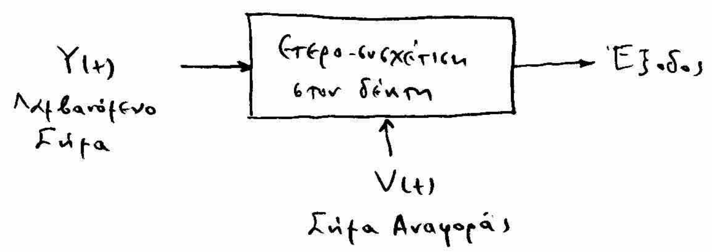
Στον δέκτη θα λαμβάνεται το σήμα $Y(t) = X(t) + W(t)$, όπου $W(t)$ λευκός θόρυβος με αμφίπλευρη φασματική πυκνότητα ισχύος $N_0/2$.

$$Y(t) = \begin{cases} A\sin(\Omega_0 t + \theta) + W(t) & \text{για λογικό "1"} \\ W(t) & \text{για λογικό "0"} \end{cases}$$

Το $X(t)$ είναι μια τυχαία διαδικασία με A, Ω_0 σταθερές και θ μια ομοιόμορφη τυχαία μεταβλητή στο διάστημα $[-\pi, \pi]$. Το θ και το $W(t)$ είναι ασυσχέτιστα.

Να υπολογιστεί η ετεροσυσχέτιση του σήματος αναφοράς $V(t) = A\sin(\Omega_0 t + \theta)$ με το λαμβανόμενο σήμα $Y(t)$.

ΛΥΣΗ



Περίπτωση Α: Μετάδοση λογικού "0", δηλ. $Y(t) = W(t)$

$$\phi_{YV}(\tau) = E\left(Y(t+\tau)\, V^*(t)\right) = E\left(W(t+\tau)\; A \sin(\Omega_0 t + \theta)\right) =$$

$$= A\, \underbrace{E\left(W(t+\tau)\right)}_{m_W = 0}\; E\left(\sin(\Omega_0 t + \theta)\right) = 0$$

Σημειώνεται ότι τα θ και $W(t)$ είναι ασυσχέτιστα, οπότε $E(\cdot\,\cdot) = E(\cdot)\, E(\cdot)$ και ότι ο λευκός θόρυβος έχει μέση τιμή 0.

Περίπτωση Β: Μετάδοση λογικού "1", δηλ. $Y(t) = A \sin(\Omega_0 t + \theta) + W(t)$

$$\phi_{YV}(\tau) = E\left(Y(t+\tau)\, V^*(t)\right) =$$

$$= E\left(\left[A \sin[\Omega_0(t+\tau) + \theta] + W(t+\tau)\right]\left[A \sin(\Omega_0 t + \theta)\right]\right) =$$

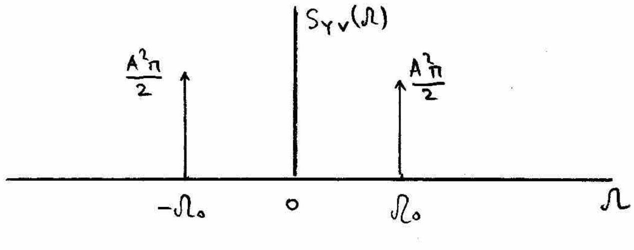
$$= A^2\, E\left(\sin[\Omega_0(t+\tau) + \theta]\, \sin(\Omega_0 t + \theta)\right) + A \cdot \underbrace{E\left(W(t+\tau) \sin(\Omega_0 t + \theta)\right)}_{0} =$$

$$= \frac{A^2}{2}\left[E\left(\cos(\Omega_0 \tau)\right) - \underbrace{E\left(\cos(2\Omega_0 t + \Omega_0 \tau + 2\theta)\right)}_{0}\right] =$$

$$= \frac{A^2}{2} \cos(\Omega_0 \tau)$$

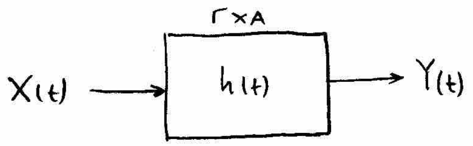
Η φασματική πυκνότητα ισχύος στην περίπτωση αυτή είναι:

$$S_{YV}(\Omega) = F\{\Phi_{YV}(\tau)\} = \frac{A^2}{2} F\{\cos(\Omega_0 \tau)\} = \frac{A^2}{2} \pi \left[\delta(\Omega - \Omega_0) + \delta(\Omega + \Omega_0)\right]$$



ΑΣΚΗΣΗ Έστω ΓΧΑ σύστημα με κρουστική απόκριση $h(t) = e^{-2t}u(t)$. Στην είσοδο του συστήματος εφαρμόζεται λευκός θόρυβος $X(t)$ αυτοσυσχέτισης $\phi_{xx}(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(\tau)$. Να υπολογιστεί η ετεροσυσχέτιση εξόδου-εισόδου $\phi_{yx}(\tau)$, καθώς και η φασματική πυκνότητα ετερο-ισχύος $S_{yx}(\Omega)$.

ΛΥΣΗ



Γνωρίζουμε ότι $\phi_{YX}(\tau) = h(\tau) * \phi_{XX}(\tau) \xleftrightarrow{F} S_{YX}(\Omega) = H(\Omega)\cdot S_{XX}(\Omega)$

Αντικαθιστώντας βρίσκουμε $\phi_{YX}(\tau) = e^{-2\tau}u(\tau) * \frac{N_0}{2}\delta(\tau) = \frac{N_0}{2}e^{-2\tau}u(\tau)*\delta(\tau) = \frac{N_0}{2}e^{-2\tau}u(\tau)$ (1)

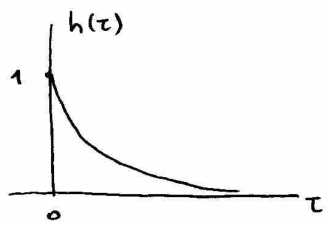
Δεδομένου ότι $h(\tau) = e^{-2\tau}u(\tau) \xleftrightarrow{F} H(\Omega) = \dfrac{1}{2+j\Omega}$ (2)

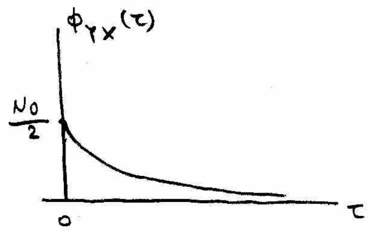
$\phi_{XX}(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(\tau) \longleftrightarrow S_{XX}(\Omega) = \frac{N_0}{2}$ (3)

Η φασματική πυκνότητα ετερο-ισχύος είναι:

$$S_{YX}(\Omega) = \frac{N_0/2}{2+j\Omega} \qquad (4)$$

Οι γραφικές παραστάσεις της κρουστικής απόκρισης και της ετεροσυσχέτισης είναι οι ακόλουθες:





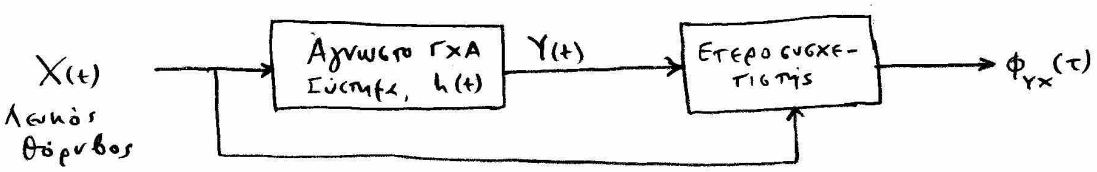
ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Παρατηρούμε ότι η $\phi_{YX}(\tau)$ είναι απλά μια σταθμισμένη (scaled) εκδοχή της κρουστικής απόκρισης $h(\tau)$. Η ιδιότητα αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον προσδιορισμό της κρουστικής απόκρισης ενός άγνωστου συστήματος, δηλαδή για την ταυτοποίηση/αναγνώριση ενός συστήματος (system identification).

Η διαδικασία της ταυτοποίησης ενός άγνωστου συστήματος (system identification) γίνεται ως εξής:
Στο άγνωστο σύστημα εφαρμόζεται λευκός θόρυβος αυτοσυσχέτισης:
$\phi_{xx}(\tau) = \delta(\tau)$, δηλαδή $N_0/2 = 1$.
Η συνάρτηση ετεροσυσχέτισης της εξόδου του συστήματος $Y(t)$ και της εισόδου $X(t)$ είναι τότε

$$\phi_{YX}(\tau) = h(\tau) * \phi_{xx}(\tau) = h(\tau) * \delta(\tau) = h(\tau)$$

δηλαδή η κρουστική απόκριση του άγνωστου συστήματος. Σχηματικά η διαδικασία ταυτοποίησης συστήματος φαίνεται παρακάτω.



Σημειώνεται ότι αυτή η μέθοδος προσδιορισμού της κρουστικής απόκρισης ενός συστήματος είναι πρακτικά πιο χρήσιμη από την απλή εφαρμογή μιας κρουστικής στην είσοδο του άγνωστου συστήματος. Άλλωστε είναι πρακτικά αδύνατο να δημιουργήσουμε μια κρουστική. Θα έπρεπε να την προσεγγίσουμε δημιουργώντας ένα παλμό μικρού εύρους και πολύ μεγάλου πλάτους, ο οποίος όμως θα επέφερε μια μεγάλη καταπόνηση στο υπό εξέταση άγνωστο σύστημα. Η εφαρμογή λευκού θορύβου στην είσοδο του συστήματος, λύνει αυτό το πρόβλημα.

Βέβαια, ιδανικός λευκός θόρυβος δεν υπάρχει, οπότε αναγκαζόμαστε να χρησιμοποιούμε λευκό θόρυβο πεπερασμένου εύρους συχνοτήτων, δηλαδή θόρυβο το φάσμα του οποίου είναι σταθερό στην περιοχή των συχνοτήτων που μας ενδιαφέρει.

ΑΣΚΗΣΗ Το μηδενικής μέσης τιμής WSS λευκού θορύβου σήμα $\{X(n)\}$ εφαρμόζεται σε ένα αιτιατό ΓΧΑ σύστημα διακριτού χρόνου με κρουστική απόκριση $h(n) = \delta(n) - \alpha\,\delta(n-1)$, παράγοντας τη WSS έξοδο $\{Y(n)\}$. Να υπολογιστεί το φάσμα ισχύος $S_{YY}(\omega)$ και η μέση ισχύς της εξόδου $y(n)$. Ποια η επίδραση του α στη μέση ισχύ της εξόδου;

ΛΥΣΗ

$$X(n) \longrightarrow \boxed{h(n)} \longrightarrow Y(n)$$

$m_x = 0$, σ_x^2

$S_{YY}(\omega) = ;$

$P_y = \Phi_{yy}(0) = ;$

Φάσμα ισχύος εξόδου:
$$S_{YY}(\omega) = \left|H(e^{j\omega})\right|^2 S_{XX}(\omega) \qquad (1)$$

Αλλά για μια στοχαστική διαδικασία WSS με μηδενική μέση τιμή $(m_x = 0)$ ισχύει:
$$S_{XX}(\omega) = \sigma_x^2 + 2\pi m_x^2\,\delta(\omega) = \sigma_x^2 \qquad (2)$$

Επίσης
$$H(e^{j\omega}) = \text{DTFT}\{h(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)\,e^{-j\omega n} = 1 - \alpha e^{-j\omega} \qquad (3)$$

[Εναλλακτικά το $H(e^{j\omega})$ θα μπορούσε να υπολογιστεί από τον MZ του $h(n)$, δηλ. την $H(z)$, για $z = e^{j\omega}$:

$$H(z) = Z\{h(n)\} = Z\{\delta(n) - \alpha\,\delta(n-1)\} = 1 - \alpha z^{-1}$$
$$H(e^{j\omega}) = H(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} = 1 - \alpha e^{-j\omega} \;]$$

Άρα
$$\begin{aligned}
S_{YY}(\omega) &= \left|H(e^{j\omega})\right|^2 S_{XX}(\omega) = \\
&= H(e^{j\omega})\,H(e^{-j\omega})\,S_{XX}(\omega) = \\
&= (1 - \alpha e^{-j\omega})(1 - \alpha e^{j\omega})\,\sigma_x^2 = \\
&= (1 - \alpha e^{-j\omega} - \alpha e^{j\omega} + \alpha^2)\,\sigma_x^2 = \\
&= (1 + \alpha^2 - 2\alpha\cos\omega)\,\sigma_x^2
\end{aligned}$$

Η μέση ισχύς P_y για ένα WSS σήμα δίνεται από τη σχέση:

$$P_y = \phi_{YY}(0) = \sigma_Y^2 + |m_y|^2 \qquad (4)$$

Αλλά

$$m_y = m_x \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) = 0 \quad \text{αφού } m_x = 0$$

$$\sigma_y^2 = \sigma_x^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)|^2 = \langle \text{λόγω θεωρήματος Parseval} \rangle =$$

$$= \sigma_x^2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{j\omega})|^2 d\omega =$$

$$= \sigma_x^2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1+\alpha^2 - 2\alpha\cos\omega)\, d\omega =$$

$$= \sigma_x^2 \frac{1}{2\pi} \left[(1+\alpha^2)\int_{-\pi}^{\pi} d\omega - 2\alpha \int_{-\pi}^{\pi} \cos\omega\, d\omega\right] =$$

$$= \sigma_x^2 \frac{1}{2\pi} \left[(1+\alpha^2)\, \omega\Big|_{-\pi}^{\pi} - 2\alpha \sin\omega\Big|_{-\pi}^{\pi}\right] =$$

$$= \sigma_x^2 \frac{1}{2\pi} \left[(1+\alpha^2)\, 2\pi - 2\alpha \cdot 0\right] =$$

$$= \sigma_x^2 (1+\alpha^2)$$

Παρατηρούμε ότι η μέση ισχύς αυξάνεται με την αύξηση του α.

Εναλλακτικά, η διασπορά της εξόδου σ_y^2 θα μπορούσε να υπολογιστεί ως εξής:

$$\sigma_y^2 = \sigma_x^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)|^2 = \sigma_x^2 \left(|h(0)|^2 + |h(1)|^2\right) = \sigma_x^2 (1+\alpha^2)$$

ΑΣΚΗΣΗ Ένα WSS σήμα $\{X(n)\}$ λευκού θορύβου με μηδενική μέση τιμή και διασπορά σ_x^2 εφαρμόζεται σε αιτιατό ΓΧΑ σύστημα διακριτού χρόνου, το οποίο έχει κρουστική απόκριση $h(n) = (0.5)^n u(n)$, παράγοντας το WSS σήμα $\{Y(n)\}$. Να υπολογιστεί το φάσμα ισχύος $S_{YY}(\omega)$ της εξόδου.

ΛΥΣΗ

$$S_{YY}(\omega) = |H(e^{j\omega})|^2 \, S_{XX}(\omega) \qquad (1)$$

Αλλά $S_{XX}(\omega) = \sigma_x^2 + 2\pi m_x \delta(\omega) = \sigma_x^2 \qquad (2)$

αφού $m_x = 0$

Επίσης $|H(e^{j\omega})|^2 = H(e^{j\omega})\, H(e^{-j\omega}) = \left\langle H(e^{j\omega}) = \text{DTFT}\{h(n)\} = \dfrac{1}{1-0.5e^{-j\omega}} \right\rangle =$

$$= \frac{1}{1-0.5\,e^{-j\omega}} \cdot \frac{1}{1-0.5\,e^{j\omega}} =$$

$$= \frac{1}{1-0.5e^{j\omega} - 0.5\,e^{-j\omega} + (0.5)^2} =$$

$$= \frac{1}{1.25 - \cos\omega} \qquad (3)$$

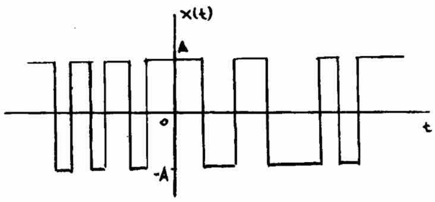
Τελικά $(1) \xRightarrow{(2),(3)}$ γίνεται:

$$S_{YY}(\omega) = \frac{\sigma_x^2}{1.25 - \cos\omega}$$

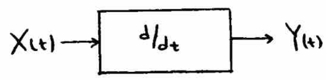
ΑΣΚΗΣΗ 3.2 Το σήμα τηλεγράφου (telegraph signal) αποτελεί μια στοχαστική διαδικασία, έστω $X(t)$, η οποία λαμβάνει τις τιμές $\pm A$ με ίση πιθανότητα και έχει αυτοσυσχέτιση $\phi_{xx}(\tau) = A^2 e^{-2\alpha|\tau|}$, όπου α ο μέσος αριθμός των αλλαγών προσήμου στη μονάδα χρόνου. Μια πραγματοποίηση (δείγμα) της διαδικασίας αυτής δείχνεται στο Σχ.1. Το σήμα αυτό εφαρμόζεται στην είσοδο ενός συστήματος διαφόρισης (Σχ.2) παράγοντας στην έξοδο το τυχαίο σήμα $Y(t)$.

(i) Να υπολογίσετε τη φασματική πυκνότητα ισχύος της εξόδου $Y(t)$.

(ii) Να σχεδιάσετε τη φασματική πυκνότητα ισχύος της εισόδου και της εξόδου, καθώς και το μέτρο της απόκρισης συχνότητας του συστήματος διαφόρισης. (Υπόδειξη: Για τις γραφικές σας χρησιμοποιήστε τις εξής τιμές: $A=2$, $\alpha=5$, $\Omega \in [-200,200]$ rad/sec).



Σχήμα 1



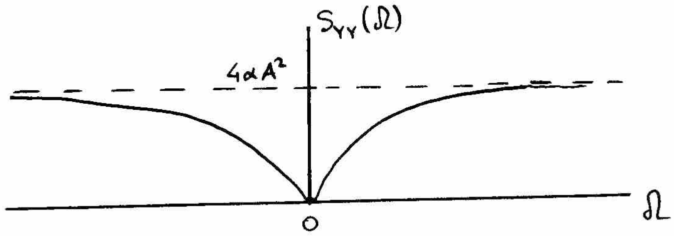
Σχήμα 2

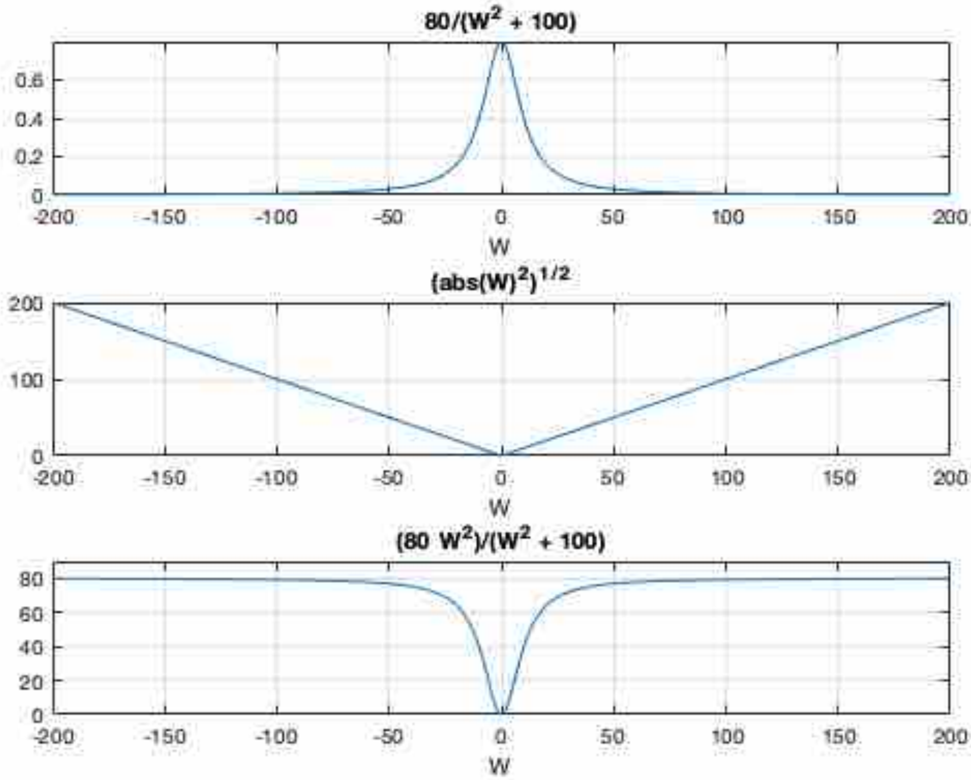
ΛΥΣΗ Ο μετασχηματισμός Fourier του συστήματος διαφόρισης είναι $H(\Omega) = j\Omega$.

Το φάσμα ισχύος της εξόδου $Y(t)$ δίνεται από τη σχέση

$$S_{YY}(\Omega) = |H(\Omega)|^2 S_{xx}(\Omega) = A^2 \frac{4\alpha\Omega^2}{\Omega^2 + (2\alpha)^2}$$

Η γραφική παράσταση του $S_{YY}(\Omega)$ δίνεται στο σχήμα που ακολουθεί.





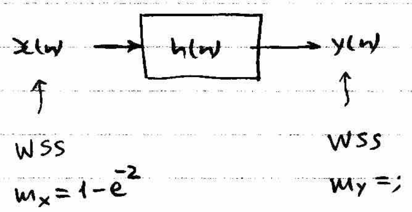

```
% Matlab code
% Power spectrum of the input X(t) and output Y(t) of a
% differentiator in which a zero-mean random telegraph signal
% is applied.

clear all
close all

syms W
A = 2;  % A = Amplitude
a = 5;  % a = zero-crossings per unit time

H(W)   = abs(sqrt(W*W));
Sxx(W) = (A*A*4*a) / (W*W+(2*a)*(2*a));
Syy(W) = (A*A*4*a*W*W) / (W*W+(2*a)*(2*a));

subplot(3,1,1); ezplot(Sxx(W), [-200,200,0,0.8]); grid on
subplot(3,1,2); ezplot(H(W),   [-200,200,0,200]); grid on
subplot(3,1,3); ezplot(Syy(W), [-200,200,0,90]); grid on
```

ΑΣΚΗΣΗ Τυχαίο WSS σήμα μέσης τιμής $1-e^{-2}$, εφαρμόζεται σε ΓΧΑ σύστημα του οποίου η κρουστική απόκριση είναι

$$h(n)=3\cdot e^{-2n}\,u(n).$$

Να υπολογιστεί η μέση τιμή της εξόδου.

ΛΥΣΗ



$$m_y = m_x \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) = m_x H(e^{j0})$$

Αλλά

$$H(e^{j\omega}) = F\{h(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)\, e^{-j\omega n} = 3\cdot \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2n} e^{-j\omega n} =$$

$$= 3\cdot \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(2+j\omega)n} = 3\cdot \frac{1}{1-e^{-(2+j\omega)}}$$

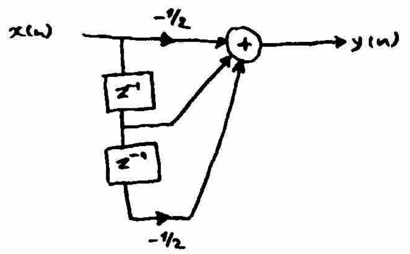
Για $\omega=0$ έχουμε

$$H(e^{j0}) = 3\cdot \frac{1}{1-e^{-2}}$$

Τελικά η μέση τιμή της εξόδου θα ισούται με:

$$m_y = m_x H(e^{j0}) = (1-e^{-2})\cdot \frac{3}{(1-e^{-2})} = 3$$

ΑΣΚΗΣΗ Στοχαστικό σήμα $\{X(n)\}$, που είναι στάσιμο με την ευρεία έννοια, και έχει μέση τιμή $E(X(n)) = 2$ και μέση τετραγωνική τιμή $E(|X(n)|^2) = 7$, εφαρμόζεται σε ΓΧΑ σύστημα διακριτού χρόνου, παράγοντας το στοχαστικό σήμα $\{Y(n)\}$. Η δομή πραγματοποίησης του συστήματος είναι αυτή του σχήματος. Να υπολογιστεί η μέση τιμή και η διασπορά του σήματος εξόδου.



ΛΥΣΗ Για το σήμα εισόδου έχουμε:

$$m_x = E(X(n)) = 2$$

$$\sigma_x^2 = E(|X(n)|^2) - m_x^2 = 7 - 2^2 = 3$$

Για το σύστημα έχουμε:

$$y(n) = -\frac{1}{2}x(n) + x(n-1) - \frac{1}{2}x(n-2)$$

$$\xrightarrow{Z} \quad Y(z) = -\frac{1}{2}X(z) + z^{-1}X(z) - \frac{1}{2}z^{-2}X(z) \Rightarrow \frac{Y(z)}{X(z)} = H(z) = -\frac{1}{2} + z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2}$$

Ο αντίστροφος ΜΖ της $H(z)$ μας δίνει την $h(n)$.

$$h(n) = -\frac{1}{2}\delta(n) + \delta(n-1) - \frac{1}{2}\delta(n-2) \Rightarrow h(n) = \{\underset{\substack{\uparrow \\ n=0}}{-\tfrac{1}{2}}, 1, -\tfrac{1}{2}\}$$

Για την έξοδο ισχύει:

$$m_y = m_x \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) = m_x\left[h(0) + h(1) + h(2)\right] = 2 \cdot \left[\left(-\frac{1}{2}\right) + 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)\right] = 0$$

$$\sigma_y^2 = \sigma_x^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)|^2 = 3\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2\right] = 3 \cdot \left(\frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{4}\right) = \frac{9}{2}$$