2023 - 2024

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ

3Η ΓΡΑΠΤΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΑΣΚΗΣΗ 3.1 Αναλογικό φίλτρο τύπου Butterworth.

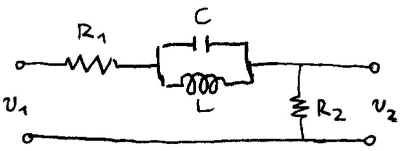
A. Να γράψετε το μέτρο της απόκρισης συχνότητας.

B. Να σχεδιάσετε στο ίδιο διάγραμμα τις κανονικοποιημένες (ως προς Ω_c) αποκρίσεις συχνότητας των φίλτρων 1ης, 2ης, 3ης, 5ης, 10ης τάξης.
Οι αποκρίσεις να καλύπτουν το (κανονικοποιημένο) εύρος συχνοτήτων από -4 έως 4.

Γ. Επαναλάβατε το B, εκφράζοντας την φορά αυτή το μέτρο σε dB.

ΑΣΚΗΣΗ 3.2 Δίνεται το παθητικό αναλογικό φίλτρο του σχήματος.

A. Να υπολογίσετε την απόκριση συχνότητας του φίλτρου.



B. Να σχεδιάσετε την απόκριση συχνότητας (μέτρο και φάση χωριστά)
(i) σε γραμμική κλίμακα και (ii) σε ημιλογαριθμική κλίμακα ως εξής:
ο κάθετος άξονας σε γραμμική κλίμακα, αλλά με τιμές εκφρασμένες σε dB,
και ο οριζόντιος άξονας (δηλ. ο άξονας συχνοτήτων) σε λογαριθμική κλίμακα
για τιμές $[0, 2\pi]$.

Δεδομένα: $R_1 = R_2 = 1/2\ \Omega$, $L = 1\ H$, $C = 2\ F$

ΑΣΚΗΣΗ 3.3 Το ΗΚΓ (ηλεκτροκαρδιογράφημα) ενός άρρενος υγιούς ατόμου, όπως αυτό καταγράφηκε στο Εργαστήριο, δίνεται στο αρχείο ECG-320Hz.txt του eClass. Πρόκειται για δεδομένα διάρκειας 2 sec με συχνότητα δειγματοληψίας 320 Hz.

A. Να διαβάσετε το διακριτό αυτό σήμα, έστω $x(n)$, και να το σχεδιάσετε (με την εντολή plot).

B. Να υπολογίσετε το φάσμα του για N=320 και να σχεδιάσετε (plot) τις πρώτες N/2 τιμές αυτού.

Γ. Δεδομένου ότι το εύρος των συχνοτήτων του χρήσιμου σήματος είναι μέχρι 40 Hz, οποιαδήποτε μεγαλύτερη συχνότητα είναι θόρυβος και πρέπει να αφαιρεθεί. Ποια η επικρατέστερη συχνότητα θορύβου, όπως προκύπτει από το φάσμα που σχεδιάσατε;

Δ. Με την γραφική ή γεωμετρική μέθοδο σχεδιάστε ένα FIR φίλτρο για την εξάλειψη της επικρατέστερης συχνότητας θορύβου. Με άλλα λόγια, τοποθετήστε ένα μηδενικό στην συχνότητα (γωνία) που θέλετε να εξαλείψετε.
Υπολογίστε την συνάρτηση μεταφοράς H(z) και από αυτήν την κρουστική απόκριση h(n) του φίλτρου που σχεδιάσατε.

Ε. Σχεδιάστε την κρουστική απόκριση $h(n)$ και το αντίστοιχο φάσμα της.

Στ. Υπολογίστε την έξοδο $y(n)$ του φίλτρου που σχεδιάσατε όταν σ'αυτό εφαρμοστεί το σήμα $x(n)$. Σχεδιάστε το σήμα $y(n)$ και το φάσμα του. Σχολιάστε τα αποτελέσματα.

Υπόδειξη: 1. Για την σχεδίαση των σημάτων και φασμάτων χρησιμοποιείστε την εντολή plot, εκτός της περίπτωσης της κρουστικής απόκρισης στην οποία θα χρησιμοποιήσετε την εντολή stem.

2. Για την καλύτερη παρουσίαση των γραφικών να τις διατάξετε όλες μαζί σε μια σελίδα (μέσω της subplot), ώστε να φαίνεται για κάθε περίπτωση το σήμα και το αντίστοιχο φάσμα του.

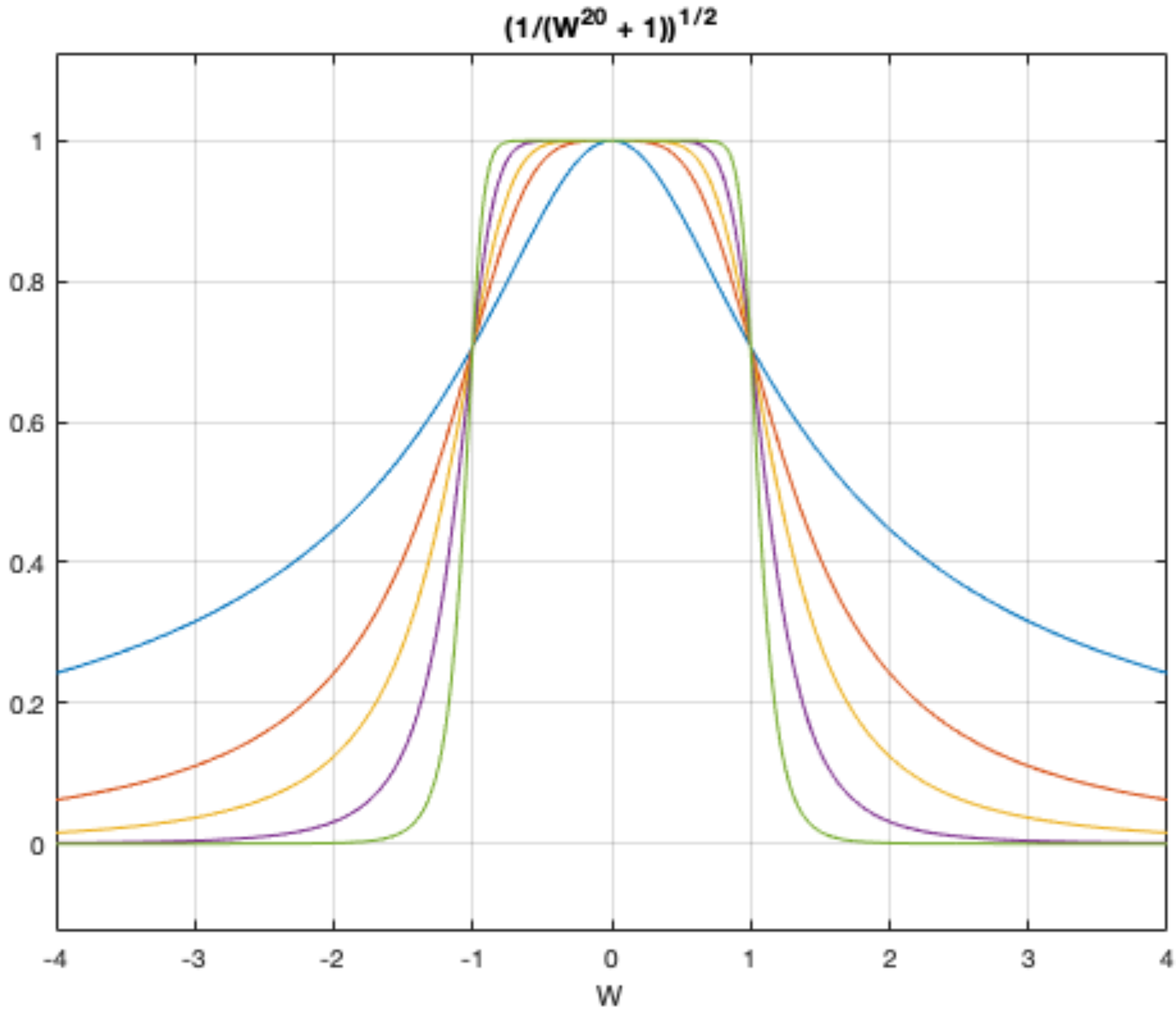
Σήμα	Φάσμα
$x(n)$	X
$h(n)$	H
$y(n)$	Y

- Προθεσμία υποβολής: Δευτέρα 18.12.2023 @ 24:00
- Η εργασία να είναι χειρόγραφη, εκτός του κώδικα και των σχημάτων.

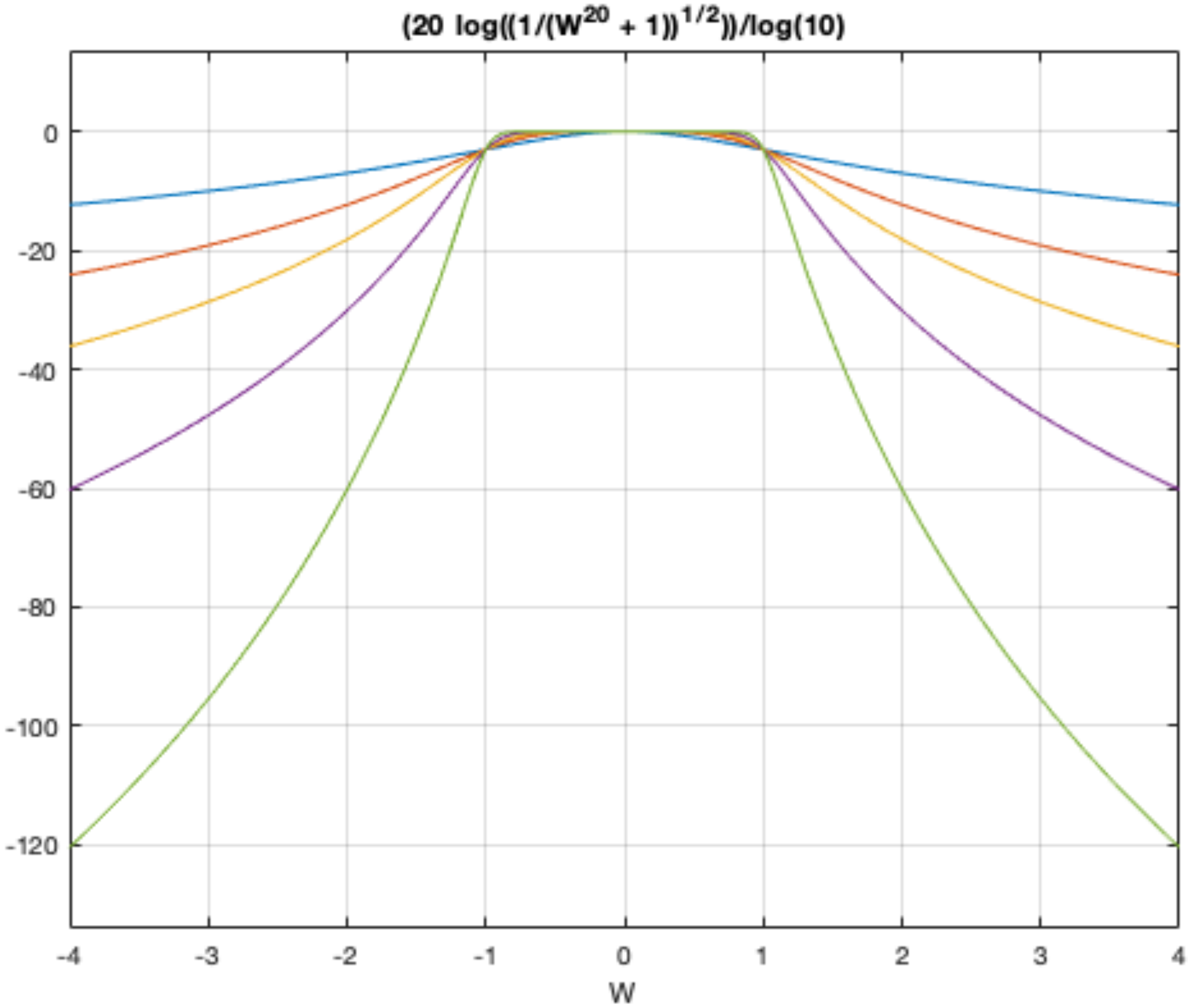
Α. Σκόδρας 12.12.2023

ΆΣΚΗΣΗ 3.1 Το μέτρο της απόκρισης συχνότητας ενός φίλτρου Butterworth N-τάξης δίνεται από τη σχέση $|H(\Omega)| = 1 / \sqrt{1 + (\Omega/\Omega_c)^{2N}}$.
Να σχεδιάσετε (στο ίδιο διάγραμμα) τις κανονικοποιημένες αποκρίσεις συχνότητας των φίλτρων τάξης $N = 1, 2, 3, 5, 10$. Επαναλάβατε τη σχεδίαση εκφράζοντας το μέτρο σε dB.

Λύση Στον οριζόντιο άξονα έχουμε την κανονικοποιημένη συχνότητα W = Ω / Ωc



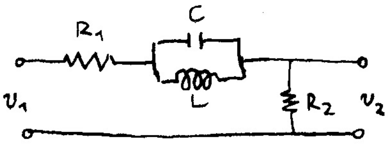
Απόκριση συχνότητας σε dB (κάθετος άξονας): $20 \log_{10} (|H(\Omega)|) = 20 \log(|H(\Omega)|) / \log(10)$



```
% ===========================================

% Frequency response of Butterworth filters

clear all
close all

syms W

N = 1; % Filter order

H(W) = sqrt(1/(1+W^(2*N)));
ezplot(H(W), [-4,4,]); grid on

hold on

N = 2; % Filter order

H(W) = sqrt(1/(1+W^(2*N)));
ezplot(H(W), [-4,4,]); grid on

hold on

N = 3; % Filter order

H(W) = sqrt(1/(1+W^(2*N)));
ezplot(H(W), [-4,4,]); grid on

hold on
N = 5; % Filter order

H(W) = sqrt(1/(1+W^(2*N)));
ezplot(H(W), [-4,4,]); grid on

hold on
N = 10; % Filter order

H(W) = sqrt(1/(1+W^(2*N)));
ezplot(H(W), [-4,4,]); grid on


% ===========================================


% Same plots in dB

clear all
close all

syms W

N = 1; % Filter order

H(W) = sqrt(1/(1+W^(2*N)));
```

```
ezplot(20*log10(H(W)), [-4,4,]); grid on

hold on

N = 2; % Filter order

H(W) = sqrt(1/(1+W^(2*N)));
ezplot(20*log10(H(W)), [-4,4,]); grid on

hold on

N = 3; % Filter order

H(W) = sqrt(1/(1+W^(2*N)));
ezplot(20*log10(H(W)), [-4,4,]); grid on

hold on
N = 5; % Filter order

H(W) = sqrt(1/(1+W^(2*N)));
ezplot(20*log10(H(W)), [-4,4,]); grid on

hold on
N = 10; % Filter order

H(W) = sqrt(1/(1+W^(2*N)));
ezplot(20*log10(H(W)), [-4,4,]); grid on

% ===========================================
```

ΑΣΚΗΣΗ 3.2 Δίνεται το παθητικό αναλογικό φίλτρο του σχήματος.

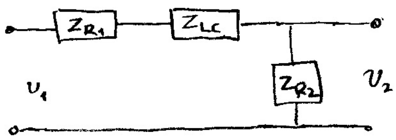


Α. Να υπολογίσετε την απόκριση συχνότητας και την/τις συχνότητα/τες αποκοπής.

Β. Να σχεδιάσετε την απόκριση συχνότητας (μέτρο και φάση χωριστά) (i) σε γραμμική κλίμακα και (ii) σε ημιλογαριθμική κλίμακα ως εξής: ο κάθετος άξονας σε γραμμική κλίμακα, αλλά με τιμές εκφρασμένες σε dB, και ο οριζόντιος άξονας (δηλ. ο άξονας συχνοτήτων) σε λογαριθμική κλίμακα. για τιμές $[0, 2\pi]$.

Δεδομένα: $R_1 = R_2 = 1/2\,\Omega$, $L = 1\,H$, $C = 2\,F$

ΛΥΣΗ



Οι σύνθετες αντιστάσεις των L και C είναι αντίστοιχα $Z_L = Ls$ και $Z_C = 1/Cs$, οπότε η παράλληλη σύνδεσή τους θα ισούται με

$$Z_{LC} = Z_L \| Z_C = \frac{Z_L Z_C}{Z_L + Z_C} = \frac{Ls\frac{1}{Cs}}{Ls + \frac{1}{Cs}} = \frac{Ls}{LCs^2 + 1} \qquad (1)$$

Δουλεύοντας στον χώρο Laplace

$$V_2(s) = \frac{Z_{R2}}{Z_{R_1} + Z_{LC} + Z_{R2}} V_1(s) \Rightarrow$$

$$H(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{Z_{R2}}{Z_{R_1} + Z_{R_2} + Z_{LC}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2 + \frac{Ls}{LCs^2 + 1}} \Rightarrow$$

$$H(s) = \frac{R_2(LCs^2 + 1)}{(R_1 + R_2)(LCs^2 + 1) + Ls} \qquad (2)$$

Η απόκριση συχνότητας προκύπτει για $s = j\Omega$, δηλαδή

$$H(\Omega) = \frac{R_2(-LC\Omega^2 + 1)}{(R_1 + R_2)(-LC\Omega^2 + 1) + jL\Omega} \qquad (3)$$

Μέτρο:

$$|H(\Omega)| = \frac{|R_2(1 - LC\Omega^2)|}{\sqrt{(R_1 + R_2)^2(1 - LC\Omega^2)^2 + L^2\Omega^2}} \qquad (4)$$

Φάση:

$$\angle H(\Omega) = \underbrace{0}_{\text{για θετικό}} \text{ ή } \underbrace{\pi}_{\text{για αρνητικό}} - \tan^{-1}\left(\frac{L\Omega}{(R_1 + R_2)(1 - LC\Omega^2)}\right) \qquad (5)$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των στοιχείων R, L, C έχουμε:

$$H(s) = \frac{s^2 + 1/2}{2s^2 + s + 1} \quad (6)$$

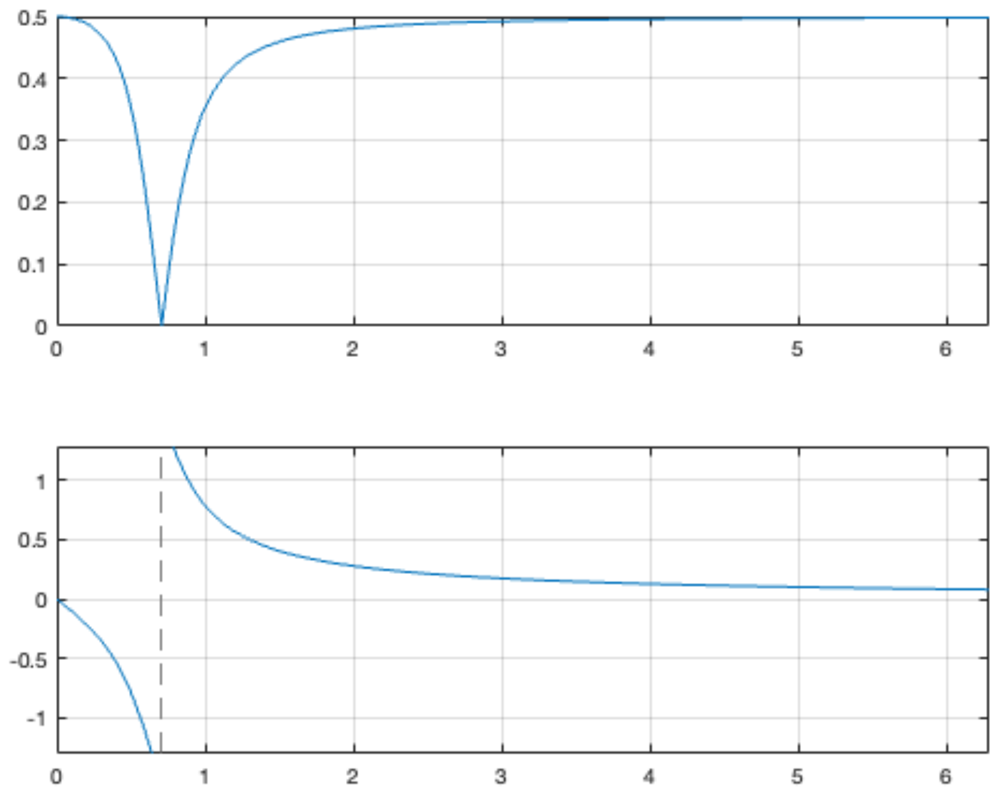
$$H(\Omega) = \frac{1/2 - \Omega^2}{(1 - 2\Omega^2) + j\Omega} \quad (7)$$

$$|H(\Omega)| = \frac{|1/2 - \Omega^2|}{\sqrt{(1 - 2\Omega^2)^2 + \Omega^2}} \quad (8)$$

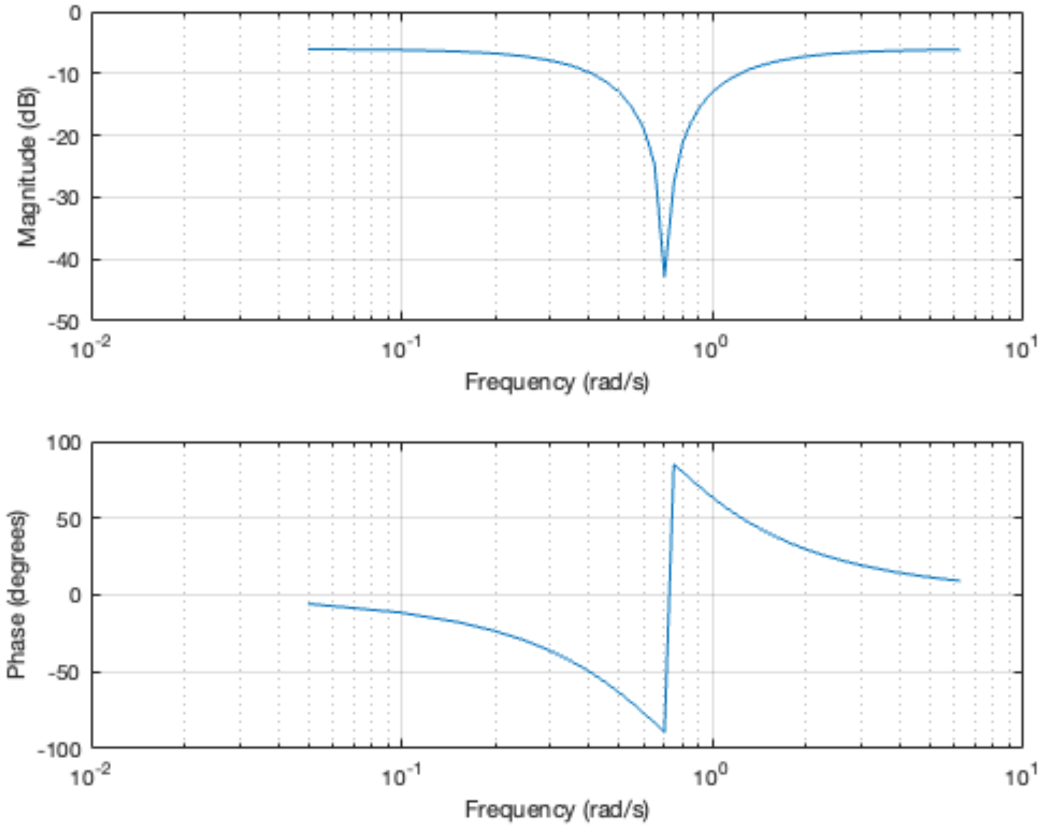
$$\angle H(\Omega) = 0 \text{ ή } \pi - \tan^{-1}\left(\frac{\Omega}{1 - 2\Omega^2}\right) \quad (9)$$

Η απόκριση συχνότητας του συγκεκριμένου φίλτρου φαίνεται στις επόμενες σελίδες.

ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ (ΜΕΤΡΟ & ΦΑΣΗ)



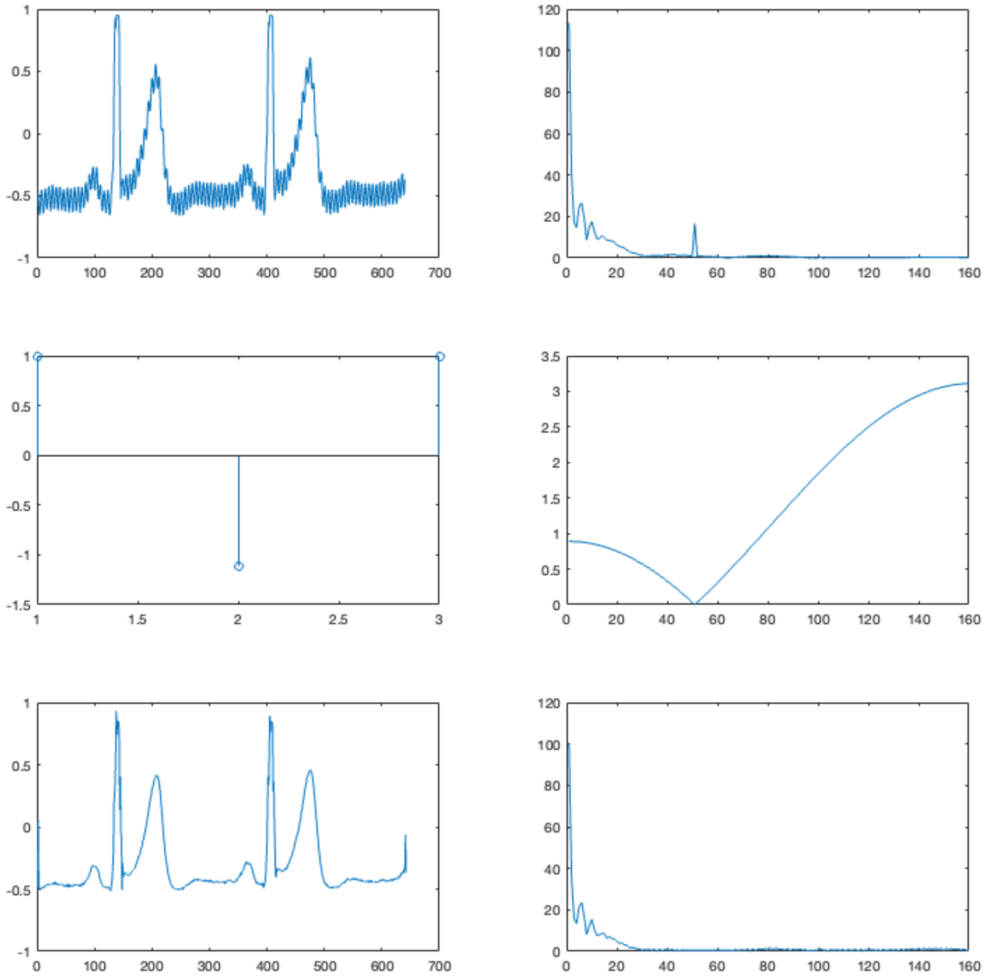

```
% Matlab code A

lc
clear all
close all

Hmag = @(W) abs(0.5 - W*W) / sqrt((1-2*W*W) * (1-2*W*W) + W*W);
Hpha = @(W) atan2(0,(1-2*W*W)/2)-atan2(W,(1-2*W*W));
% Προσέξτε ότι χρησιμοποιείται η συνάρτηση atan2(Y,X)

subplot(2,1,1); fplot(Hmag,[0 2*pi]); grid on
subplot(2,1,2); fplot(Hpha,[0 2*pi]); grid on
--------------------------------------------------------------
```




```
% Matlab code B (Response in dB and logarithmic scale)

clc
clear all
close all

b = [1 0 0.5];
a = [2 2 1];

W = 0: 0.05: 2*pi;

H = freqs(b,a,W);

Hmag = abs(H);
Hphase = angle(H);
Hphasedeg = Hphase*180/pi;

subplot(2,1,1); semilogx(W,db(Hmag)); grid on
xlabel('Frequency (rad/s)')
ylabel('Magnitude (dB)')

subplot(2,1,2); semilogx(W,Hphasedeg); grid on
xlabel('Frequency (rad/s)')
ylabel('Phase (degrees)')
```

ΑΣΚΗΣΗ 3.3

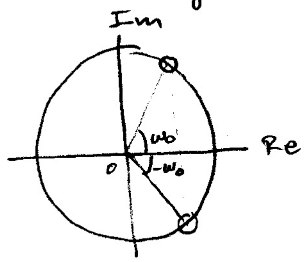
```
% Read signal data from .txt file
fileID = fopen('ECG-320Hz.txt','r');
formatSpec = '%f';
x = fscanf(fileID,formatSpec);
fclose(fileID);

X=fft(x,320);

% ---------------------------------------------------------
% Zero placing at ω0=0.982 rad, i.e. F0=50Hz and Fs=320Hz
% ---------------------------------------------------------

w0 = 0.982;
h=[1 -2*cos(w0) 1];
H=fft(h,320);

y=conv(x,h);

Y=fft(y,320);

subplot(3,2,1), plot(x)
subplot(3,2,2), plot(abs(X(1:160)))
subplot(3,2,3), stem(h)
subplot(3,2,4), plot(abs(H(1:160)))
subplot(3,2,5), plot(y)
subplot(3,2,6), plot(abs(Y(1:160)))
```


1
0.5
0
-0.5
-1
0 100 200 300 400 500 600 700
120
100
80
60
40
20
0
0 20 40 60 80 100 120 140 160
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
1 1.5 2 2.5 3
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
0 20 40 60 80 100 120 140 160
1
0.5
0
-0.5
-1
0 100 200 300 400 500 600 700
120
100
80
60
40
20
0
0 20 40 60 80 100 120 140 160

Η επικρατέστερη συχνότητα, όπως αυτή προκύπτει από το φάσμα του σήματος $x(n)$, είναι 50Hz. Η ψηφιακή γωνιακή ταχύτητα ω_0 που αντιστοιχεί στην συχνότητα αυτή, δηλ. στη συχνότητα $F_0 = 50Hz$, υπολογίζεται από την σχέση:

$$\omega_0 = \Omega_0 T = 2\pi F_0 \cdot \frac{1}{F_s} = 2\pi \frac{F_0}{F_s} = 2\pi \frac{50}{320} \simeq 0.982 \text{ rad} \simeq 56{,}26^\circ$$

Άρα, πάνω στον μοναδιαίο κύκλο του επιπέδου-z θα τοποθετήσουμε ένα μηδενικό στη γωνία ω_0. Επίσης θα χρειαστεί να τοποθετήσουμε το συζυγές μηδενικό αυτού στη γωνία $-\omega_0$, ώστε οι συντελεστές της συνάρτησης να είναι πραγματικοί αριθμοί.



Κατά συνέπεια ο αριθμητής $N(z)$ της συνάρτησης μεταφοράς του συστήματος $H(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$ θα ισούται με:

$$\begin{aligned} N(z) &= (z - e^{-j\omega_0})(z - e^{j\omega_0}) = \\ &= z^2 - z e^{j\omega_0} - z e^{-j\omega_0} + e^{-j\omega_0} e^{j\omega_0} = \\ &= z^2 - z(e^{j\omega_0} + e^{-j\omega_0}) + e^0 = \\ &= z^2 - 2z\cos\omega_0 + 1 \end{aligned}$$

Ο παρονομαστής $D(z)$ της συνάρτησης μεταφοράς $H(z)$ θα πρέπει να ισούται με z^2, δηλ. $D(z) = z^2$ ή διπλός πόλος στο 0 (μηδέν), ώστε τελικά το σύστημα να μην έχει όρους με θετικές δυνάμεις του z, αφού το σύστημα δεν μπορεί να προβλέπει.

Τελικά, $$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{z^2 - 2z\cos\omega_0 + 1}{z^2} = 1 - 2\cos\omega_0\, z^{-1} + z^{-2}$$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Z μας δίνει την κρουστική απόκριση $h(n)$ του συστήματος:

$$h(n) = Z^{-1}\{H(z)\} = \delta(n) - 2\cos\omega_0\,\delta(n-1) + \delta(n-2)$$

ή $h(n) = \{1, \ -2\cos\omega_0, \ 1\}$ όπου $\omega_0 = 0.982$ και $\cos\omega_0 = 0.555$

<u>Σημείωση:</u> Από την $H(z) = 1 - 2\cos\omega_0 z^{-1} + z^{-2}$ θα μπορούσαμε εύκολα να υπολογίσουμε την εξίσωση διαφορών του συστήματος, ως εξής:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = 1 - 2\cos\omega_0 z^{-1} + z^{-2} \Rightarrow Y(z) = X(z) - 2\cos\omega_0 z^{-1} X(z) + z^{-2} X(z)$$

$$\Big\downarrow Z^{-1}$$

FIR (μη επαναληπτικό φίλτρο) $\rightarrow$ $y(n) = x(n) - 2\cos\omega_0\, x(n-1) + x(n-2)$